

La matière topologique et son exploration avec les gaz quantiques

Topologie à une dimension : du modèle SSH aux modes de Majorana

http://www.phys.ens.fr/~dalibard/2018_CdF.html

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

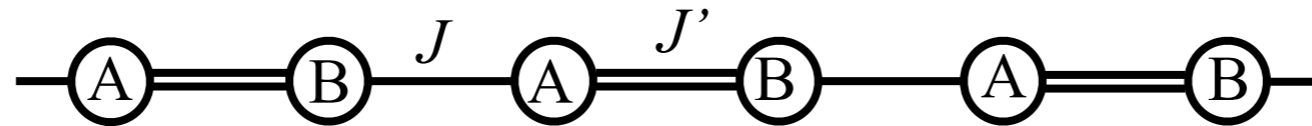
Année 2017-18



COLLÈGE
DE FRANCE
— 1530 —

Buts de ce cours

Explorer sur l'exemple simple du modèle SSH le lien entre la topologie d'une bande d'énergie et l'existence d'états de bord



Décrire un premier exemple d'application en photonique

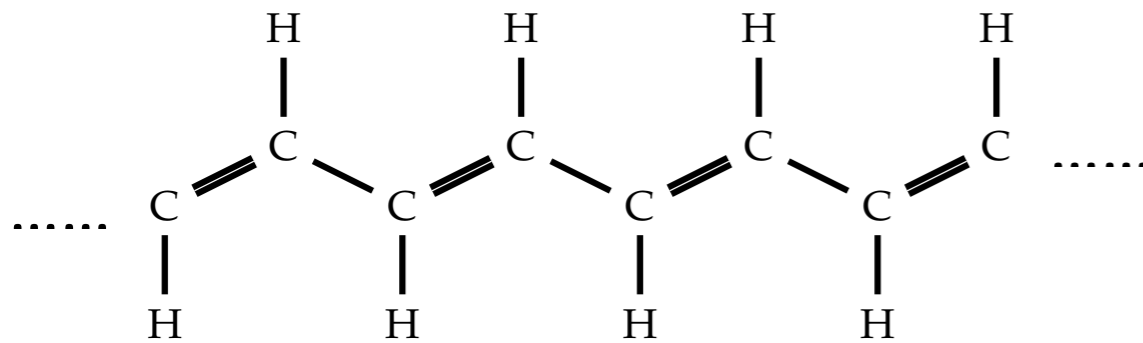
Laser topologique

Présenter un système formellement analogue dans un matériau supraconducteur

Modèle de Kitaev et modes de Majorana

Rappel du cours précédent

Su, Schrieffer & Heeger, *Solitons in Polyacetylene*, Phys. Rev. Lett. 42, 1698 (1979)



sauts entre proches voisins

Cellule unité à deux sites : on cherche les états propres de l'hamiltonien sous la forme de fonctions de Bloch de moment q , énergie E_q

$$|\psi_q\rangle = \sum_j e^{ijqa} (\alpha_q |A_j\rangle + \beta_q |B_j\rangle) \quad |u_q\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_q \\ \beta_q \end{pmatrix}$$

Les coefficients α_q, β_q correspondent à un pseudo-spin 1/2 et sont déterminés par :

$$\hat{H}_q \begin{pmatrix} \alpha_q \\ \beta_q \end{pmatrix} = E_q \begin{pmatrix} \alpha_q \\ \beta_q \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \hat{H}_q = - \begin{pmatrix} 0 & J' + J e^{-iqa} \\ J' + J e^{iqa} & 0 \end{pmatrix}$$

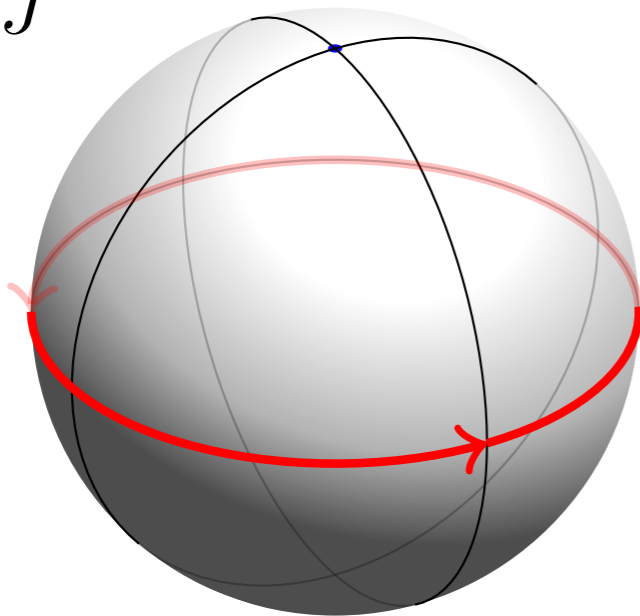
Les états propres du modèle SSH

$$\hat{H}_q = - \begin{pmatrix} 0 & J' + J e^{-iqa} \\ J' + J e^{iqa} & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{h}(q) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad \mathbf{h}(q) = \begin{pmatrix} J' + J \cos(qa) \\ J \sin(qa) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cellule unité à deux sites : deux états propres $|u_q^{(\pm)}\rangle$ pour chaque valeur de q dans la zone de Brillouin $-\pi/a \leq q < \pi/a$ et deux bandes d'énergie

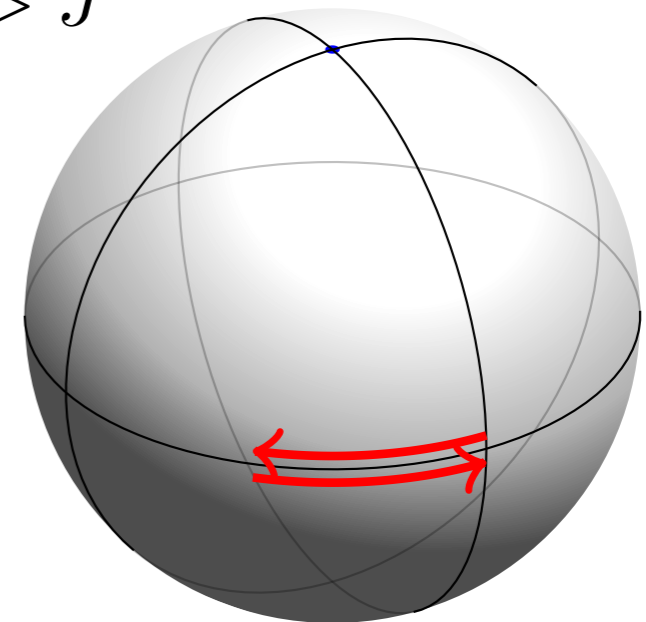
$$E_q^{(\pm)} = \pm |J' + J e^{iqa}| \quad |u_q^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp e^{i\phi_q} \end{pmatrix} \quad e^{i\phi_q} = \frac{J' + J e^{iqa}}{|J' + J e^{iqa}|}$$

$J' < J$



cas « topologique »

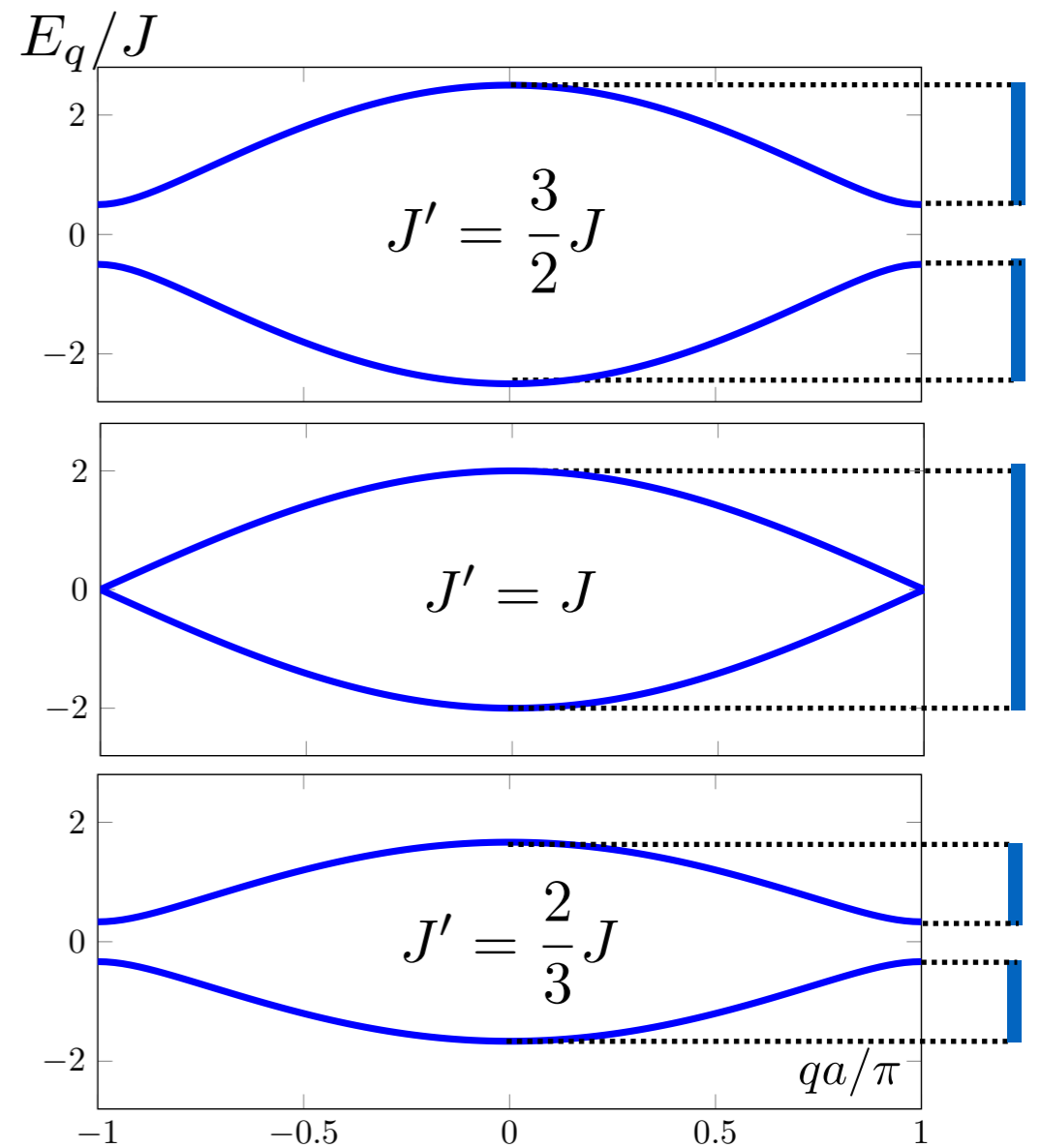
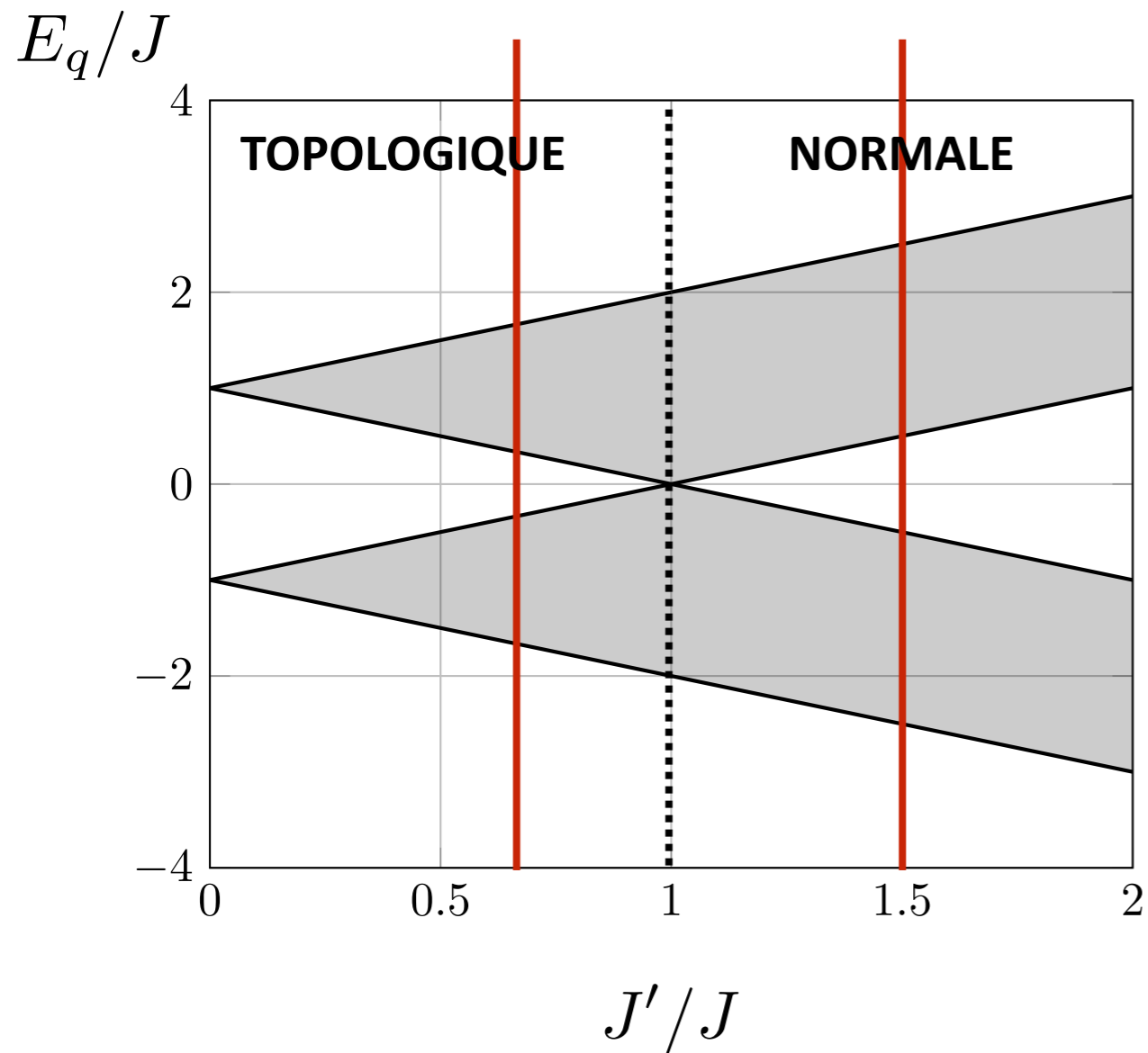
$J' > J$



cas « normal »

Les bandes d'énergie du modèle SSH

$$\hat{H}_q = - \begin{pmatrix} 0 & J' + J e^{-iqa} \\ J' + J e^{iqa} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow E_q^{(\pm)} = \pm |J' + J e^{iqa}|$$



1.

Etats de bord de la chaîne SSH

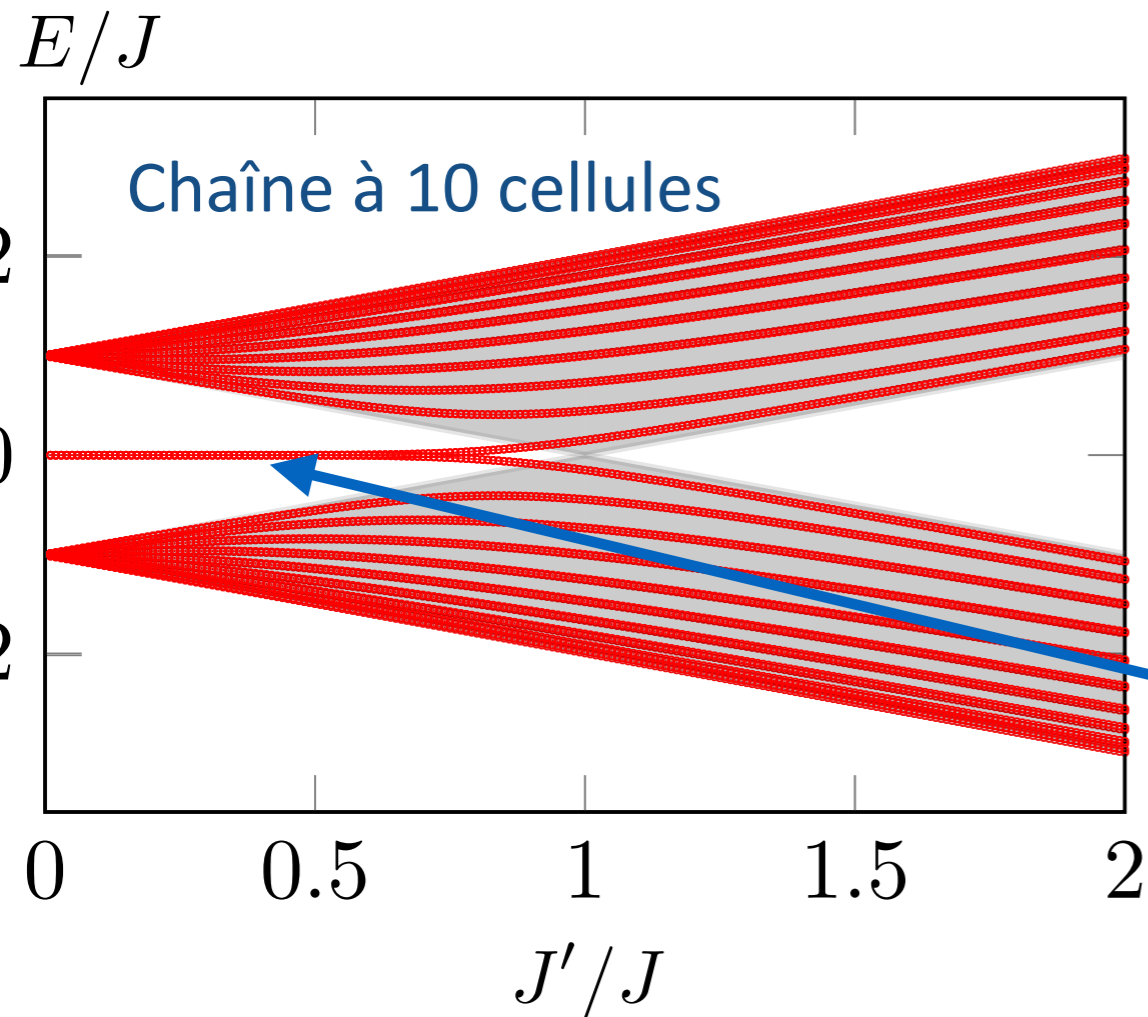
La correspondance « coeur — bord » (*bulk — edge*)

Chaîne finie, puis semi-infinie

La chaîne SSH finie



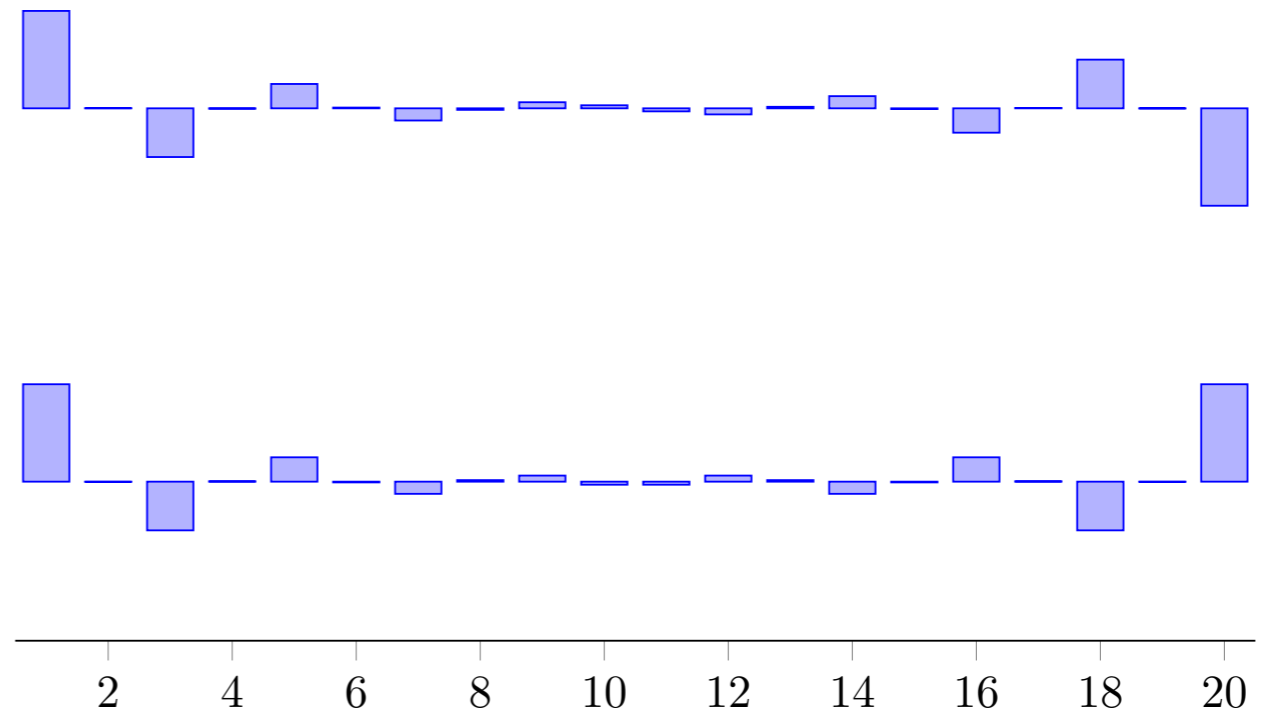
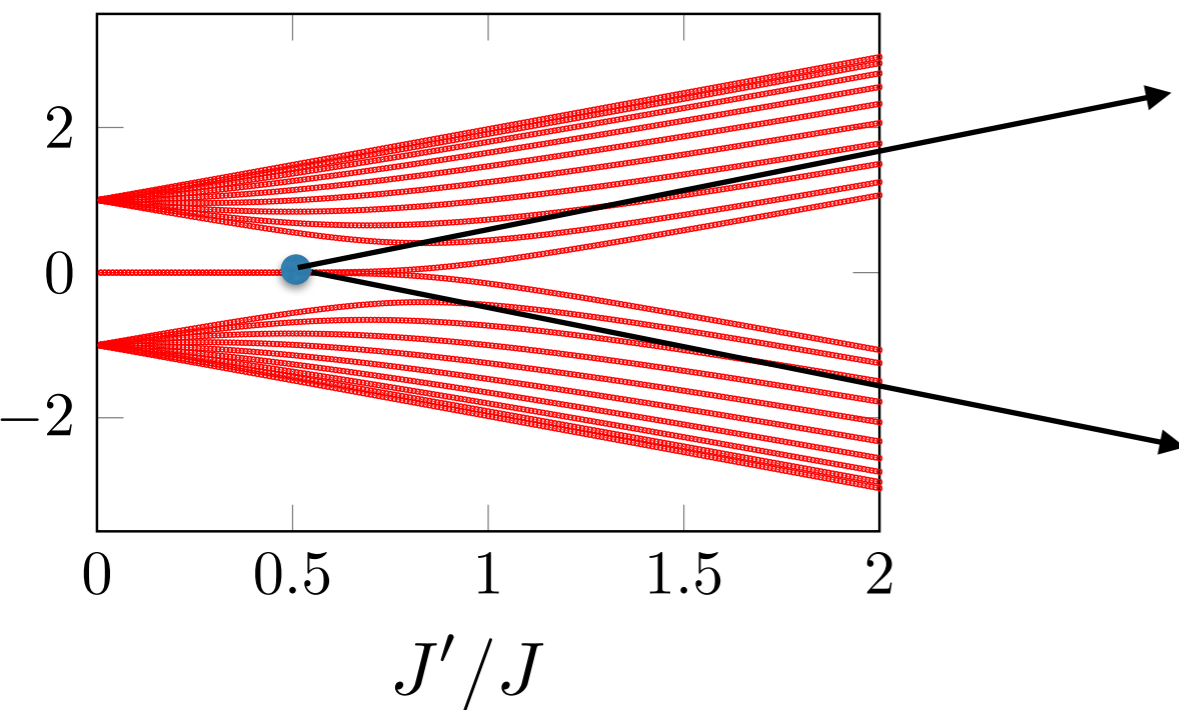
Recherche numérique des états propres (plus de théorème de Bloch !)



- On retrouve les bandes de la chaîne infinie
- On trouve un spectre symétrique par rapport à $E = 0$
- Dans la zone « topologique » $J' < J$, on voit apparaître des états d'énergie quasi-nulle (et localisés en bout de chaîne)

Etats de bord de la chaîne SSH finie (20 sites = 10 cellules)

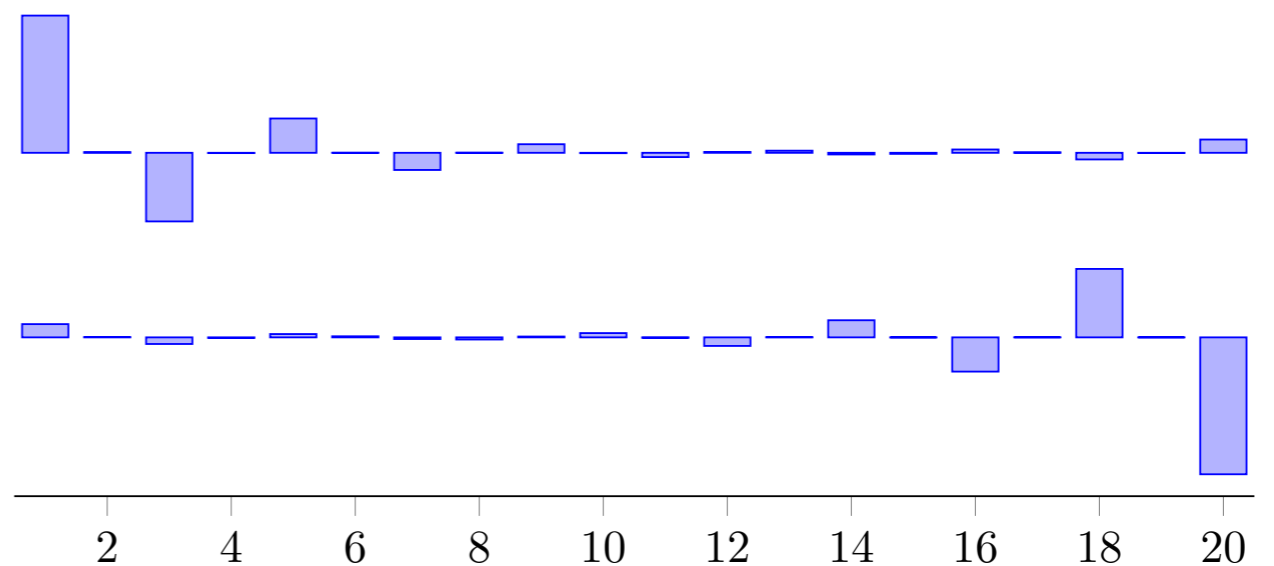
E/J



Distribution de probabilité symétrique, du fait de la symétrie de la chaîne elle-même

Mais cette symétrie est fragile !

Réponse à un décalage en énergie de $J/100$ du site A_1

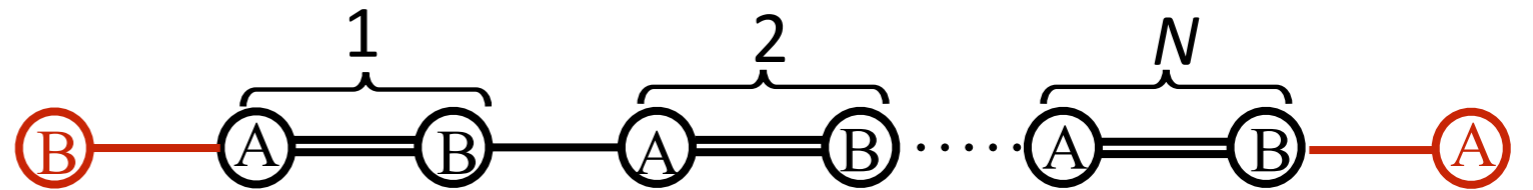


Etats de bord et enroulement de phase

Recherche des états propres de la chaîne finie sous forme d'ondes stationnaires

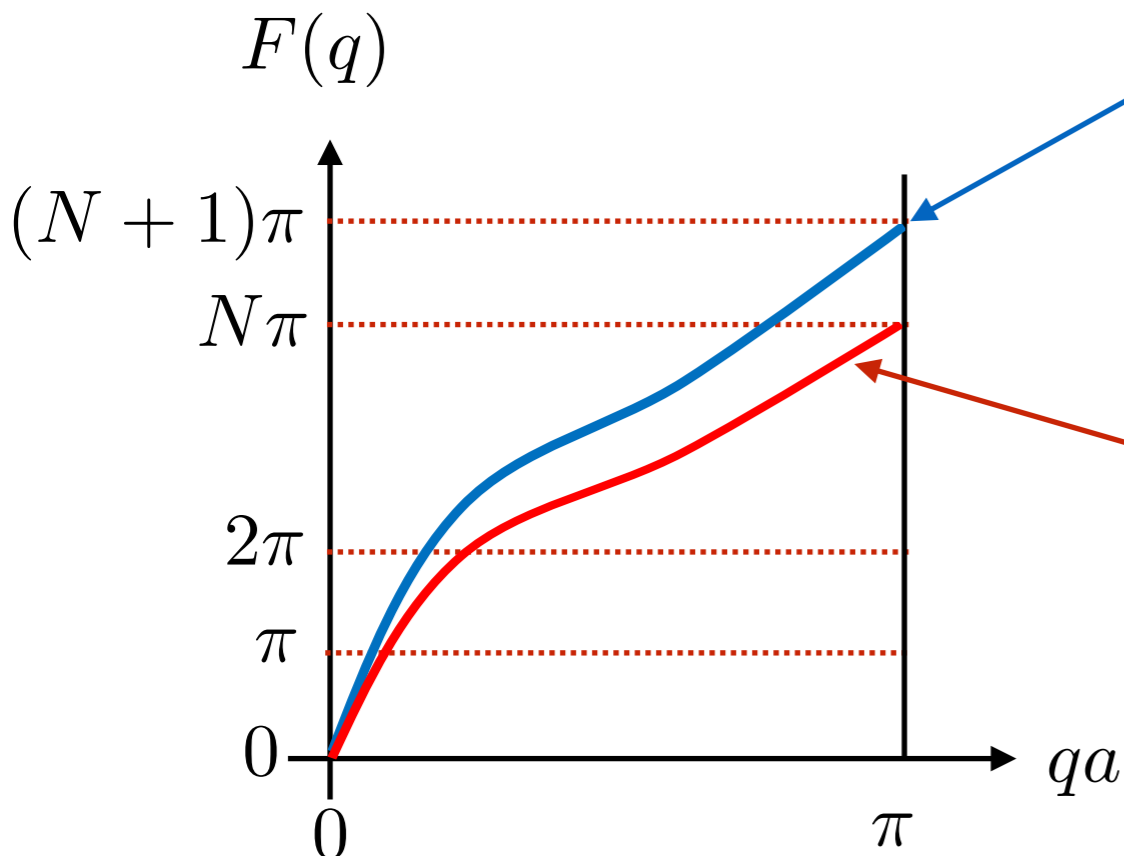
$$\alpha|\psi_q^{(-)}\rangle + \beta|\psi_{-q}^{(-)}\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\phi_q} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\phi_q} \end{pmatrix}$$



Conditions aux limites : annulation sur le site B_0 et A_{N+1}

$$q \geq 0 \quad F(q) \equiv (N + 1)qa - \phi_q = 0 \text{ modulo } \pi$$



Cas normal (pas d'enroulement)

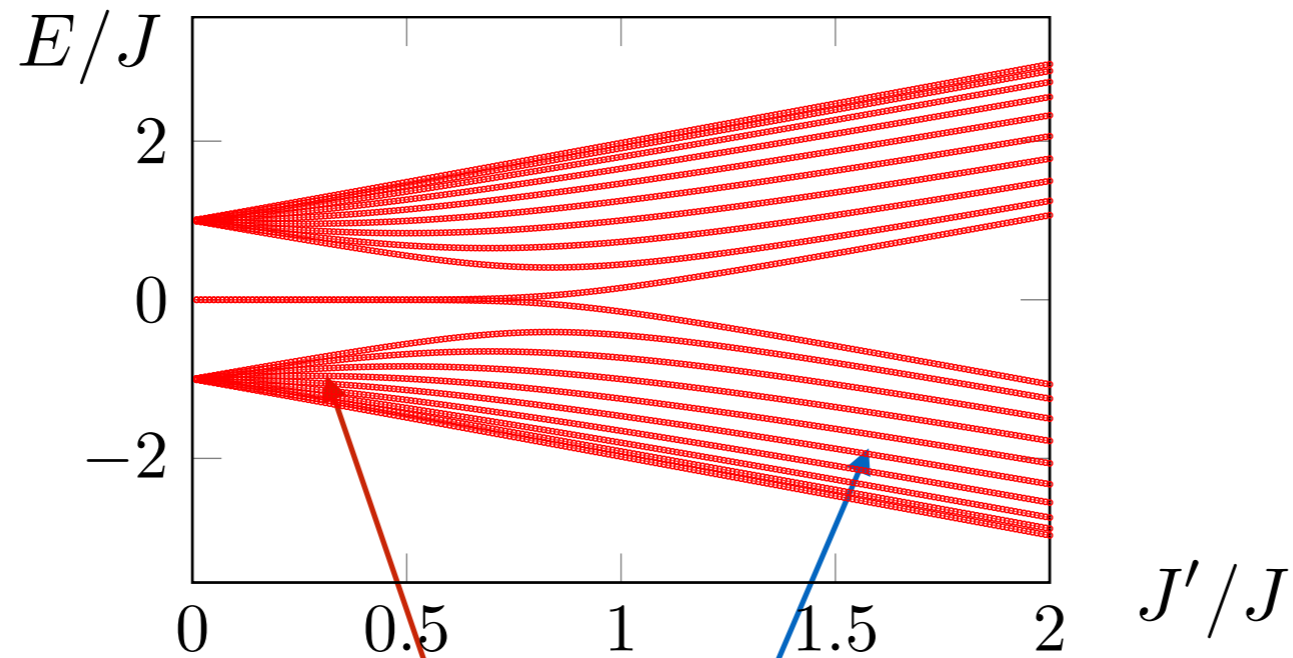
$\phi_q = 0$ pour $qa = 0$ et $qa = \pi$
 N solutions : il ne manque pas d'états

Cas topologique (enroulement de phase)

$\phi_q = 0$ pour $qa = 0$
 $\phi_q = \pi$ pour $qa = \pi$

$N-1$ solutions : il manque un état !

Etats de bord et enroulement de phase



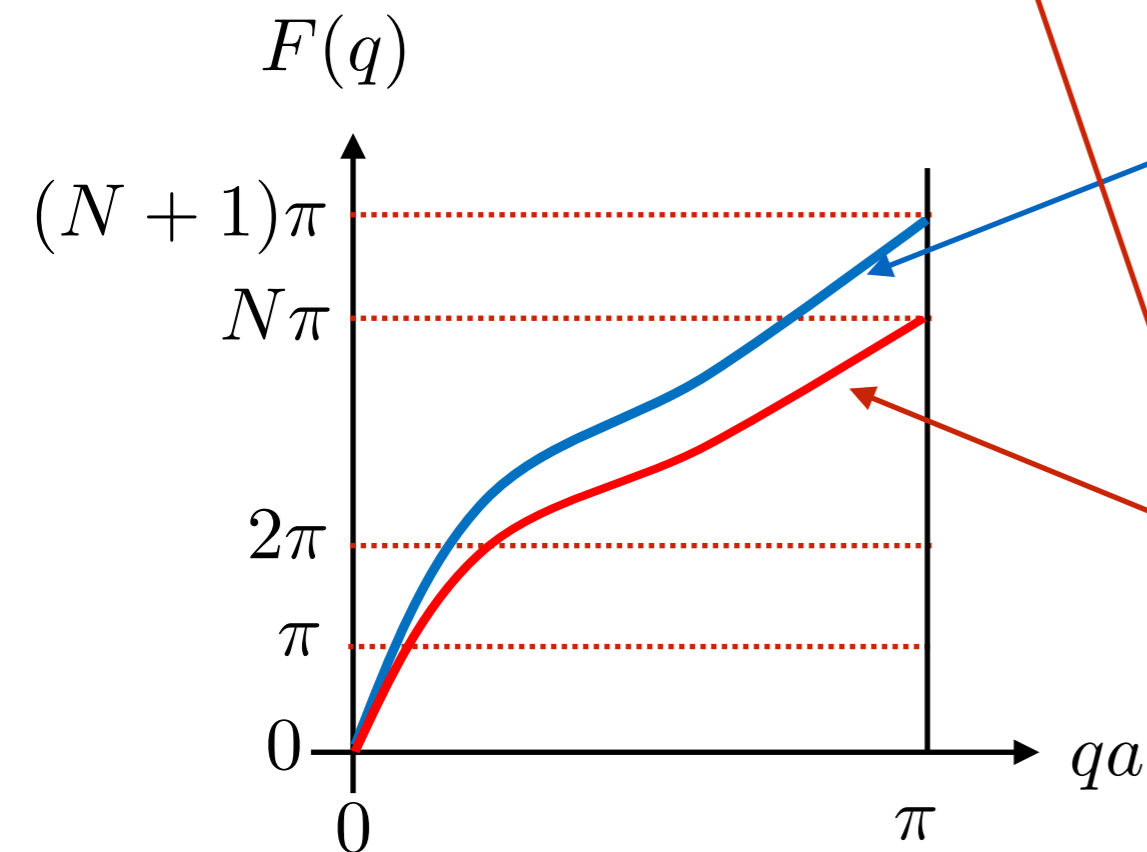
Cas normal (pas d'enroulement)

$\phi_q = 0$ pour $qa = 0$ et $qa = \pi$
 N solutions : il ne manque pas d'états

Cas topologique (enroulement de phase)

$\phi_q = 0$ pour $qa = 0$
 $\phi_q = \pi$ pour $qa = \pi$

$N-1$ solutions : il manque un état !



La symétrie du spectre $E \leftrightarrow -E$

Symétrie de sous-réseau (ou *symétrie chirale*) décrite par l'opérateur unitaire

$$\hat{S} = \hat{P}_A - \hat{P}_B \quad \hat{P}_A, \hat{P}_B : \text{projecteurs sur les sous-réseaux } A, B$$

L'absence de couplages de type $A - A$ ou $B - B$ se traduit par

$$\hat{P}_A \hat{H} \hat{P}_A = 0 \quad \hat{P}_B \hat{H} \hat{P}_B = 0$$

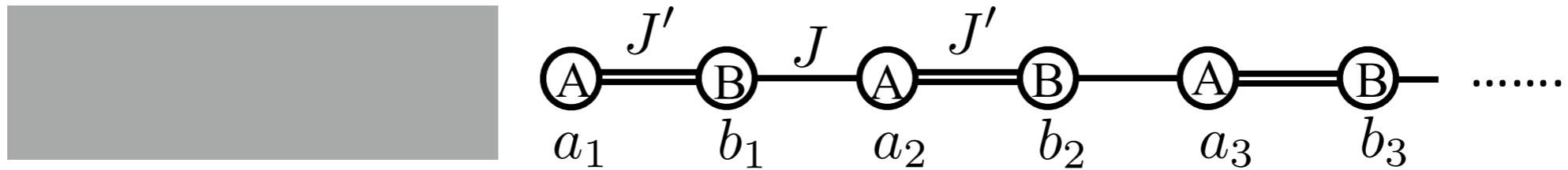
ce qui entraîne $\hat{H} \hat{S} = -\hat{S} \hat{H}$ **Relation d'anti-commutation !**

Si $|\psi\rangle$ est état propre de \hat{H} avec la valeur propre E ,
alors $\hat{S}|\psi\rangle$ est état propre avec la valeur propre $-E$

$$\hat{H} \left(\hat{S} |\psi\rangle \right) = -\hat{S} \left(\hat{H} |\psi\rangle \right) = -E \left(\hat{S} |\psi\rangle \right)$$

explique la symétrie observée

La chaîne semi-infinie



Recherche des états propres : on s'attend à un spectre redonnant les bandes de la chaîne infinie + un état de bord possible

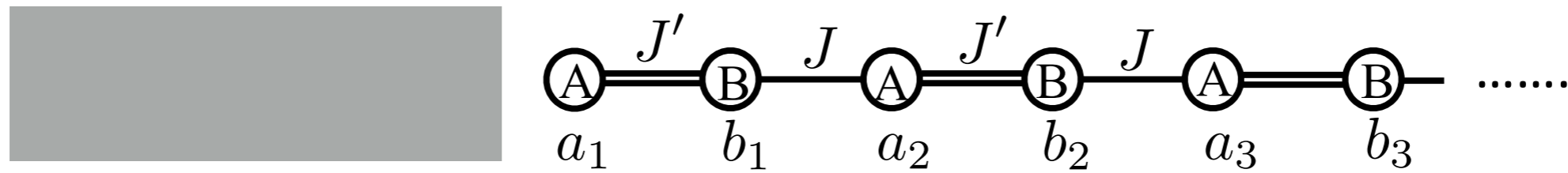
$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} (a_j |A_j\rangle + b_j |B_j\rangle) \quad \text{insérée dans} \quad \hat{H}|\psi\rangle = E |\psi\rangle$$

$$\begin{aligned} -J'b_1 &= E a_1 & -J'b_j - Jb_{j-1} &= E a_j \\ -J'a_1 - Ja_2 &= E b_1 & -J'a_j - Ja_{j+1} &= E b_j \end{aligned} \quad j \geq 2$$

Résolution par une matrice de transfert :

$$\begin{pmatrix} a_{j+1} \\ b_{j+1} \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} \quad \hat{M} : \text{matrice réelle de déterminant 1}$$

L'état de bord pour la chaîne semi-infinie



$$\begin{aligned} -J' b_1 &= E a_1 \\ -J' a_1 - J a_2 &= E b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -J' b_j - J b_{j-1} &= E a_j \\ -J' a_j - J a_{j+1} &= E b_j \end{aligned}$$

S'il n'y a qu'un seul état de bord, la symétrie du spectre impose qu'il soit à $E = 0$

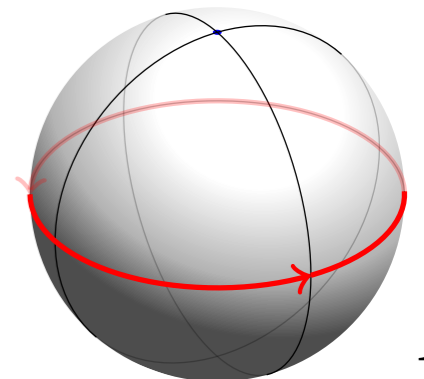
Injectons $E = 0$ dans ces équations :

$$\longrightarrow b_1 = 0 \text{ puis par récurrence } b_j = 0 \quad \forall j$$

$$\longrightarrow a_{j+1} = -\frac{J'}{J} a_j \text{ puis par récurrence } a_j \propto \left(-\frac{J'}{J}\right)^j$$

Résultat physique acceptable si et seulement si $J' < J$:

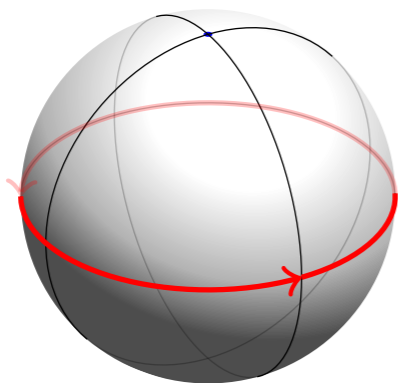
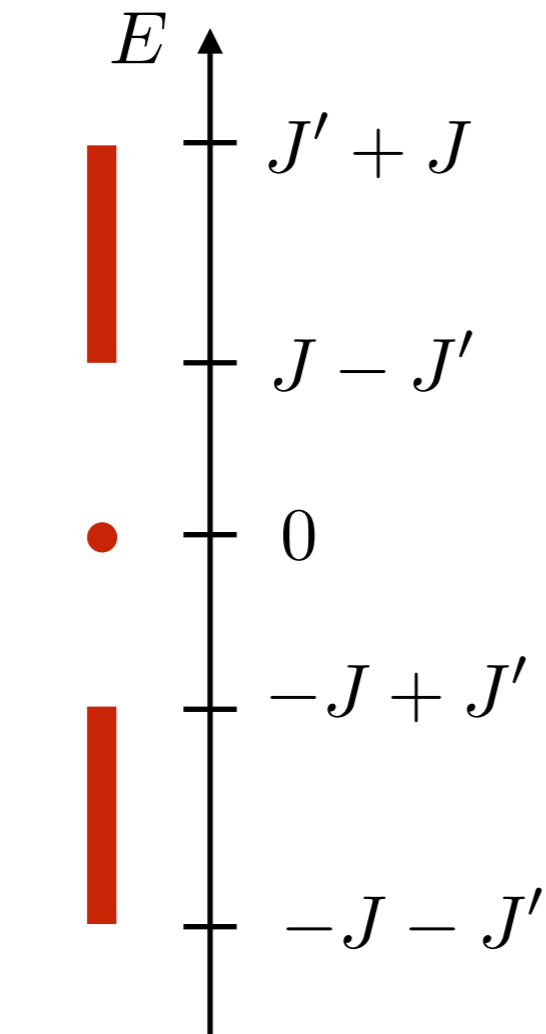
« région topologique »



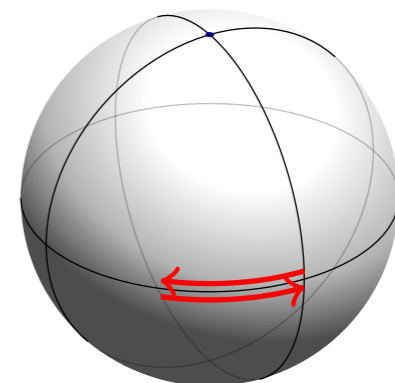
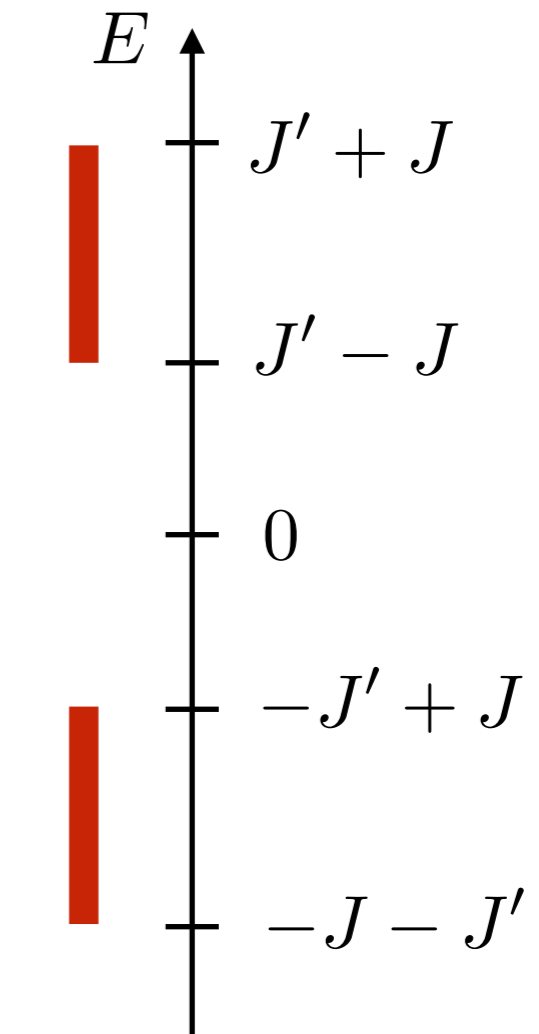
Spectre de la chaîne semi-infinie

Cas topologique $J' < J$

état de bord



Cas normal $J' > J$



Jonctions entre deux chaînes semi-infinies

La chaîne semi-infinie peut être vue comme une fraction d'une chaîne infinie :



à gauche : $J = 0 < J'$
chaîne normale

à droite : $J < J'$ ou $J > J'$
normale ou topologique

On peut montrer dans le cadre du modèle SSH (voir notes de cours) que l'état de bord apparaît quand on connecte deux chaînes de nature différente :



et il subsiste même si la jonction est douce (J et J' varient lentement dans l'espace)

En revanche, il n'y a pas d'état de bord pour une jonction *Normale-Normale* ou pour une jonction *Topologique-Topologique* dans le cadre de ce modèle

2.

Le modèle SSH implémenté en photonique

P. ST-JEAN, V. GOBLOT, E. GALOPIN, A. LEMAÎTRE, T. OZAWA,
L. LE GRATIET, I. SAGNES, J. BLOCH & A. AMO
Lasing in topological edge states of a one-dimensional lattice
Nature Photonics **11**, p. 651 (2017)

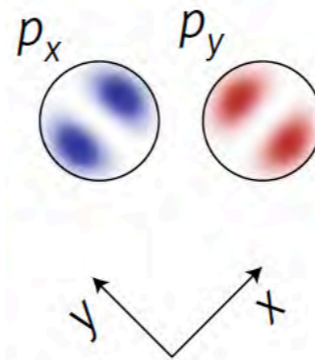
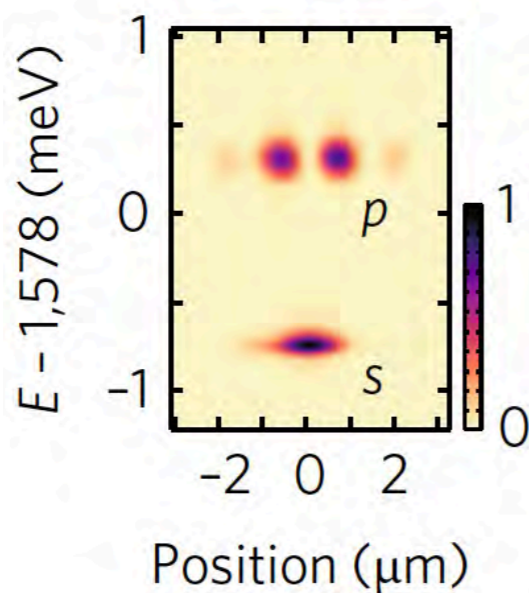
La cellule élémentaire



Micro-pilier composé de puits quantiques circulaires de GaAs placés entre deux miroirs de Bragg, éclairé par une lumière non résonnante

L'amplitude du champ électromagnétique dans ce pilier correspond au coefficient a_j ou b_j introduit plus haut

Modes du champ (polariton) dans ce pilier résolus en énergie



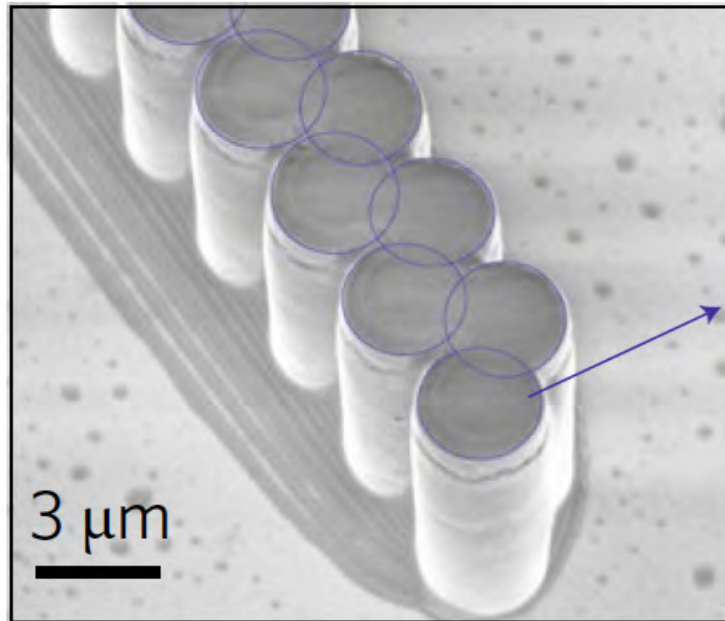
Mode p à deux orbitales p_x et p_y doublement dégénéré

Mode s à symétrie cylindrique

Mesures dans l'espace réel : image du micro-pilier

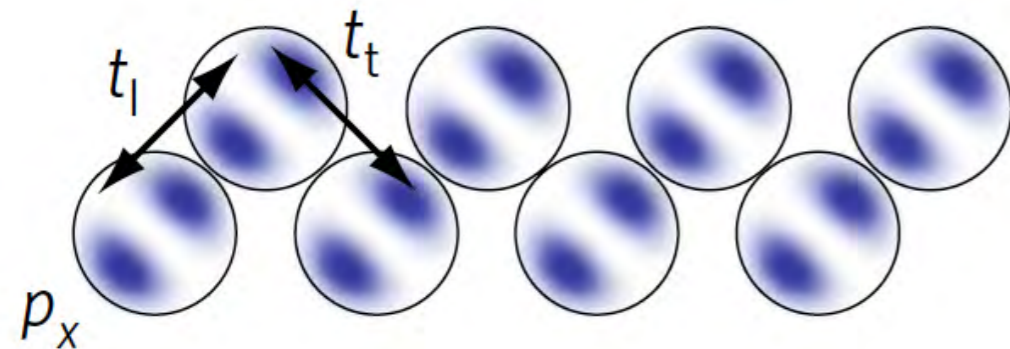
Mesures dans l'espace « des moments » : diffraction dans une direction donnée

Chaîne composée de piliers adjacents



Disposition de la chaîne en zig-zag et couplage des champs entre micro-piliers adjacents par onde évanescente

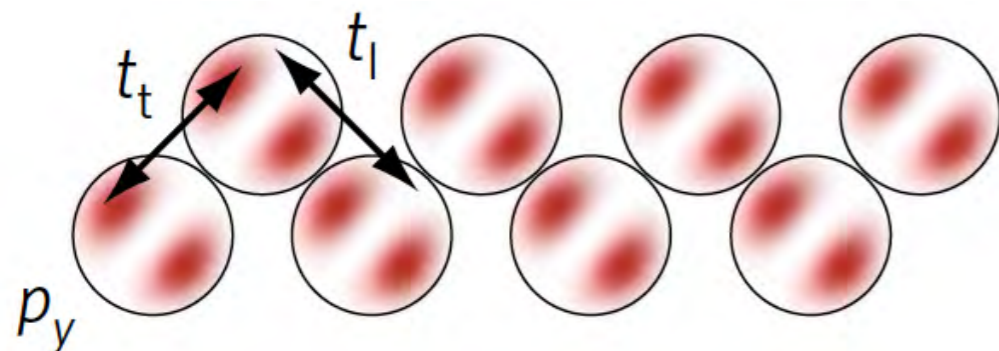
Pour l'onde s (isotrope), tous les couplages sont égaux : hamiltonien de Hubbard



Pour l'onde p , le couplage « lobes alignés » est différent de « lobes face à face » :

$$t_{\text{trans}} = 0.15 t_{\text{long}}$$

Joue le rôle des coefficients J et J' de SSH

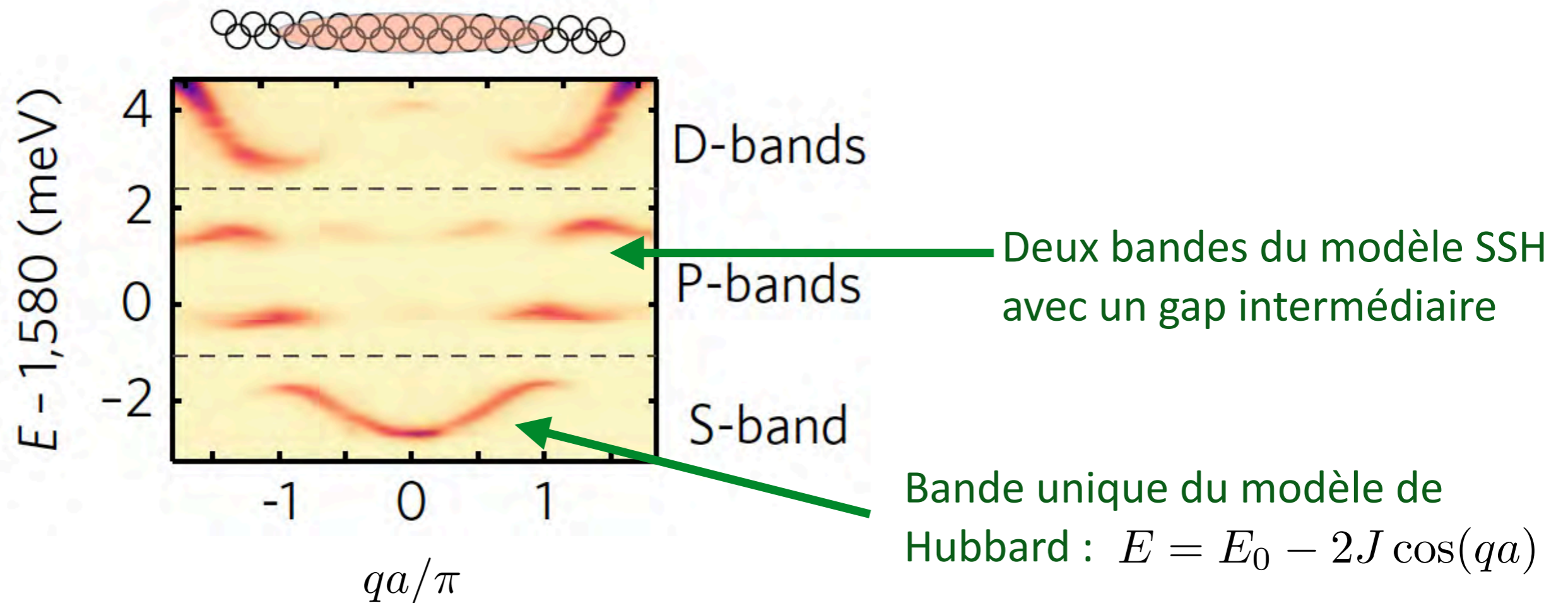


Inversion de $[J' > J]$ en $[J' < J]$ quand on passe de l'orbital p_x à l'orbitale p_y

Observation des états de coeur (*bulk*)

Chaîne éclairée en son centre (rôle négligeable des bords)

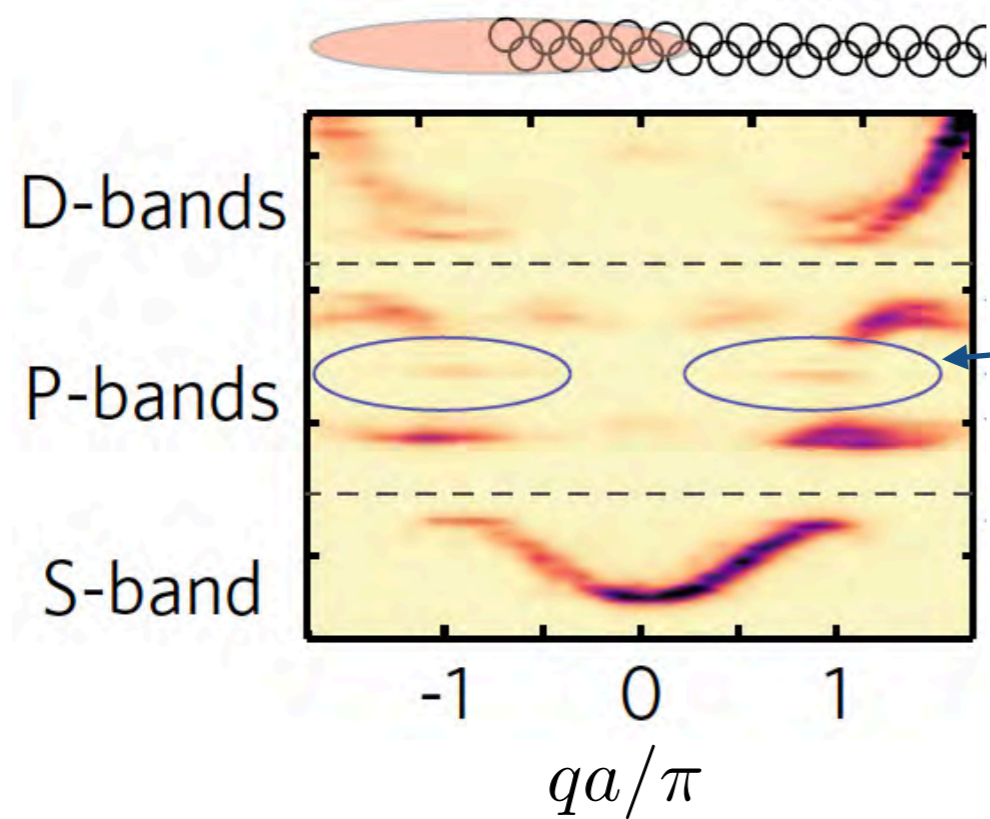
Mesure de l'énergie en fonction du moment q :



Observation des bandes d'énergie en représentation « dépliée »

Observation d'un état de bord

Chaîne éclairée en incluant une extrémité

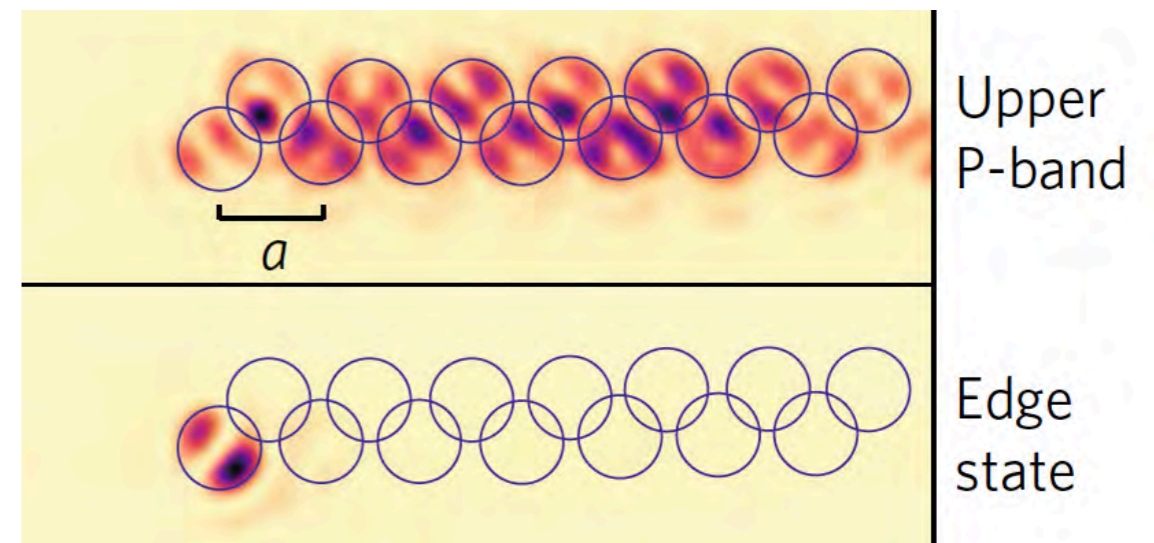


Apparition d'états d'énergie à l'intérieur du gap SSH : **états de bord** !

Quelle topologie pour ces états ?

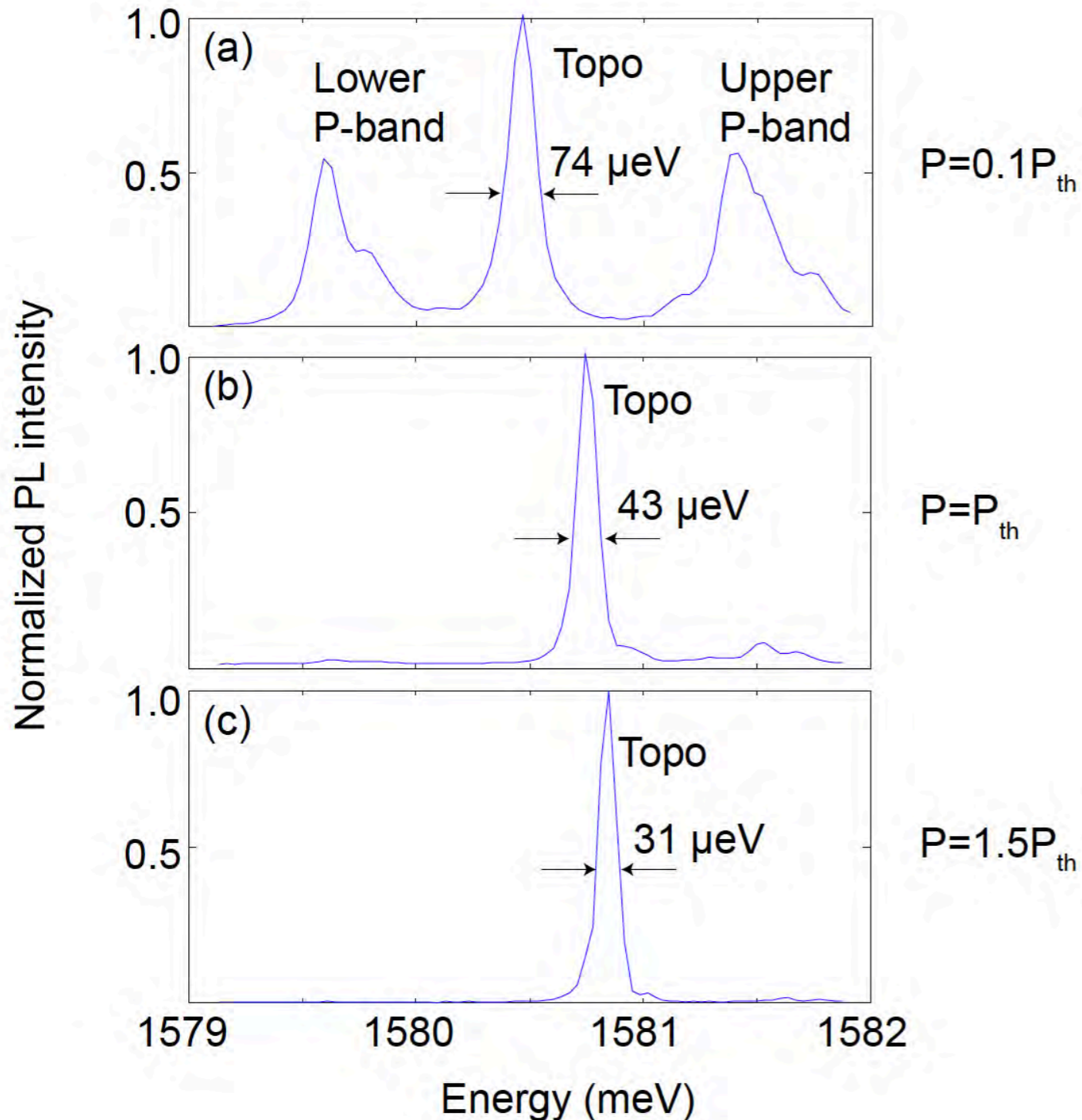
Ils correspondent effectivement à l'onde p_y pour laquelle on réalise

$$J' < J$$



mesure en position

Un « laser topologique » »



Augmentation de la puissance lumineuse éclairant la chaîne

Au dessus d'un certain seuil, on obtient un effet laser sur le mode de bord

Diminution de la largeur spectrale

Effet laser robuste vis à vis des défauts pouvant survenir lors de leur réalisation

3.

Le modèle de Kitaev

A.Y. Kitaev

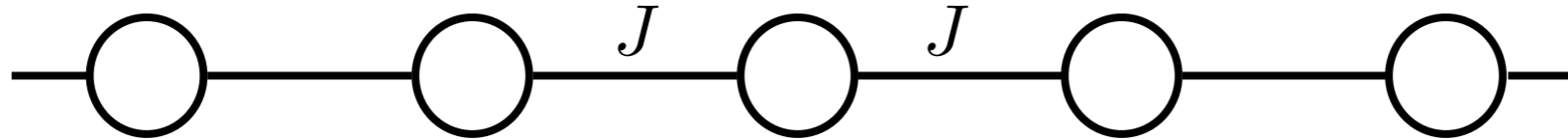
Unpaired Majorana fermions in quantum wires

Physics Uspekhi **44**, 131(2001)

Intérêts de ce modèle

Le modèle le plus simple de supraconducteur topologique

Chaîne 1D, pas de rôle du spin



Fermions : au plus une particule par site

Emergence de modes de bord dans une chaîne finie à $E = 0$

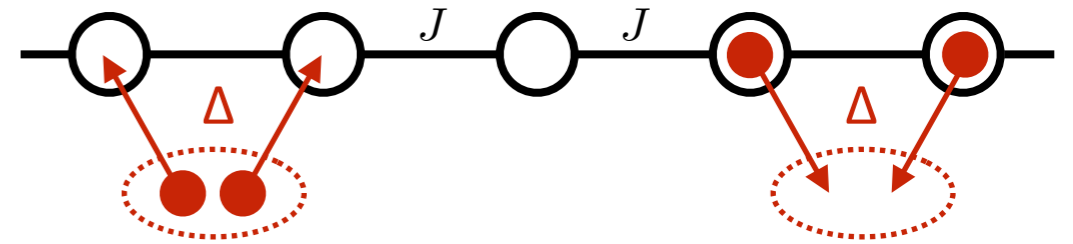
Même chose que le modèle SSH ?

Non : robustesse supplémentaire issue de la symétrie particule-trou, conséquence des interactions dans un supra-conducteur

Représentation sous forme de modes de Majorana :

opérateur de création = opérateur de destruction

L'hamiltonien de Kitaev



Fermions dont le degré de liberté de spin est gelé

Opérateurs pertinents : $\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger$ détruit et crée une particule sur le site j

- Chaîne 1D à la Hubbard, avec des sauts entre proches voisins :

$$-J \sum_j \hat{a}_{j+1}^\dagger \hat{a}_j + \text{h.c.}$$

- Couplage à un réservoir supraconducteur qui injecte ou prélève des paires de particules sur la chaîne :

$$\Delta \sum_j \left(\hat{a}_{j+1}^\dagger \hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_j \hat{a}_{j+1} \right) \quad \Delta : \text{gap supraconducteur}$$

- Le nombre de particules n'est pas conservé dans ce modèle : on ajoute un terme de potentiel chimique contrôlant le nombre moyen de particules sur la chaîne

$$-\mu \hat{N}_p \quad \text{avec} \quad \hat{N}_p = \sum_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$$

La méthode de Bogoliubov - de Gennes

Problème à N sites, espace de Hilbert de dimension 2^N : croissance exponentielle !

Pour un hamiltonien \hat{H} quadratique en $\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger$, réduction considérable de cette taille :

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{A}^\dagger \hat{H}_{\text{BdG}} \hat{A}$$

$$\hat{A}^\dagger = (\hat{a}_1^\dagger \quad \dots \quad \hat{a}_N^\dagger \quad \hat{a}_1 \quad \dots \quad \hat{a}_N)$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_N \\ \hat{a}_1^\dagger \\ \vdots \\ \hat{a}_N^\dagger \end{pmatrix} \quad \text{spineur de Nambu}$$

L'hamiltonien de Bogoliubov-de Gennes est une matrice carrée $2N \times 2N$

$$\hat{H}_{\text{BdG}} = \begin{pmatrix} \hat{M}_1 & \hat{M}_2 \\ -\hat{M}_2^* & -\hat{M}_1^* \end{pmatrix}$$

Une fois les valeurs propres E_j de \hat{H}_{BdG} connues, ainsi que les vecteurs propres associés, on peut mettre \hat{H} sous la forme

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2N} E_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j$$

La symétrie particule-trou

On est parti d'un problème à N sites, donc un espace des états de dimension 2^N

On a diagonalisé \hat{H}_{BdG} en introduisant $2N$ modes (quasi-particules fermioniques) :

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2N} E_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j$$

Chaque mode peut être vide ou occupé :
 2^{2N} états indépendants ???

Non ! Le spectre $\{E_j\}$ est symétrique et chaque excitation figure deux fois

$$\text{mode d'énergie } E : \quad \hat{b}_E = \sum_{i=1}^N u_i \hat{a}_i + v_i \hat{a}_i^\dagger \quad \hat{b}_E^\dagger = \sum_{i=1}^N u_i^* \hat{a}_i^\dagger + v_i^* \hat{a}_i$$

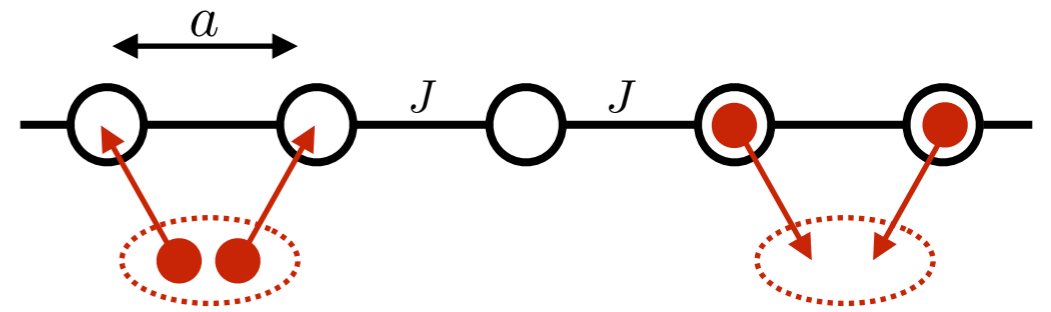
$$\text{mode d'énergie } -E : \quad \hat{b}_{-E} = \hat{b}_E^\dagger \quad \hat{b}_{-E}^\dagger = \hat{b}_E$$

Détruire une quasi-particule d'énergie $-E$ revient à créer une quasi-particule d'énergie $+E$

Bilan de cette analyse :

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2N} E_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j \quad \longrightarrow \quad \hat{H} = \sum_{j=1}^N E_j \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j - 1/2 \right) \quad E_j \geq 0$$

La chaîne de Kitaev infinie



Système invariant par translation : théorème de Bloch

$$\hat{a}_q^\dagger \propto \sum_j e^{iqja} \hat{a}_j^\dagger \quad : \text{ crée une particule avec le moment } \mathbf{q}$$

$$-\pi/a \leq q < \pi/a$$

Le formalisme B-dG se ramène dans ce cas à une série de matrices 2×2 :

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_q (\hat{a}_q^\dagger \quad \hat{a}_{-q}) \hat{H}_q \begin{pmatrix} \hat{a}_q \\ \hat{a}_{-q}^\dagger \end{pmatrix} \quad \hat{H}_q = \begin{pmatrix} -[2J \cos(qa) + \mu] & -2i\Delta \sin(qa) \\ 2i\Delta \sin(qa) & 2J \cos(qa) + \mu \end{pmatrix}$$

$$\hat{H}_q = -\mathbf{h}(q) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\Delta \sin(qa) \\ 2J \cos(qa) + \mu \end{pmatrix}$$

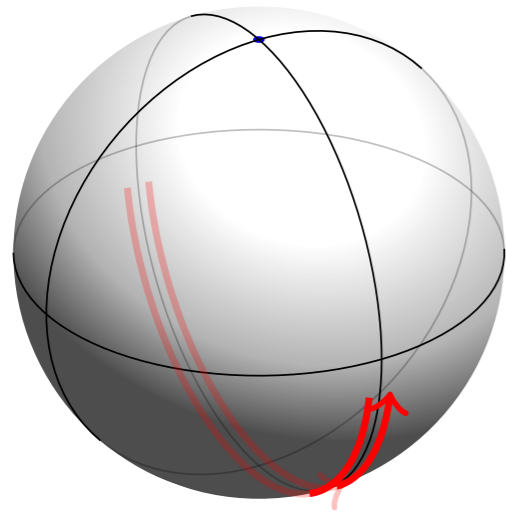
On retrouve un problème de pseudo-spin 1/2 comme pour le modèle SSH

Quelle est la trajectoire de $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}$ sur la sphère de Bloch ?

Topologies possibles de la chaîne de Kitaev

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\Delta \sin(qa) \\ 2J \cos(qa) + \mu \end{pmatrix} \quad : \text{ toujours sur le méridien } h_x = 0$$

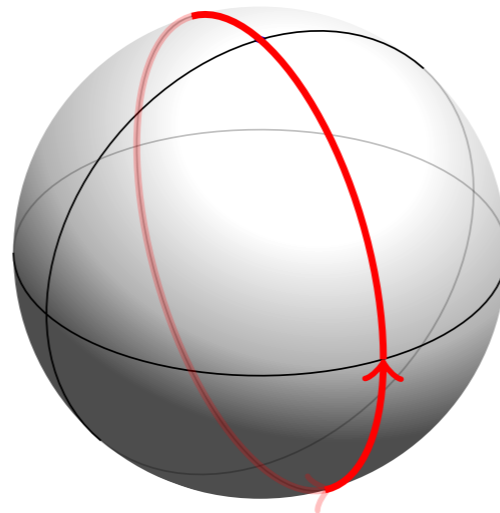
$$\mu < -2J$$



normale

remplissage
faible

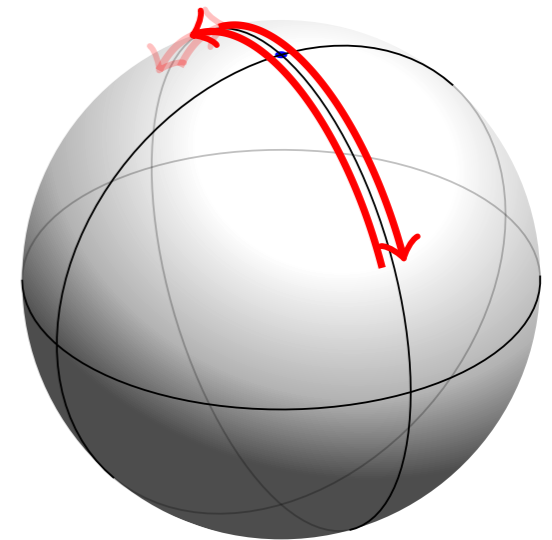
$$|\mu| < 2J$$



topologique

remplissage
intermédiaire

$$\mu > 2J$$



normale

remplissage
élevé

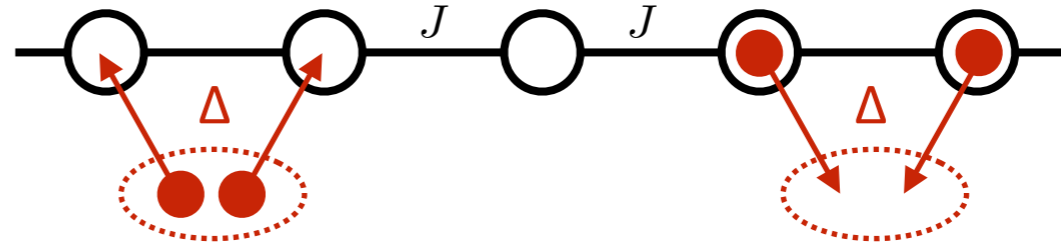
$$\text{Energies de } \hat{H}_{\text{BdG}} : E_q = |\mathbf{h}(q)| = \left\{ 4\Delta^2 \sin^2(qa) + [2J \cos(qa) + \mu]^2 \right\}^{1/2}$$

4.

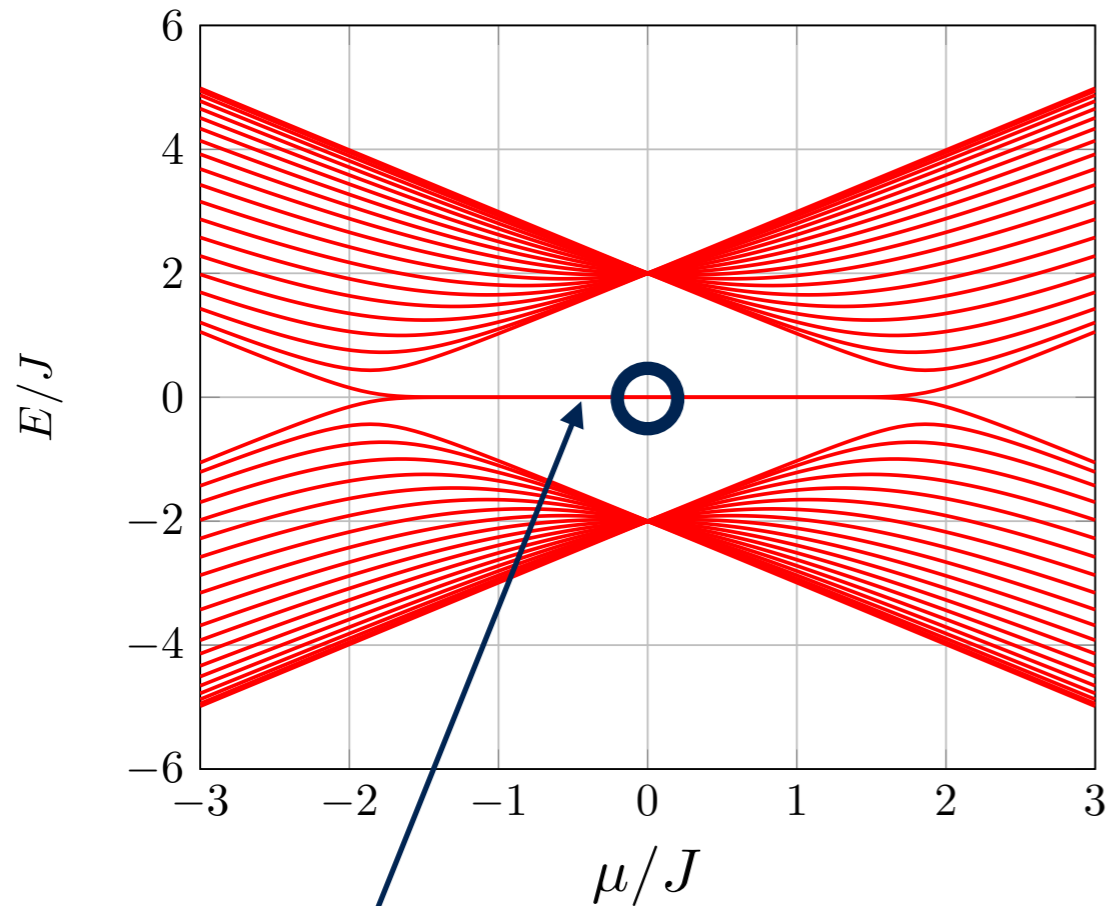
Modes de Majorana dans la chaîne de Kitaev

Segment vs. chaîne infinie de Kitaev

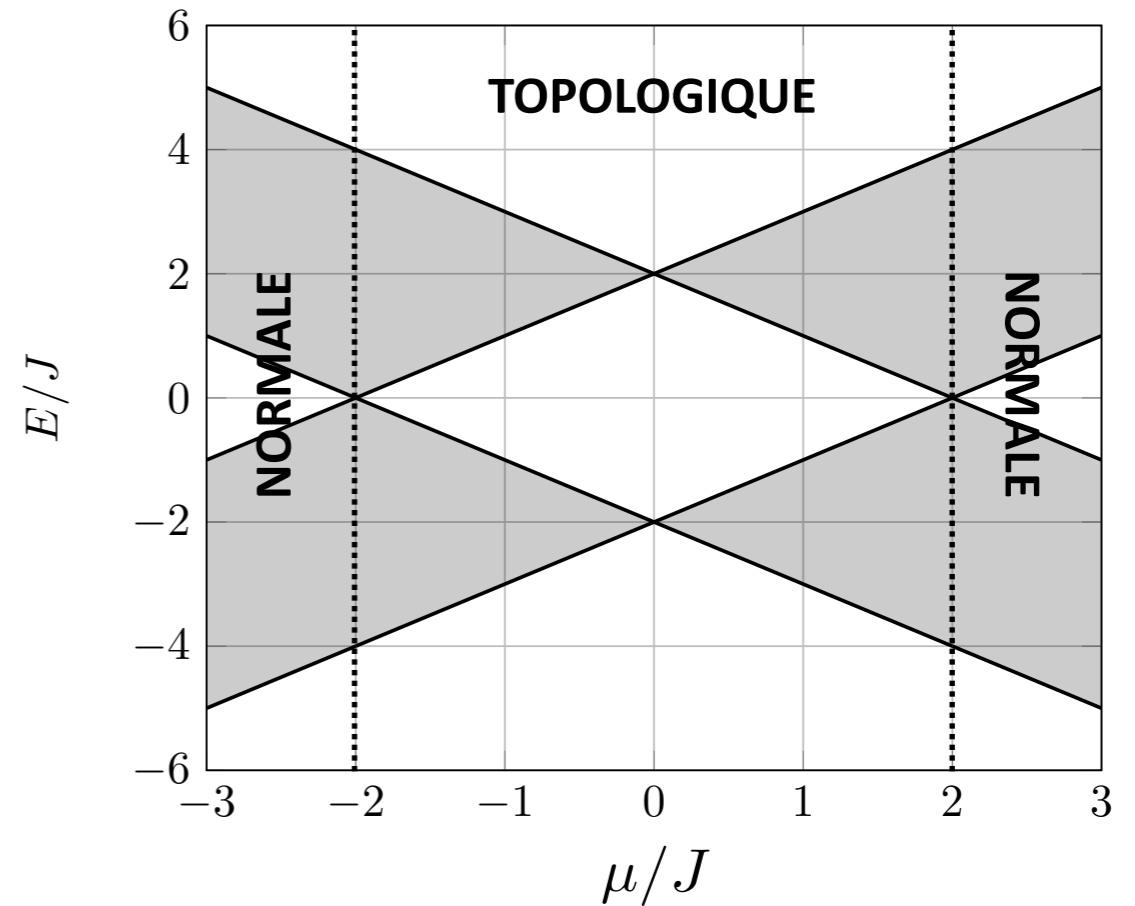
Cas particulier : $\Delta = J$



Segment de 20 sites



Bandes pour une chaîne infinie



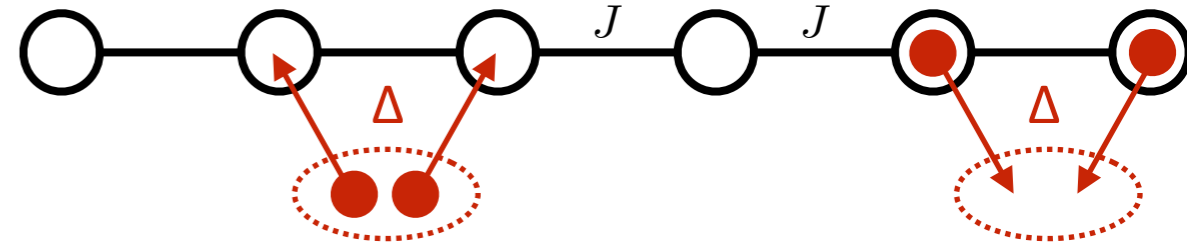
Un mode $(E, -E)$ avec $E \approx 0$ apparaît dans la région topologique $|\mu| < 2J$

état de bord

$$\pm \left\{ 4\Delta^2 \sin^2(qa) + [2J \cos(qa) + \mu]^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \pm \left\{ 4J^2 + 4J\mu \cos(qa) + \mu^2 \right\}^{1/2}$$

Le point remarquable $\mu = 0$



Segment de N sites

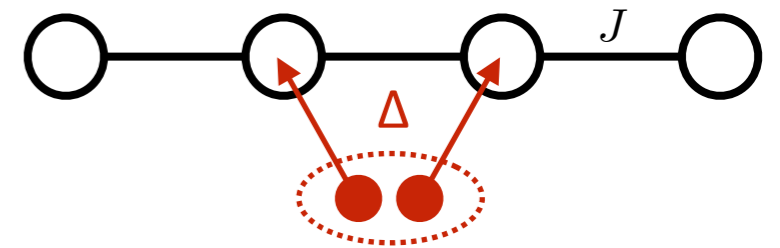
Le choix $\mu = 0$, $\Delta = J$ conduit à un hamiltonien diagonalisable analytiquement :

$$\hat{H} = J \sum_{j=1}^{N-1} \left(-\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+1} - \hat{a}_{j+1}^\dagger \hat{a}_j + \hat{a}_j \hat{a}_{j+1} + \hat{a}_{j+1}^\dagger \hat{a}_j^\dagger \right) = \sum_{j=1}^N E_j \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j - \frac{1}{2} \right)$$

Energies des quasi-particules :
$$\begin{cases} E_j = 2J & \text{pour } j = 1, \dots, N-1 \\ E_N = 0 \end{cases}$$

Modes propres :
$$\begin{cases} \hat{b}_j = \frac{i}{2} \left(\hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j + \hat{a}_{j+1}^\dagger + \hat{a}_{j+1} \right) & \text{pour } j = 1, \dots, N-1 \\ \hat{b}_N = \frac{i}{2} \left(\hat{a}_N^\dagger - \hat{a}_N + \hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1 \right) \end{cases}$$

Le niveau fondamental



$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N E_j \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j - \frac{1}{2} \right)$$

$$E_j \geq 0$$

état fondamental obtenu en résolvant

$$\hat{b}_j |\psi_0\rangle = 0, \quad j = 1, \dots, N$$

une solution unique mais ...

Le mode $j = N$ a une énergie nulle : $|\psi_1\rangle = \hat{b}_N^\dagger |\psi_0\rangle$ a la même énergie que $|\psi_0\rangle$

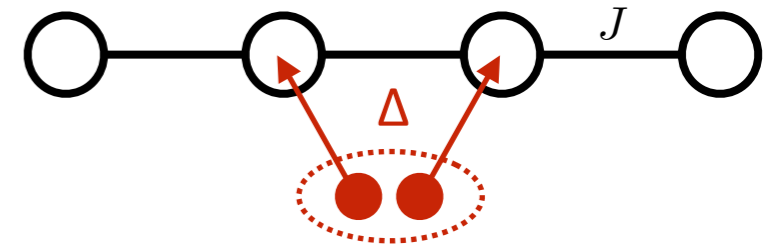
Niveau fondamental doublement dégénéré : $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle\}$

Exemple de la chaîne à 4 sites (espace des états de dimension $2^4=16$)

$$|\psi_0\rangle = \underbrace{|1000\rangle + |0100\rangle + |0010\rangle + |0001\rangle}_{1 \text{ part.}} + \underbrace{|1110\rangle + |1101\rangle + |1011\rangle + |0111\rangle}_{3 \text{ part.}}$$

$$|\psi_1\rangle = \underbrace{|1100\rangle + |1010\rangle + |1001\rangle + |0110\rangle + |0101\rangle + |0011\rangle}_{2 \text{ part.}} + \underbrace{|0000\rangle}_{0 \text{ part.}} + \underbrace{|1111\rangle}_{4 \text{ part.}}$$

Le niveau fondamental



$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N E_j \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j - \frac{1}{2} \right)$$

$$E_j \geq 0$$

état fondamental obtenu en résolvant

$$\hat{b}_j |\psi_0\rangle = 0, \quad j = 1, \dots, N$$

une solution unique mais ...

Le mode $j = N$ a une énergie nulle : $|\psi_1\rangle = \hat{b}_N^\dagger |\psi_0\rangle$ a la même énergie que $|\psi_0\rangle$

Niveau fondamental doublement dégénéré : $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle\}$

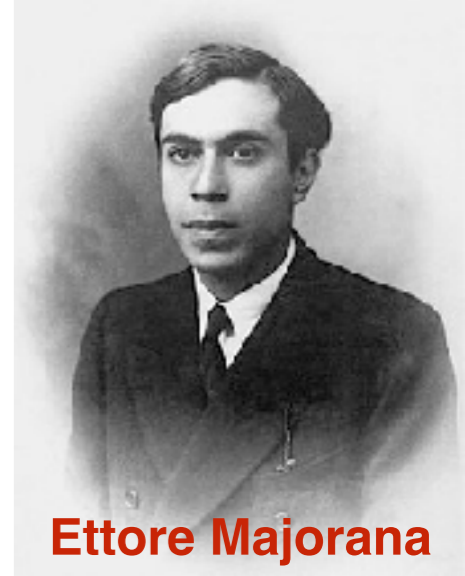
Description en termes d'opérateurs « de Majorana » : $\hat{b}_N = \frac{i}{2} \left(\hat{a}_N^\dagger - \hat{a}_N + \hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1 \right)$

$$\hat{\gamma}_{1,+} = \hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger$$

$$\hat{\gamma}_{N,-} = i \left(\hat{a}_N^\dagger - \hat{a}_N \right)$$

$$\hat{b}_N^\dagger \hat{b}_N = \frac{1}{2} + i \hat{\gamma}_{N,-} \hat{\gamma}_{1,+}$$

Les opérateurs de Majorana



Ettore Majorana
1906-19??

Majorana (1937) : l'équation de Dirac est une équation pour un champ complexe, dans lequel particules et antiparticules jouent des rôles distincts

Majorana propose de la séparer en deux équations pour des champs réels, dans lesquels particules et antiparticules sont confondues

Existe-t-il des particules élémentaires de ce type ? ... question encore ouverte ...

En matière condensée ou en physique atomique, on travaille avec de « vrais » fermions, mais on peut voir émerger des quasi-particules ou « modes »

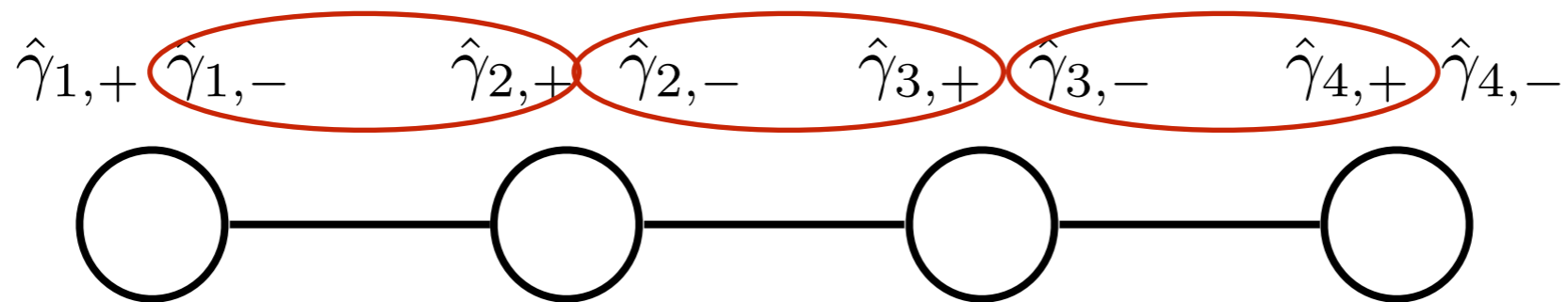
Partant d'un mode \hat{a}, \hat{a}^\dagger , on peut introduire les opérateurs

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_+ = \hat{a} + \hat{a}^\dagger \\ \hat{\gamma}_- = i(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \end{cases}$$

- Hermitiens, vérifient les règles de commutation canoniques des fermions
- Comportement « à la Majorana » : $\hat{\gamma}_-^2 = \hat{\gamma}_-^\dagger \hat{\gamma}_- = \hat{1}$ et idem pour $\hat{\gamma}_+$

Utilisation des opérateurs de Majorana

Souvent un simple jeu d'écriture en matière condensée...
mais ils sont vraiment pertinents dans le problème de la chaîne de Kitaev



$$\begin{aligned}\hat{H} &= J \sum_{j=1}^{N-1} \left(-\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+1} - \hat{a}_{j+1}^\dagger \hat{a}_j + \hat{a}_j \hat{a}_{j+1} + \hat{a}_{j+1}^\dagger \hat{a}_j^\dagger \right) \\ &= J \sum_{j=1}^{N-1} \left(\hat{a}_j - \hat{a}_j^\dagger \right) \left(\hat{a}_{j+1} + \hat{a}_{j+1}^\dagger \right) = i J \sum_{j=1}^N \hat{\gamma}_{j,-} \hat{\gamma}_{j+1,+}\end{aligned}$$

et le mode délocalisé $\hat{b}_N^\dagger \hat{b}_N = \frac{1}{2} + i \hat{\gamma}_{N,-} \hat{\gamma}_{1,+}$ reste à énergie nulle

Pour donner une énergie non nulle à ce mode et lever la dégénérescence du niveau fondamental, il faut une perturbation **non locale**, couplant les deux extrémités

Les modes de Majorana en information quantique

Degrés de liberté protégés de la décohérence

$$\hat{\gamma}_{1,+} \quad \hat{\gamma}_{N,-}$$

- Première approche : utiliser les deux états fondamentaux $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle$ de la chaîne pour encoder un bit quantique

problème : difficile à manipuler car ils ont des nombres de particules avec des parités opposées

- Deuxième approche : utiliser (au moins) deux chaînes et procéder à du tressage (braiding) pour manipuler les états

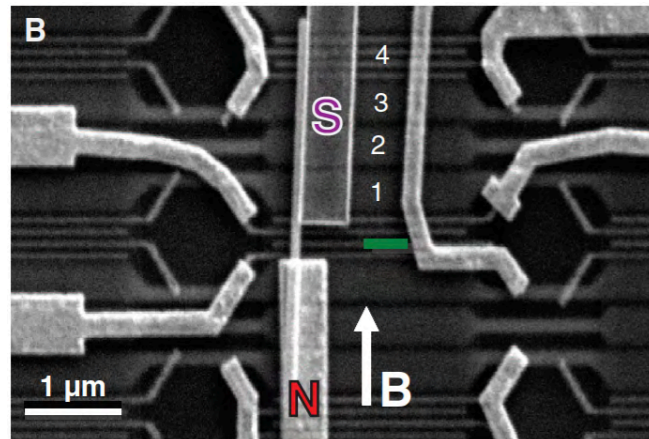
$$\hat{\gamma}_{1,+} \quad \hat{\gamma}_{N,-} \quad \hat{\gamma}'_{1,+} \quad \hat{\gamma}'_{N,-}$$

On peut alors travailler dans un espace dégénéré à parité totale fixée :

Combinaisons linéaires de $|\psi_0, \psi'_0\rangle$ et $|\psi_1, \psi'_1\rangle$

Les modes de Majorana au laboratoire

Delft



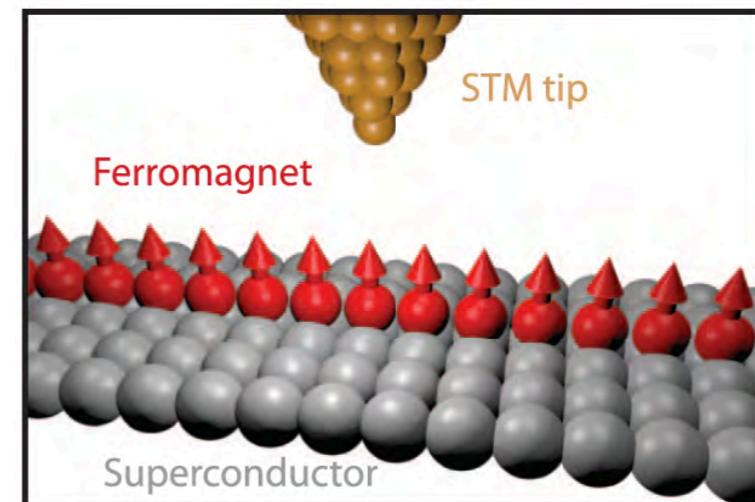
V. Mourik et al, Science 336, 1003 (2012)

Nanofil semi-conducteur (antimoniure d'indium)
au contact de deux électrodes, l'une normale
et l'autre supraconductrice

S. Nadj-Perge et al., Science 346, 602 (2014)

Chaîne d'atomes de fer déposés à
la surface d'un supra-conducteur

Princeton



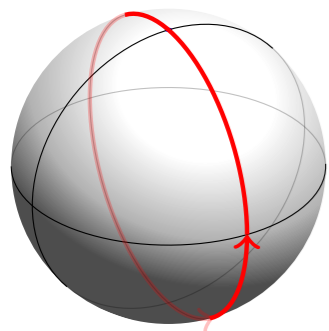
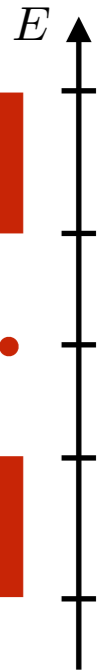
Et avec des gaz froids ? Plusieurs projets en cours

S. Nascimbene, J. Phys. B 46, 134005 (2013)

Conclusions

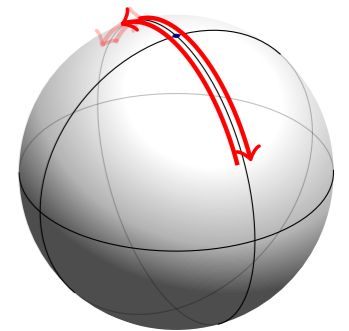
Une phase topologique ne peut pas se distinguer d'une phase normale en observant seulement le coeur du matériau : même structure de bande

Elle se révèle en allant regarder les états à la frontière



La classification de la matière topologique ne se fait pas comme dans la théorie de Landau, où l'on regardait si une symétrie spatiale était brisée (e.g. ferromagnétisme)

Il faut regarder la topologie des fonctions d'onde



Certaines symétries jouent néanmoins un rôle crucial

*Symétrie de sous-réseau, symétrie particule-trou, renversement du temps
La présence de ces symétries garantit la robustesse de la phase topologique*

Que se passe-t-il si on perd cette symétrie ?