

La matière topologique et son exploration
avec les gaz quantiques

Topologie et courbure de Berry dans un réseau à deux dimensions

http://www.phys.ens.fr/~dalibard/2018_CdF.html

Jean Dalibard
Chaire *Atomes et rayonnement*
Année 2017-18



COLLÈGE
DE FRANCE
—1530—

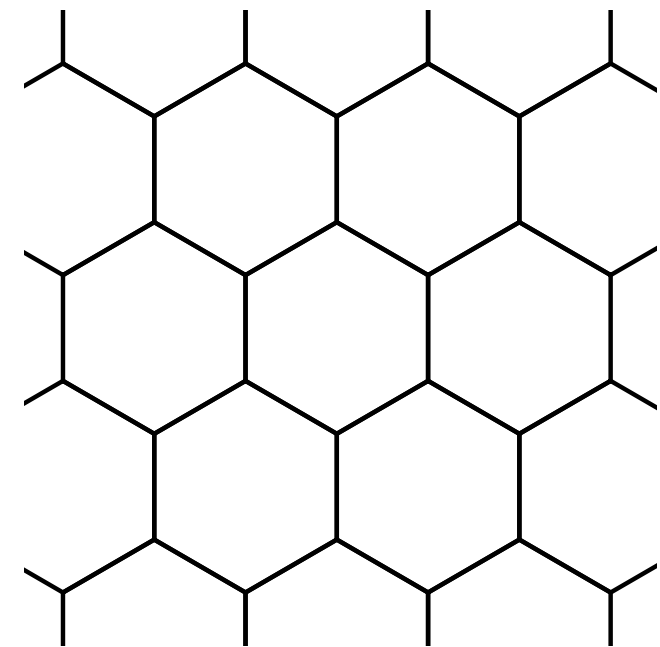
Buts de ce cours

Aborder l'étude des réseaux périodiques à deux dimensions et caractériser leurs propriétés topologiques

Problème initié par l'effet Hall quantique

Emergence de nombres quantiques « robustes » :
nombres de Chern

Comportement statistique non-conventionnel :
any-ons

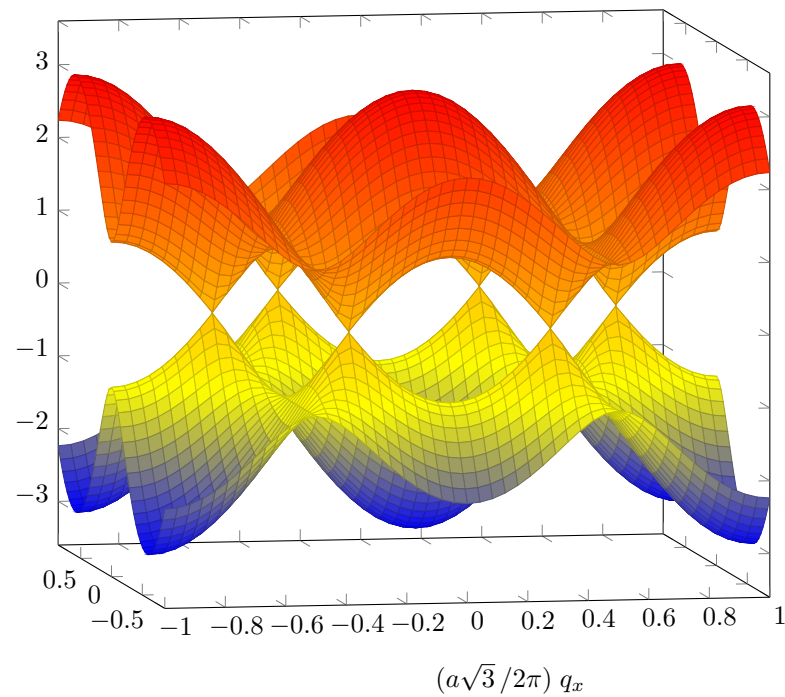


Ces nombres apparaissent de manière équivalente selon plusieurs points de vue

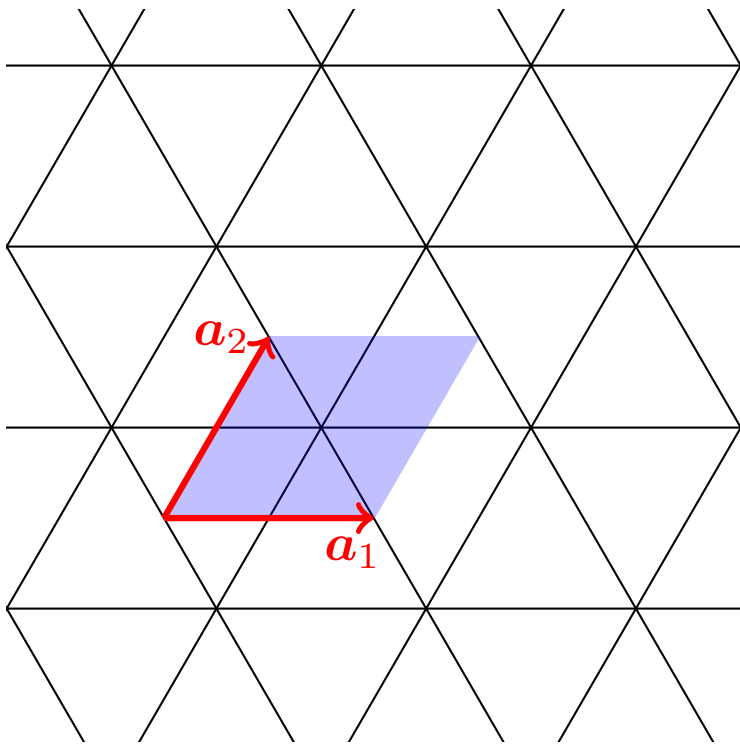
- Géométrie : recouvrement de la sphère de Bloch
- Physique, avec l'étude du transport et la quantification de la conductivité
- Physique, avec l'existence de « canaux de bord »

1.

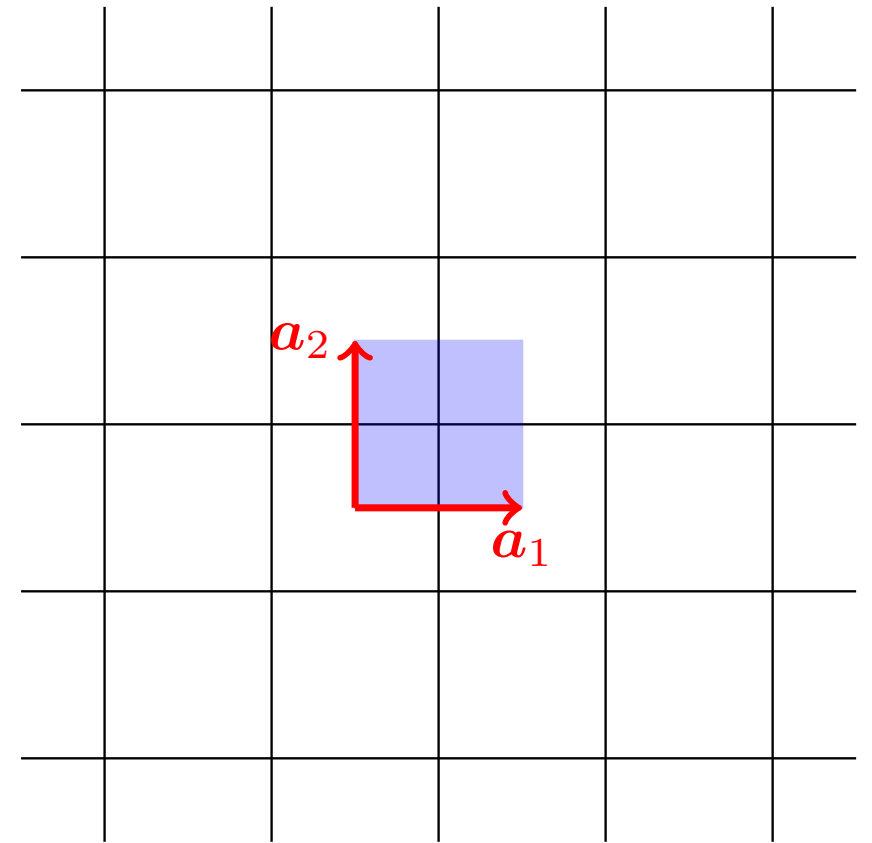
Réseaux bi-partites et points de Dirac



Réseaux triangulaires et réseaux carrés



Réseaux de Bravais,
un site par cellule unité



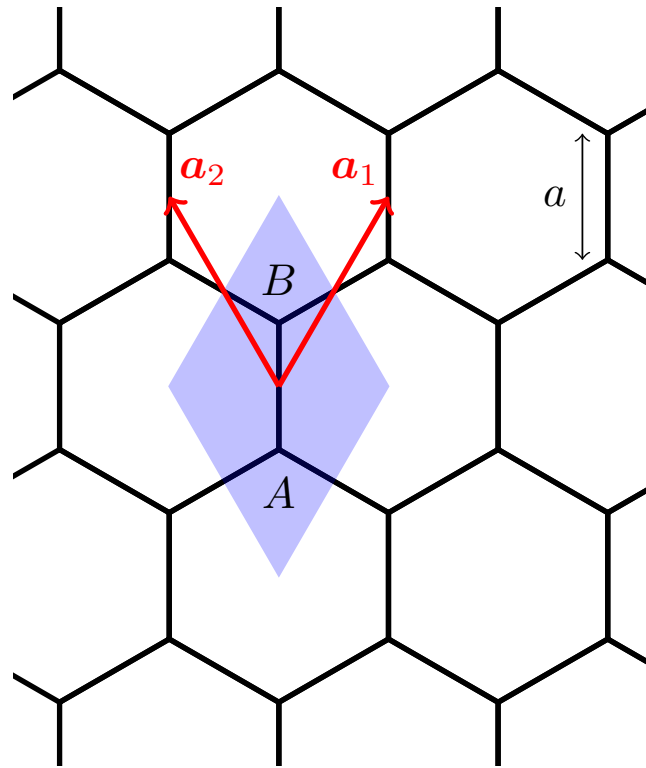
Théorème de Bloch général à 2D : $\psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})$ avec $u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})$ périodique

Dans la limite des liaisons fortes, une seule fonction périodique

$$|u_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_j |A_j\rangle$$

Réelle et indépendante de $\mathbf{q}$: pas de propriétés topologiques à attendre

Le réseau du graphène



Deux sites A et B par cellule unité

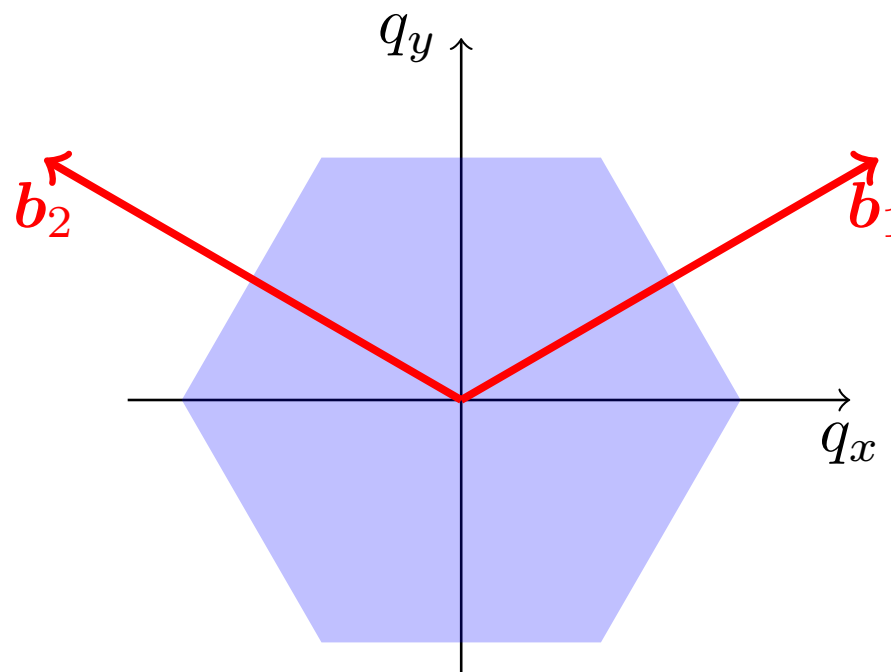
Réseau engendré par translation de $\mathbf{a}_{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Dans la limite des liaisons fortes, les fonctions périodiques sur le réseau s'écrivent

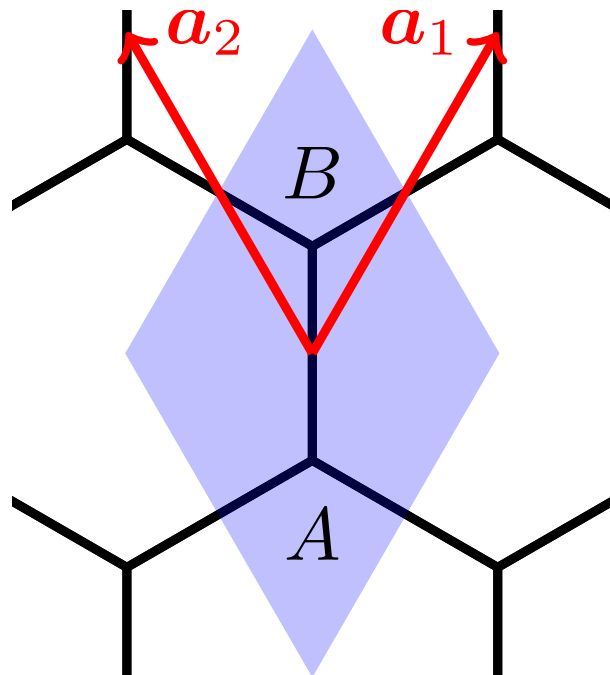
$$|u_{\mathbf{q}}\rangle = \alpha_{\mathbf{q}} \left(\sum_j |A_j\rangle \right) + \beta_{\mathbf{q}} \left(\sum_j |B_j\rangle \right) \quad \text{spin } 1/2$$

Zone de Brillouin

$$\mathbf{b}_{1,2} = \frac{2\pi}{3a} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$



L'hamiltonien périodique du graphène



Même énergie pour A et B : $E_A = E_B = 0$

Couplages entre proches voisins uniquement

Un site A est couplé à trois sites B

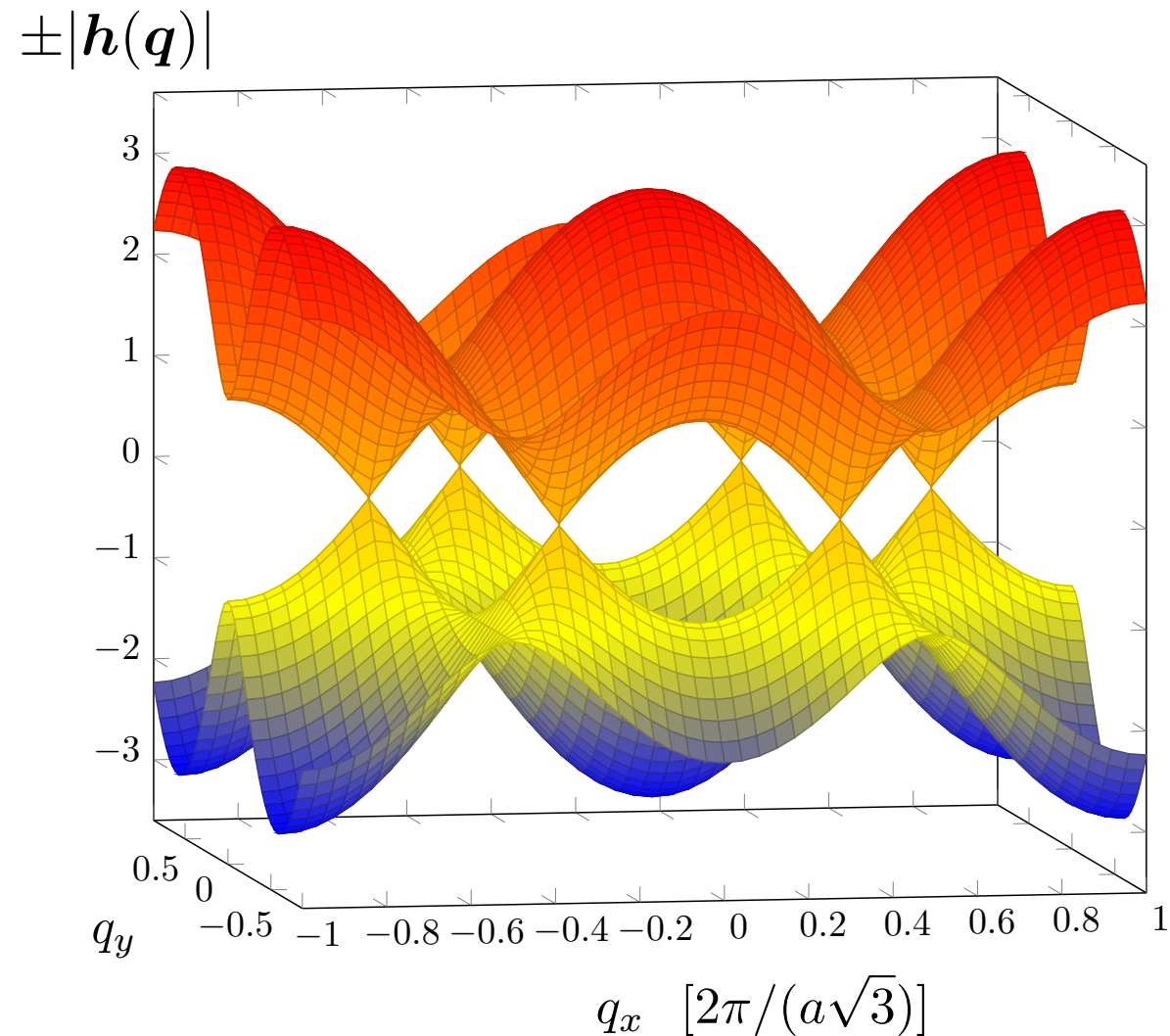
Un site B est couplé à trois sites A

Hamiltonien pour la partie périodique $|u_{\mathbf{q}}\rangle$

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = -J \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1} + e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2} \\ 1 + e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1} + e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2} & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{h}(\mathbf{q}) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$$

$$\text{avec : } \mathbf{h}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1 + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2) \\ \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Energies : } \pm |\mathbf{h}(\mathbf{q})|$$

Les points de Dirac



***Bandes en contact :
situation marginale
sur le plan topologique***

Energies : $\pm|h(\mathbf{q})|$

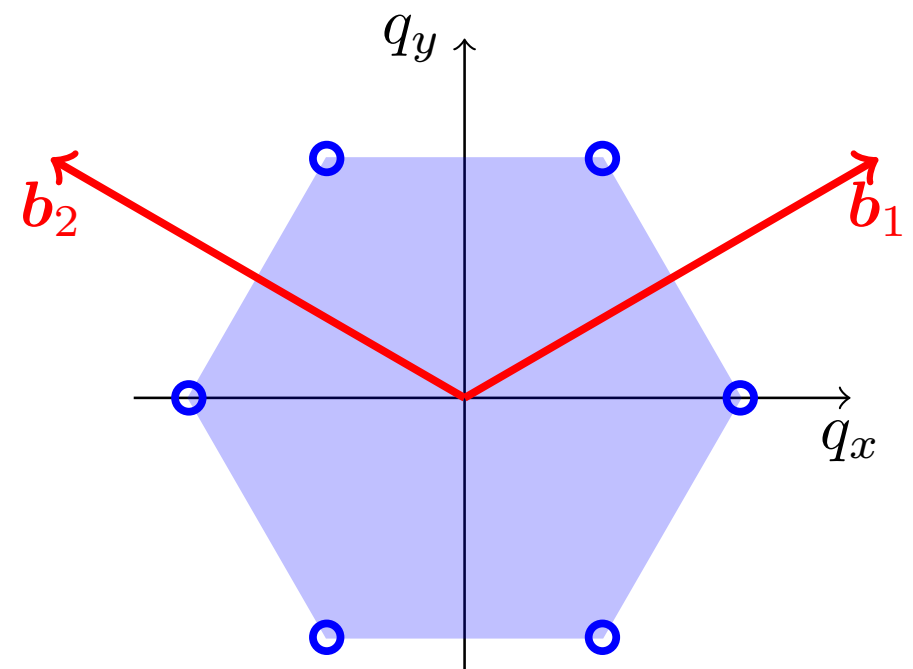
$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1 + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2) \\ \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Contact entre les deux bandes là où

$$|h(\mathbf{q})| = 0$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} h_x(q_x, q_y) &= 0 \\ h_y(q_x, q_y) &= 0 \end{aligned}$$



Les points de Dirac (suite)

Relation de dispersion $E_{\mathbf{q}}$ linéaire au voisinage de ces points : physique « relativiste »

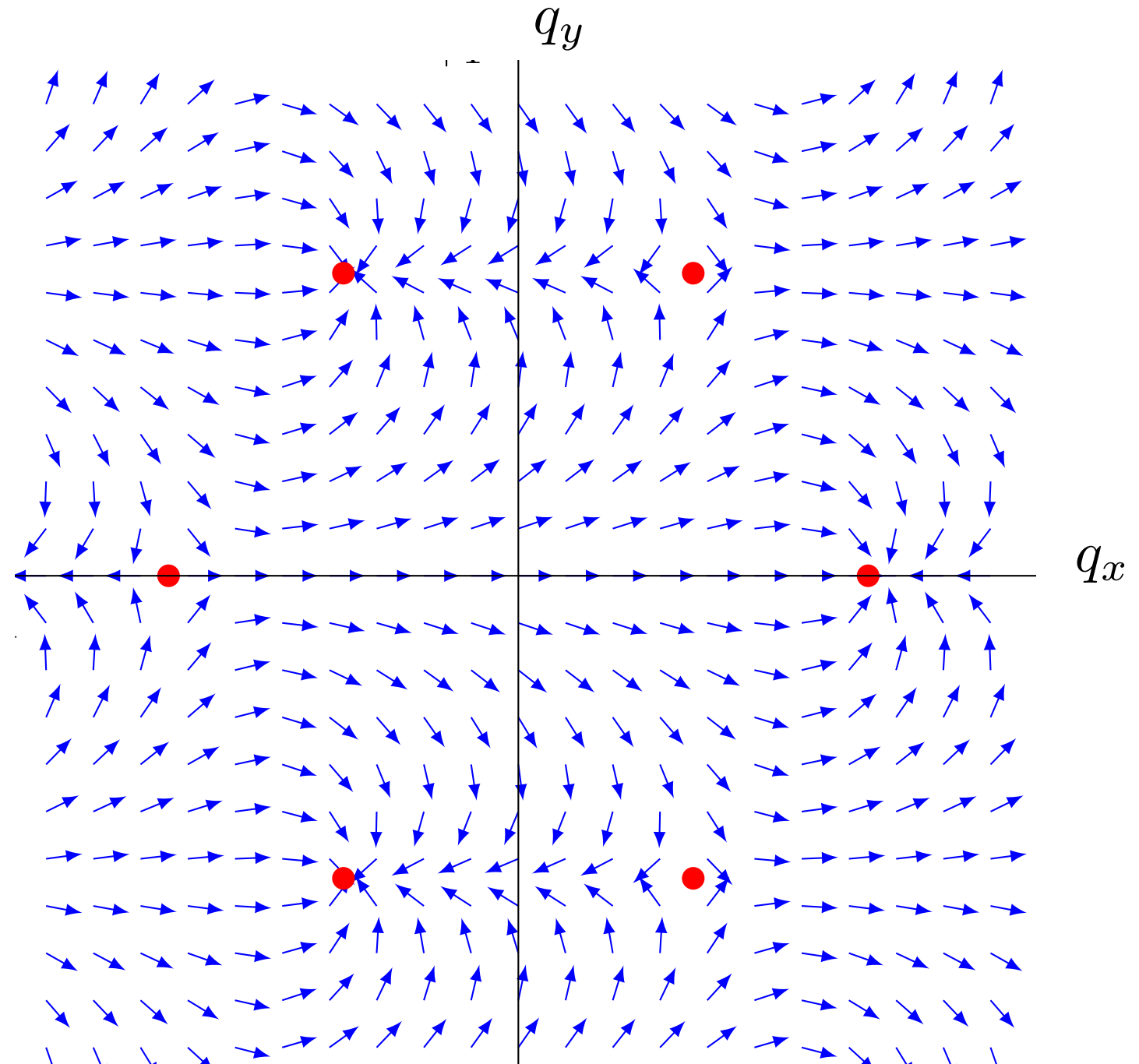
Enroulement du vecteur $\mathbf{h}(\mathbf{q})$
autour de ces points

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1 + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2) \\ \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

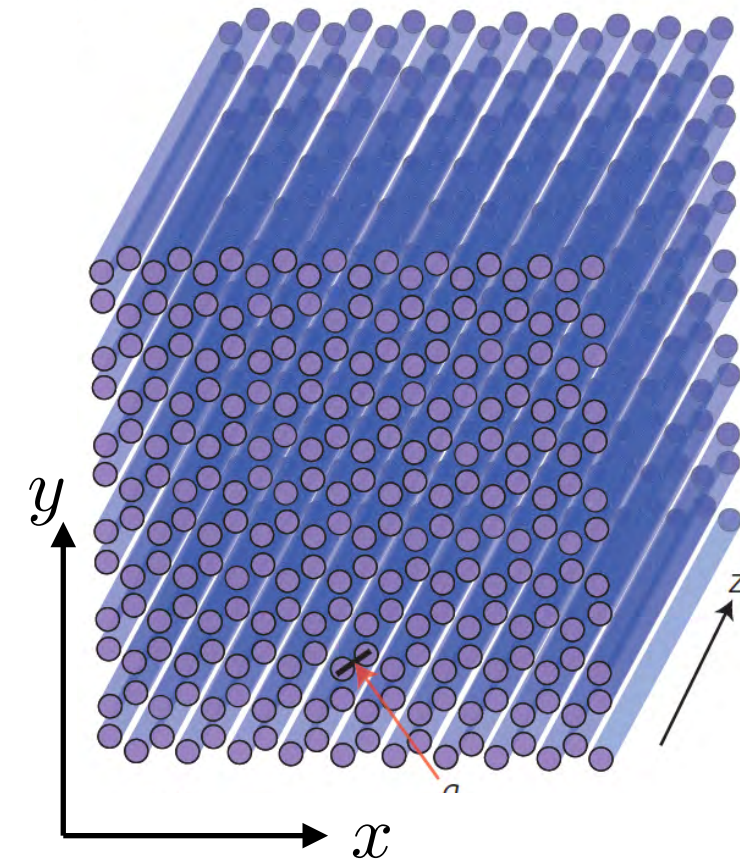
On trace le champ de vecteurs

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}$$

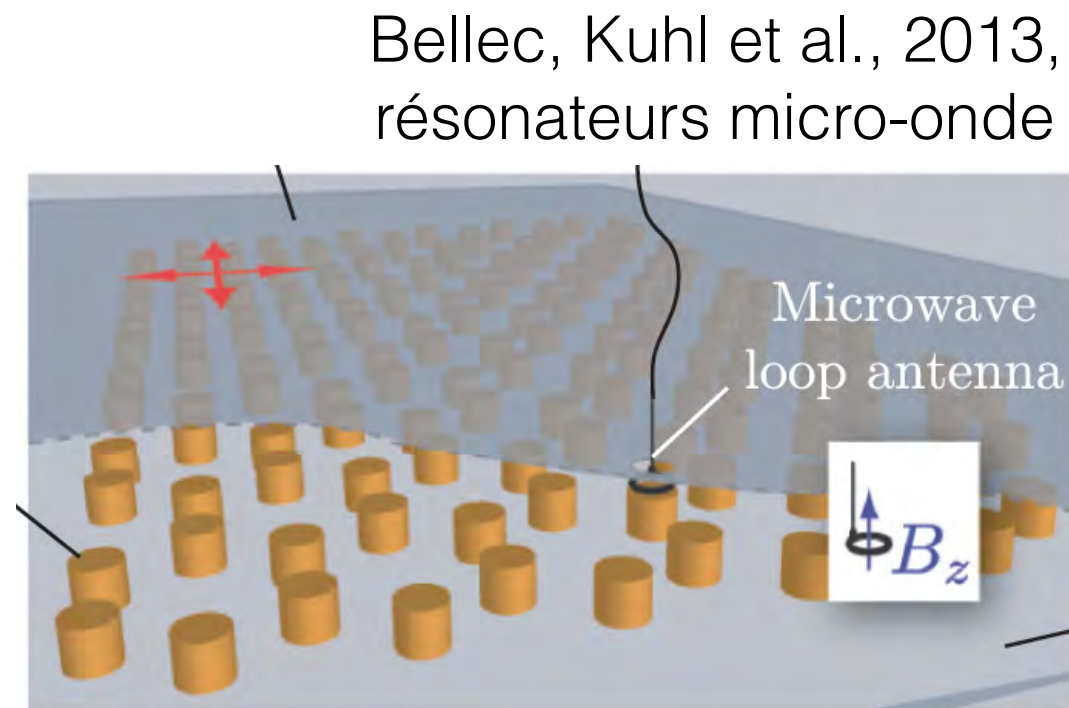
dans le plan (q_x, q_y)



Réseaux hexagonaux en dehors de la matière condensée

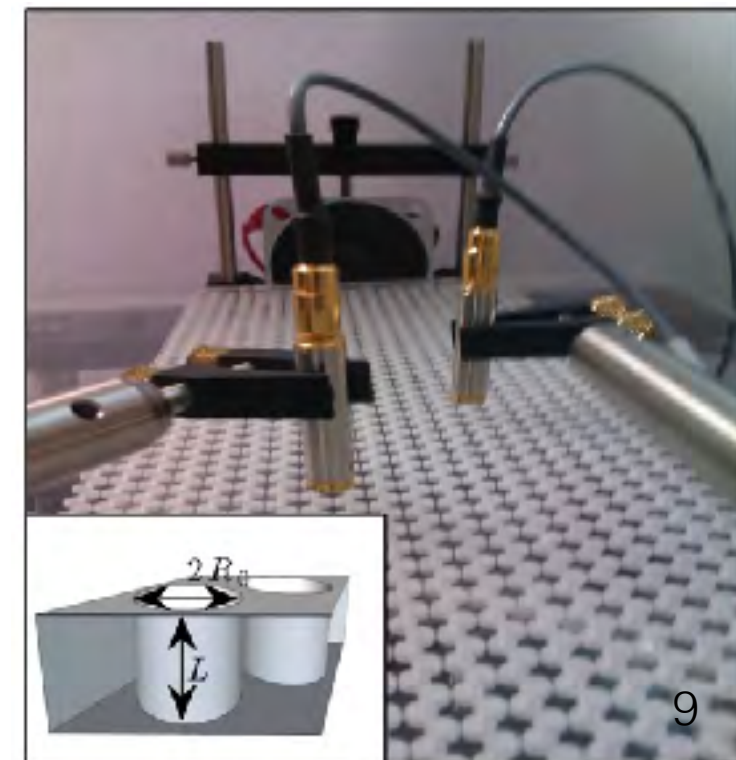


Rechtsman, Zeuner et al., 2013,
réseaux de guides d'onde optiques

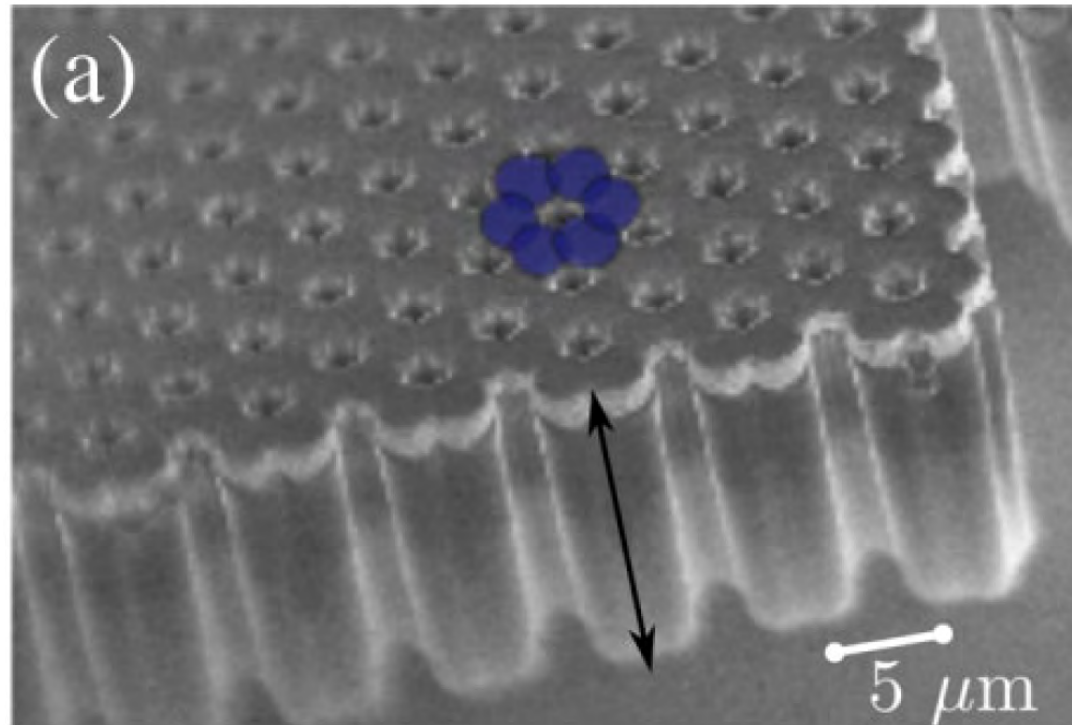


Bellec, Kuhl et al., 2013,
résonateurs micro-onde

Torrent & Sanchez-Dehesa, 2012,
domaine acoustique

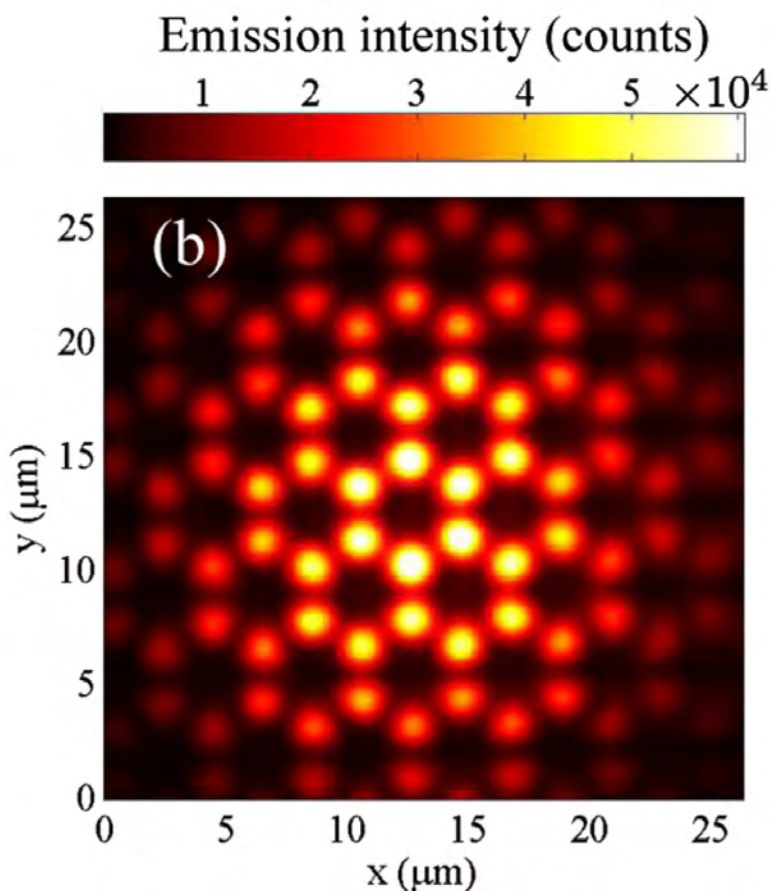


Réseau graphène avec des polaritons de cavité



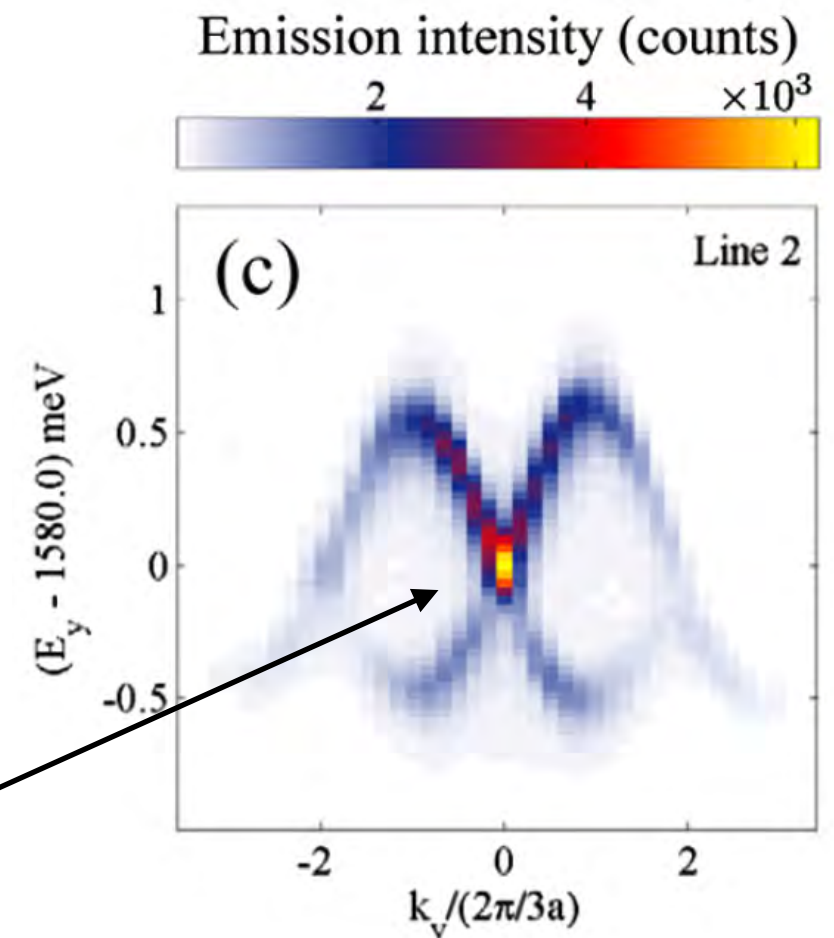
Jacqmin, Carusotto et al.,
Phys. Rev. Lett. 112, 116402 (2014)

Microstructure de puits quantiques
de AlGaAs pompés par une lumière
non résonante



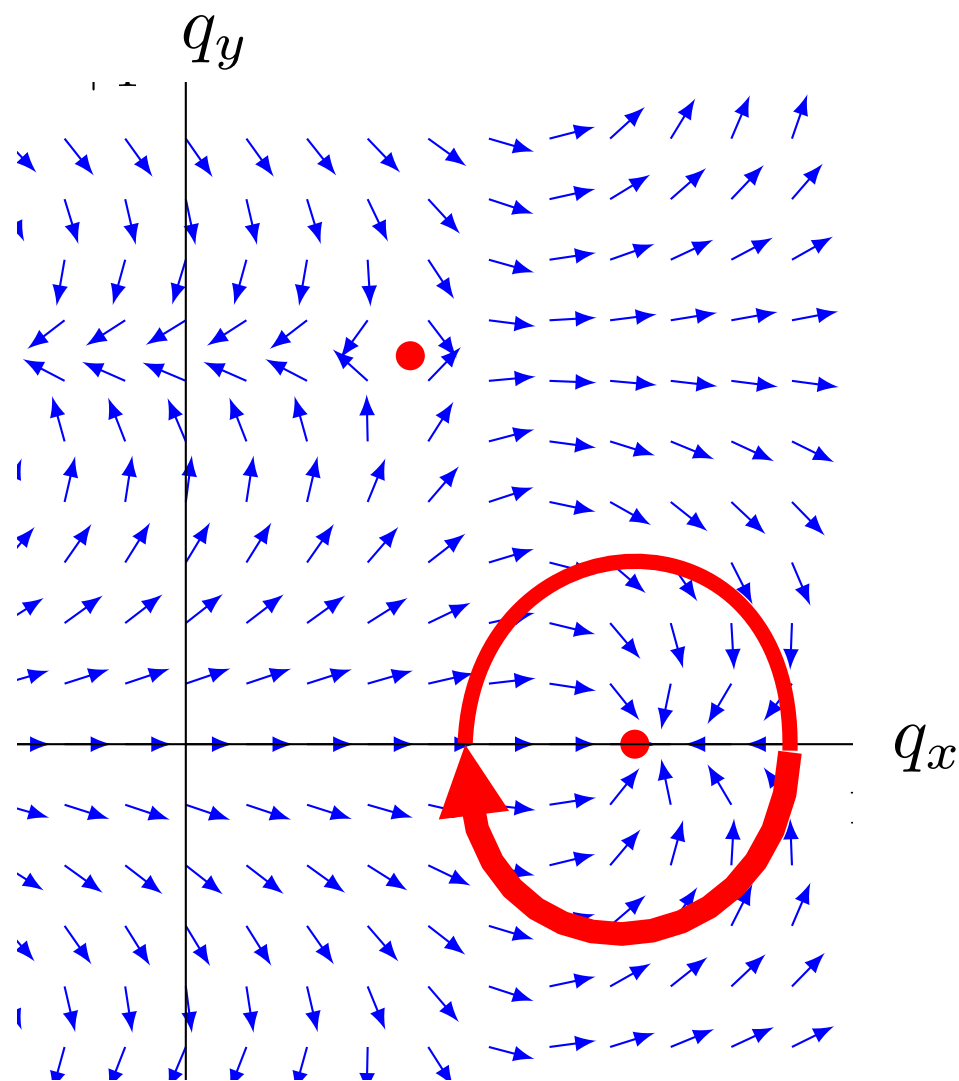
Imagerie dans
l'espace des positions
ou dans
l'espace des moments

Cône de Dirac !



L'enroulement de phase autour d'un point de Dirac

Quelle est la phase géométrique accumulée par une particule qui suit un contour dans l'espace des moments qui entoure un point de Dirac ?



Le vecteur $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}$ reste sur l'équateur de la sphère de Bloch et il fait un tour complet

angle solide 2π quelle que soit la forme du contour

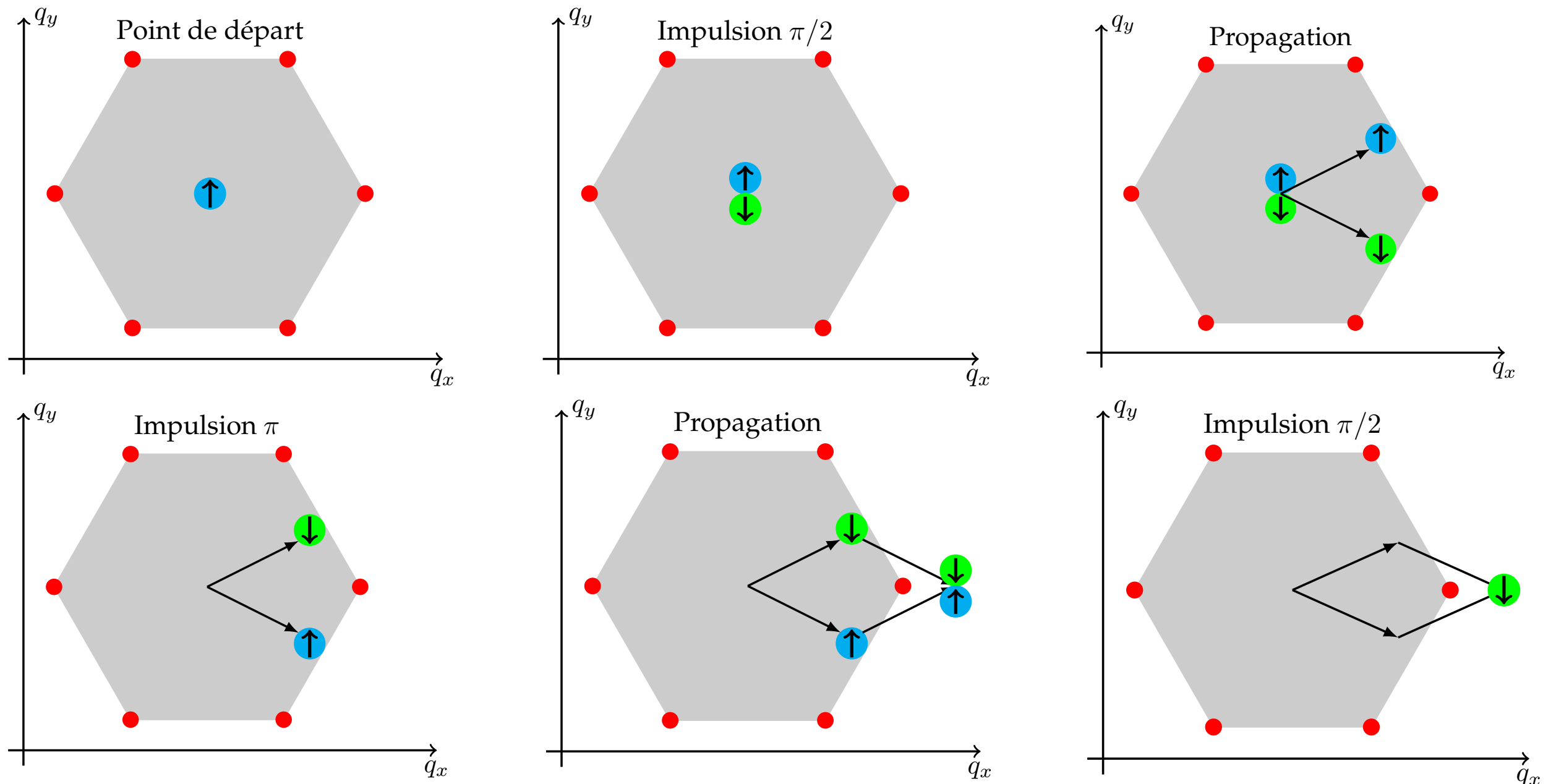
Phase géométrique : $\frac{1}{2} 2\pi = \pi$

Expérience de Munich

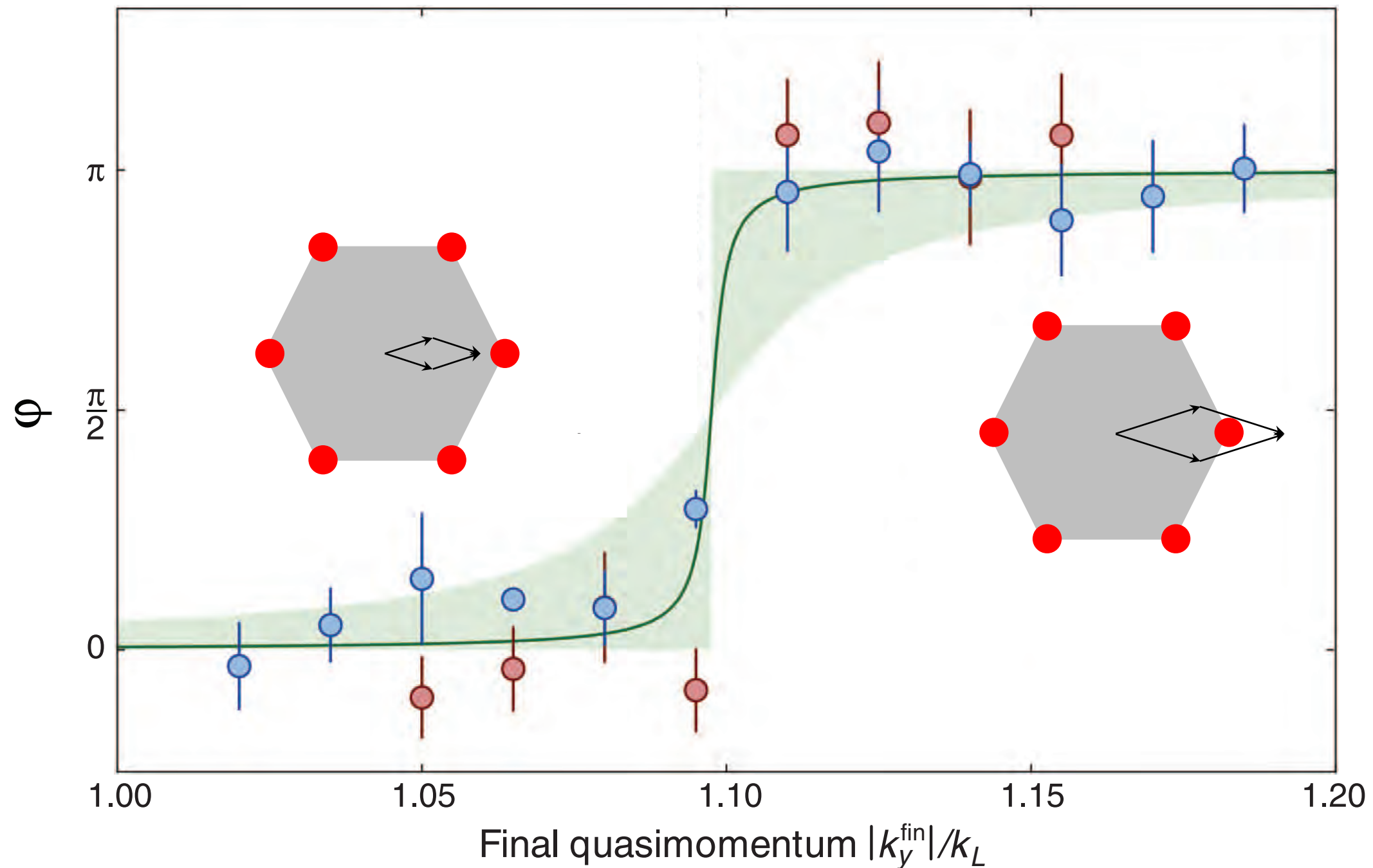
Duca et al., Science 347, 288 (2015) : An Aharonov-Bohm interferometer for determining Bloch band topology

Réseau optique pour ^{87}Rb formé par 3 ondes lumineuse à 120°

Mesure interférométrique de la phase géométrique : schéma $\frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\pi}{2}$

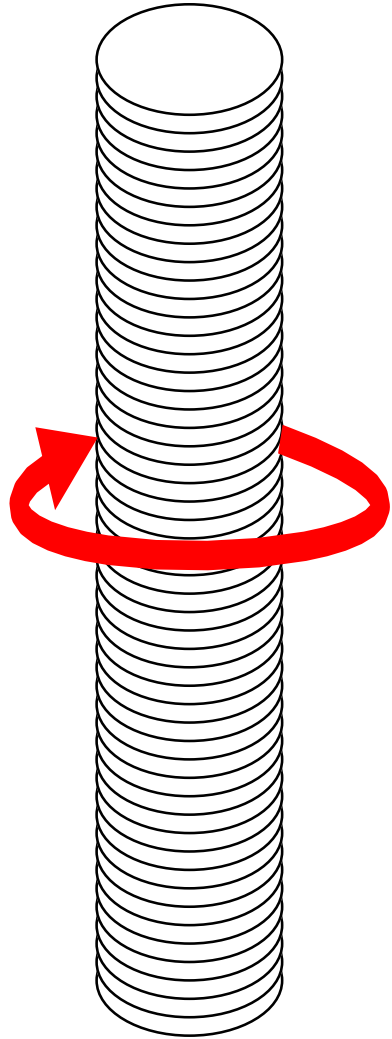


Expérience de Munich



Pas de phase géométrique tant que le point de Dirac est à l'extérieur de la zone délimitée par l'interféromètre, phase égale à π sinon

Analogie avec l'effet Aharonov-Bohm



Solénoïde infiniment long : le champ est confiné à l'intérieur du solénoïde

Quelle est la phase accumulée par une particule sur un contour qui entoure le solénoïde ?

$$\Phi_{AB} = \frac{e}{2\pi\hbar} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

et le potentiel vecteur a également un enroulement non nul autour du solénoïde :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint \mathbf{B}(\mathbf{r}) \, d^2r$$

2.

Bandes topologiques à deux dimensions:
caractérisation géométrique

Zone de Brillouin et sphère de Bloch

Hamiltonien périodique pour une cellule à deux sites, liaisons fortes

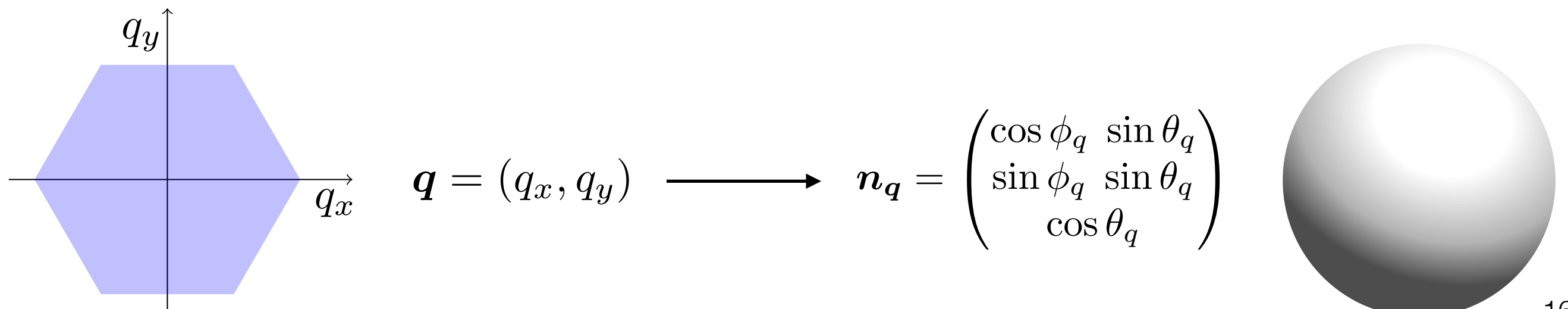
$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = E_0(\mathbf{q}) \hat{1} - \mathbf{h}(\mathbf{q}) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} E_0 - h_z & -h_x + ih_y \\ -h_x - ih_y & E_0 + h_z \end{pmatrix}$$

couplages A-A (pointing to $-h_x + ih_y$)
couplages A-B (pointing to $E_0 + h_z$)
couplages B-B (pointing to $E_0 - h_z$)

Energies : $E_0 \pm |\mathbf{h}|$

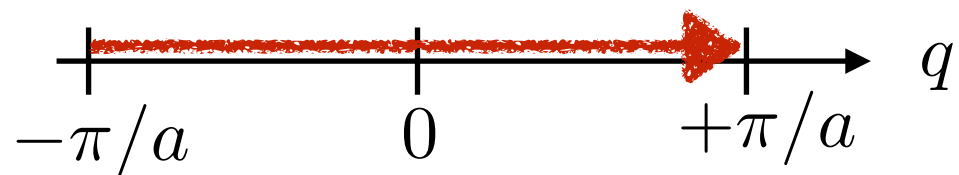
Etats propres déterminés à partir de $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}$, caractérisé par les angles $\theta_{\mathbf{q}}, \phi_{\mathbf{q}}$

Caractérisation de $\hat{H}_{\mathbf{q}}$ par l'application :

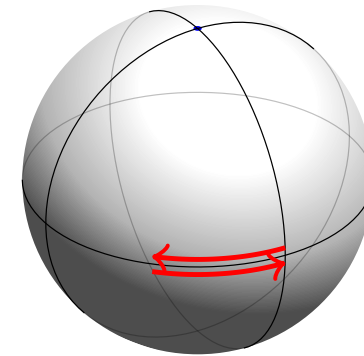


Enveloppement de la sphère de Bloch

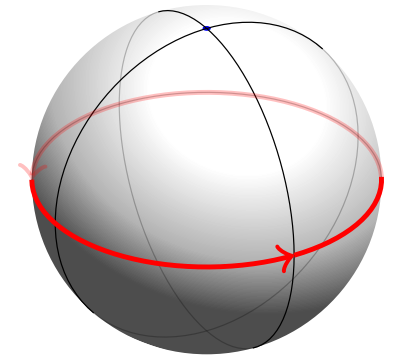
A une dimension (par exemple SSH) :



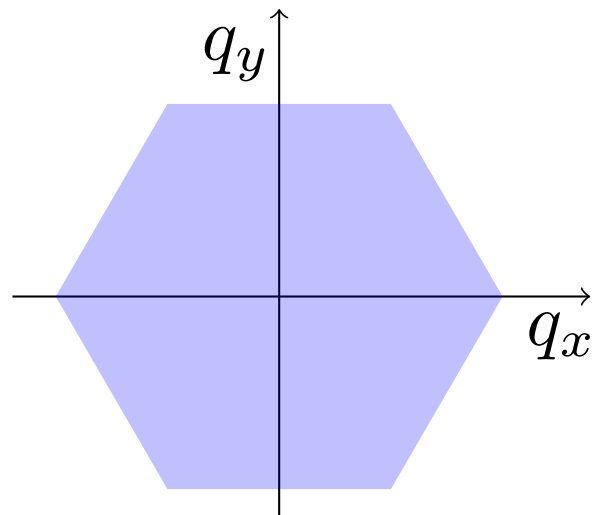
conduit à



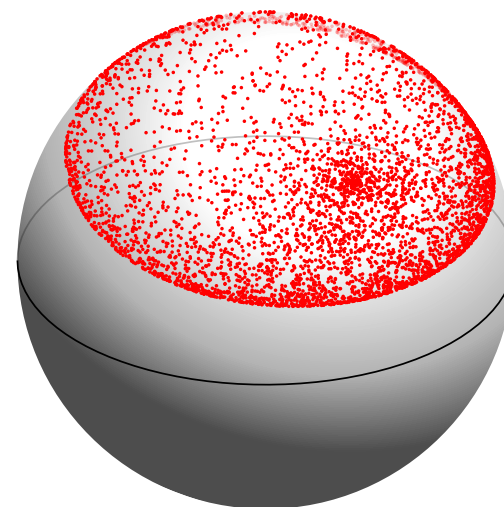
ou



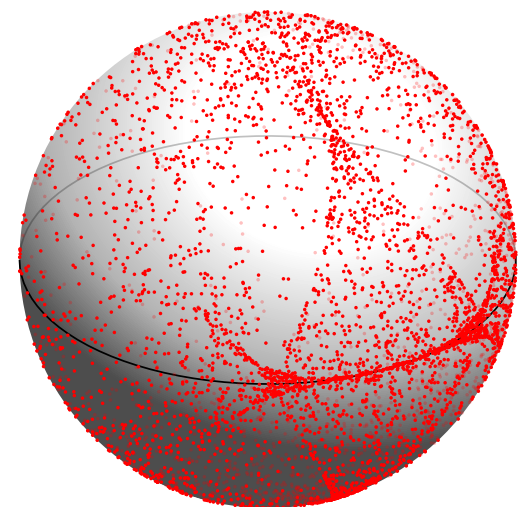
A deux dimensions :



peut conduire à



ou

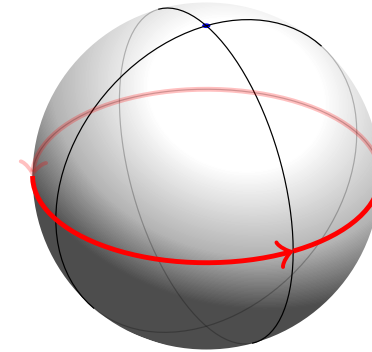


Couverture totale de la sphère de Bloch qui ne peut pas être « défroissée »

Un résultat de géométrie : le nombre d'enveloppements

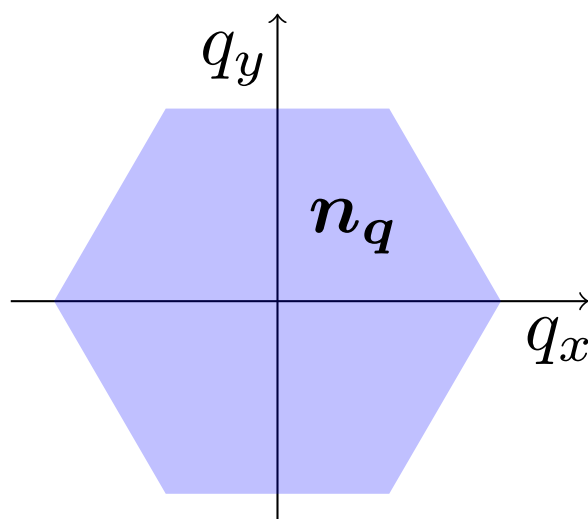
Nombre d'enroulements à une dimension :

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{ZB}} \frac{d\phi}{dq} dq$$

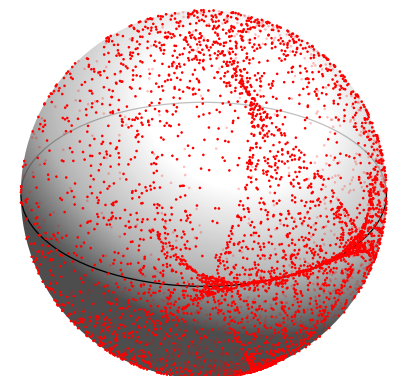


Nombre d'enveloppements à deux dimensions :

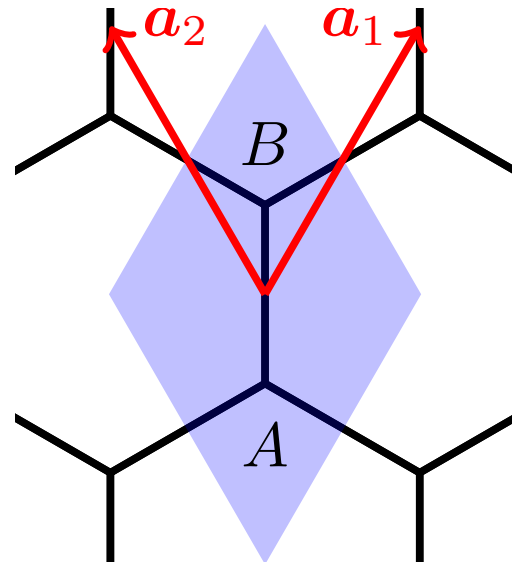
$$\mathcal{C} = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\text{ZB}} \mathbf{n} \cdot [(\partial_{q_x} \mathbf{n}) \times (\partial_{q_y} \mathbf{n})] dq_x dq_y$$



Entier qui est non nul si et seulement si la sphère est « enveloppée »
(cf. cours sur les pompes adiabatiques)



Le cas du graphène

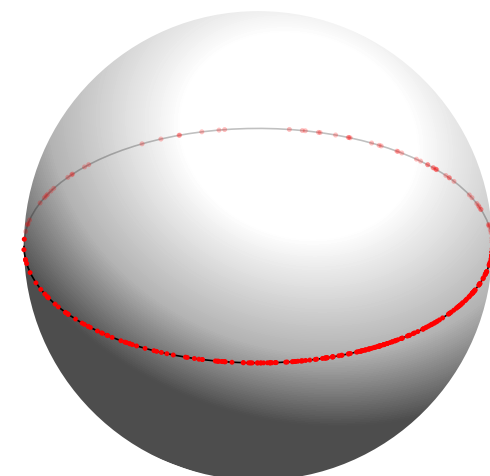
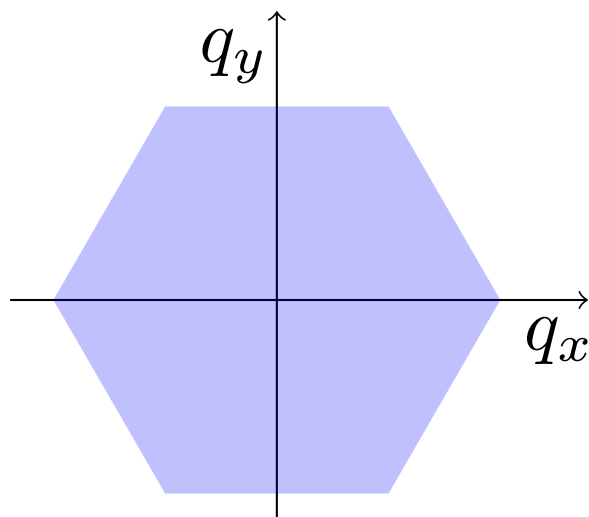


$E_A = E_B$ et pas de couplage aux seconds voisins :

→ $\hat{H}_q$ n'a pas d'éléments diagonaux

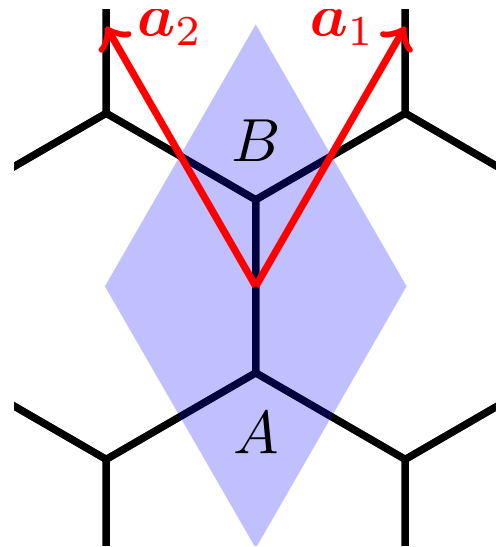
$$\hat{H}_q = -J \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1} + e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2} \\ 1 + e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1} + e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2} & 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\mathbf{h}_q$ reste dans le plan équatorial de la sphère de Bloch qui ne peut donc pas être recouverte



situation « marginale »

Couverture partielle ou totale ?



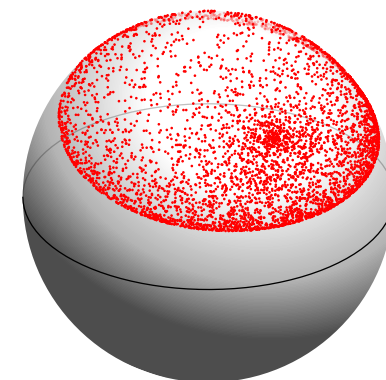
On rend les sites A et B asymétriques par un écart en énergie (cf. passage de SSH à Rice-Mele)

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = - \begin{pmatrix} \Delta & h_x(\mathbf{q}) - i h_y(\mathbf{q}) \\ h_x(\mathbf{q}) + i h_y(\mathbf{q}) & -\Delta \end{pmatrix}$$

$$E_A = -\Delta \qquad E_B = +\Delta$$

$$h_z(\mathbf{q}) = \Delta$$

Le signe de $h_z(\mathbf{q})$ est constant sur toute la zone de Brillouin : on ne couvre au plus qu'un hémisphère de la sphère de Bloch



Pour obtenir une couverture totale, il faut aller au delà des couplages entre proches voisins : modèle de Haldane (prochain cours)

3.

Bandes topologiques à deux dimensions :
caractérisation physique

L'effet Hall quantique

Gaz 2D d'électrons confinés dans un puits quantique avec un grand champ magnétique

$$[0, L_x] \times [0, L_y]$$

Tension $V_x = \mathcal{E}_x L_x$

Force sur une charge e : $F_x = e\mathcal{E}_x$

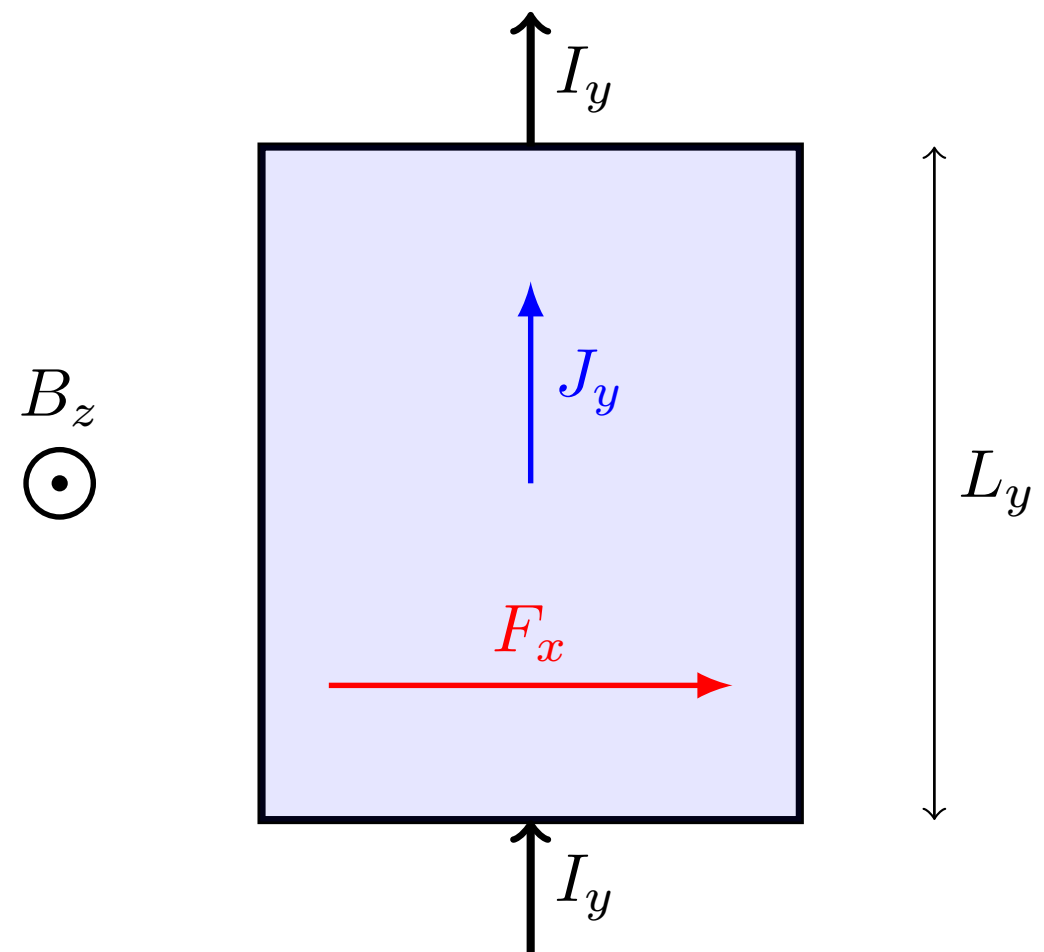
Courant selon la direction y : I_y

Densité de courant : $J_y = I_y / L_x$

Conductance de Hall : $I_y = \sigma_{yx} V_x$ ou $J_y = \sigma_{yx} \mathcal{E}_x$

Conductance quantifiée ! $\sigma_{yx} = \frac{e^2}{h} n$ n entier

Origine : nature topologique des bandes d'énergie (niveaux de Landau)

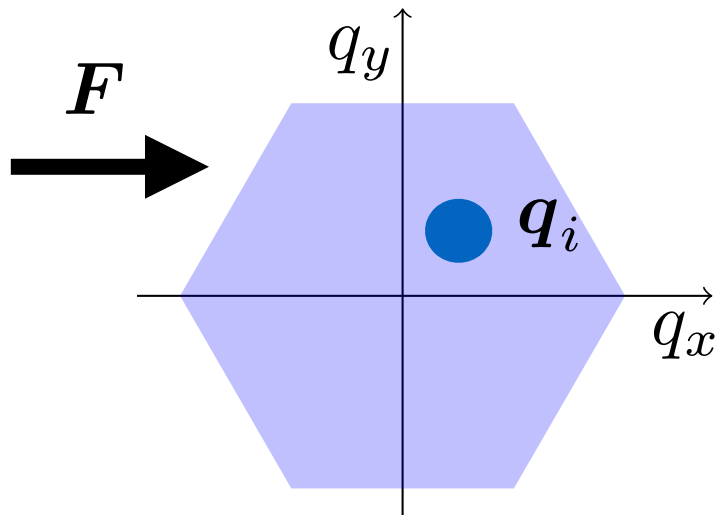


Equations du mouvement dans une bande

On se restreint à la bande fondamentale $|u_{\mathbf{q}}^{(0)}\rangle$ pour simplifier

Paquet d'ondes centré initialement en $\mathbf{q}_i$

On applique une force uniforme $\mathbf{F}$



$$\hbar \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{oscillations de Bloch}$$

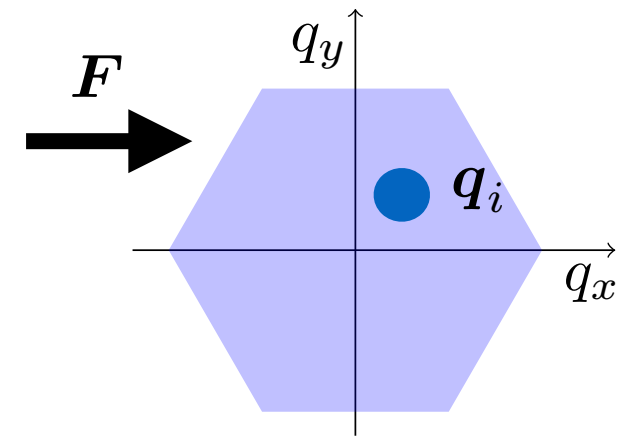
$$\hbar \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \hbar \mathbf{v} = \underbrace{\nabla_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{q}}^{(0)}}_{\text{vitesse de groupe}} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{q}} \times \mathbf{F}}_{\text{vitesse anormale}}$$

$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{q}}$: courbure de Berry pour la bande fondamentale

$$\mathcal{A}_{\mathbf{q}} = i \langle u_{\mathbf{q}}^{(0)} | \nabla_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}}^{(0)} \rangle \quad \text{: connexion de Berry}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{q}} \times \mathcal{A}_{\mathbf{q}} \quad \text{orientée selon } z \quad \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{q}} = i \langle \partial_{q_x} u_{\mathbf{q}}^{(0)} | \partial_{q_y} u_{\mathbf{q}}^{(0)} \rangle + \text{c.c.}$$

Equation 1 : évolution du moment



Hamiltonien en présence d'une force extérieure uniforme

$$\hat{H}_t = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{F}_t \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

Cet hamiltonien n'est plus périodique d'espace : perd-on le théorème de Bloch ?

Pas vraiment, grâce à la transformation unitaire :

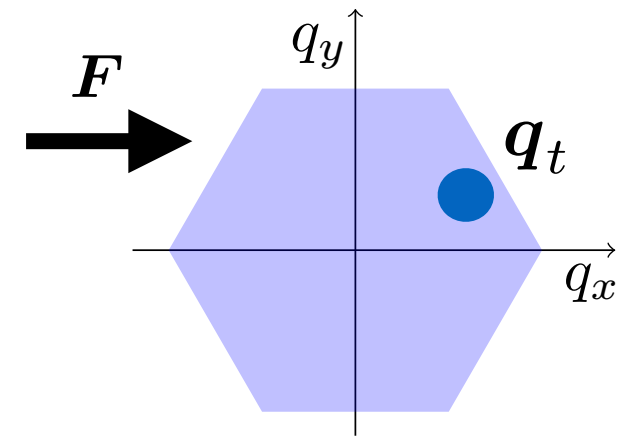
$$\hat{U}_t = \exp[-i \mathbf{A}_t \cdot \hat{\mathbf{r}}] \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_t = \frac{1}{\hbar} \int_0^t \mathbf{F}_{t'} dt' \quad \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{A}$$

Hamiltonien après transformation : $\hat{\tilde{H}}_t = \frac{(\hat{\mathbf{p}} + \hbar \mathbf{A}_t)^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}})$

- La forme de Bloch est préservée pour les états « transformés » : $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \tilde{\mathbf{q}}(0)$
- Si la force $\mathbf{F}$ est suffisamment faible, on reste dans la bande fondamentale

Retour aux états non transformés : $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(0) + \mathbf{A}(t) \longrightarrow \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{1}{\hbar} \mathbf{F}$

Equation 2 : la vitesse anormale



Approximation adiabatique à l'ordre 1 en la perturbation

$$|u_t\rangle = |u_{\mathbf{q}_t}^{(0)}\rangle + i\hbar \sum_{n \neq 0} |u_{\mathbf{q}_t}^{(n)}\rangle \frac{\langle u_{\mathbf{q}_t}^{(n)} | \partial_t u_{\mathbf{q}_t}^{(0)} \rangle}{E_{\mathbf{q}}^{(n)} - E_{\mathbf{q}}^{(0)}} + \dots$$

ordre 0: reste dans
la bande fondamentale

ordre 1: couplage aux bandes
excitées, linéaire en F

Vitesse moyenne d'un paquet d'ondes centré en $\mathbf{q}_t$:

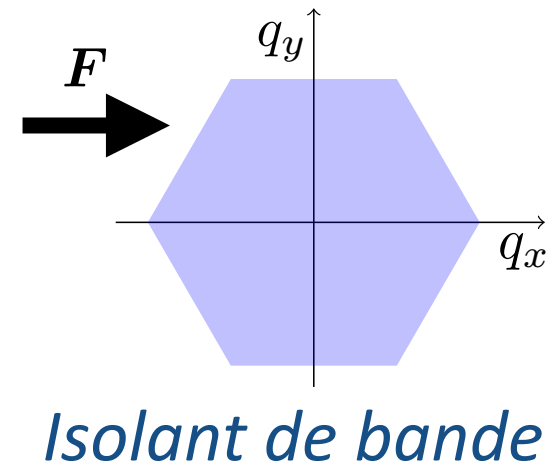
$$\mathbf{v} = \left(\langle u_t | e^{-i\mathbf{q}_t \cdot \mathbf{r}} \right) \frac{\hat{\mathbf{p}}}{m} \left(e^{i\mathbf{q}_t \cdot \mathbf{r}} | u_t \rangle \right) \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla_{\mathbf{r}}$$

Ordre 0 en F : $\mathbf{v}_0 = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{q}_t}^{(0)}$ **vitesse de groupe**

Ordre 1 en F : $\mathbf{v}_{1,t} = \frac{1}{\hbar} \Omega_{\mathbf{q}_t} \times \mathbf{F}_t$ **vitesse anormale** Karplus & Luttinger 1954
Adams & Blount 1959

$$\Omega_{\mathbf{q}} = i \langle \partial_{q_x} u_{\mathbf{q}}^{(0)} | \partial_{q_y} u_{\mathbf{q}}^{(0)} \rangle + \text{c.c.} : \text{courbure de Berry}$$

Conductance d'une bande pleine



1 particule par cellule unité :

bande fondamentale pleine, bandes excit es vides

On applique une force faible $\mathbf{F}$; quel est le courant de particules ?

$$\mathbf{J} = \rho^{(2D)} \langle \mathbf{v} \rangle \quad \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{A_{\text{ZB}}} \iint_{\text{ZB}} \mathbf{v}_{\mathbf{q}} d^2q$$

On utilise : $\hbar \mathbf{v}_{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{q}}^{(0)} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{q}} \times \mathbf{F}$

- Contribution de la vitesse de groupe nulle : « un isolant est non-conducteur » !
- Contribution de la vitesse anormale : courant perpendiculaire   $\mathbf{F}$

Pour une force orient e selon x , courant selon y : $J_y = \sigma_{yx} F_x$

$$\sigma_{yx} = \frac{1}{h} \mathcal{C}$$

conductivité de Hall

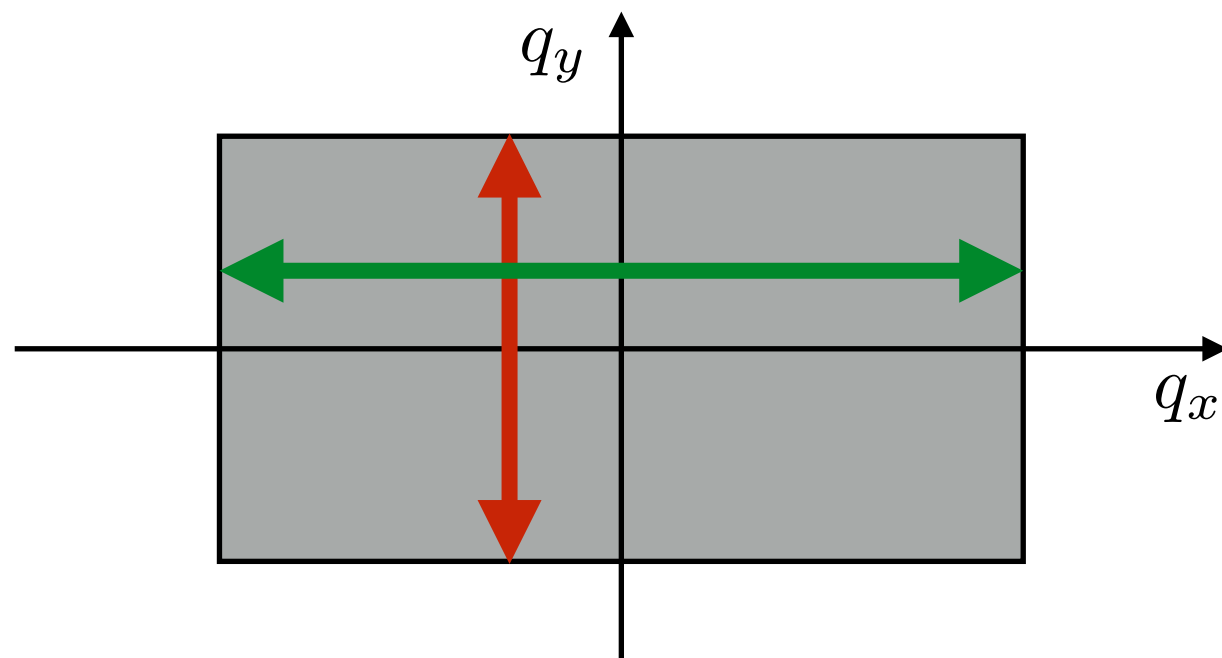
$$\mathcal{C} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\text{ZB}} \Omega_{\mathbf{q}} d^2q$$

nombre de Chern

Le nombre de Chern n'est-il pas toujours nul ?

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\text{ZB}} \Omega_{\mathbf{q}} \, d^2q \qquad \Omega_{\mathbf{q}} = \nabla \times \mathcal{A}_{\mathbf{q}} = \Omega_{\mathbf{q}} \, u_z$$

La zone de Brillouin a par construction des conditions aux limites périodiques



*cf. cours sur les pompes
adiabatiques*

Si la connexion de Berry $\mathcal{A}_{\mathbf{q}}$ est régulière sur l'ensemble de la zone de Brillouin, le théorème de Stokes donne

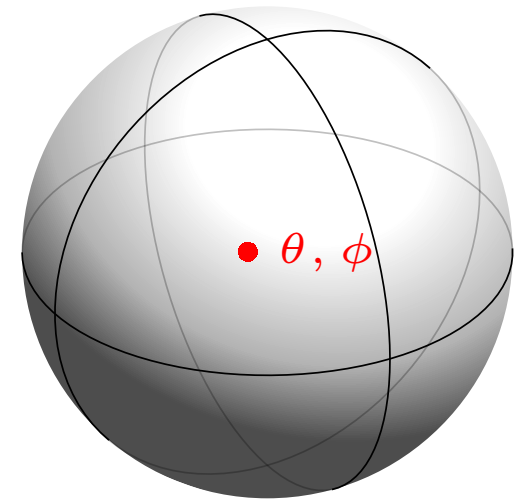
$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\text{ZB}} \Omega_{\mathbf{q}} \, d^2q = \frac{1}{2\pi} \oint_{\text{ZB}} \mathcal{A}_{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} = 0 !!!$$

mais la connexion de Berry n'est pas toujours régulière...

Les singularités de la connexion de Berry $\mathcal{A}_q$

Cellule unité à deux sites

choix de jauge : $|u\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$



Le problème du pôle sud : pour $\theta = \pi$, on obtient pour ce choix de jauge

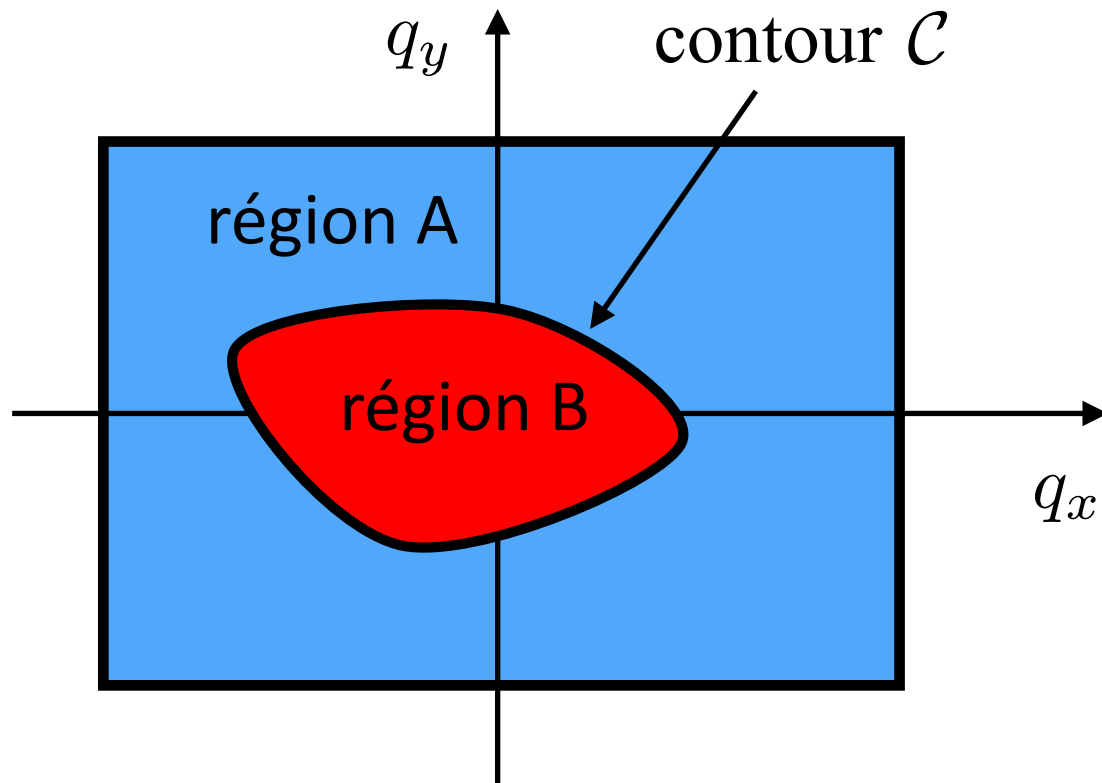
$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad \text{gradient infini en ce point}$$

Et pour une autre jauge, par exemple $\begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$?

Le problème du pôle sud est éliminé : $|u\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
... mais un problème est apparu au pôle nord : $\begin{pmatrix} e^{-i\phi} \\ 0 \end{pmatrix}$

Si la sphère de Bloch est complètement recouverte, pas de « bon » choix de jauge

Le nombre de Chern n'est pas toujours nul, mais c'est un entier



Séparation de la zone de Brillouin en deux régions A et B :

- Choix de jauge (I) non singulier sur A
- Choix de jauge (II) non singulier sur B

$$|u_{\mathbf{q}}^{(II)}\rangle = e^{-i\chi_{\mathbf{q}}} |u_{\mathbf{q}}^{(I)}\rangle$$

$$\mathcal{A}_{\mathbf{q}}^{(II)} = \mathcal{A}_{\mathbf{q}}^{(I)} + \nabla_{\mathbf{q}}\chi_{\mathbf{q}}$$

Intégrale surfacique de la courbure de Berry et théorème de Stokes :

$$\iint_{\text{ZB}} \Omega_{\mathbf{q}} d^2q = \iint_A \Omega_{\mathbf{q}} d^2q + \iint_B \Omega_{\mathbf{q}} d^2q = \left(\oint_{\text{ZB}} - \oint_{\mathcal{C}} \right) \mathcal{A}_{\mathbf{q}}^{(I)} \cdot d\mathbf{q} + \oint_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_{\mathbf{q}}^{(II)} \cdot d\mathbf{q}$$

Périodicité de la ZB: $\oint_{\text{ZB}} \mathcal{A}_{\mathbf{q}}^{(I)} \cdot d\mathbf{q} = 0$

Il reste : $\iint_{\text{ZB}} \Omega_{\mathbf{q}} d^2q = \oint_{\mathcal{C}} \nabla_{\mathbf{q}}\chi_{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} = \text{multiple de } 2\pi \quad \text{Q.E.D.}$

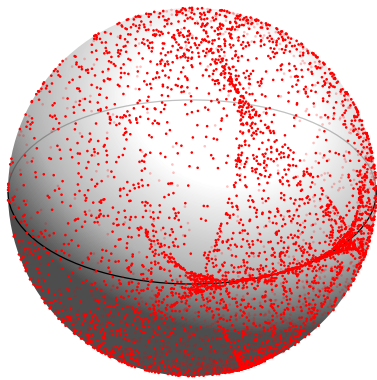
4.

Courbure de Berry dans un réseau 2D

Comparaison de nos deux approches

- Approche géométrique pour une cellule unité à deux sites :

Couverture de la sphère de Bloch quand $\mathbf{q}$ parcourt la zone de Brillouin



$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{\text{ZB}} \mathbf{n} \cdot [(\partial_{q_x} \mathbf{n}) \times (\partial_{q_y} \mathbf{n})] d^2q \quad \text{entier non nul}$$

- Approche physique : conductance de Hall quantifiée

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\text{ZB}} \Omega_{\mathbf{q}} d^2q \quad \text{entier non nul avec } \Omega_{\mathbf{q}} = i \langle \partial_{q_x} u_{\mathbf{q}}^{(-)} | \partial_{q_y} u_{\mathbf{q}}^{(-)} \rangle + \text{c.c.}$$

Quantités directement reliées : $|u_{\mathbf{q}}^{(-)}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$ et $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \Omega_{\mathbf{q}} = -\frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot [(\partial_{q_x} \mathbf{n}) \times (\partial_{q_y} \mathbf{n})] \quad : \text{les deux critères sont équivalents}$$

Nombre de Chern et symétries

Symétrie d'inversion : $\hat{S}_0 \psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r})$

Si $[\hat{S}_0, \hat{H}] = 0$ alors : $\Omega_{\mathbf{q}} = \Omega_{-\mathbf{q}}$

Symétrie par renversement du temps : $\mathbf{r} \longrightarrow \mathbf{r} \qquad \mathbf{p} \longrightarrow -\mathbf{p}$

Pour une fonction d'onde (sans spin) : $\hat{K}_0 \psi(\mathbf{r}) = \psi^*(\mathbf{r})$
 $\hat{K}_0 (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) = e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$

Si $[\hat{K}_0, \hat{H}] = 0$ alors : $\Omega_{\mathbf{q}} = -\Omega_{-\mathbf{q}} \longrightarrow \mathcal{C} = \frac{1}{2\pi} \iint \Omega_{\mathbf{q}} d^2q = 0$

Bande non topologique

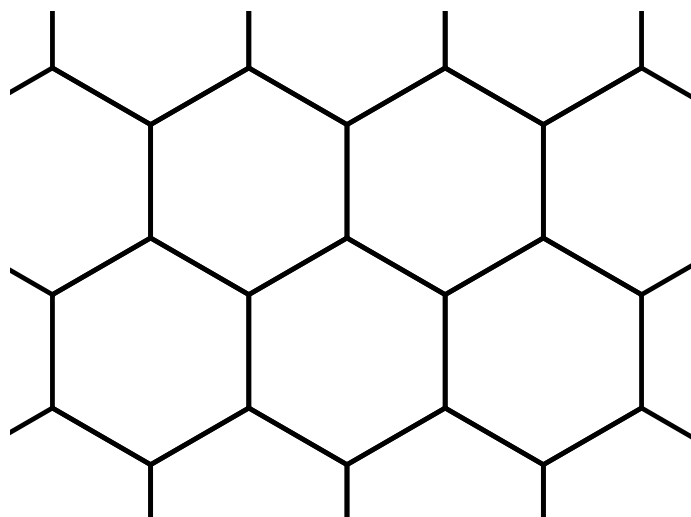
Si les deux symétries sont présentes simultanément : $\Omega_{\mathbf{q}} = 0$

Vitesse anormale nulle en tout point de la zone de Brillouin

Mesure locale de la courbure de Berry

Fläschner, Rem, et al., Science 352, 1091 (2016) [Hambourg]
Experimental reconstruction of the Berry curvature in a Floquet Bloch band

Réseau hexagonal modulé dans le temps dans une situation bien modélisée par l'approximation des liaisons fortes et le modèle à deux bandes



Mesure de Ω_q $\longleftrightarrow$ Mesure de $n_q : \theta_q, \phi_q$

Mesure de la distribution en impulsion des atomes occupant toute la bande fondamentale

Hauke, Lewenstein, Eckardt (2014)

Coupure instantanée du réseau et expansion balistique :

$$|u_{\mathbf{q}}^{(-)}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\mathbf{q}}/2) \\ e^{i\phi_{\mathbf{q}}} \sin(\theta_{\mathbf{q}}/2) \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{q}) = f(\mathbf{q}) \left| \cos(\theta_{\mathbf{q}}/2) + e^{i\phi_{\mathbf{q}}} \sin(\theta_{\mathbf{q}}/2) \right|^2$$

Enveloppe : fonction de
Wannier de chaque site A ou B

Mesure locale de la courbure de Berry (2)

$$|u_{\mathbf{q}}^{(-)}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\mathbf{q}}/2) \\ e^{i\phi_{\mathbf{q}}} \sin(\theta_{\mathbf{q}}/2) \end{pmatrix}$$

Signal après expansion balistique :

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}) = f(\mathbf{q}) \left| \cos(\theta_{\mathbf{q}}/2) + e^{i\phi_{\mathbf{q}}} \sin(\theta_{\mathbf{q}}/2) \right|^2 = f(\mathbf{q}) [1 - \sin \theta_{\mathbf{q}} \cos \phi_{\mathbf{q}}]$$

Pour obtenir séparément $\theta_{\mathbf{q}}$ et $\phi_{\mathbf{q}}$, procédure en plusieurs étapes :

- Préparation dans le réseau
- « Trempe soudaine » (quench) : $\hat{H}'_{\mathbf{q}} = (\hbar\omega_0/2) \hat{\sigma}_z$ pendant une durée t
- Expansion balistique

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}, t) = f(\mathbf{q}) [1 - \sin \theta_{\mathbf{q}} \cos(\phi_{\mathbf{q}} + \omega_0 t)]$$

L'étude de l'évolution temporelle de $\mathcal{N}(\mathbf{q}, t)$ pour un grand nombre de points de la zone de Brillouin permet de déduire $\theta_{\mathbf{q}}, \phi_{\mathbf{q}}$ en ces points, et donc $\Omega_{\mathbf{q}}$

Résultats de l'expérience de Hambourg

Fläschner, Rem, et al.,
Science (2016)

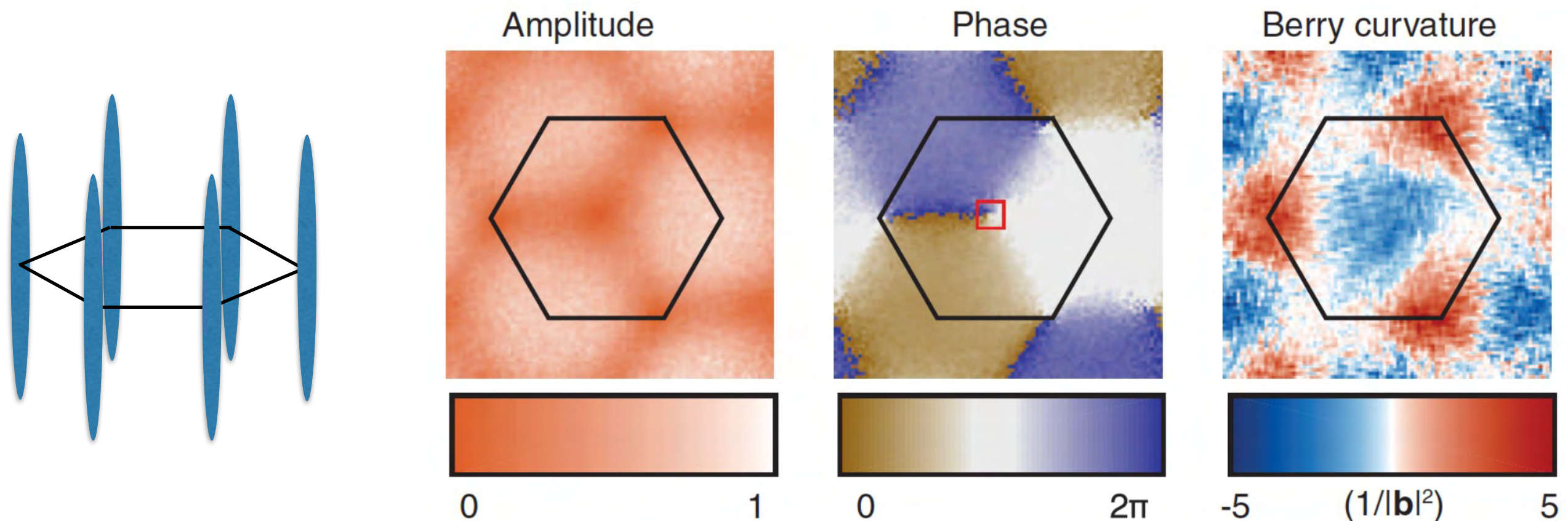
Réseau hexagonal de tubes

Atomes de ^{40}K

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}, t) = f(\mathbf{q}) [1 - \sin \theta_{\mathbf{q}} \cos(\phi_{\mathbf{q}} + \omega_0 t)]$$

Amplitude : $\sin \theta_{\mathbf{q}}$

Phase : $\phi_{\mathbf{q}}$



Reconstruction de la courbure : $\Omega_{\mathbf{q}} = i \langle \partial_{q_x} u_{\mathbf{q}}^{(-)} | \partial_{q_y} u_{\mathbf{q}}^{(-)} \rangle + \text{c.c.} = \frac{1}{2} \sin \theta (\nabla_{\mathbf{q}} \phi \times \nabla_{\mathbf{q}} \theta) \cdot \mathbf{u}_z$

Pour ce réseau particulier : $\iint \Omega_{\mathbf{q}} d^2 q = 0$ **Bande non topologique**

Conclusion

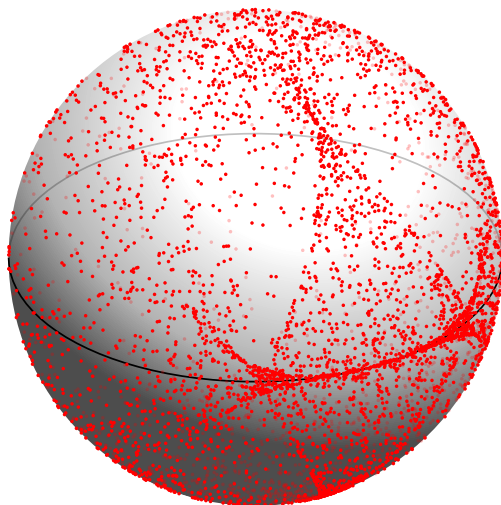
Nous disposons désormais d'un critère physique pour caractériser la topologie d'une bande d'énergie dans un réseau à deux dimensions

Conductance de Hall quantifiée pour une bande uniformément remplie

$$\sigma_{yx} = \frac{1}{h} \mathcal{C} \quad \text{avec} \quad \mathcal{C} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\text{ZB}} \Omega_{\mathbf{q}} \, d^2q \quad \textbf{entier}$$

rôle central de la courbure de Berry

Pour une cellule unité à deux sites, le critère $\mathcal{C} \neq 0$ coïncide avec la condition de recouvrement de la sphère de Bloch



Quels sont les modèles physiques conduisant à un tel recouvrement ?