

La matière topologique et son exploration avec les gaz quantiques

Le modèle de Harper - Hofstadter : l'effet Hall retrouvé

http://www.phys.ens.fr/~dalibard/2018_CdF.html

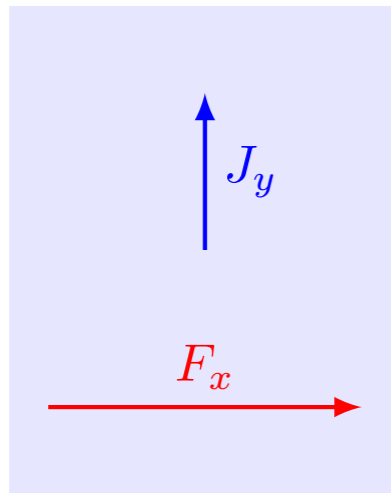
Jean Dalibard
Chaire *Atomes et rayonnement*
Année 2017-18



COLLÈGE
DE FRANCE
— 1530 —

Bilan des cours précédents

Caractérisation des bandes topologiques dans des réseaux à 1 et 2 dimensions



- **Conductivité quantifiée pour une bande pleine**

$$J_y = \sigma_{yx} F_x \quad \text{avec} \quad \sigma_{yx} = \frac{\mathcal{C}}{2\pi\hbar}$$

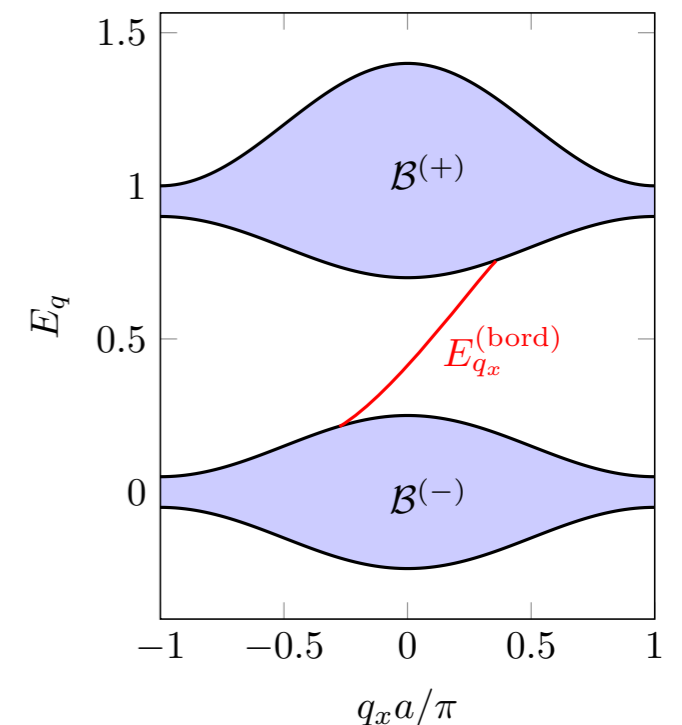
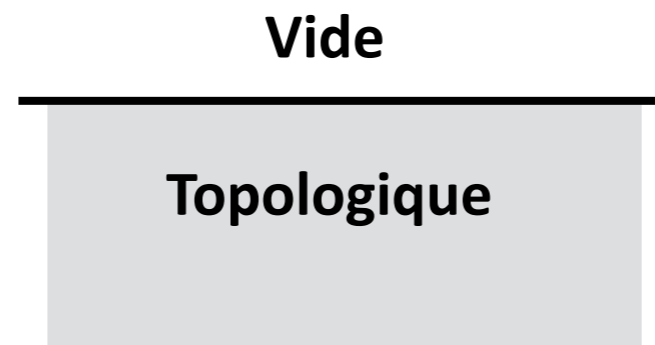
Force extérieure appliquée selon l'axe x

Courant de particules selon l'axe y

\mathcal{C} : nombre de Chern (entier) associé à la bande

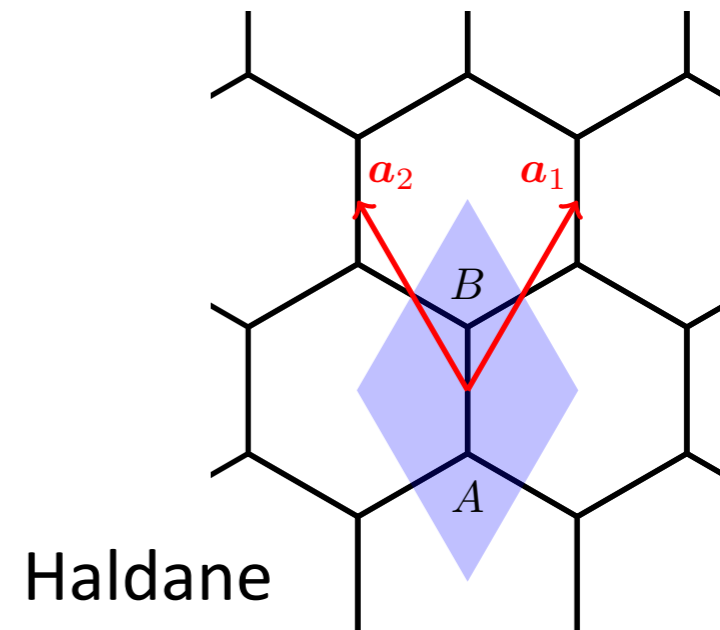
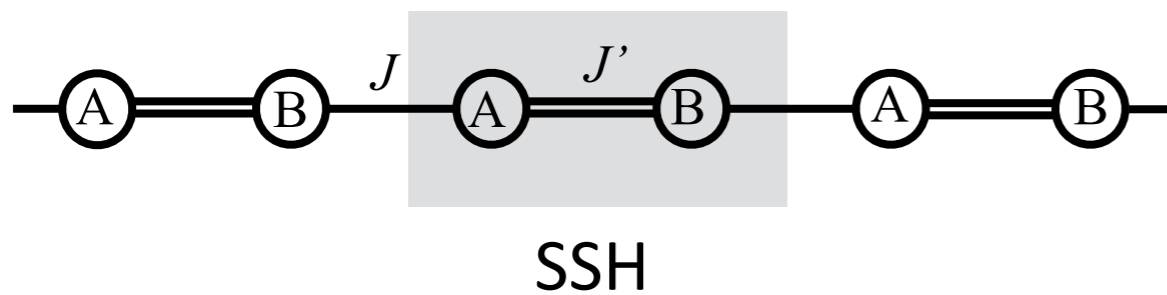
- **Existence d'états de bord**

Canal de propagation mono-mode à l'interface entre deux régions



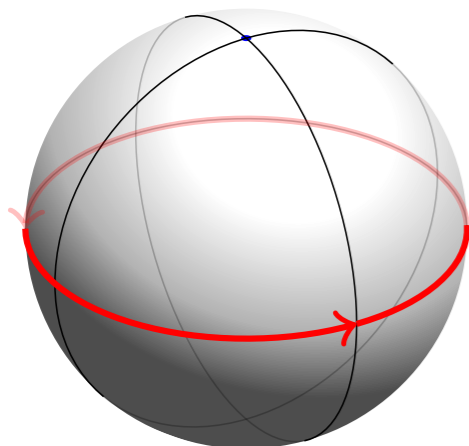
Bilan des cours précédents (suite)

Construction de modèles conduisant à des bandes topologiques



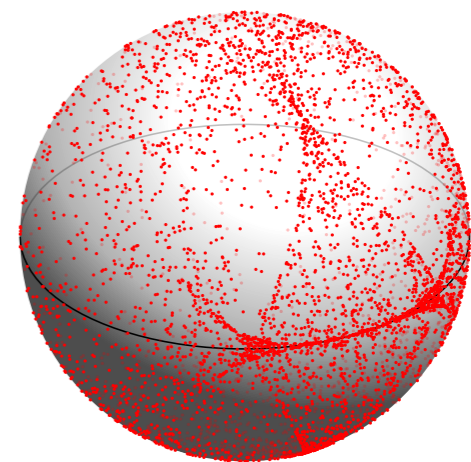
Intérêt de ces modèles : cellule unité à deux sites

→ l'hamiltonien périodique \hat{H}_q est une matrice 2x2



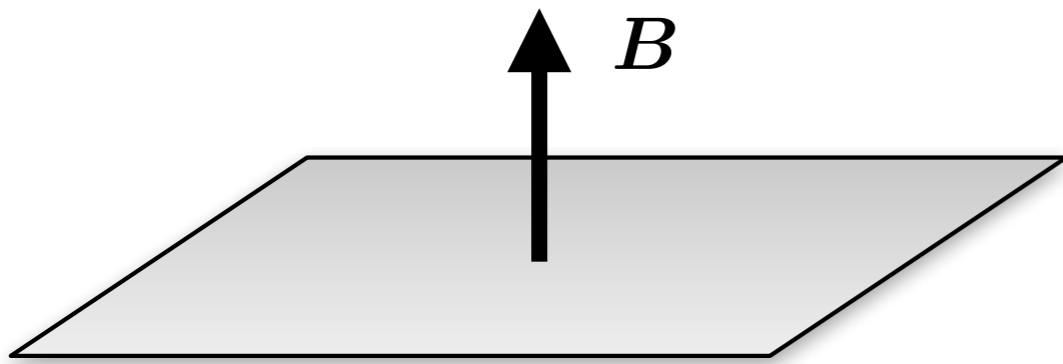
- Simplicité des calculs
- Pseudo-spin 1/2

Analyse géométrique à partir de la sphère de Bloch



But de ce cours

Historiquement, la notion de bande topologique est d'abord apparue pour un problème continu vis à vis de l'espace



Gaz 2D d'électrons (puits quantique)

Egalement une conductance de Hall σ_{yx} quantifiée :

Comment faire le lien avec les modèles discrétisés que nous avons utilisés jusqu'ici ?

Plan de ce cours

1. Le modèle de Harper-Hofstadter

Passage d'un problème continu à un problème discret

Modèle de liaisons fortes, mais avec une « grande » cellule unité
uniquement des couplages aux premiers voisins

2. Implémentation avec des atomes froids

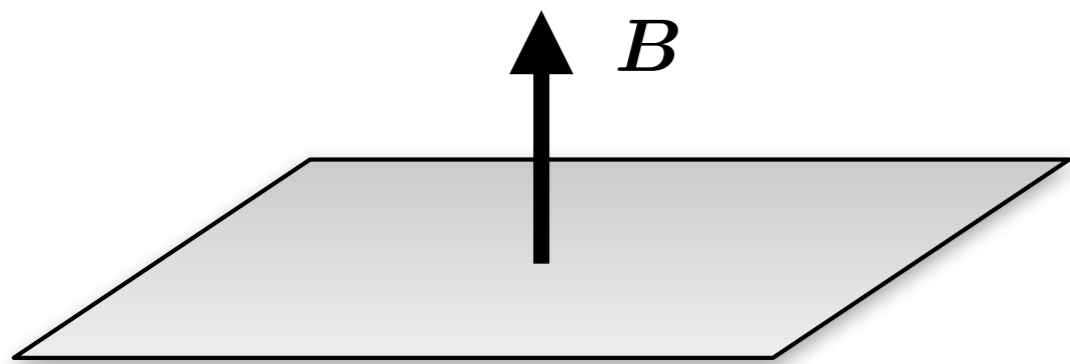
Mesure d'un nombre de Chern

3. Implémentation en photonique

Canaux de bord et laser topologique

Perspectives : utilisation de la structure interne d'un atome

Les niveaux de Landau



Particule de charge e bougeant librement dans le plan xy en présence d'un champ magnétique

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2m} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{r}} & \text{opérateur } \textit{impulsion} \\ \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} & \text{par exemple : } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -By \mathbf{u}_x \end{array} \right.$$

Approche possible : utilisation de l'opérateur *quantité de mouvement* $\hat{\Pi} = \hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})$

L'hamiltonien s'écrit $\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\Pi}_x^2 + \hat{\Pi}_y^2)$ avec $[\hat{\Pi}_x, \hat{\Pi}_y] = i\hbar eB$

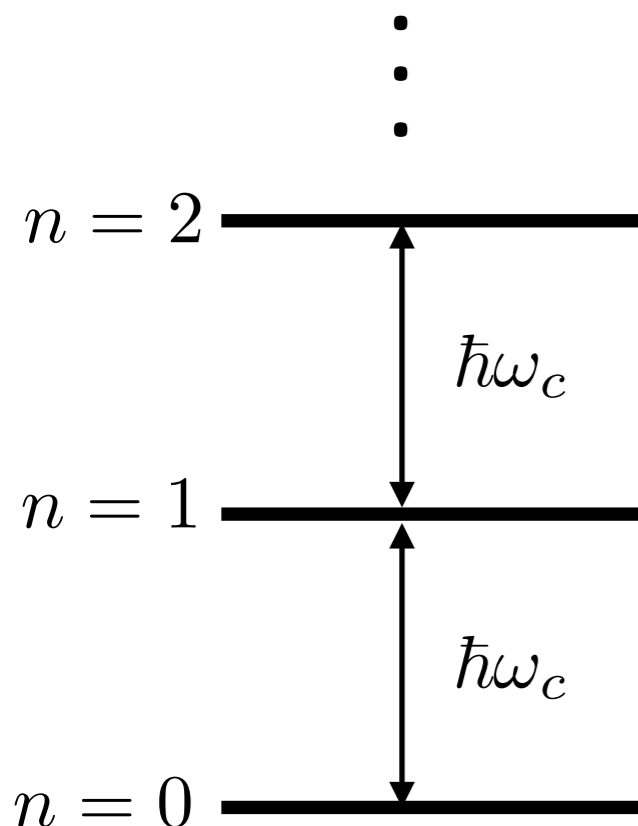
Analogie formelle avec un oscillateur harmonique à une dimension

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{X}^2 + \hat{P}^2) \quad \text{avec} \quad [\hat{X}, \hat{P}] = i$$

Les niveaux de Landau (suite)

L'analogie avec le formalisme d'un oscillateur harmonique 1D indique que le spectre d'énergie sera composé de niveaux équidistants

$$\left. \begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m} \left(\hat{\Pi}_x^2 + \hat{\Pi}_y^2 \right) \\ [\hat{\Pi}_x, \hat{\Pi}_y] &= i \hbar e B \end{aligned} \right\} \begin{aligned} E_n &= \hbar \omega_c \left(n + 1/2 \right) \\ \omega_c &= eB/m \quad : \text{ pulsation cyclotron} \end{aligned}$$

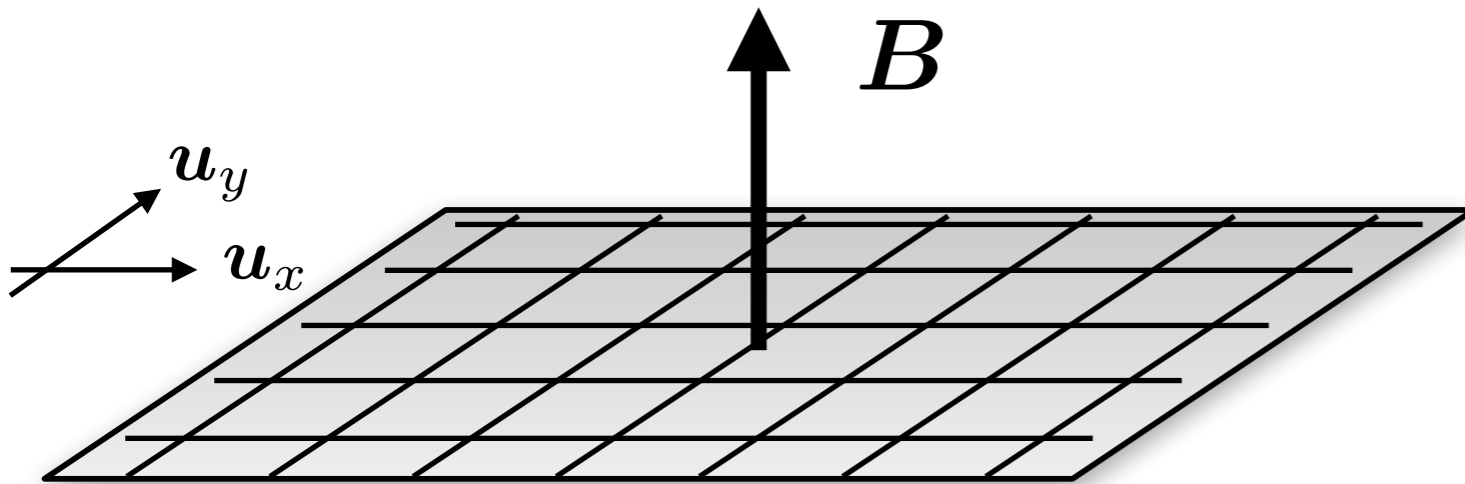


Chaque niveau d'énergie possède une dégénérescence macroscopique :

$$\text{dégénérescence} = \frac{\mathcal{S}}{2\pi\ell^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S} : \text{ aire de l'échantillon} \\ \ell = (\hbar/eB)^{1/2} \\ \text{longueur magnétique} \end{array} \right.$$

Bandes d'énergie plates avec $\mathcal{C} = 1$

Réseau carré et champ magnétique



On discrétise le plan xy :

$$A_j : \quad \mathbf{r}_j = a (j_x \mathbf{u}_x + j_y \mathbf{u}_y)$$

Dynamique d'une particule avec un couplage entre proches voisins :

$$\hat{H}_0 = -J \sum_{\langle j, j' \rangle} |A_{j'}\rangle \langle A_j| \quad \text{en l'absence de champ magnétique}$$

$$\text{Bande d'énergie : } E_{\mathbf{q}} = -2J [\cos(q_x a) + \cos(q_y a)]$$

Prise en compte du champ magnétique : J remplacé par $J \exp[i \gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}')]]$

Rôle du facteur de phase : assurer une phase de Aharonov-Bohm correcte sur un contour

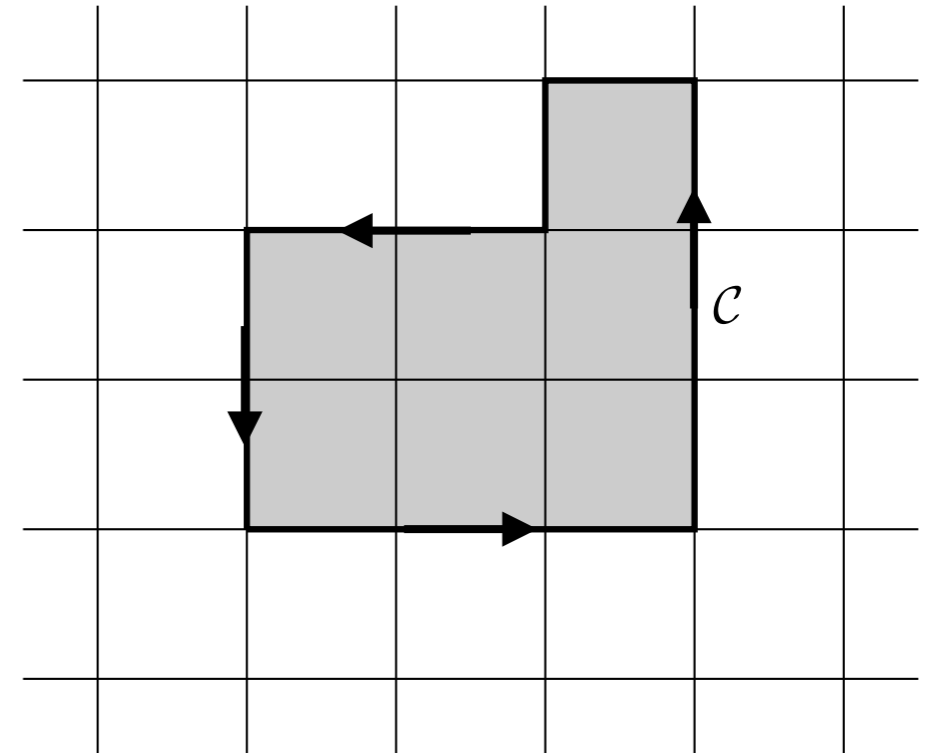
Choix du facteur de phase $J \exp[i \gamma(j \rightarrow j')]$

Contour arbitraire sur le réseau carré :

$$\Phi(\mathcal{C}) \equiv \sum_{\text{contour}} \gamma(j \rightarrow j')$$

doit être proportionnel au flux ϕ du champ magnétique à travers \mathcal{C} :

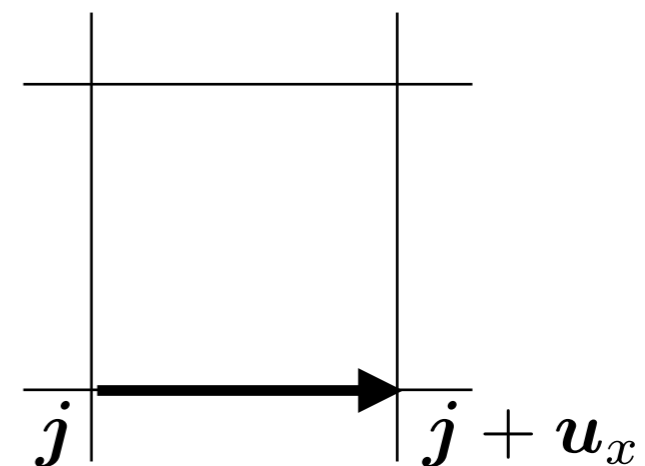
$$\Phi(\mathcal{C}) = \frac{e}{\hbar} \phi \quad \text{mod } (2\pi)$$



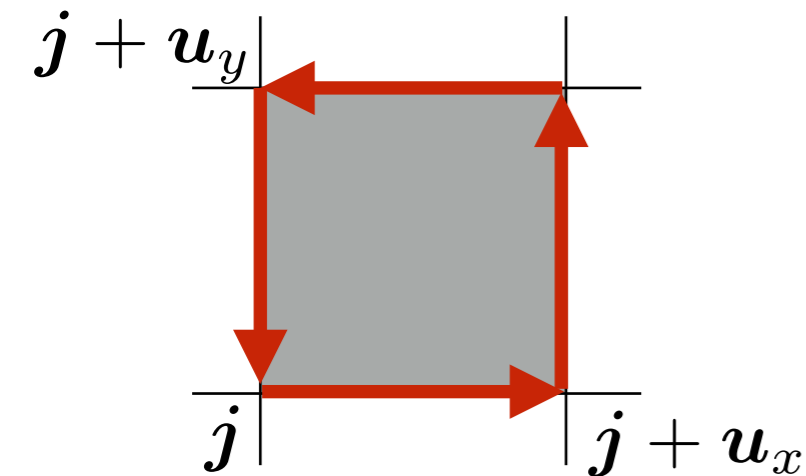
Une solution possible (Peierls) : on se donne un potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ pour le cas continu et on pose pour chaque lien du réseau

$$\gamma(j \rightarrow j') = \frac{e}{\hbar} \int_{a_j}^{a_{j'}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

$$\gamma(j' \rightarrow j) = -\gamma(j \rightarrow j') \quad (\hat{H} \text{ hermitien})$$



Flux magnétique par cellule unité



Avec cette discrétisation de l'espace, le champ magnétique est entièrement défini par son flux à travers une cellule unité d'aire a^2

$$\Phi_{\text{cellule}} \equiv \sum_{4 \text{ liens}} \gamma(j \rightarrow j')$$

Les deux valeurs Φ_{cellule} et $\Phi_{\text{cellule}} + 2\pi$ correspondent aux mêmes coefficients tunnel

$$J \exp[i \gamma(j \rightarrow j')]$$

et donc à la même situation physique (taille minimale des orbites cyclotron)

On pose traditionnellement $\Phi_{\text{cellule}} = 2\pi \alpha$ et on choisit α tel que

$$0 \leq \alpha < 1$$

Dans ce qui suit, on prendra typiquement $\alpha = 1/4$

La cellule unité magnétique

Le fait de remplacer le coefficient tunnel J par $J \exp[i \gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}')]$ fait perdre la périodicité spatiale du réseau initial

Perte complète ?

Pas toujours : exemple du flux $\alpha = 1/4$

$$\longleftrightarrow \Phi_{\text{cellule}} = \frac{\pi}{2}$$

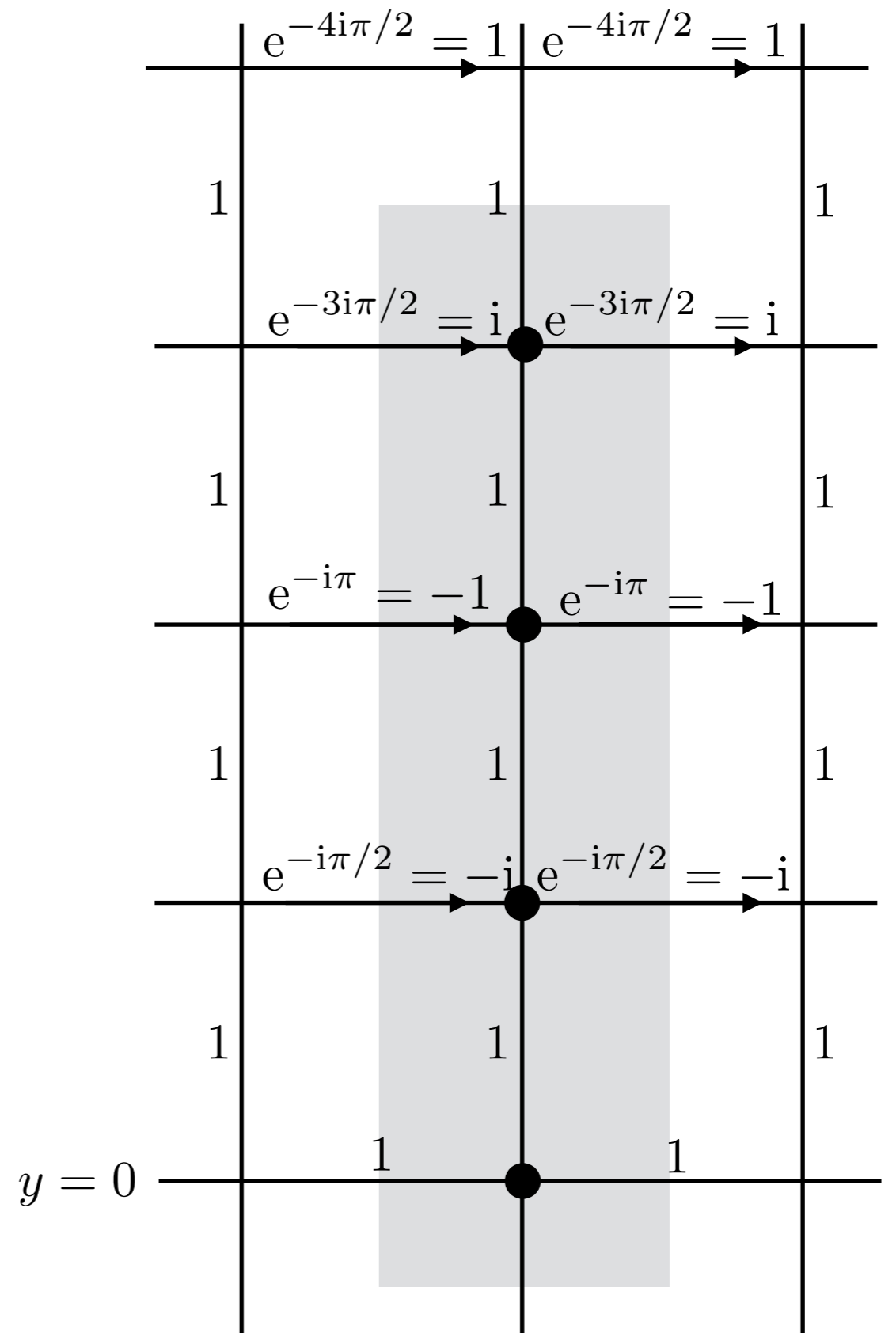
Choix de jauge : $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -By \mathbf{u}_x$

Que valent les coefficients tunnel

$$J \exp[i \gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}')]$$

avec la prescription

$$\gamma(\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}') = \frac{e}{\hbar} \int_{a\mathbf{j}}^{a\mathbf{j}'} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} ?$$

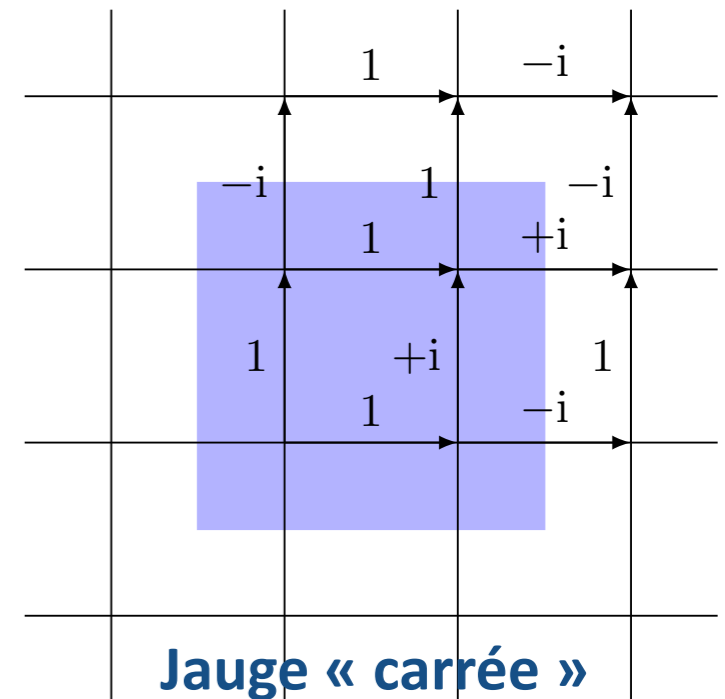
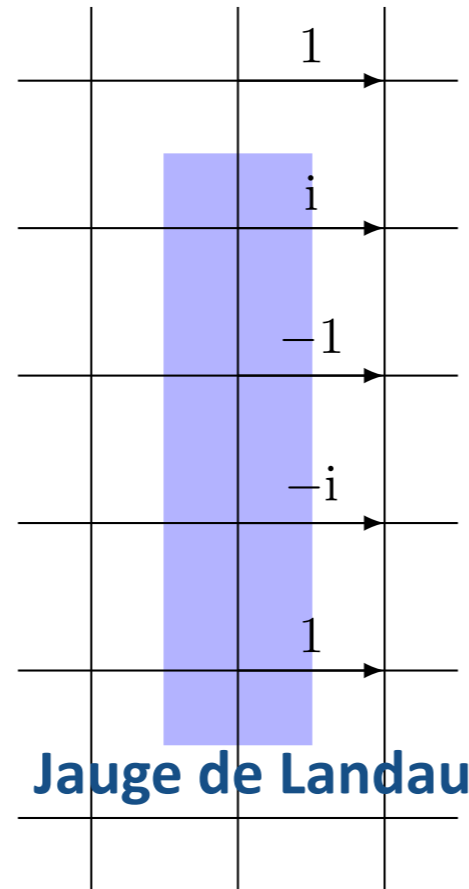


On passe à une cellule unité magnétique à 4 sites

Le choix de la cellule unité magnétique

Pour un flux $\Phi_{\text{cellule}} = 2\pi \alpha$ donné, plusieurs choix sont possibles

Exemple du flux $\alpha = 1/4$:

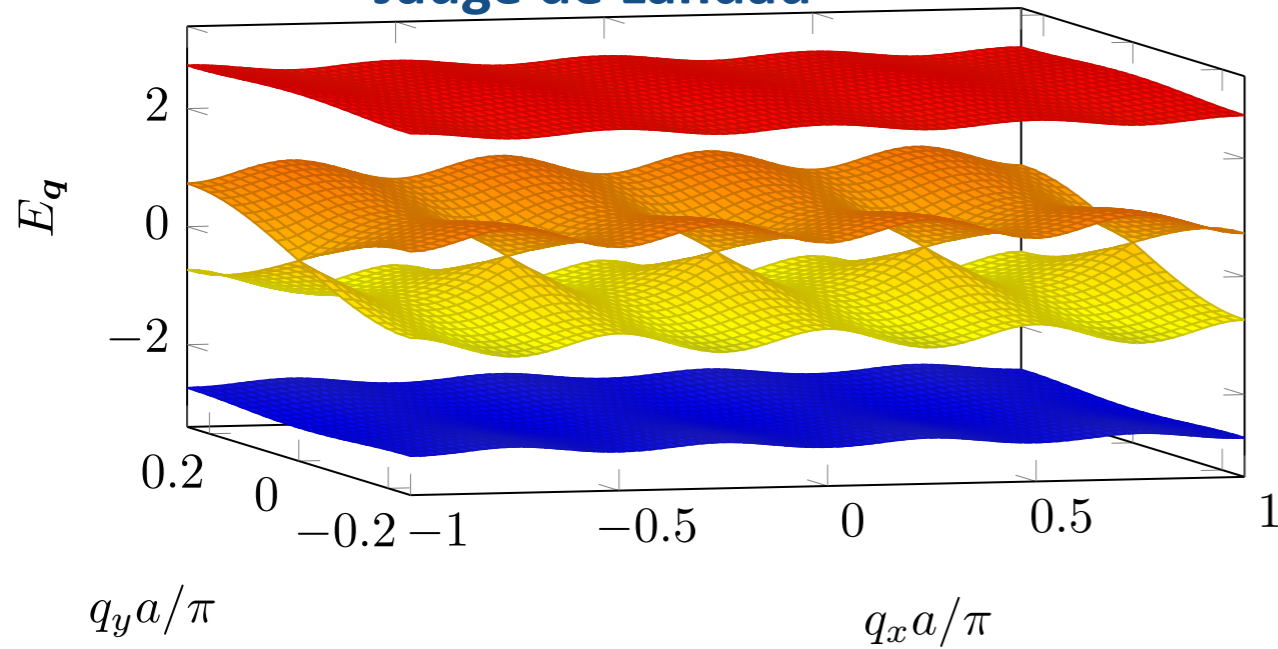


Tous ces choix conduisent aux mêmes propriétés physiques
(spectre, nombre de Chern) : invariance de jauge

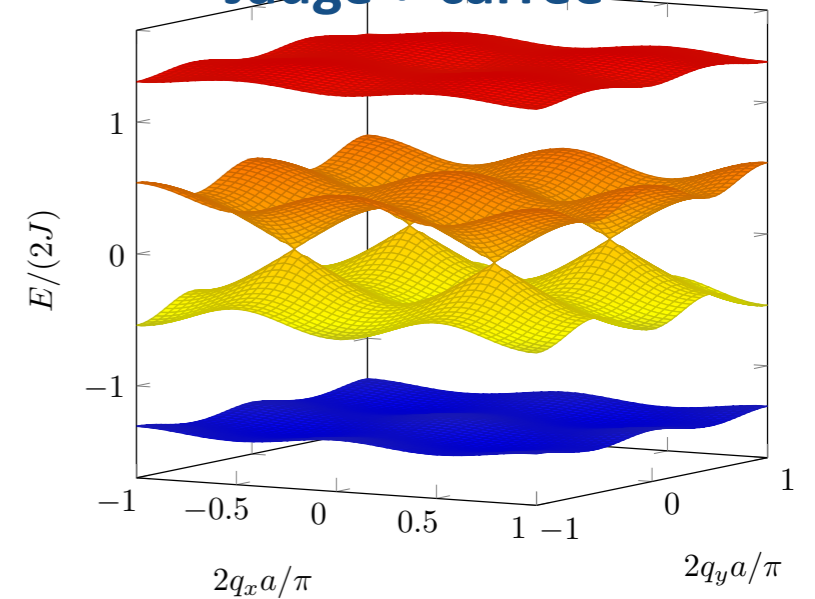
On retrouve la limite continue quand $\alpha = 1/p \rightarrow 0$

Energies et topologie pour le flux $\alpha = 1/4$

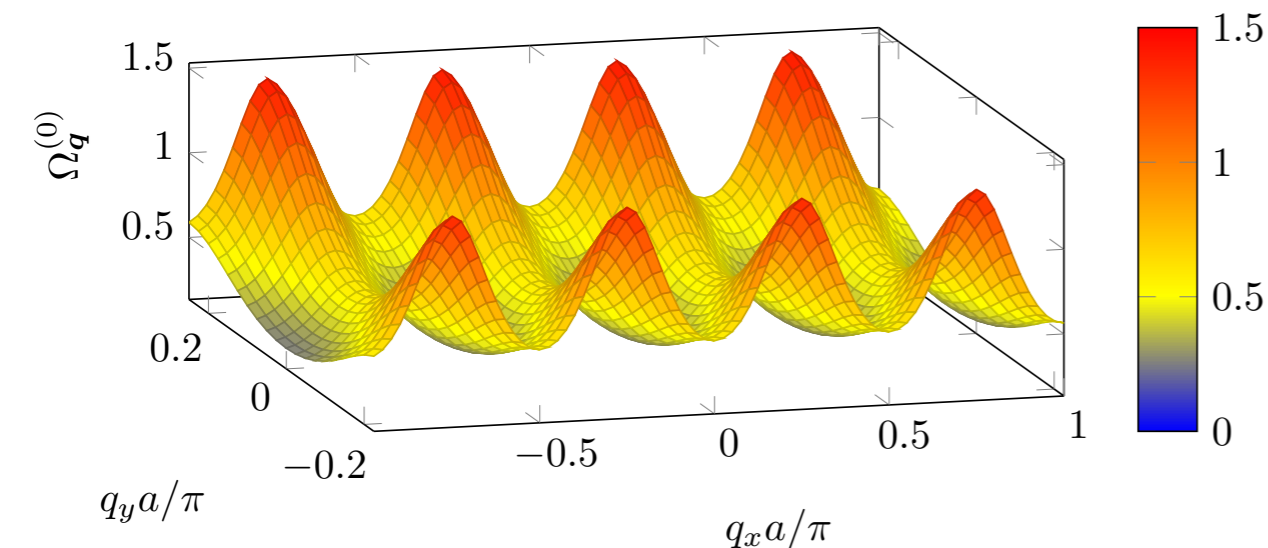
Jauge de Landau



Jauge « carrée »



Bande fondamentale presque plate : intéressant en présence d'interactions pour la recherche d'états fortement corrélés



Courbure de Berry de la bande fondamentale

toujours positive

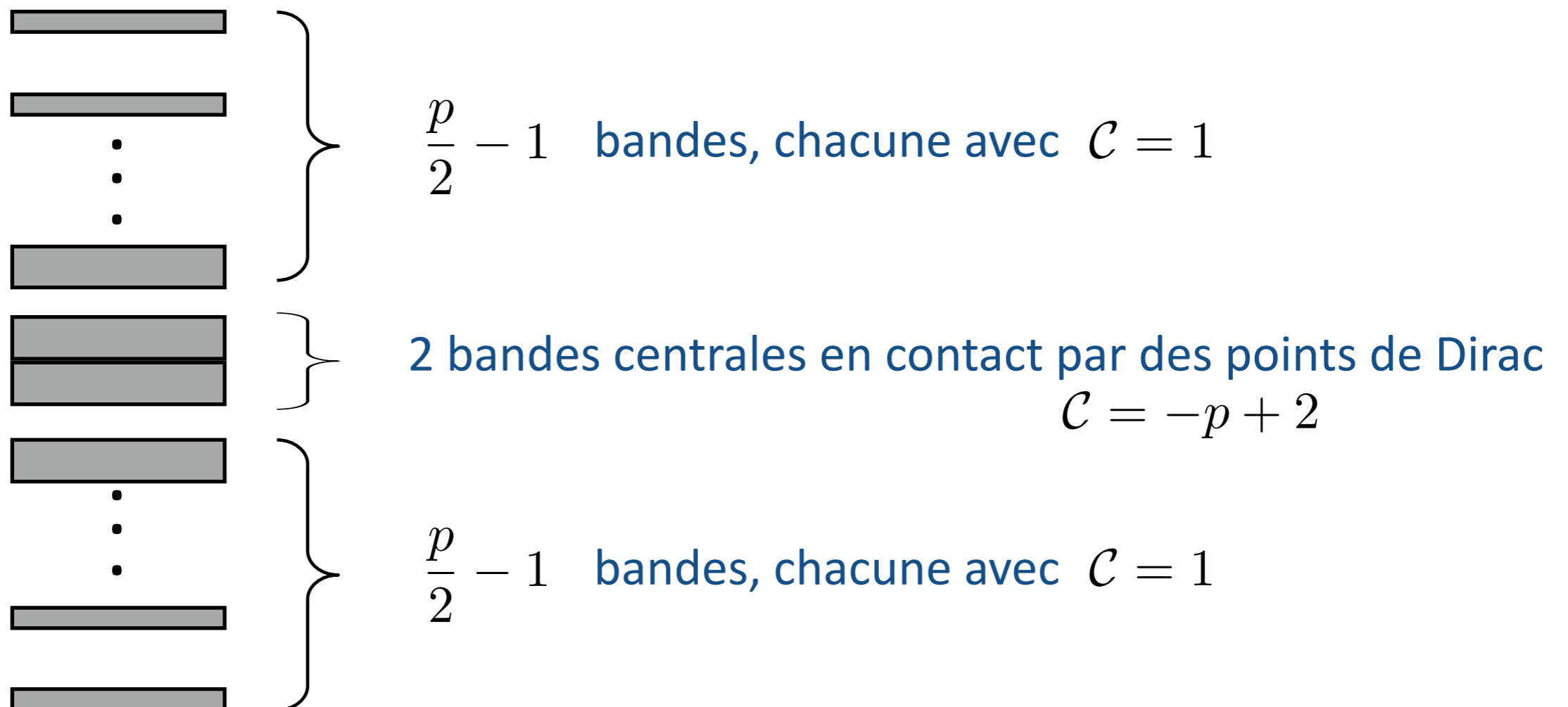
$$\mathcal{C} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\text{ZB}} \Omega_{\mathbf{q}} d^2q = 1$$

Courbure de Berry pour le problème Harper-Hofstadter

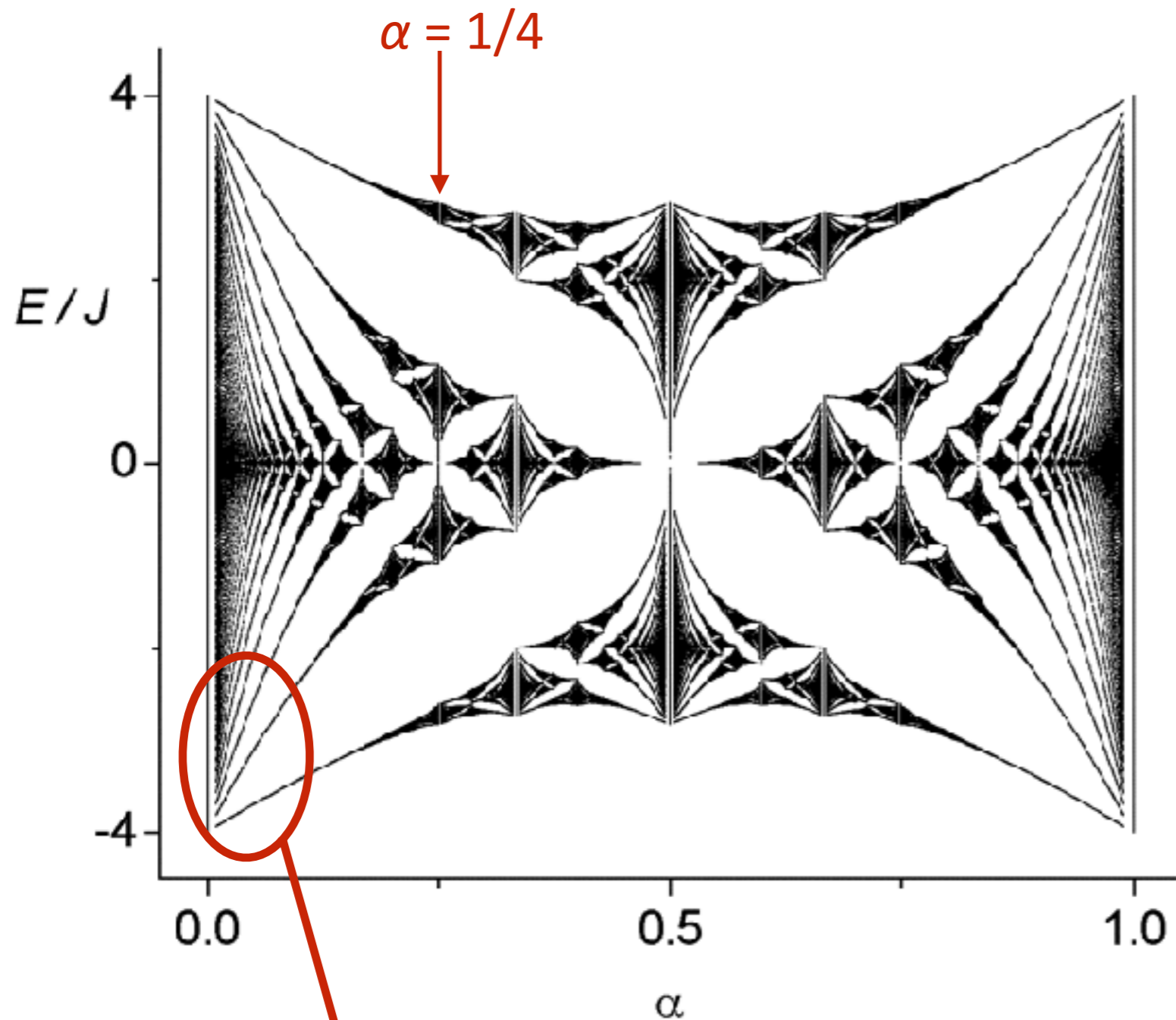
Flux $\alpha = 1/p$, avec p entier (choisi ici pair)

Thouless *et al* (TKNN), 1982

- Cellule magnétique unité à p sites
- La bande d'énergie initiale pour $B=0$ se scinde en p bandes, symétriques / $E = 0$



Le spectre général : papillon de Hofstadter



Calculé ici pour les flux rationnels

$$\alpha = p'/p$$

$$1 \leq p, p' \leq 100$$

Spectre de nature fractale

Niveaux très fins et équidistants : on retrouve les niveaux de Landau

2.

Implémentation avec des atomes froids

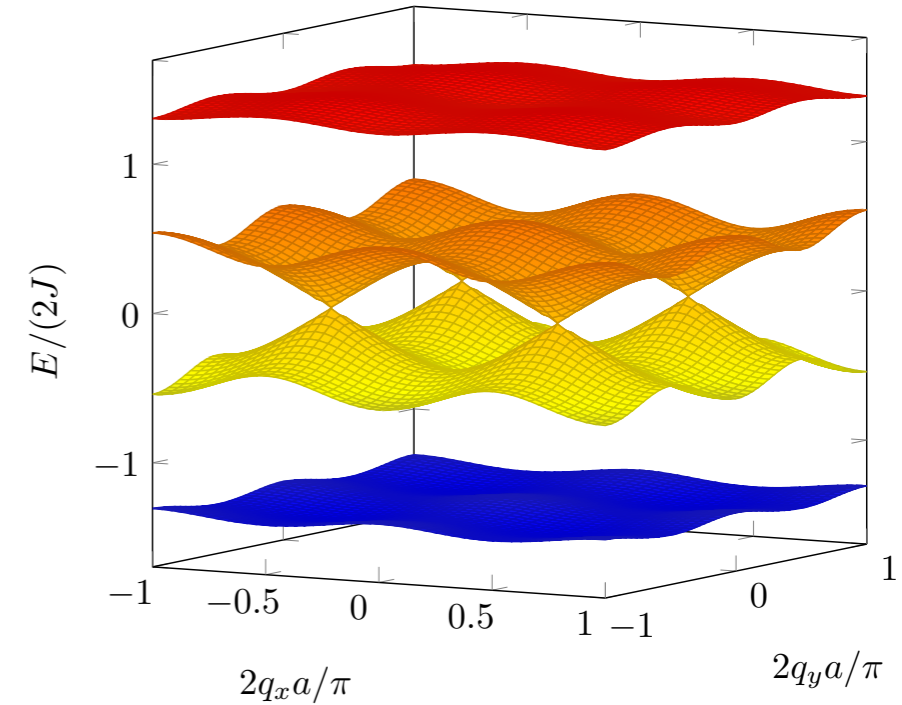
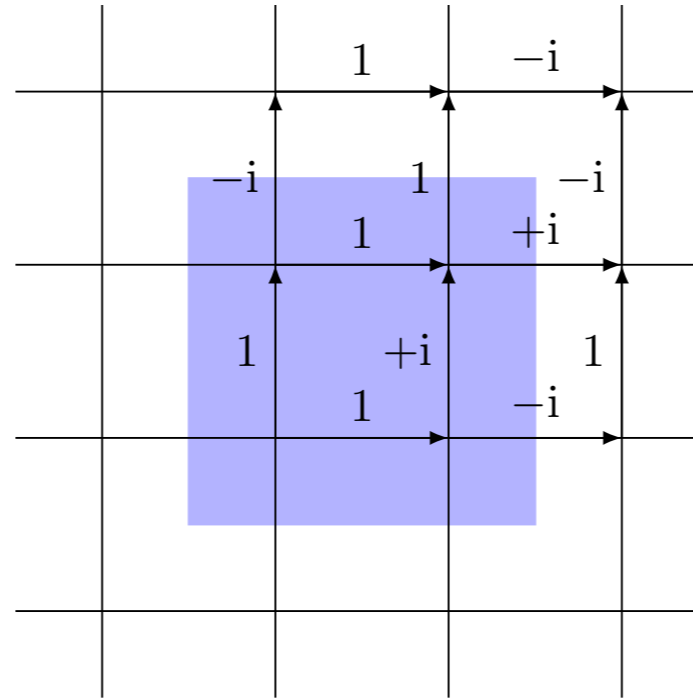
M. AIDELSBURGER, M. LOHSE, C. SCHWEIZER, M. ATALA, J. T. BARREIRO,
S. NASCIMBÈNE, N. R. COOPER, I. BLOCH & N. GOLDMAN

Measuring the Chern number of Hofstadter bands with ultracold bosonic atoms

Nature Physics **11**, p. 162 (2015)

Utilisation d'un super-réseau

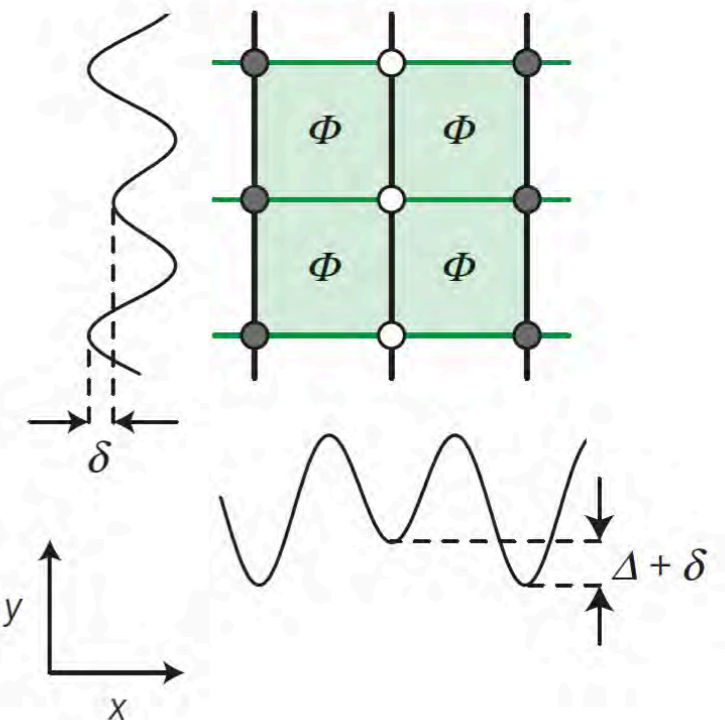
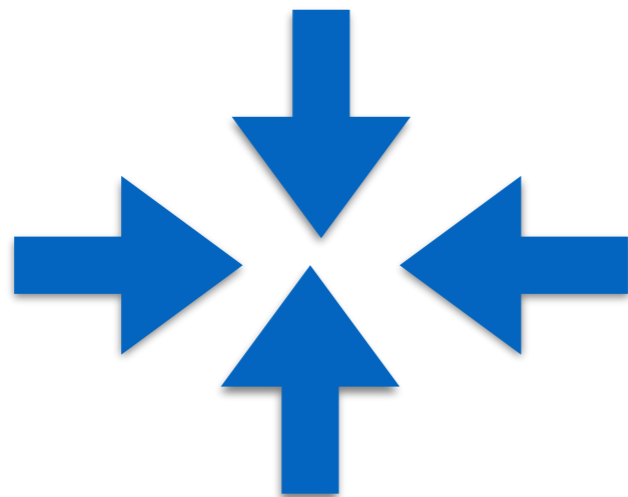
On vise le flux $\alpha = 1/4$



Comment créer des coefficients tunnel complexes ?

Comment mettre les atomes dans la bande fondamentale ?

Réseau optique à 2D (longueur d'onde $\lambda=0.77 \mu\text{m}$)
et un super-réseau additionnel (2λ)



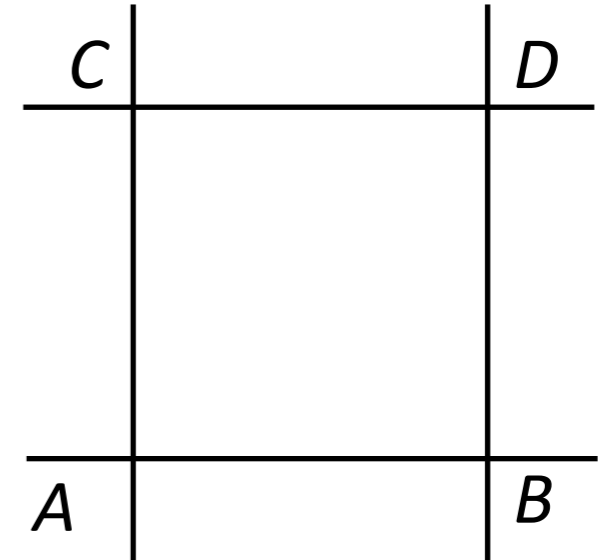
Utilisation d'un super-réseau (suite)

→ On part d'un réseau carré simple : coefficients tunnel tous égaux à J

→ On ajoute un super-réseau le long de l'axe x :

$$E_A = E_C = 0, \quad E_B = E_D = \Delta$$

bloque l'effet tunnel le long de l'axe x



→ Modulation à la fréquence $\Delta/(2\pi\hbar)$: restaure l'effet tunnel selon l'axe x avec une phase contrôlée par la modulation

→ On ajoute un autre super-réseau selon à la fois x et y

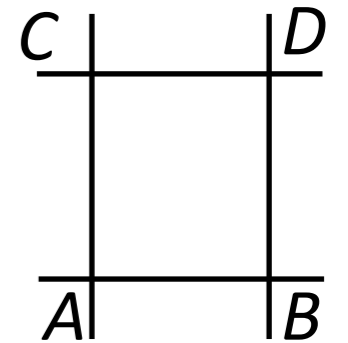
$$E_A = -\delta, \quad E_B = E_C = 0, \quad E_D = +\delta$$

δ : paramètre de contrôle

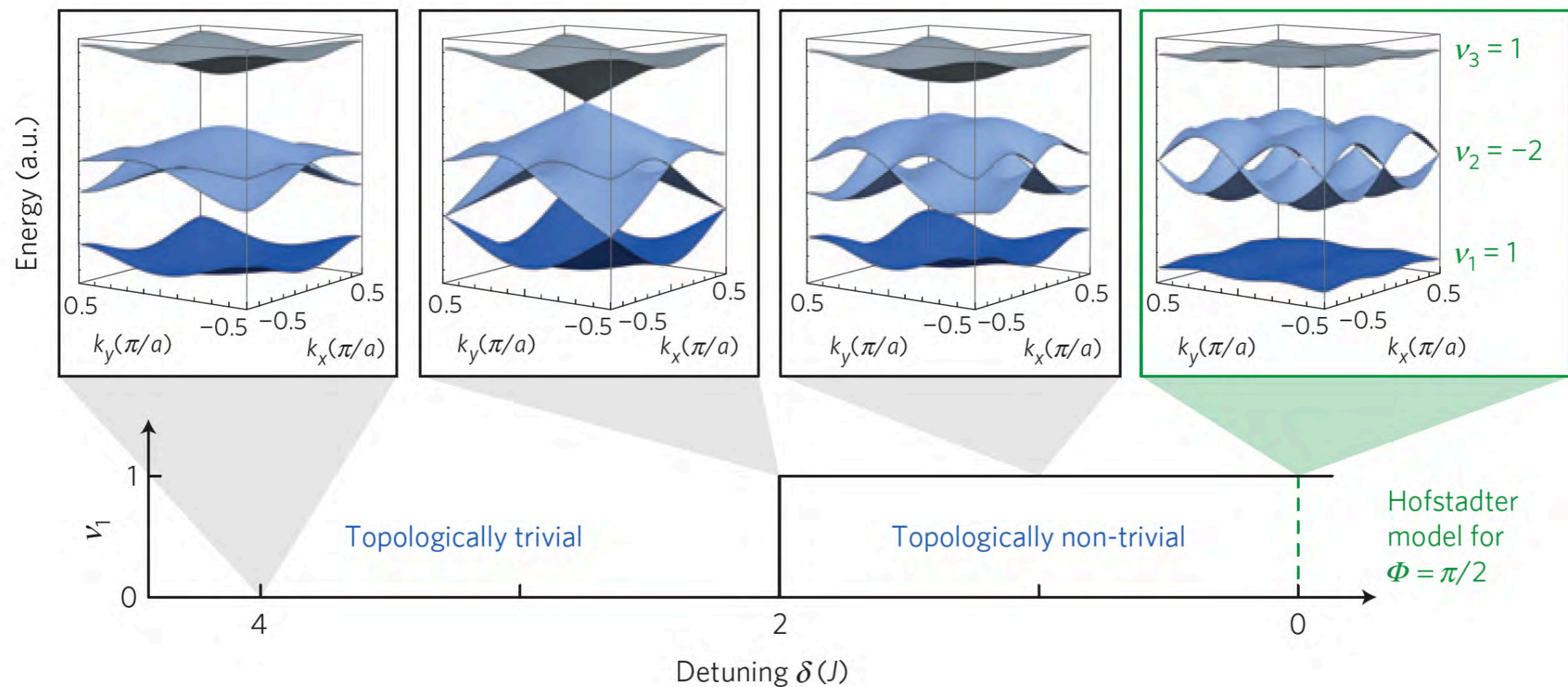
Préparation des atomes dans la bande topologique

$$E_A = -\delta, \quad E_B = E_C = 0, \quad E_D = +\delta$$

δ grand et positif : tous les atomes se mettent sur les sites A



On diminue lentement δ jusqu'à $\delta=0$: hamiltonien de Harper-Hofstadter



Pour la détection : chemin inverse et technique de « projection de bande »

La mesure du nombre de Chern

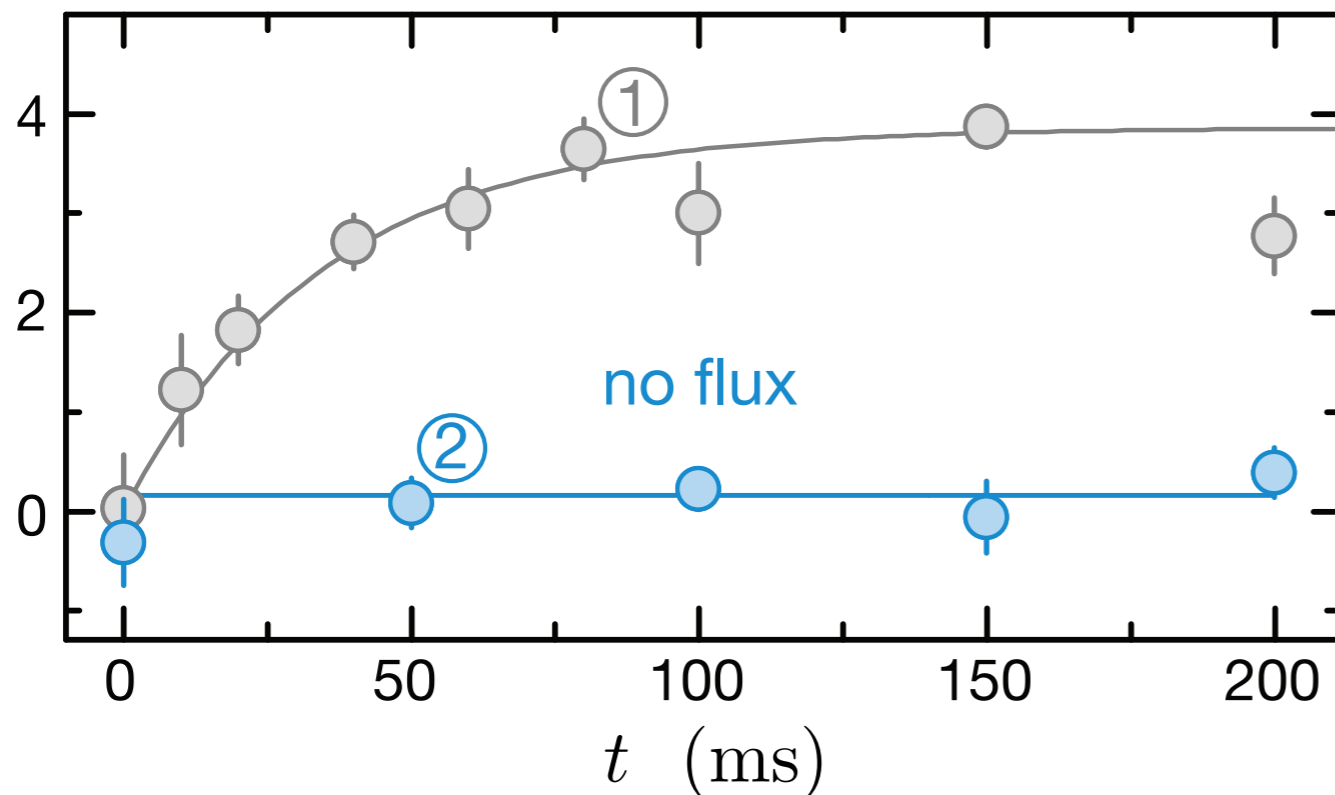
Population uniforme des états $|\psi_{\mathbf{q}}^{(n)}\rangle$ d'une bande donnée

On applique une force F_x le long de l'axe x (force dipolaire d'un faisceau annexe)

Le résultat démontré aux cours précédents donne pour la vitesse du nuage d'atomes le long de l'axe y :

$$v_y = \mathcal{C} \frac{2}{\pi} \frac{F_x a^2}{\hbar}$$

$2\Delta y/a$

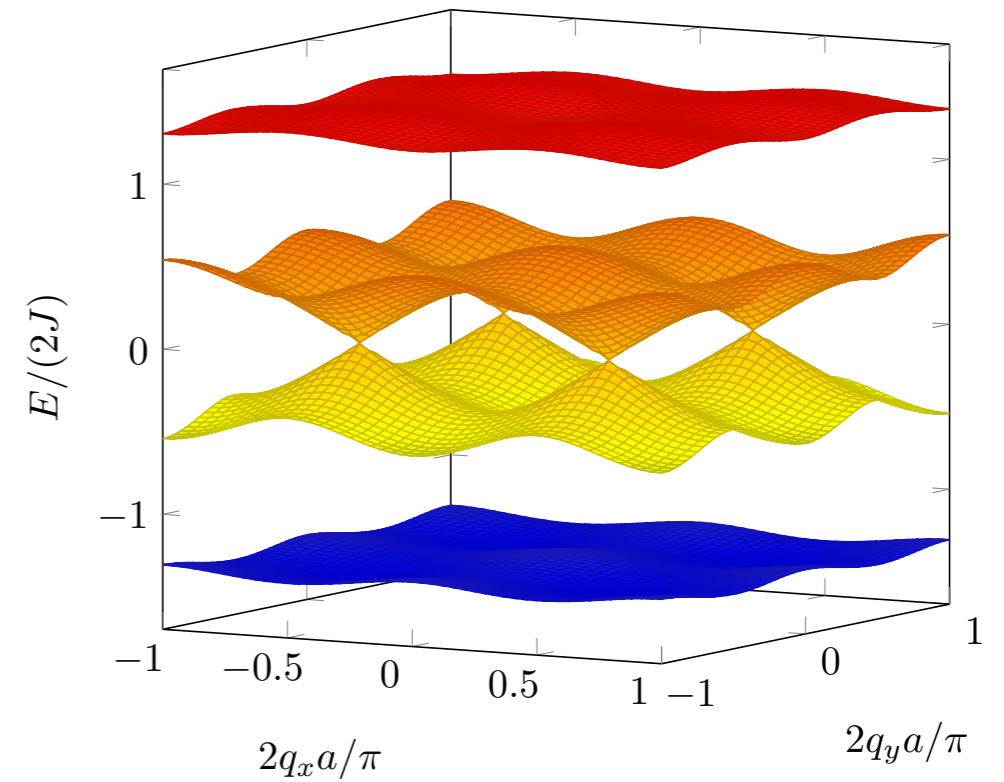
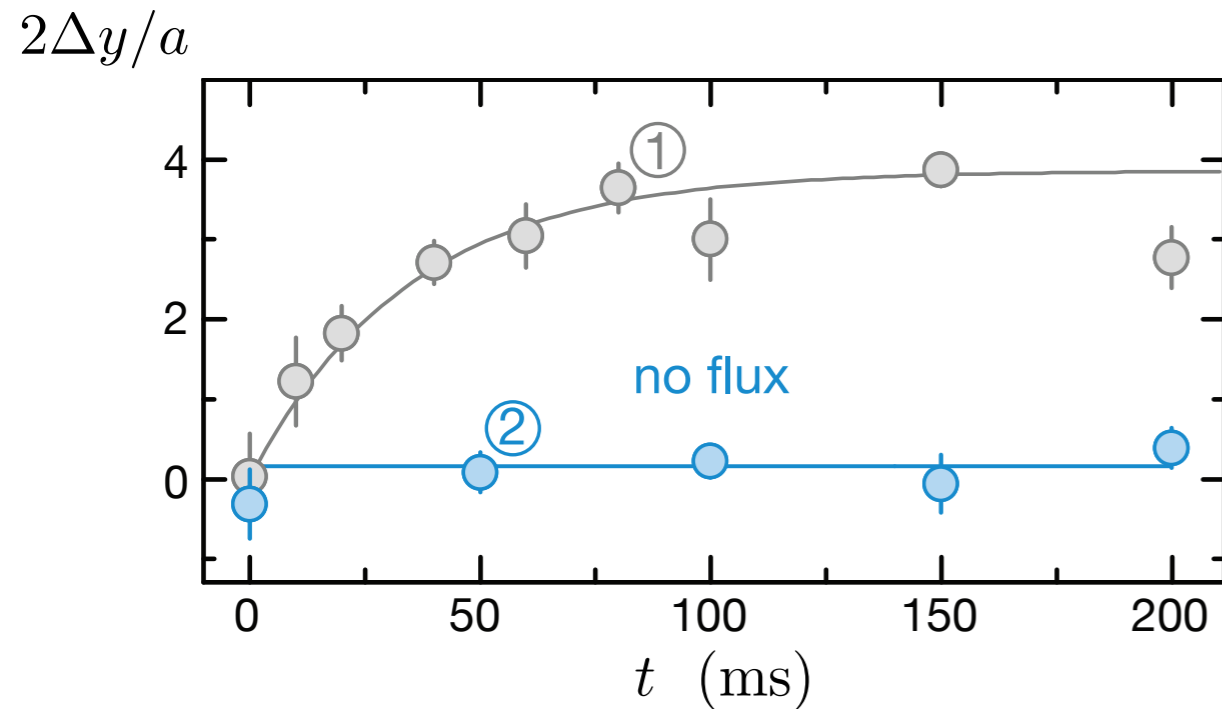


Variation linéaire à l'origine :

$$\mathcal{C} = 0.9 (2)$$

AIDELSBURGER et al,
2015

Le problème du chauffage



Chauffage lié à la modulation temporelle combinée aux interactions à deux corps : transfert de l'énergie de micro-mouvement vers le mouvement lent

Aux temps longs, les 4 bandes sont également peuplées :

$$\sum_{j=1}^4 c^{(j)} = 0 \longrightarrow \text{le déplacement le long de l'axe } y \text{ s'arrête}$$

3.

L'effet Hall en photonique

Mohammad HAFEZI, S MITTAL, J FAN, A MIGDALL & JM TAYLOR

Imaging topological edge states in silicon photonics

Nature Photonics 7, p. 1001 (2013)

Miguel A. BANDRES, Steffen WITTEK, Gal HARARI, Midya PARTO, Jinhan REN, Mordechai SEGEV,

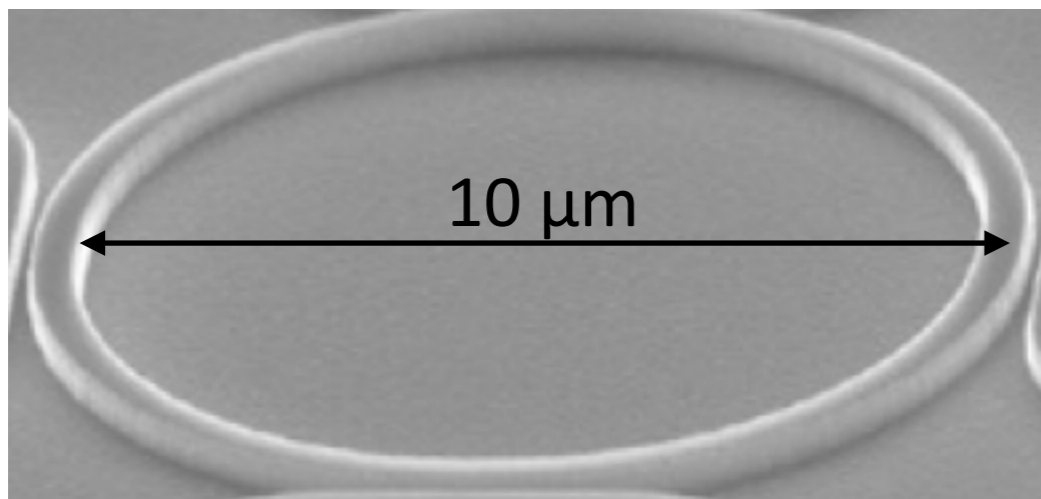
Demetrios N. CHRISTODOULIDES & Mercedeh KHAJAVIKHAN

Topological insulator laser : Experiments

Science 359, p. 4005 (2018)

Les briques élémentaires

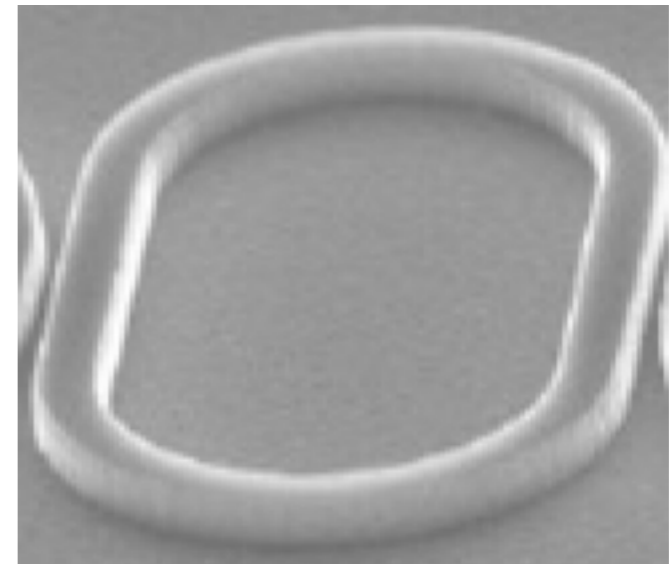
On souhaite fabriquer un réseau de Harper-Hofstadter avec un flux α ajustable



BANDRES et al, Science 2018

Anneau « guide d'onde » monomode résonnant avec la lumière ($Q > 10^4$), en silice pour la version passive

Joue le rôle d'un site du réseau

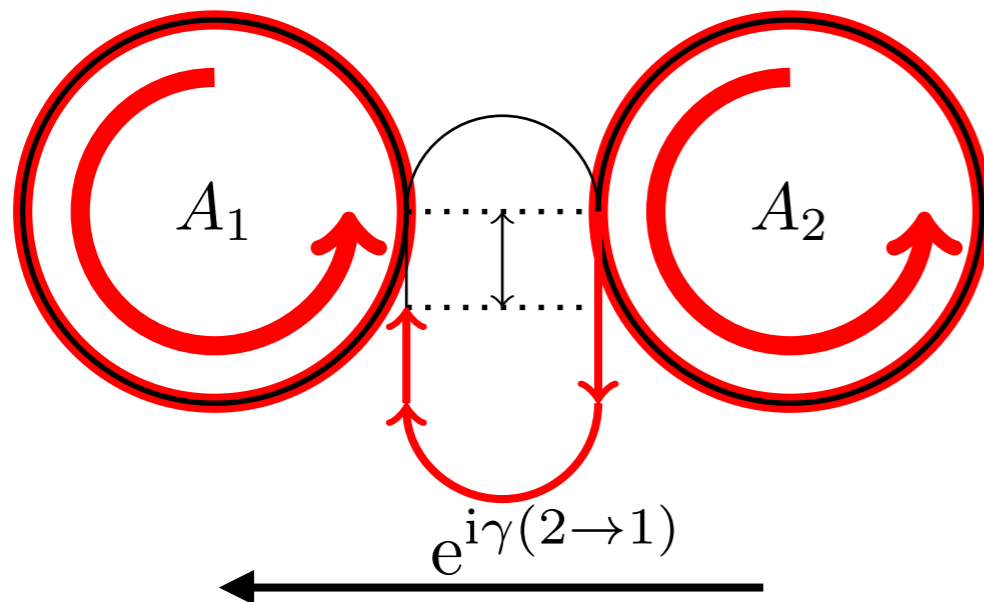
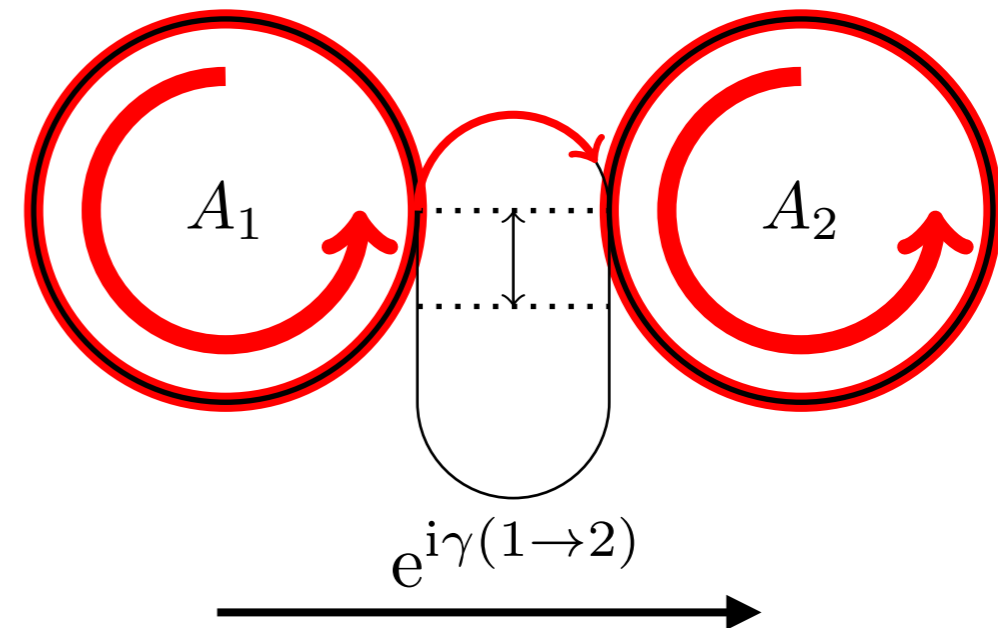


Lien entre deux sites, non résonnant

Couplage entre deux anneaux

Supposons (pour l'instant) que la lumière tourne dans le sens direct sur les résonateurs de site

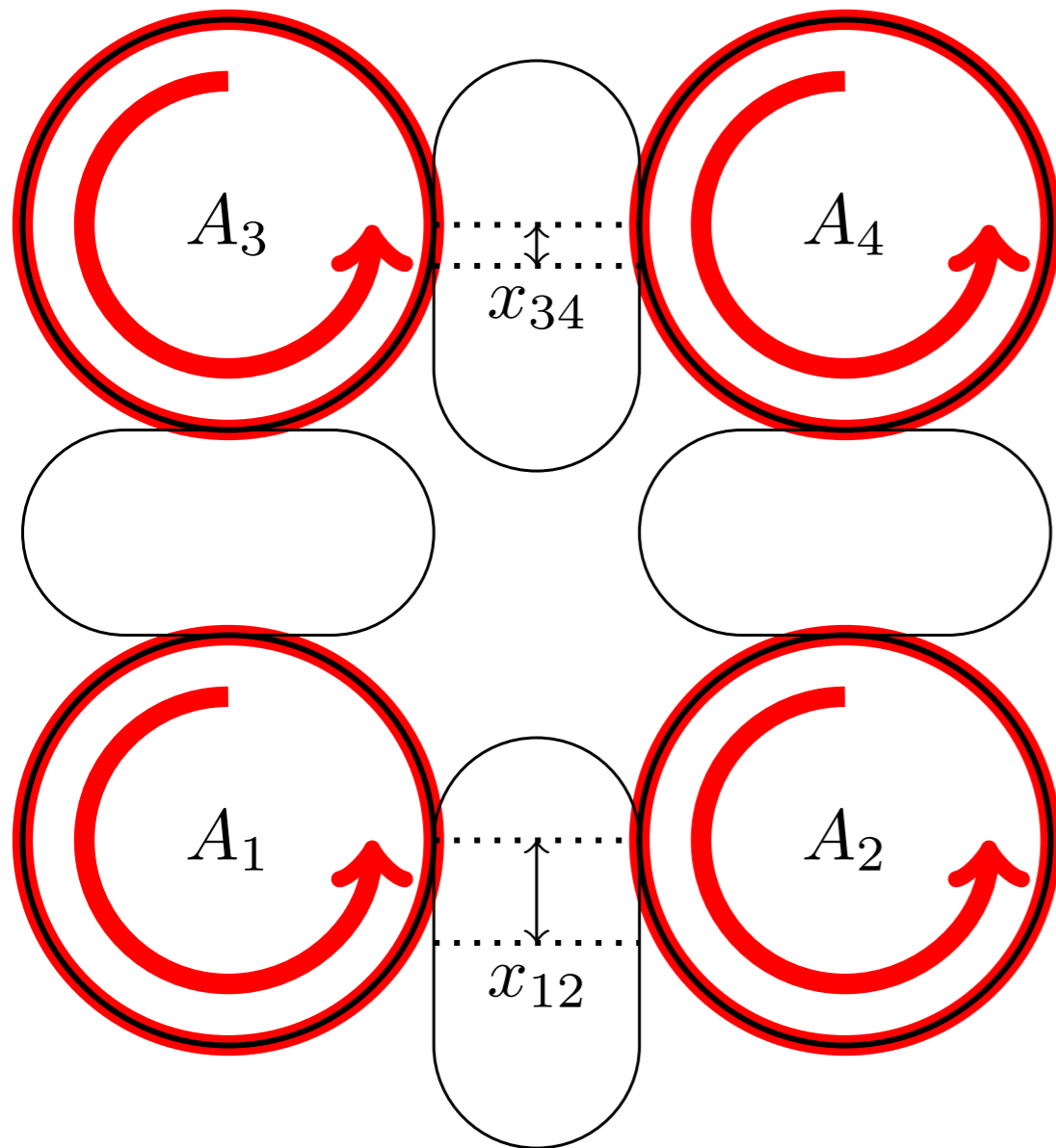
Passage de l'anneau A_1 vers l'anneau A_2 le long de la partie supérieure du lien



Passage de l'anneau A_2 vers l'anneau A_1 le long de la partie inférieure du lien

On peut ainsi réaliser : $\gamma(2 \rightarrow 1) = -\gamma(1 \rightarrow 2)$

Une cellule carrée du réseau de Harper-Hofstadter



$$x_{34} \neq x_{12} \longrightarrow \gamma(3 \rightarrow 4) \neq \gamma(1 \rightarrow 2)$$

*Implémentation directe
de la jauge de Landau*

La phase accumulée sur une cellule unité
est fonction de la différence $x_{34} - x_{12}$

Permet d'ajuster le flux $\Phi_{\text{cellule}} = 2\pi \alpha$

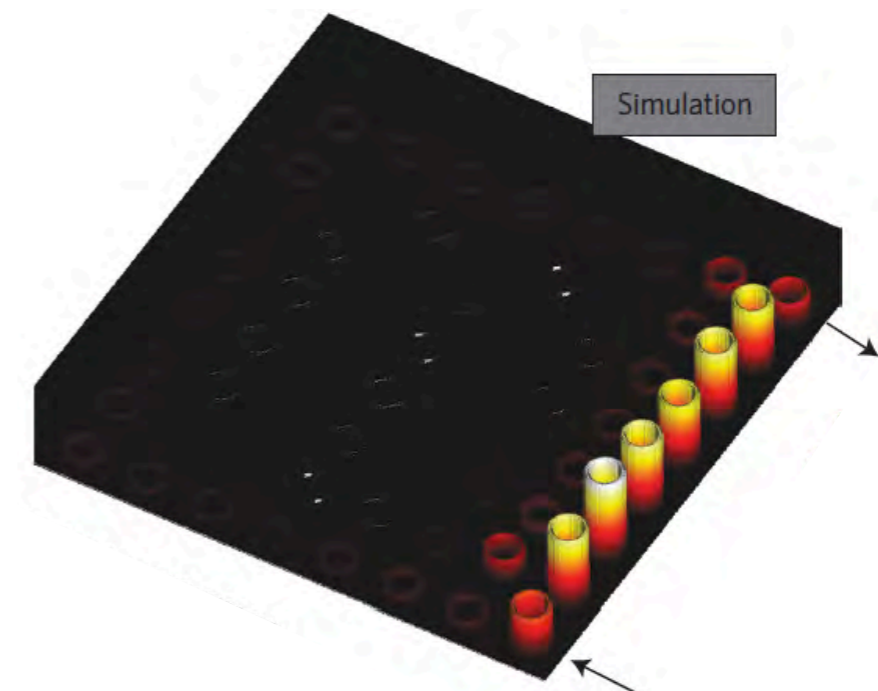
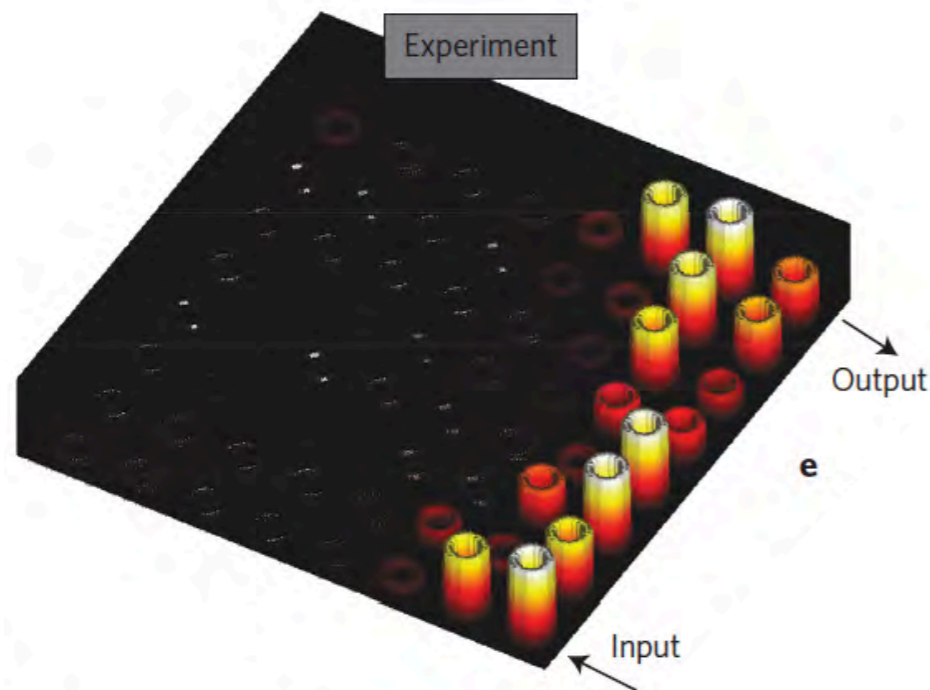
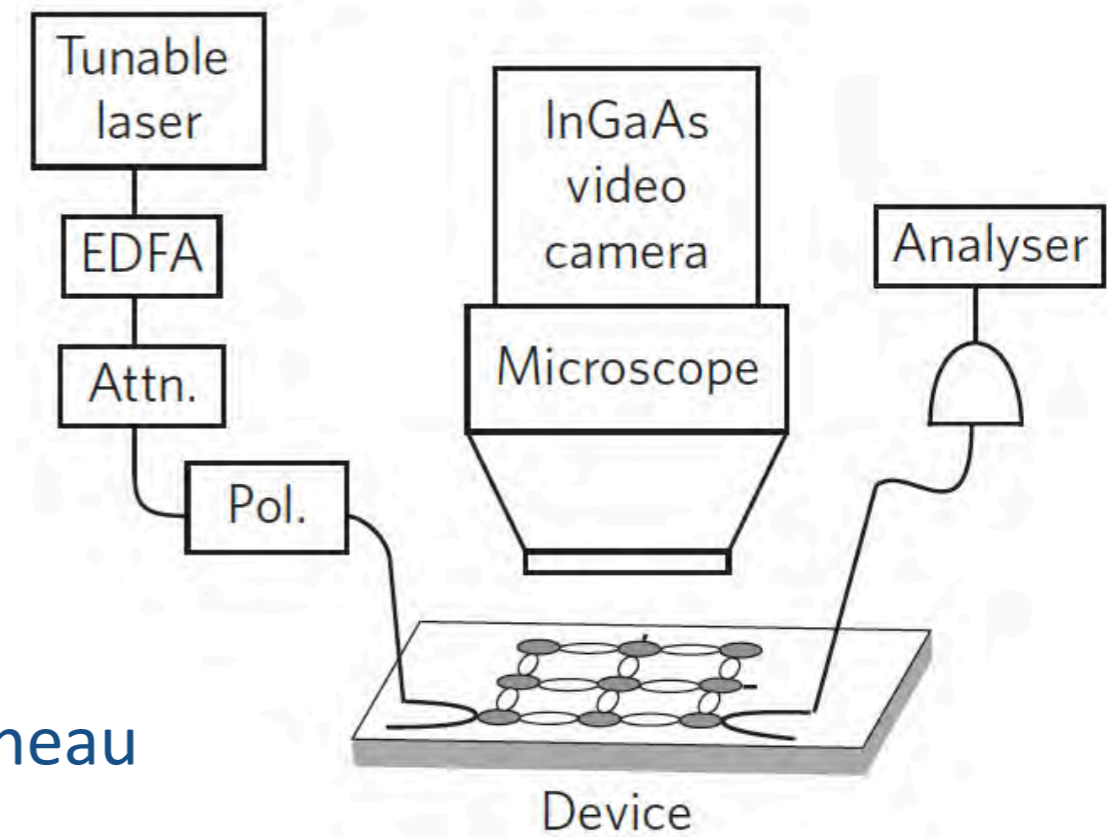
Observation des canaux de bords

HAFEZI et al. (2013)

Réseau carré de 8x8 anneaux reliés par des liens, avec $\alpha = 0.15$

Lumière injectée sur un des anneaux situés en périphérie

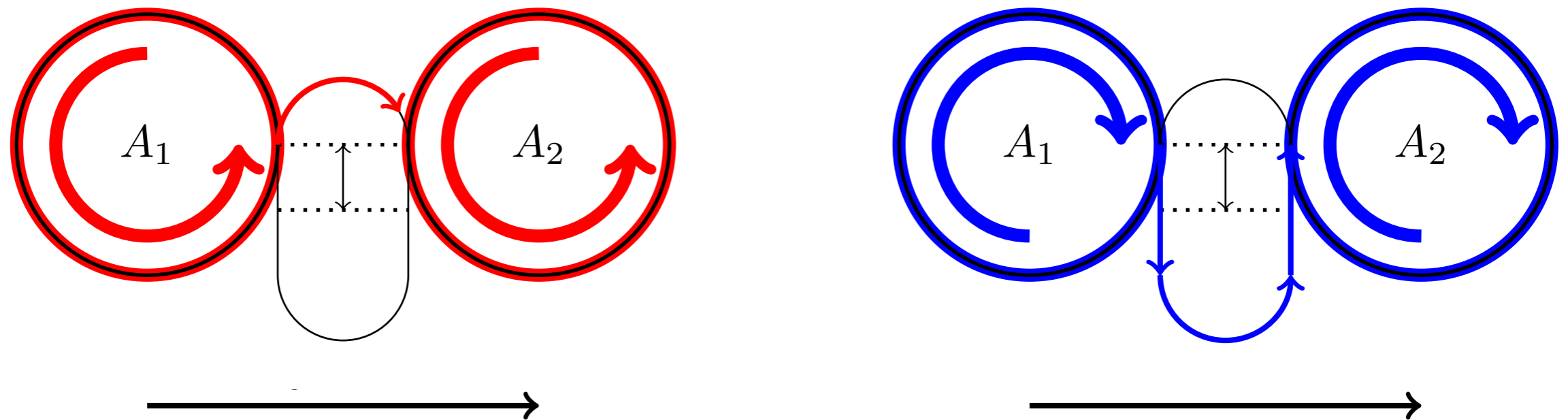
Mesure de la lumière diffusée par chaque anneau



Et l'invariance par renversement du temps ?

Aucun composant optique ne brise ici l'invariance par renversement du temps (il faudrait par exemple un effet Faraday)

En imposant un sens de rotation dans les anneaux, on n'a pris en compte que la moitié des configurations possibles



On passe du flux α au flux $-\alpha$ en échangeant le sens de rotation

Effet Hall de spin : $|\pm\rangle$ ont chacun une topologie non triviale avec des effets opposés

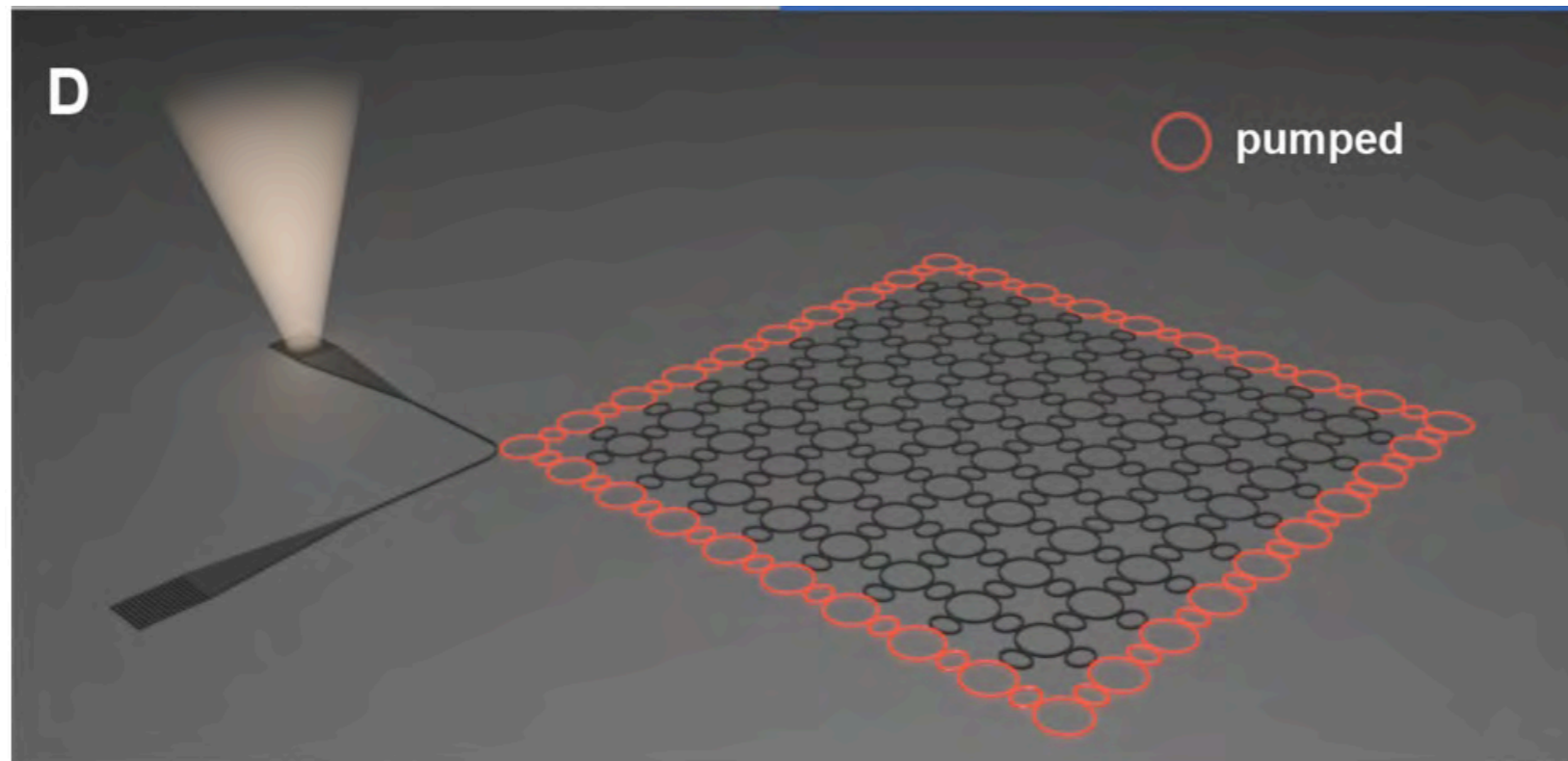
Robuste si la rétro-diffusion est négligeable

Implémentation en photonique active : laser topologique

BANDRES et al., Science, 2018, Technion + Orlando

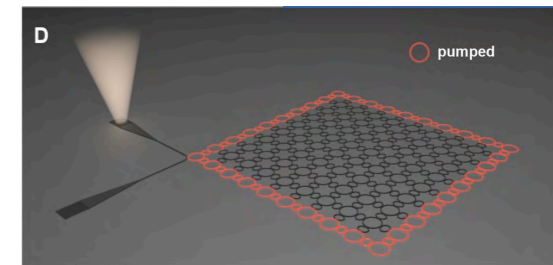
Plateforme avec un puits quantique d'InGaAsP pompé par de la lumière à $1.06\ \mu\text{m}$

Réseau de 10×10 résonateurs couplés par des liens réalisant un flux $\alpha = 1/4$

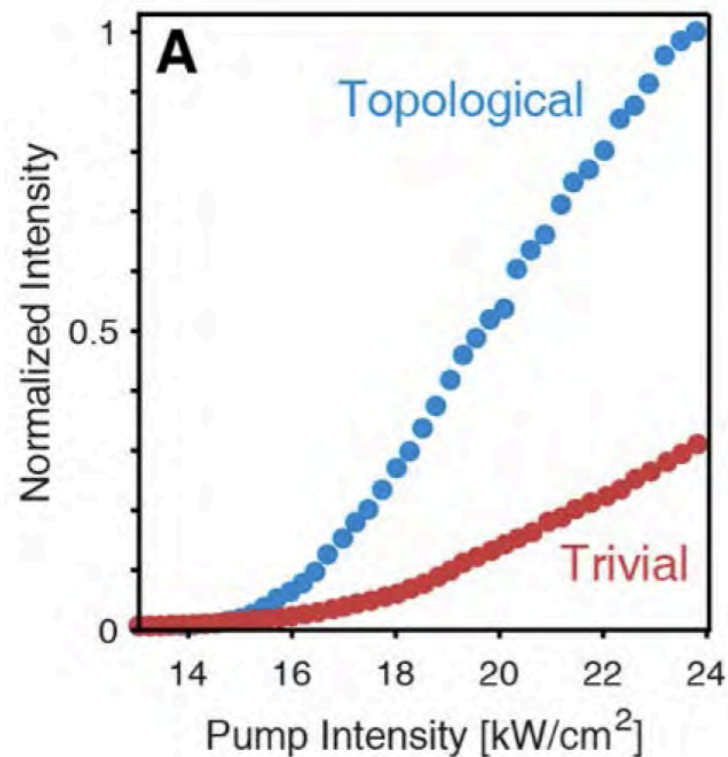


Mesure de la lumière émise directement par les résonateurs, ainsi que dans les coupleurs d'entrée-sortie au coin de l'échantillon

Caractéristiques du laser topologique



BANDRES et al.
Science 2018

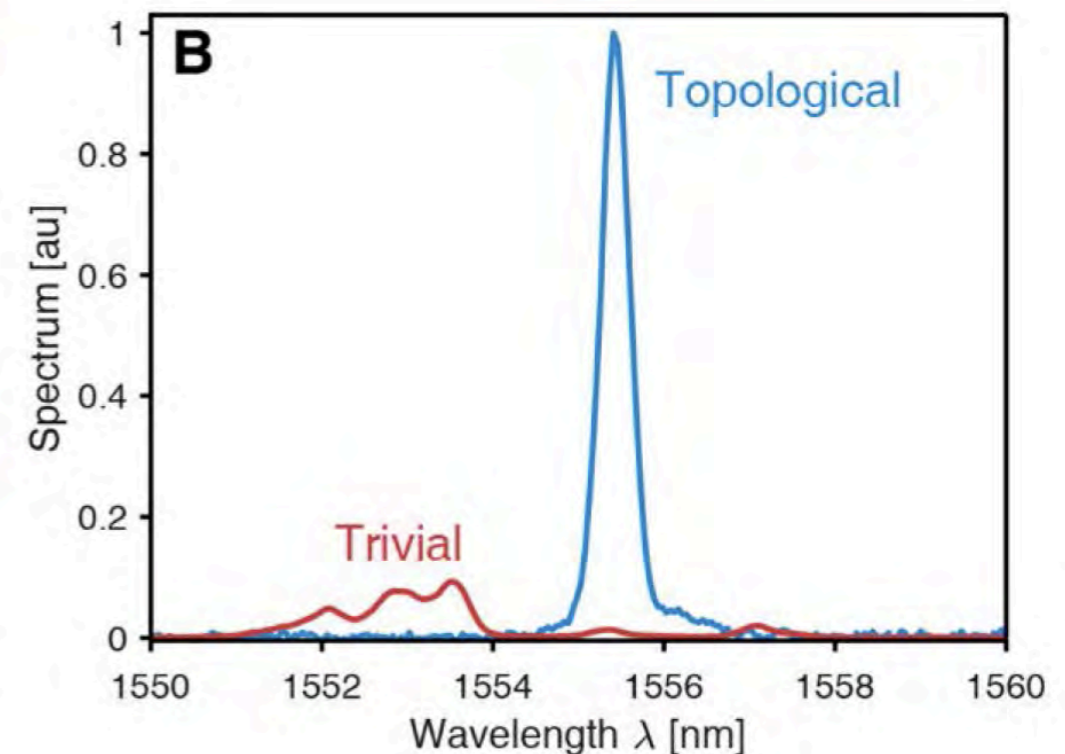


Efficacité meilleure que le même dispositif avec $\alpha = 0$

*Pas de pertes liées à la diffusion
vers le coeur du matériau*

Spectre plus étroit pour le laser topologique

*Evite l'élargissement inhomogène
lié au désordre dans l'échantillon*

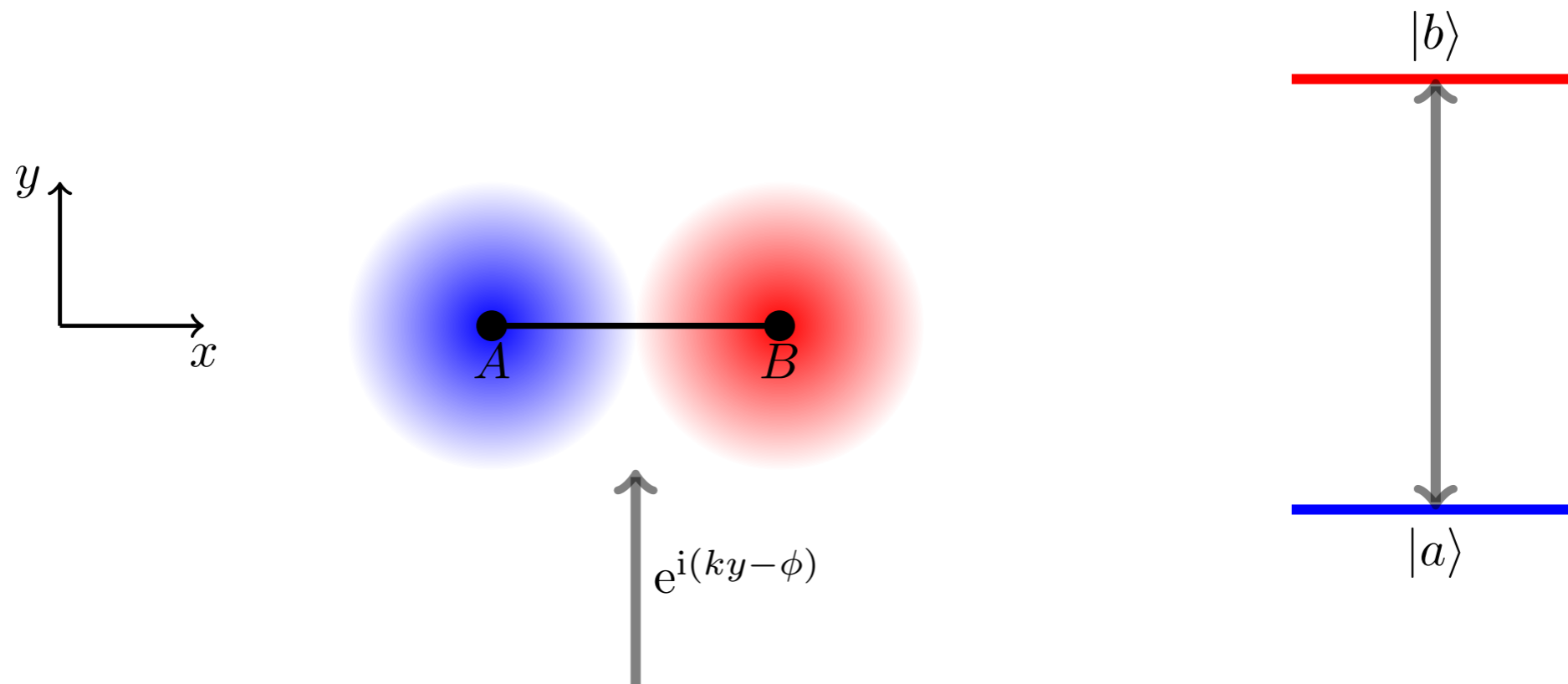


4.

Perspective : utilisation de
la structure interne atomique

Transition optique et effet tunnel assisté par laser

Problème à deux sites dans l'espace A, B, et deux états internes $|a\rangle$ et $|b\rangle$



Un atome dans l'état interne $|a\rangle$ (resp. $|b\rangle$) est piégé sur le site A (resp. B)

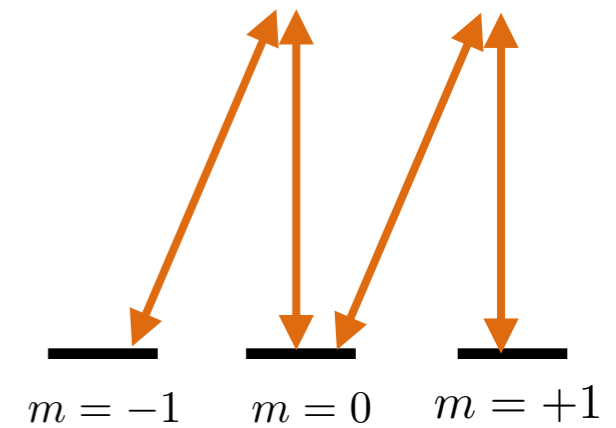
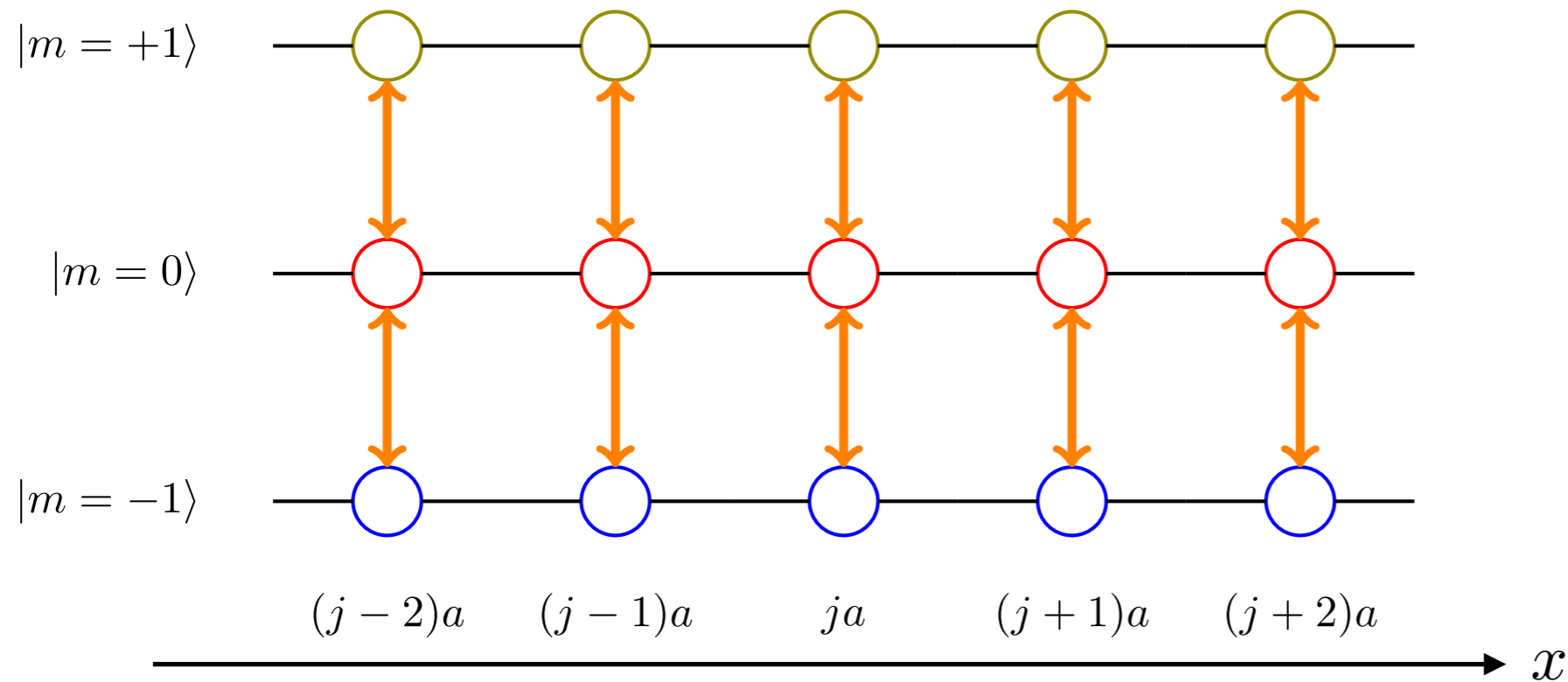
Lors du processus $|a\rangle + \text{photon} \longrightarrow |b\rangle$, la phase ϕ « s'imprime » sur la fonction d'onde de l'atome : équivalent à un coefficient tunnel complexe

Généralisable à l'ensemble d'un réseau optique

Dimensions synthétiques

Les états internes d'un atome peuvent jouer le rôle d'une des deux dimensions du plan xy

Exemple d'un « ruban » à trois lignes avec un atome de moment cinétique $J = 1$

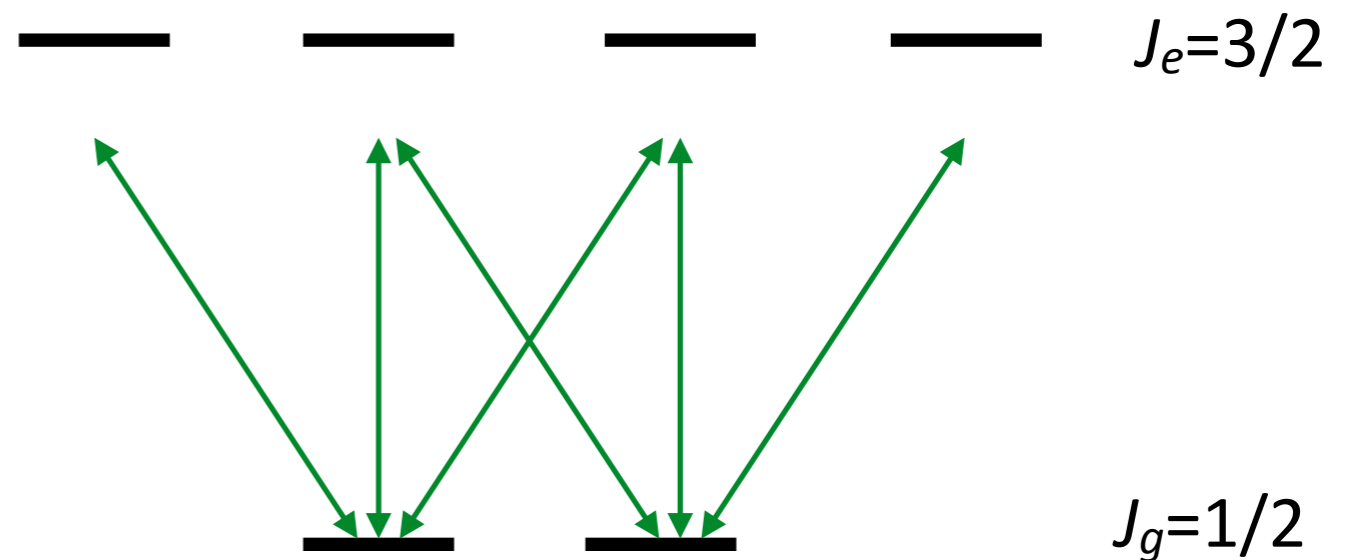
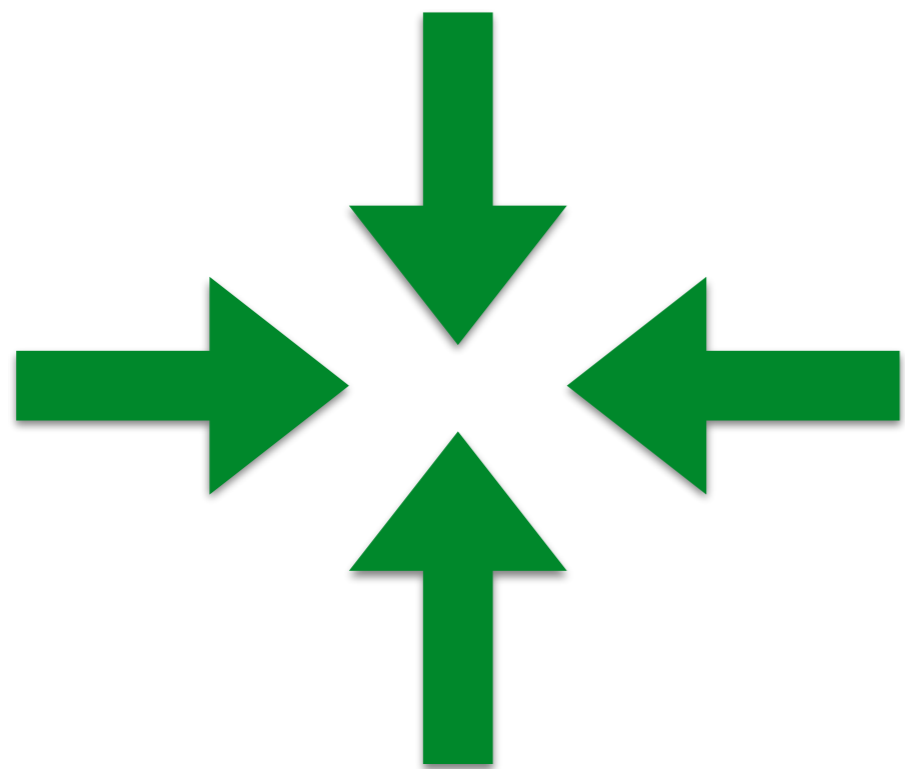


Réseau « normal » le long de l'axe x et synthétique le long de y

Observation d'états de bord (Florence, Maryland, Boulder)

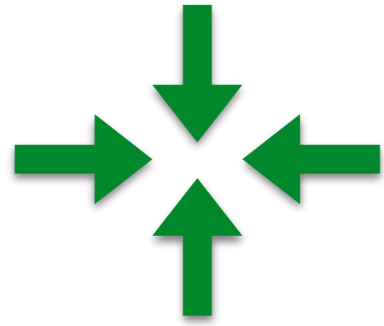
Etats habillés et suivi adiabatique

On quitte le régime des liaisons fortes pour revenir à une situation plus proche de l'effet Hall original. On considère une transition $J_g=1/2 - J_e=3/2$ (atome alcalin)

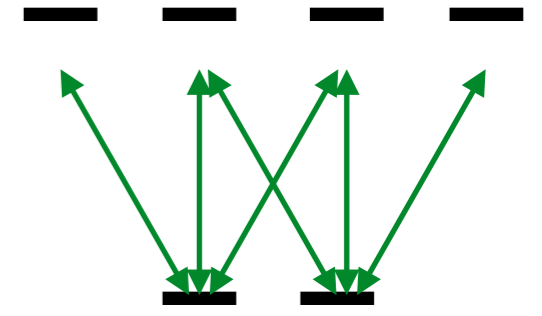


En tout point \mathbf{r} de l'espace, états habillés issus du niveau fondamental : $|\chi_{\mathbf{r}}^{(\pm)}\rangle$

Que se passe-t-il si l'atome bouge suffisamment lentement pour suivre adiabatiquement un de ces deux états habillés ?



Réseaux de flux



Le suivi adiabatique d'un niveau habillé donne naissance à une phase géométrique

Connexion de Berry $\mathcal{A}(\mathbf{r})$

Courbure de Berry associée : $\mathcal{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathcal{A}(\mathbf{r})$

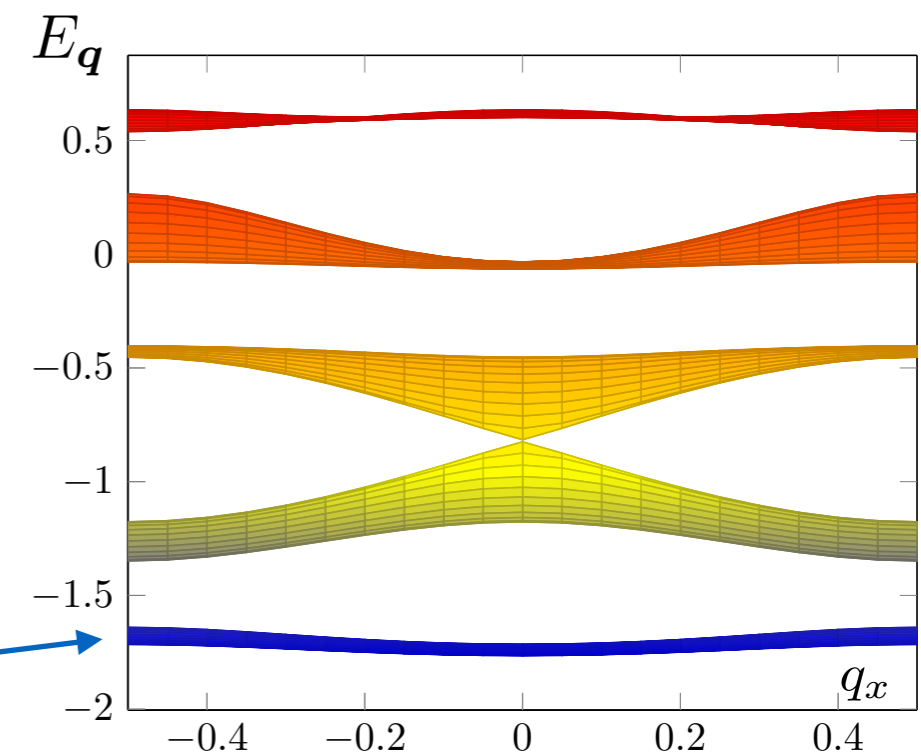
Champ magnétique artificiel dans l'espace des positions

Y a-t-il des réseaux périodiques pour lesquels ce champ artificiel $\mathcal{B}(\mathbf{r})$ donne naissance à des bandes topologiques ?

Réponse théorique positive !

N.R. Cooper 2011

$C = 1$



Conclusions

Objectif de ce cours : introduction à la classification topologique d'états de la matière

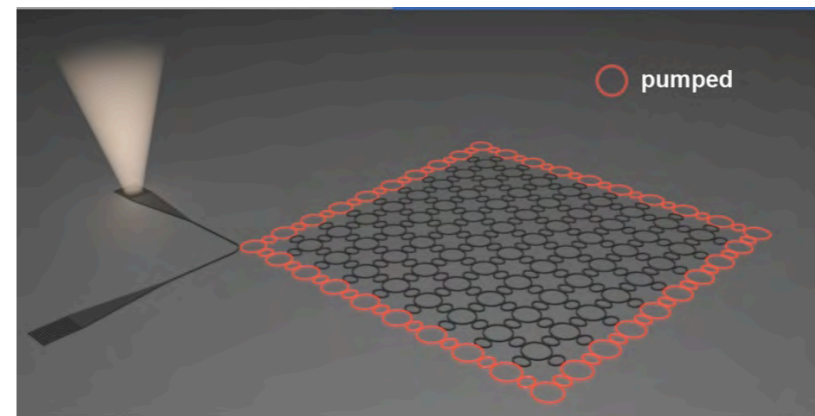
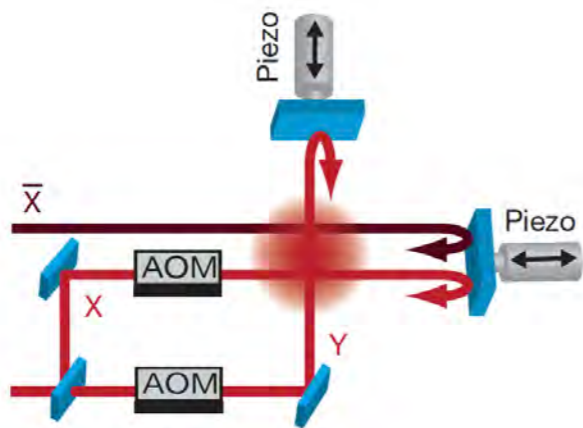
Classification différente de celle fondée sur les symétries géométriques (rotation, réflexion,...)

- Restriction à des systèmes périodiques 1D ou 2D

Nombre d'enroulements ou nombre de Chern pour les bandes d'énergie

- Illustrations choisies parmi les systèmes atomiques ou photoniques

Jotzu et al
2014



Bandres et al
2018

- Nous n'avons que peu abordé le rôle du couplage spin-orbite et celui des gaps superfluides

Classification générale des phases topologiques à N dimensions : ten-fold way

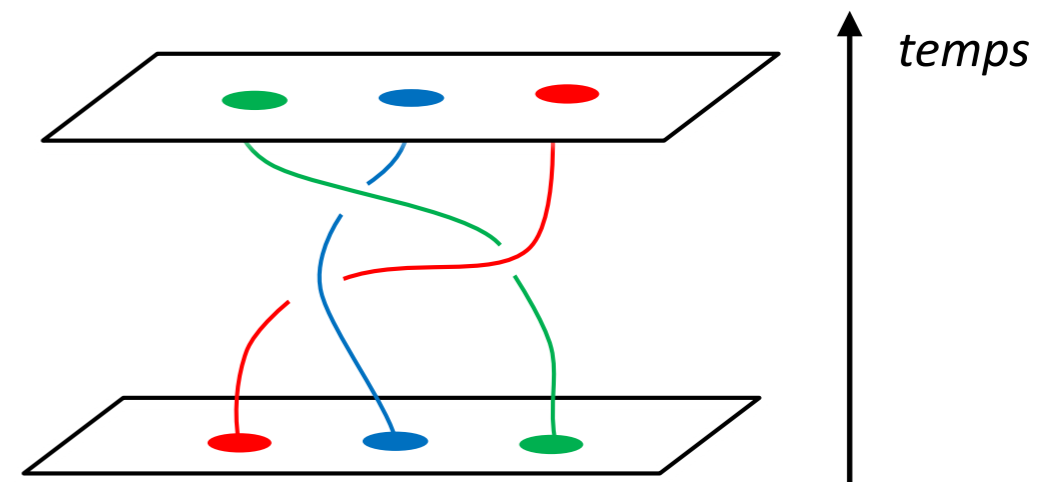
Perspectives

Combinaison de la topologie pour les états à une particule et des interactions

Effet Hall quantique fractionnaire

Beaucoup de questions encore ouvertes concernant les états fortement corrélés qui peuvent apparaître, aussi bien pour des fermions que des bosons

Nouvelles lois statistiques pour certaines quasi-particules : any-ons



Les systèmes atomiques et photoniques, par leur flexibilité et leur pureté, peuvent apporter des contributions significatives à l'exploration de ce champ de recherche