

Chapitre 4

Topologie et courbure de Berry dans un réseau 2D

Sommaire

1	Réseaux bi-partites et points de Dirac	2
1-1	Réseaux triangulaires et carrés	2
1-2	Le réseau hexagonal "graphène"	3
1-3	Les points de Dirac	4
1-4	Réseau hexagonal pour polaritons ou atomes	6
2	Caractérisation "géométrique" de la topologie	10
2-1	Le recouvrement de la sphère de Bloch	10
2-2	Le cas du graphène	11
2-3	Couverture partielle ("triviale")	12
2-4	Couverture totale ("non triviale")	13
3	Caractérisation "physique" de la topologie	14
3-1	L'effet Hall quantique	14
3-2	Evolution du moment q	15
3-3	La vitesse "anormale"	16
3-4	Conductance d'une bande uniformément remplie	17
3-5	Le nombre de Chern est un entier.	18
4	La courbure de Berry dans un réseau 2D	19
4-1	Comparaison de nos deux approches	19
4-2	Nombre de Chern et symétries spatio-temporelles	20
4-3	Mesure locale de la courbure de Berry	21

Après avoir consacré la première partie de cet enseignement aux problèmes uni-dimensionnels, nous abordons à partir de maintenant l'étude de systèmes topologiques à deux dimensions. Rappelons que cette géométrie bi-dimensionnelle a joué un rôle majeur dans l'émergence de concepts topologiques en physique, avec la découverte de l'effet Hall quantique dans les gaz d'électrons confinés dans des puits quantiques. Elle permet de caractériser les phases topologiques par leurs propriétés de transport, ce qui n'était pas directement possible à 1D; par ailleurs, elle donne naissance à des nombres topologiques (indices de Chern) plus "robustes" que la phase de Zak, qui restait dépendante de la paramétrisation choisie pour un problème physique donné.

Nous allons considérer dans ce chapitre une bande d'énergie isolée et nous allons nous poser la question de la topologie de cette bande. Nous allons apporter deux types de réponse. La première sera mathématique et directement inspirée de ce que nous avons compris pour les pompes géométriques, concernant la couverture de la sphère de Bloch. La seconde réponse sera physique et portera sur les propriétés de transport que l'on peut attendre pour ces systèmes. Bien entendu, les deux types de réponses conduiront à la même caractérisation *in fine*. Dans le cours 5, nous compléterons ces deux réponses par une troisième, portant sur l'existence de canaux de bord.

Pour simplifier notre analyse, nous allons étudier majoritairement des systèmes discrets avec des couplages tunnels n'autorisant des sauts qu'entre sites voisins. Cela va nous permettre d'utiliser l'approximation

des liaisons fortes et de mener presque tous les calculs de manière analytique. Comme nous l'avons fait à une dimension, nous allons également chercher à travailler avec les géométries les plus simples permettant l'apparition d'une topologie non triviale. Comme à 1D, cela conduit à considérer un réseau avec deux sites possibles par cellule unité. Ce type de réseau conduit naturellement à l'émergence de points de Dirac dans une géométrie 2D, et c'est donc par cette notion que nous allons commencer notre étude, avant de passer à la caractérisation de la topologie.

1 Réseaux bi-partites et points de Dirac

Nous allons rappeler dans cette première partie quelques caractéristiques importantes de réseaux réguliers à deux dimensions. Nous commencerons par une brève description des réseaux triangulaires et carrés dans le modèle des liaisons fortes. Ces deux réseaux ont un seul site par cellule unité, donc une seule bande d'énergie dans l'approximation des liaisons fortes. Par conséquent, ils ne peuvent pas déboucher spontanément sur des bandes topologiques, sauf en présence d'un champ de jauge extérieur, comme nous le verrons au cours 6.

Nous passerons ensuite au réseau hexagonal de type graphène ; ce réseau comporte deux sites par cellule unité, comme les modèles SSH et RM que nous avons étudiés à une dimension. On obtient *a priori* deux bandes d'énergie dans le modèle des liaisons fortes, ce qui est propice à la recherche d'effets topologiques. Nous discuterons en particulier les points de Dirac du réseau graphène standard, qui joueront un rôle crucial dans l'émergence de ces propriétés topologiques. Nous donnerons également quelques illustrations de la réalisation de ce réseau en photonique et avec des atomes froids.

1-1 Réseaux triangulaires et carrés

À deux dimensions, les réseaux réguliers les plus simples sont triangulaires ou carrés. En physique des atomes froids, le réseau triangulaire peut être obtenu en faisant interférer trois ondes lumineuses identiques coplanaires, à 120 degrés l'une de l'autre, et avec leur polarisation perpen-

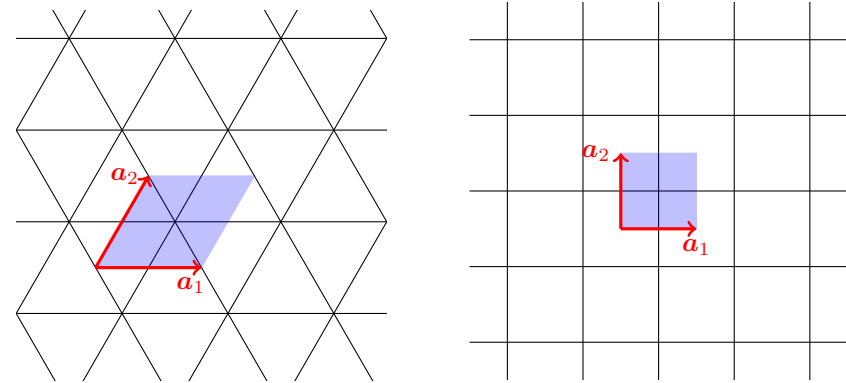


FIGURE 1. Réseau triangulaire et réseau carré. La zone grisée indique une cellule unité possible.

diculaire au plan. Les maxima¹ d'intensité forment un réseau triangulaire de points A_j , avec une distance entre proches voisins égale à $a = 2\lambda/3$. Les atomes viendront s'y piéger si la fréquence de la lumière est inférieure à la fréquence de résonance des atomes. Le réseau carré peut quant à lui être généré par deux paires orthogonales d'ondes stationnaires, avec une distance $a = \lambda/2$ entre deux sites adjacents.

Ces deux types sont des *réseaux de Bravais*, c'est-à-dire que l'on peut générer tout le réseau en translatant une cellule unité ne comportant qu'un seul site de

$$\mathbf{r}_j = j_1 \mathbf{a}_1 + j_2 \mathbf{a}_2, \quad j_1, j_2 \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

où les vecteurs \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 sont indiqués sur la figure 1.

Considérons un hamiltonien où seuls les sauts entre proches voisins sont autorisés, avec un élément de matrice tunnel noté $-J$ comme au chapitre précédent. Le théorème de Bloch indique que l'on peut chercher les états de Bloch sous la forme

$$|\psi_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_j e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} |A_j\rangle \quad (2)$$

1. Si l'on souhaite disposer plutôt d'un piégeage aux minima d'intensité tout en gardant un réseau triangulaire, il faut orienter les polarisations dans le plan des faisceaux.

avec une seule fonction périodique sur le réseau

$$|u_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_j |A_j\rangle. \tag{3}$$

et une seule bande d'énergie². La fonction $|u_{\mathbf{q}}\rangle$ est donc réelle et en fait indépendante de \mathbf{q} . L'expérience que nous avons acquise aux chapitres précédents sur le cas 1D nous indique que l'on ne peut pas espérer observer de topologie non triviale dans ce modèle à une bande.

1-2 Le réseau hexagonal "graphène"

Pour obtenir une situation qui généralise celle étudiée à une dimension, avec le modèle SSH et le modèle de Rice–Mele, il nous faut passer à un réseau avec (au moins) deux sites par cellule unité. Cela conduit naturellement à une paramétrisation des états propres à quasi-moment donné par un pseudo-spin 1/2. La topologie correspondante peut donc être comprise en examinant la position de ce pseudo-spin sur la sphère de Bloch. Le réseau le plus connu de ce type est le réseau hexagonal représenté sur la figure 2.

La cellule unité de ce réseau comporte effectivement deux sites distants de a , notés A et B et correspondant respectivement au bas et au haut de chaque lien vertical. Le couplage tunnel, limité là aussi aux proches voisins, peut faire passer une particule d'un site A vers trois sites B , à savoir celui de la même cellule et les sites B décalés respectivement de $-\mathbf{a}_1$ et $-\mathbf{a}_2$ avec

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Dans l'espace des quasi-moments \mathbf{q} , la zone de Brillouin a elle aussi une structure hexagonale, et le réseau réciproque est engendré par les deux

2. L'énergie associée à l'état $|\psi_{\mathbf{q}}\rangle$ vaut $-2J [\cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2) + \cos(\mathbf{q} \cdot (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2))]$ pour le réseau triangulaire et $-2J [\cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2)]$ pour le réseau carré.

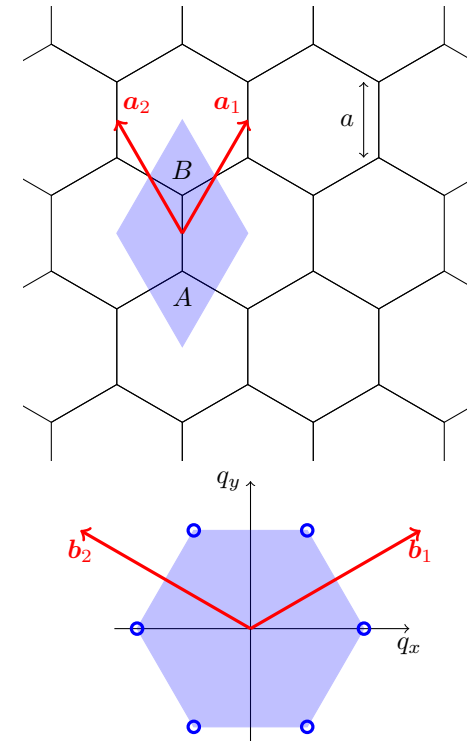


FIGURE 2. Haut : le réseau hexagonal et sa cellule unité d'aire $(3\sqrt{3}/2)a^2$. Bas : la zone de Brillouin correspondante d'aire $8\pi^2/(3\sqrt{3}a^2)$; les points de Dirac sont marqués par un cercle bleu.

vecteurs \mathbf{b}_1 et \mathbf{b}_2 définis³ par $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\pi \delta_{i,j}$:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{3a} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{3a} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

On peut chercher les états propres de cet hamiltonien sous la forme

3. On adopte ici la définition générale

$$\mathbf{b}_1 = 2\pi \frac{\mathcal{R}\mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathcal{R}\mathbf{a}_2)}, \quad \mathbf{b}_2 = 2\pi \frac{\mathcal{R}\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_2 \cdot (\mathcal{R}\mathbf{a}_1)} \tag{5}$$

où \mathcal{R} désigne la rotation de $\pi/2$.

de Bloch $\psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})$ où $u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})$ est périodique sur le réseau. Cette périodicité s'écrit dans la limite des liaisons fortes (Hubbard) considérée ici [cf. cours 1] :

$$|u_{\mathbf{q}}\rangle = \alpha_{\mathbf{q}} \left(\sum_j |A_j\rangle \right) + \beta_{\mathbf{q}} \left(\sum_j |B_j\rangle \right), \quad |\alpha_{\mathbf{q}}|^2 + |\beta_{\mathbf{q}}|^2 = 1, \quad (7)$$

ce qui revient comme annoncé à paramétrer $|u_{\mathbf{q}}\rangle$ comme un pseudo spin 1/2 :

$$|u_{\mathbf{q}}\rangle \equiv \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{q}} \\ \beta_{\mathbf{q}} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Avec ces notations, l'état de Bloch $|\psi_{\mathbf{q}}\rangle$ est donné par

$$|\psi_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_j e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} (\alpha_{\mathbf{q}} |A_j\rangle + \beta_{\mathbf{q}} |B_j\rangle). \quad (9)$$

L'état de Bloch $|\psi_{\mathbf{q}}\rangle$ est état propre de l'hamiltonien décrivant le couplage tunnel avec la valeur propre $E_{\mathbf{q}}$, ce qui se transcrit en terme du pseudo-spin :

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{q}} \\ \beta_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = E_{\mathbf{q}} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{q}} \\ \beta_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \quad (10)$$

où l'on a introduit la matrice 2×2

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} E_A & -J(1 + e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_1} + e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_2}) \\ -J(1 + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_1} + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_2}) & E_B \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Pour l'instant, nous supposons les deux sites A et B équivalents, et donc de même énergie. Nous poserons par convention

$$E_A = E_B = 0 \quad (12)$$

de sorte que $\hat{H}_{\mathbf{q}}$ peut s'écrire en terme des matrices de Pauli $\hat{\sigma}_i, i = x, y, z$:

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = -\mathbf{h}(\mathbf{q}) \cdot \hat{\sigma}, \quad h_x(\mathbf{q}) + ih_y(\mathbf{q}) = J(1 + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_1} + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_2}). \quad (13)$$

ou encore

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1 + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2) \\ \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

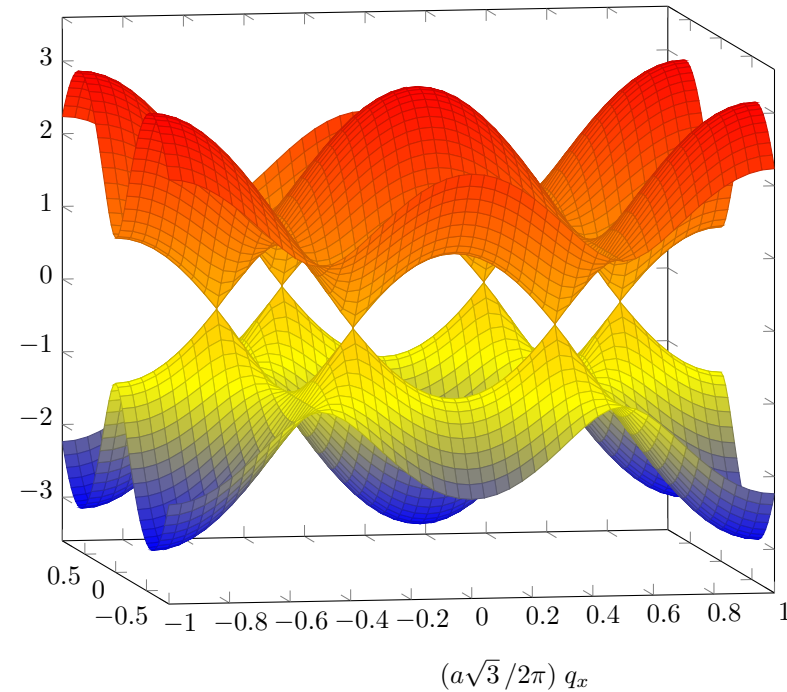


FIGURE 3. Structure de bande du réseau hexagonal.

Les énergies propres de cet hamiltonien sont

$$E_{\mathbf{q}}^{(\pm)} = \pm |\mathbf{h}(\mathbf{q})| = \pm J |1 + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_1} + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_2}| \quad (15)$$

que nous allons maintenant discuter. Les deux états propres correspondants, $|u_{\mathbf{q}}^{(\pm)}\rangle$, sont localisés sur l'équateur de la sphère de Bloch puisque le vecteur \mathbf{h} est lui-même localisé dans le plan xy .

1-3 Les points de Dirac

La structure de bande (15) est bien connue, en particulier grâce aux études sur le graphène (CASTRO NETO, GUINEA et al. 2009), et elle est

représentée sur la figure 3. Les deux bandes d'énergie $E_{\mathbf{q}}^{(\pm)}$ ne sont pas disjointes, mais se touchent en des valeurs de \mathbf{q} particulières, les points de Dirac, qui sont les solutions de

$$1 + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_1} + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_2} = 0. \quad (16)$$

La première zone de Brillouin a une structure hexagonale et il y a un point de Dirac à chacun des six sommets de l'hexagone (figure 2, bas). Comme chaque sommet est lui-même à la frontière de trois hexagones, il y a deux points de Dirac/zone de Brillouin⁴,

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}_{\pm} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q}_{\pm} = \pm \frac{4\pi}{3\sqrt{3}a} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

La dénomination "point de Dirac" provient du fait que la relation de dispersion au voisinage de \mathbf{Q}_{\pm} est celle d'une particule quantique relativiste en dimension 2. En posant $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{Q}_{\pm}$, l'hamiltonien prend en effet la forme de Dirac

$$\hat{H}_{\mathbf{q}}^{(\pm)} = \hbar v (\pm \tilde{q}_x \hat{\sigma}_x + \tilde{q}_y \hat{\sigma}_y) \quad (18)$$

pour $\tilde{\mathbf{q}}$ petit devant la taille de la zone de Brillouin, avec la vitesse $v = (3/2)Ja/\hbar$.

Nous sommes ici dans une situation marginale vis-à-vis des propriétés topologiques. Nous avons vu pour les problèmes à une dimension (et il en va de même à deux dimensions) que l'établissement d'un contact entre deux bandes d'énergie était un point singulier : ce contact peut disparaître quand on modifie un ou plusieurs paramètres du problème, et selon cette modification, les deux bandes disjointes qui résultent auront ou non des propriétés topologiques. Notre but dans le reste de ce chapitre et le suivant sera de comprendre quelles modifications apporter à l'hamiltonien pour basculer d'un côté ou de l'autre⁵.

Robustesse des point de Dirac. Nous venons de voir que les deux bandes d'énergie se touchaient aux points de Dirac. L'existence de ces

4. voir le cours 2012-13, chapitre 6, pour une étude détaillée.

5. Notons que l'on peut mettre en évidence une topologie particulière pour cette situation marginale à partir de l'étude des états de bord, comme cela a été étudié théoriquement par DELPLACE, ULLMO et al. (2011), puis expérimentalement par MILIĆEVIĆ, OZAWA et al. (2017).

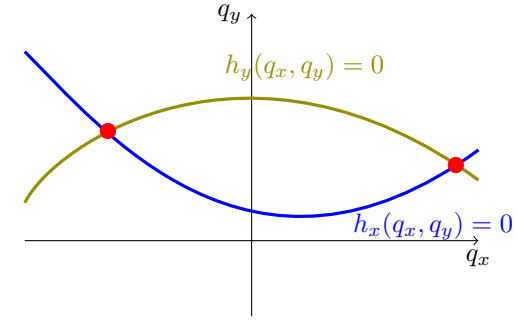


FIGURE 4. Points de Dirac obtenus à l'intersection des lignes du plan q_x, q_y le long desquelles $h_x(\mathbf{q})$ et $h_y(\mathbf{q})$ s'annulent. Ces points sont robustes dans la mesure où un petit changement des paramètres de l'hamiltonien déforme légèrement ces lignes, mais ne supprime pas leurs points d'intersection qui sont simplement déplacés.

points de contact entre les deux bandes est une conséquence directe du fait que l'hamiltonien des réseaux que nous venons d'étudier s'écrit

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = -(h_x(\mathbf{q})\hat{\sigma}_x + h_y(\mathbf{q})\hat{\sigma}_y). \quad (19)$$

Les énergies des deux bandes $\pm [h_x^2 + h_y^2]^{1/2}$ coïncident donc aux points où h_x et h_y s'annulent simultanément. Or, quand \mathbf{q} varie dans le plan (q_x, q_y) , l'existence de zéros simultanés pour h_x et h_y est "naturelle". Les fonctions h_x et h_y peuvent *a priori* prendre des valeurs positives et négatives, et chacune s'annule sur des lignes du plan (figure 4). Un point de Dirac correspond à l'intersection de telles lignes et le champ de vecteur $\mathbf{h} = (h_x, h_y)$ présente une structure de vortex autour de ce point (figure 5).

Cette structure de vortex assure la robustesse des points de Dirac tant que l'hamiltonien reste de la forme (19). Si on modifie légèrement la valeur de certains coefficients tunnel par rapport à d'autres, les points de Dirac vont se déplacer, mais ne disparaîtront pas. Pour les déformations plus fortes, deux points de Dirac d'enroulement opposé peuvent venir au contact l'un de l'autre et s'annihiler (MONTAMBAUX, PIÉCHON et al. 2009), d'une manière formellement similaire à deux vortex dans un superfluide 2D dans la description de la transition de Kosterlitz-Thouless (cf. cours 2016-17).

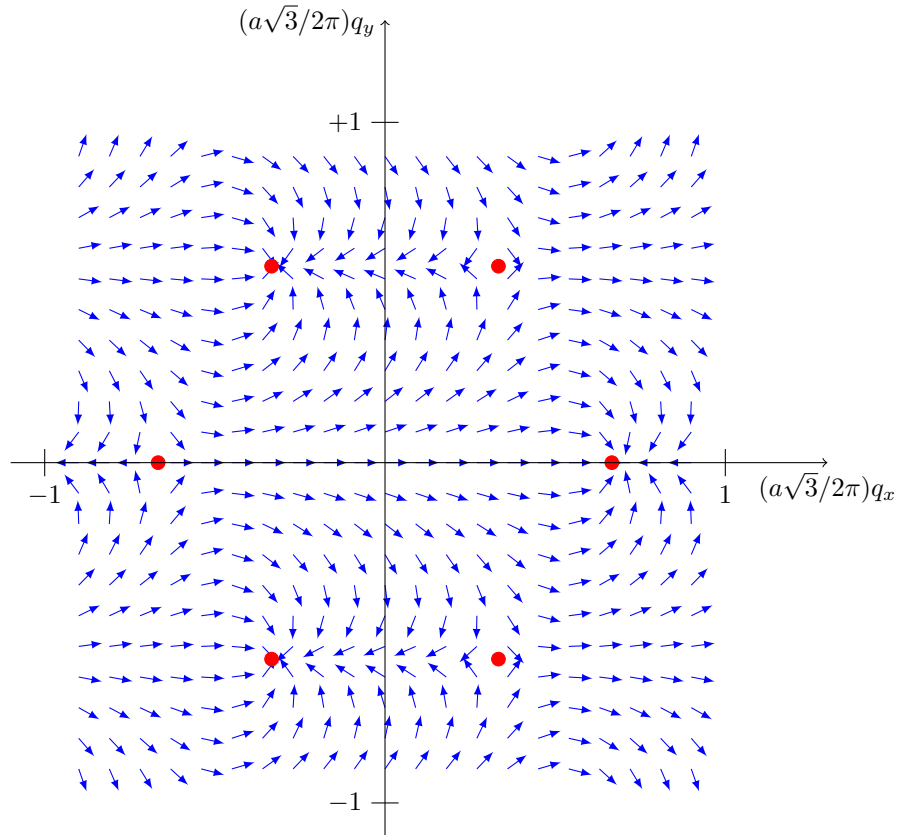


FIGURE 5. Champ de vecteur $\mathbf{n}(\mathbf{q}) = \mathbf{h}(\mathbf{q})/|\mathbf{h}(\mathbf{q})|$ dans le plan q_x, q_y pour le réseau hexagonal. Les points de Dirac sont indiqués par les cercles rouges et forment eux-mêmes un réseau hexagonal dans l'espace des moments (cf. figure 2, bas). Au voisinage de ces points, le champ de vecteur $\mathbf{n}(\mathbf{q})$ possède une structure de vortex, avec des enroulements de signe opposé pour deux points de Dirac adjacents.

1-4 Réseau hexagonal pour polaritons ou atomes

Au cours des dix dernières années, plusieurs plateformes ont été utilisées pour implémenter un réseau hexagonal dans un système ondulatoire, et observer ainsi une relation de dispersion avec des cônes de Dirac. En dehors des systèmes électroniques, citons sans chercher à être exhaustif les ondes acoustiques (TORRENT & SÁNCHEZ-DEHESA 2012), les réseaux de guides d'onde (RECHTSMAN, ZEUNER et al. 2013), ou encore les résonateurs micro-onde (BELLEC, KUHL et al. 2013) (voir figure 6).

La plateforme des polaritons de cavité, que nous avons déjà décrite au cours 2 pour la réalisation d'une chaîne SSH, peut également être utilisée pour réaliser de tels réseaux bi-dimensionnels (JACQMIN, CARUSOTTO et al. 2014). On montre en figure 7 une image de la microstructure dans laquelle on a creusé des trous selon un réseau triangulaire, la zone active formant donc un réseau hexagonal. Cette zone active est composée d'une couche de GaAlAs entourée de deux miroirs de Bragg, formant une cavité planaire de facteur de qualité $Q \sim 7 \cdot 10^4$. Comme décrit au chapitre 2, on pompe le système avec de la lumière non résonnante et on observe la lumière de photoluminescence, soit résolue en position (ce qui montre les zones actives formant le réseau hexagonal), soit résolue en impulsion (ce qui montre la structure de bande avec les cônes de Dirac caractéristiques).

Avec des atomes froids, la première mise en évidence directe de points de Dirac faite par TARRUELL, GREIF et al. (2012) a été décrite dans le cours 2012-13 et nous n'y reviendrons pas ici. Nous allons nous intéresser ici à l'expérience plus récente de DUCA, LI et al. (2015) qui a mis en évidence l'enroulement de phase autour d'un point de Dirac (figure 5).

Sur le plan formel, le déplacement d'une particule dans l'espace des moments \mathbf{q} en présence d'un point de Dirac peut être vu comme analogue au cas du mouvement d'une particule de charge e dans l'espace réel (*i.e.* des positions \mathbf{r}) en présence d'un solénoïde infiniment étroit créant un flux magnétique fini (MIKITIK & SHARLAI 1999). Cette deuxième situation physique, représentée sur la figure 8, correspond à l'effet Aharonov-Bohm (AHARONOV & BOHM 1959). Si l'on considère une trajectoire le long d'un contour \mathcal{C} qui entoure le solénoïde, la phase accumulée le long de la trajectoire

$$\Phi_{AB} = \frac{e}{2\pi\hbar} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad (20)$$

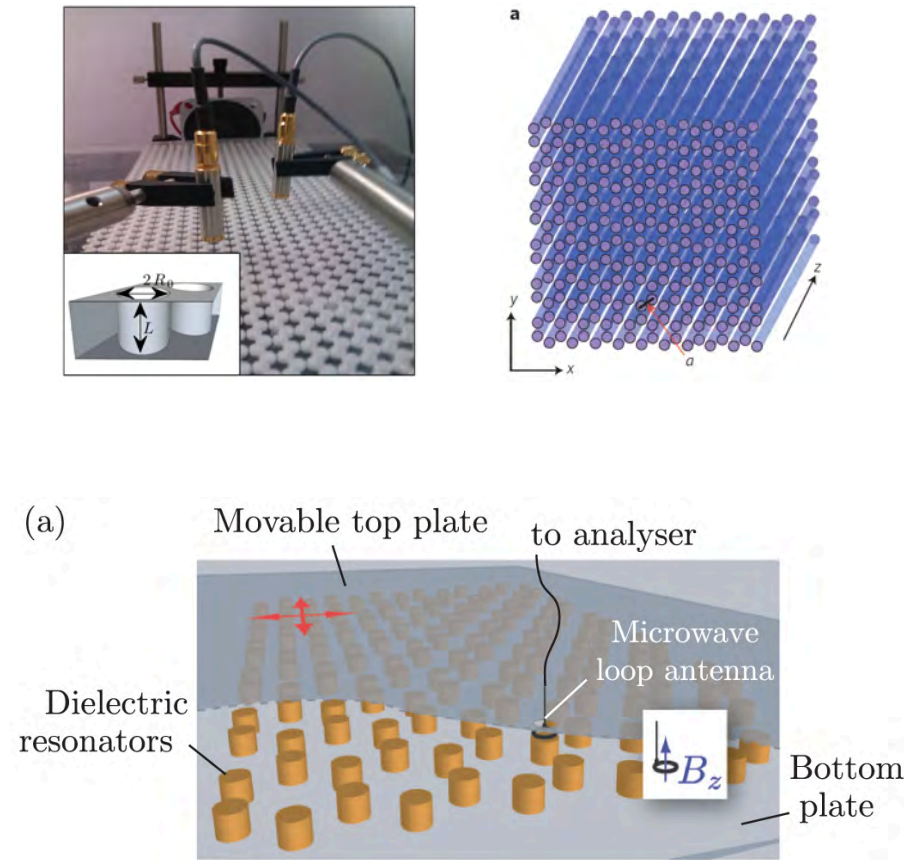


FIGURE 6. Réseau hexagonal pour des ondes acoustiques (haut, gauche), des ondes lumineuses guidées (haut, à droite) et des ondes électromagnétiques dans le domaine ~ 6 GHz (bas). Figures extraites de TORRENT & SÁNCHEZ-DEHESA (2012), RECHTSMAN, ZEUNER et al. (2013) et BELLEC, KUHL et al. (2013).

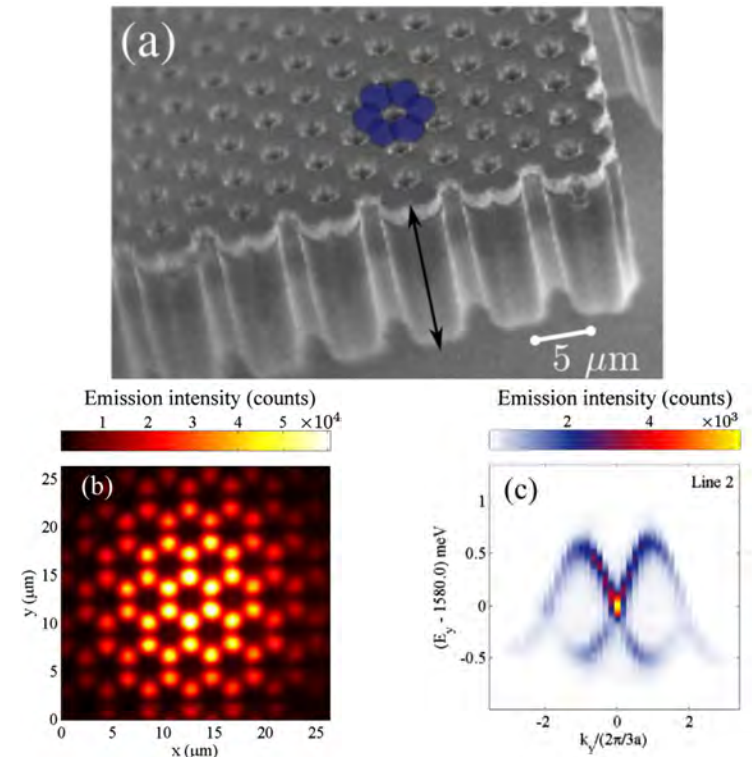


FIGURE 7. Haut : Microstructure de AlGaAs formant un réseau hexagonal. Bas : spectre de photoluminescence dans l'espace des positions (gauche) et dans l'espace des moments (droite). Sur la figure de droite, on trace $E(\mathbf{q})$ en fonction de q_y , avec un choix de q_x qui permet de passer sur un point de Dirac. La figure de gauche a été obtenue pour une puissance de pompe suffisante pour atteindre le régime de condensation des polaritons. Figures extraites de JACQMIN, CARUSOTTO et al. (2014).

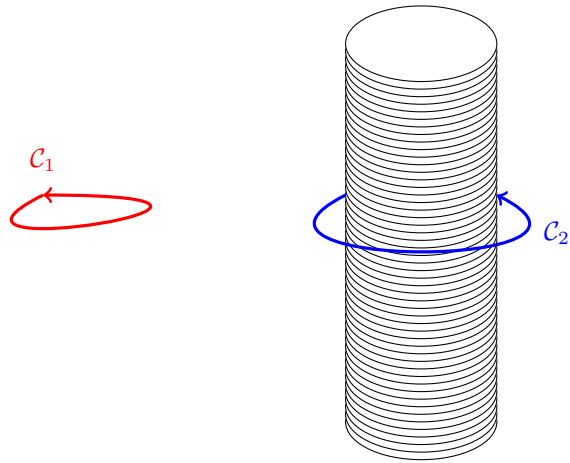


FIGURE 8. L'effet Aharonov–Bohm. Un solénoïde infini génère un champ magnétique localisé à l'intérieur du solénoïde. On mesure grâce à un dispositif interférométrique la phase accumulée par la fonction d'onde d'une particule chargée effectuant un contour fermé. Si le contour n'entoure pas le solénoïde (contour C_1), le flux magnétique est indétectable. En revanche, si le contour entoure le solénoïde (contour C_2), la phase géométrique accumulée est proportionnelle au flux (Eq. 20), bien que la trajectoire classique de la particule ne pénètre jamais dans la zone de champ magnétique non nul.

où $A(\mathbf{r})$ est le potentiel vecteur décrivant le champ magnétique du solénoïde, est proportionnelle au flux du champ magnétique dans le solénoïde. Pour une trajectoire qui n'entoure pas le solénoïde, cette phase de Aharonov–Bohm Φ_{AB} est nulle.

Considérons maintenant une "trajectoire" fermée dans l'espace des \mathbf{q} qui entoure un des points de Dirac (figure 9). Si le mouvement le long de cette trajectoire se fait assez lentement, la particule initialement préparée dans un état donné du pseudo-spin, l'état fondamental $|u_{\mathbf{q}}^{(-)}\rangle$ par exemple, va rester dans cet état et va accumuler une phase géométrique. Nous savons (cf. cours 1) que cette phase géométrique est donnée par la moitié de l'angle solide sous-tendu par le vecteur $\mathbf{h}(\mathbf{q})$ le long de cette trajectoire. Comme le vecteur $\mathbf{h}(\mathbf{q})$ décrit dans ce cas un tour entier sur l'équateur de la sphère de Bloch, l'angle solide vaut $\pm 2\pi$ et la phase géométrique vaut

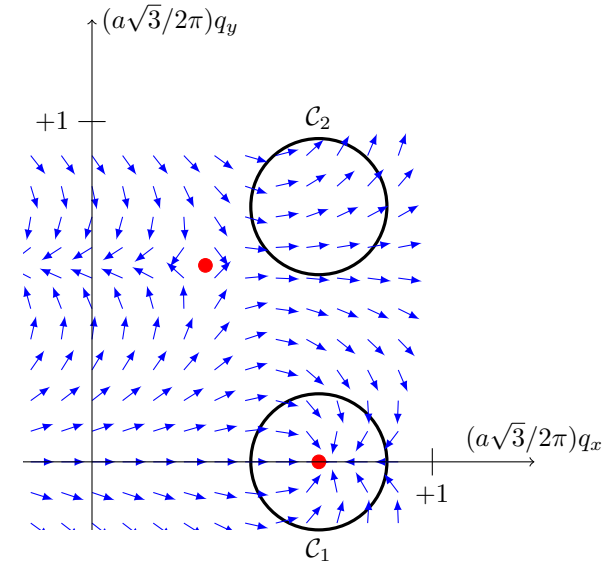


FIGURE 9. Deux "trajectoires" possibles dans l'espace des moments \mathbf{q} . Le contour C_1 , qui entoure un point de Dirac, correspond à une phase géométrique $\pm\pi$. Le contour C_2 correspond à une phase géométrique nulle.

$\pm\pi$ (contour C_1 de la figure 9). Si au contraire la trajectoire n'entoure pas un point de Dirac ou en entoure deux d'enroulements opposés, l'angle solide sera nul, ainsi que la phase géométrique correspondante (contour C_2 de la figure 9).

Pour mettre en évidence cet effet, DUCA, LI et al. (2015) ont réalisé un interféromètre à deux voies et vérifié que la différence de phase à la sortie de cet interféromètre était égale à π ou 0 selon que l'aire de l'interféromètre incluait ou non un point de Dirac. Cette expérience a été réalisée avec des atomes de rubidium préparés dans un réseau optique formé par trois ondes lumineuses à 120 degrés l'une de l'autre.

Initialement l'état externe des atomes est un paquet d'ondes localisé au centre de la zone de Brillouin ($\mathbf{q}_i = 0$) et leur état interne est un certain

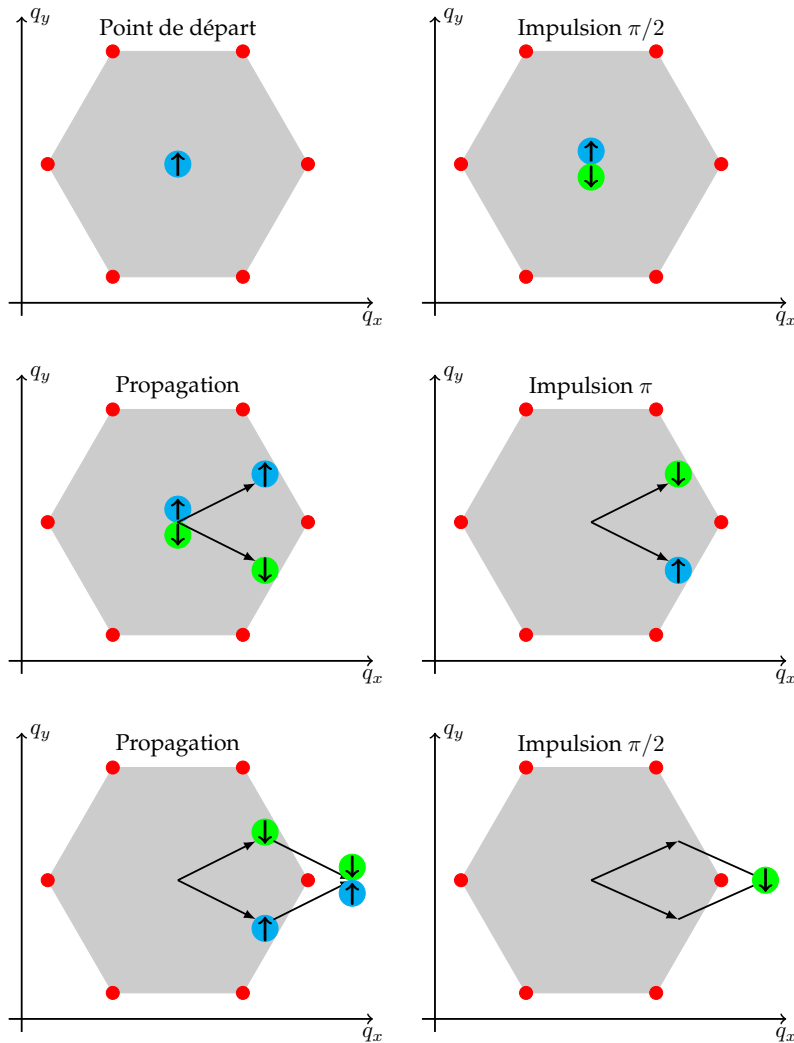


FIGURE 10. Séquence expérimentale suivie pour réaliser un interféromètre à deux voies dans l'espace des moments, permettant de révéler l'enroulement de phase de π autour d'un point de Dirac. Figure inspirée de DUCA, LI et al. (2015).

sous-niveau Zeeman magnétique⁶ noté $|\uparrow\rangle$. On réalise alors un interféromètre de type $\frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\pi}{2}$ avec des impulsions micro-onde (figure 10) :

- Une première impulsion micro-onde $\pi/2$ prépare une superposition cohérente de $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$, le moment magnétique de $|\downarrow\rangle$ étant opposé à celui de $|\uparrow\rangle$, avec un état global qui s'écrit donc :

$$|\mathbf{q}_i, \uparrow\rangle + |\mathbf{q}_i, \downarrow\rangle \quad (21)$$

- Une accélération du réseau le long de l'axe x , réalisée en décalant la fréquence d'un des faisceaux laser par rapport aux deux autres, crée une force d'inertie F_x identique sur les deux états de spin. Cette force va décaler progressivement le quasi-moment \mathbf{q} le long de l'axe x , c'est le phénomène des oscillations de Bloch que nous avons déjà rencontré et que nous développerons un peu plus loin.
- Un gradient de champ magnétique crée une force opposée sur chaque état de spin le long de l'axe y , ce qui permet de séparer les trajectoires de $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$. Les deux quasi-moments des deux états de spin s'écartent donc de part et d'autre de $q_y = 0$, tout en gardant la même valeur de q_x .
- Au bout d'une durée τ , une impulsion micro-onde π échange l'état de spin des atomes, ce qui permet de refermer l'interféromètre dans l'espace des moments \mathbf{q} .
- Au bout de la durée 2τ , les deux paquets d'ondes ont atteint le même moment \mathbf{q}_f et l'état global d'un atome s'écrit

$$|\mathbf{q}_f, \uparrow\rangle + e^{i\Phi} |\mathbf{q}_f, \downarrow\rangle, \quad (22)$$

où Φ contient l'information de phase recherchée.

- Pour accéder à la phase relative Φ , on procède à une dernière impulsion micro-onde $\pi/2$ avec la phase Φ_{MW} et on mesure la population dans les deux états de spin

$$n_{\uparrow, \downarrow} \propto 1 \pm \cos(\Phi + \Phi_{\text{MW}}). \quad (23)$$

Comme toujours, Φ contient à la fois la phase géométrique et la différence des phases dynamiques accumulées sur chacun des bras de l'interféromètre. En principe, les phases dynamiques accumulées sur chaque bras

6. Plus précisément, les deux états en jeu sont $|F = 2, m = 1\rangle$ et $|F = 1, m = 1\rangle$.

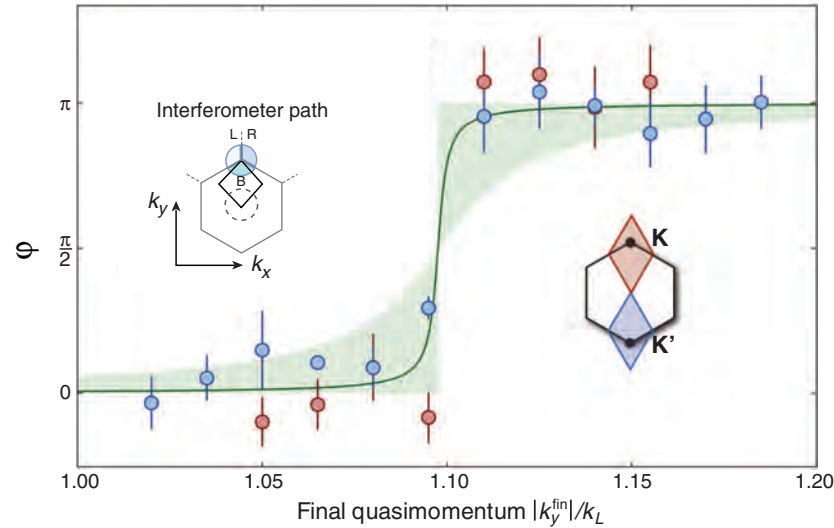


FIGURE 11. Interférences dans l'espace des moments autour d'un point de Dirac. Quand l'un des points de Dirac K ou K' est à l'intérieur de l'interféromètre, la valeur mesurée pour Φ est en bon accord avec la prédiction $\Phi_{\text{geom}} = \pi$. Le léger décalage du point de bascule (environ 10% en valeur relative) s'explique par l'extension finie des paquets d'ondes dans l'espace des moments. Figure extraite de DUCA, LI et al. (2015).

de l'interféromètre sont identiques par symétrie. En pratique, DUCA, LI et al. (2015) ont calibré la phase dynamique résiduelle grâce l'interféromètre d'aire nulle obtenu en inversant l'accélération du réseau au moment du pulse π .

Le résultat final de cette expérience, indiqué sur la figure 11, montre que la phase entre les deux bras de l'interféromètre est $\Phi \sim \pi$ si les deux chemins passent de part et d'autre d'un point de Dirac, et $\Phi \sim 0$ sinon. C'est une confirmation directe de l'enroulement de phase autour d'un point de Dirac.

2 Caractérisation "géométrique" de la topologie

Après avoir étudié un modèle à deux bandes concret, correspondant au réseau hexagonal du graphène, nous abordons maintenant la caractérisation de la nature topologique possible des bandes qui émergent dans ce type de modèle. Nous allons nous intéresser dans ce paragraphe à une caractérisation géométrique, qui sera fondée sur la sphère de Bloch. Nous allons proposer un critère pour disposer d'une bande topologiquement non triviale, qui est son recouvrement total quand \mathbf{q} décrit l'ensemble des valeurs possibles. Dans la partie suivante (§3), nous ferons ensuite le lien avec un critère plus physique, fondée sur la quantification de la conductance de Hall.

2-1 Le recouvrement de la sphère de Bloch

Comme la partie précédente, nous nous intéressons ici à un modèle de liaisons fortes avec deux sites A et B par cellule unité. Commençons donc par en rappeler les ingrédients principaux :

- L'hamiltonien $\hat{H}_{\mathbf{q}}$ dans ce modèle de liaisons fortes s'écrit de manière générale

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = E_0(\mathbf{q}) \hat{1} - \mathbf{h}(\mathbf{q}) \cdot \hat{\sigma} \quad (24)$$

où E_0 et \mathbf{h} sont des fonctions périodiques de \mathbf{q} sur la zone de Brillouin. Nous ne nous limitons pas nécessairement aux couplages entre proches voisins, les fonctions E_0 et \mathbf{h} pouvant donc différer de ce que nous avons trouvé pour le graphène.

- Les énergies propres sont $E_0 \pm |\mathbf{h}|$.
- En dehors des points de Dirac, pour lesquels le vecteur $\mathbf{h}(\mathbf{q})$ s'annule, on peut introduire le vecteur unitaire

$$\mathbf{n}(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{h}(\mathbf{q})}{|\mathbf{h}(\mathbf{q})|} \quad (25)$$

que l'on caractérise par ses angles polaires et azimutaux $[\theta_{\mathbf{q}}, \phi_{\mathbf{q}}]$ en coordonnées sphériques. L'hamiltonien $\hat{H}_{\mathbf{q}}$ s'écrit donc

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = E_0 \hat{1} - |\mathbf{h}| \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (26)$$

- On va s'intéresser à la bande d'énergie la plus basse $E_0 - |\mathbf{h}|$, associée au vecteur propre

$$|u_{\mathbf{q}}^{(-)}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

avec le même choix de jauge qu'aux chapitres précédents, à savoir une première composante réelle, positive ou nulle.

- À toute valeur de \mathbf{q} , on peut donc associer le point de la sphère de Bloch de coordonnées (θ, ϕ) (c'est-à-dire le vecteur $\mathbf{n}(\mathbf{q})$), qui détermine de manière unique l'état propre $|u_{\mathbf{q}}^{(-)}\rangle$.

Sur le plan de la topologie, la caractérisation d'un hamiltonien $\hat{H}_{\mathbf{q}}$ est donc donnée par l'application :

$$\mathbf{q} = (q_x, q_y) \longrightarrow \mathbf{n}_{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \cos \phi_{\mathbf{q}} \sin \theta_{\mathbf{q}} \\ \sin \phi_{\mathbf{q}} \sin \theta_{\mathbf{q}} \\ \cos \theta_{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad (28)$$

qui va de la zone de Brillouin vers la sphère de Bloch. Rappelons la périodicité de $\hat{H}_{\mathbf{q}}$ vis-à-vis des quasi-moments \mathbf{q} quand on leur ajoute un vecteur du réseau réciproque, par exemple $\mathbf{b}_{1,2}$ pour le réseau du graphène (figure 2). La zone de Brillouin possède donc une structure de tore et les zones atteintes sur la sphère de Bloch quand \mathbf{q} explore la zone de Brillouin sont les mêmes que quand \mathbf{q} explore l'ensemble du plan (q_x, q_y) .

Pour préciser la caractérisation de $\hat{H}_{\mathbf{q}}$, rappelons les deux résultats que nous avons trouvés à une dimension.

- Pour les hamiltoniens de type SSH, où la trajectoire 1D de $\mathbf{n}(\mathbf{q})$ est confinée sur l'équateur de la sphère de Bloch, le classement se fait en fonction du nombre d'enroulements autour de l'équateur. Ce critère permet de déterminer de manière non ambiguë l'existence d'éventuels états de bord.
- Pour les pompes géométriques, c'est-à-dire les systèmes 1D évoluant dans le temps et donc effectivement bi-dimensionnels, nous avons classé ces systèmes selon la couverture de la sphère de Bloch quand le vecteur $\mathbf{n}(\mathbf{q}, t)$ décrit le rectangle $[-\pi/a, +\pi/a] \times [0, T]$. Nous avons appelé *topologique* un système tel que $\mathbf{n}(\mathbf{q}, t)$ recouvre entièrement la sphère de Bloch, ce cas correspondant à un déplacement de matière non nul et quantifié dans un cycle de pompe.

Dans les deux cas, nous nous sommes donc convaincus que cette caractérisation d'origine purement mathématique correspondait à des propriétés physiques bien claires.

Nous allons adopter ici une définition similaire : nous allons caractériser $\hat{H}_{\mathbf{q}}$ par la manière selon laquelle $\mathbf{n}(\mathbf{q})$ entoure la sphère de Bloch quand \mathbf{q} décrit toute la zone de Brillouin. Si $\mathbf{n}(\mathbf{q})$ ne recouvre pas toute la sphère, nous dirons que nous sommes dans une situation *normale* ou encore *topologiquement triviale*. Si au contraire $\mathbf{n}(\mathbf{q})$ recouvre entièrement la sphère, la situation sera qualifiée de *topologique* ou encore *topologiquement non triviale*.

La définition mathématique précise de ce recouvrement se fait à partir du nombre d'enveloppements

$$\mathcal{C} = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\text{ZB}} \mathbf{n} \cdot [(\partial_{q_x} \mathbf{n}) \times (\partial_{q_y} \mathbf{n})] dq_x dq_y. \quad (29)$$

C'est une propriété importante de la géométrie différentielle que la quantité \mathcal{C} ainsi définie est toujours un entier et peut donc jouer le rôle d'invariant topologique. En pratique, nous rencontrerons essentiellement des situations pour lesquelles $\mathcal{C} = 0$ (bande normale, pas d'enveloppement) et $|\mathcal{C}| = 1$ (bande topologique, avec un enveloppement). Cette définition peut être vue comme la généralisation à 2D du nombre d'enroulements que nous avons défini à 1D dans le cadre du modèle SSH (cours 1) :

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{ZB}} \frac{d\phi}{dq} dq, \quad (30)$$

où ϕ était l'angle azimutal définissant le vecteur \mathbf{n} .

2-2 Le cas du graphène

Dans le cas du graphène, nous avons vu que l'hamiltonien $\hat{H}_{\mathbf{q}}$ s'écrit

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = -\mathbf{h}(\mathbf{q}) \cdot \hat{\sigma} \quad \text{avec} \quad \mathbf{h} = J \begin{pmatrix} 1 + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2) \\ \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Les vecteurs \mathbf{h} et $\mathbf{n} = \mathbf{h}/|\mathbf{h}|$ sont donc toujours dans le plan équatorial. L'application $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{n}(\mathbf{q})$ ne peut donc évidemment pas recouvrir l'ensemble de la sphère de Bloch (figure 12).

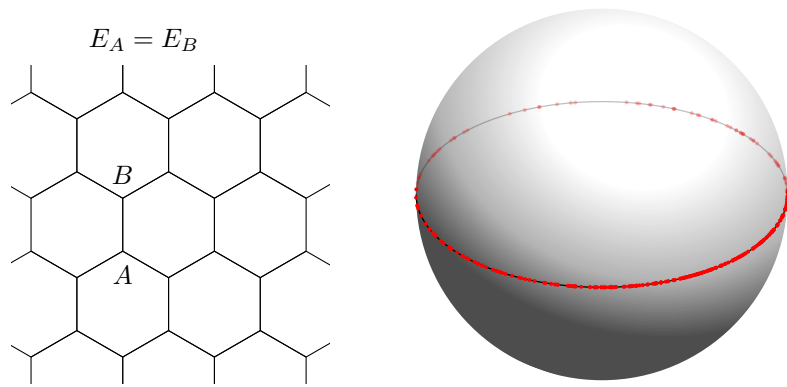


FIGURE 12. Correspondance entre la zone de Brillouin du réseau hexagonal et la sphère de Bloch, avec la même énergie pour les sites A et B : seul l'équateur de la sphère de Bloch est atteint. Les points rouges ont été obtenus par un tirage au sort uniforme de \mathbf{q} dans la zone de Brillouin.

2-3 Couverture partielle ("triviale")

Pour obtenir un recouvrement de la sphère de Bloch s'étendant au delà de son équateur, il faut ajouter une composante $h_z(\mathbf{q}) \hat{\sigma}_z$ à l'hamiltonien. Le plus simple pour cela est de donner une énergie opposée $\mp\Delta$ aux deux sites A et B, de sorte que l'hamiltonien $\hat{H}_{\mathbf{q}}$ devienne

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = - \begin{pmatrix} \Delta & h_x(\mathbf{q}) - ih_y(\mathbf{q}) \\ h_x(\mathbf{q}) + ih_y(\mathbf{q}) & -\Delta \end{pmatrix}, \quad \text{soit } h_z = \Delta \quad (32)$$

avec les énergies propres :

$$E_{\mathbf{q}}^{\pm} = \pm [h_x^2(\mathbf{q}) + h_y^2(\mathbf{q}) + \Delta^2]^{1/2}. \quad (33)$$

Le contact aux points de Dirac disparaît et on obtient deux bandes d'énergie disjointes (figure 13).

Même si une surface étendue de la sphère de Bloch peut désormais être couverte quand \mathbf{q} décrit l'ensemble de la zone de Brillouin, il est clair que le critère de recouvrement total de la sphère de Bloch que nous avons posé au paragraphe précédent ne peut pas être réalisé. En effet, l'angle θ défini

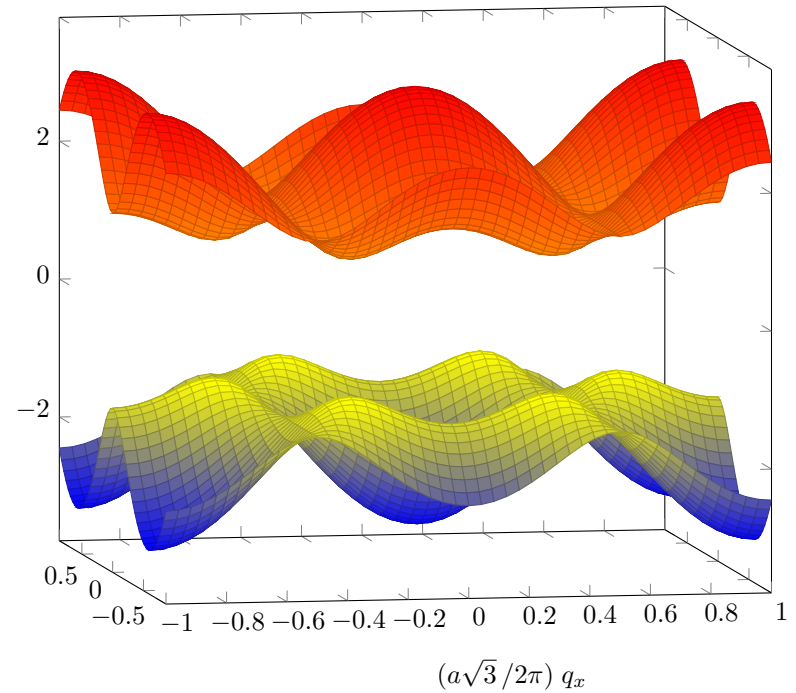


FIGURE 13. Bandes d'énergie obtenues pour le réseau hexagonal avec couplages entre proches voisins et une énergie sur site $\pm\Delta$ avec $\Delta = J$.

par

$$\cos(\theta) = \frac{\Delta}{[h_x^2 + h_y^2 + \Delta^2]^{1/2}} \quad (34)$$

est toujours inférieur à $\pi/2$ si Δ est positif. Tous les états de la bande inférieure $|u_{\mathbf{q}}^{(-)}\rangle$ ont donc une image dans l'hémisphère nord de la sphère de Bloch (figure 14); cette bande inférieure ne peut pas être qualifiée de topologique selon le critère que nous avons fixé puisque tous les points de la sphère ne sont pas atteints. Il en va de même pour la bande supérieure : tous ses états $|u_{\mathbf{q}}^{(+)}\rangle$ ont une image dans l'hémisphère sud de la sphère de Bloch.

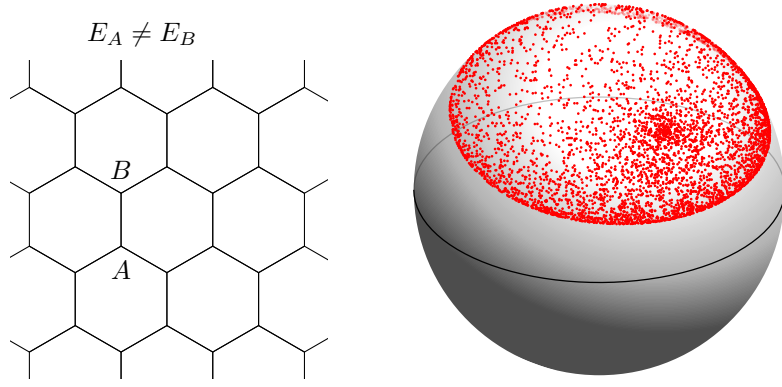


FIGURE 14. Correspondance entre la zone de Brillouin du réseau hexagonal (avec $\Delta = J$) et la couverture (partielle) de la sphère de Bloch par l'état $|u_q^{(-)}\rangle$ de la bande fondamentale. Les points rouges ont été obtenus par un tirage au sort uniforme de \mathbf{q} dans la zone de Brillouin.

2-4 Couverture totale ("non triviale")

Pour terminer cette partie consacrée à l'argument "géométrique" fondé sur le recouvrement de la sphère de Bloch, donnons un exemple d'hamiltonien \hat{H}_q qui remplit ce but. Considérons une "légère" modification de (32) où la quantité h_z dépend elle-même de \mathbf{q} :

$$\hat{H}_q = - \begin{pmatrix} h_z(\mathbf{q}) & h_x(\mathbf{q}) - ih_y(\mathbf{q}) \\ h_x(\mathbf{q}) + ih_y(\mathbf{q}) & -h_z(\mathbf{q}) \end{pmatrix} \quad (35)$$

avec

$$h_z(\mathbf{q}) = \Delta_0 \{-\sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2) + \sin[\mathbf{q} \cdot (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)]\} \quad (36)$$

Nous ne chercherons pas à justifier ici cette forme, qui apparaîtra naturellement au cours prochain quand nous étudierons le modèle de HALDANE (1988), en ajoutant des couplages aux seconds voisins. Le point important pour nous à ce stade est que l'ensemble de la sphère de Bloch est recouvert de manière non triviale par l'état $|u_q^{(-)}\rangle$ quand \mathbf{q} explore l'ensemble de la zone de Brillouin (figure 15). De manière plus quantitative, le calcul du nombre d'enveloppement à partir de (29) donne $|\mathcal{C}| = 1$, confirmant la nature topologiquement non triviale de la bande ainsi obtenue.

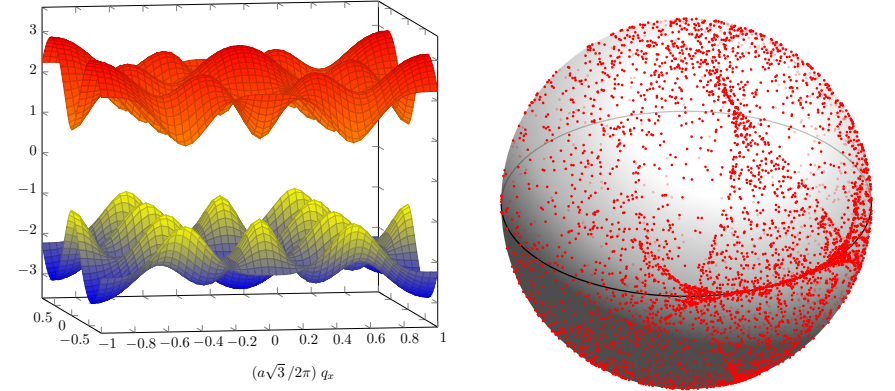


FIGURE 15. Bandes d'énergie (gauche) et couverture totale de la sphère de Bloch par l'état $|u_q^{(-)}\rangle$ (droite), obtenues en disposant les termes $\pm h_z(\mathbf{q})$ donnés en (36) sur la diagonale de \hat{H}_q (avec $\Delta_0 = J$). Nous verrons au prochain chapitre que ces termes apparaissent dans le modèle de Haldane, prenant en compte des couplages complexes aux seconds voisins. Les points rouges ont été obtenus par un tirage au sort uniforme de \mathbf{q} dans la zone de Brillouin.

Lien avec la pompe adiabatique du modèle Rice-Mele. Un autre exemple de couverture non triviale de la sphère de Bloch est fourni par notre étude de la pompe adiabatique du cours précédent; nous avons trouvé dans cette étude une couverture totale de la sphère de Bloch en envoyant un état du système de moment q à l'instant t sur la sphère de Bloch :

$$(q, t) \rightarrow \mathbf{n}, \quad (37)$$

quand q décrit l'intervalle $[-\pi/a, \pi/a]$ et t l'intervalle $[0, T]$ avec des conditions aux limites périodiques. Si on remplace formellement q par q_x et t par q_y dans ce problème, on aboutit à la couverture recherchée. Ainsi la trajectoire circulaire dans le plan (J', Δ) centrée en $(J, 0)$ et de rayon J envisagée au cours précédent se transcrit pour les variables (q_x, q_y) :

$$\hat{H}_q = -J \begin{pmatrix} \sin(q_y a) & 1 + \cos(q_y a) + e^{-iq_x a} \\ 1 + \cos(q_y a) + e^{+iq_x a} & -\sin(q_y a) \end{pmatrix}. \quad (38)$$

3 Caractérisation "physique" de la topologie

Après cet "argument d'autorité" qualifiant de topologique une bande telle que le nombre d'enveloppements \mathcal{C} soit différent de 0, nous allons maintenant passer à une caractérisation plus physique de la topologie possible d'une bande d'énergie, fondée sur la notion de *transport quantifié*.

Pour cela, nous allons nous inspirer directement des concepts développés pour l'étude de l'effet Hall quantique. Nous allons les détailler sur un modèle général de système périodique, en quittant donc momentanément le modèle à deux bandes. Nous retrouverons bien sûr ce modèle à deux bandes à la fin de notre raisonnement et nous vérifierons que notre critère physique fondé sur un transport quantifié coïncide avec le critère géométrique décrit au paragraphe précédent.

3-1 L'effet Hall quantique

La découverte de l'effet Hall quantique entier et les travaux théoriques ont suivi ont permis d'établir une correspondance entre la nature topologique d'une bande d'énergie et la conductivité de cette bande. Plus précisément, une expérience d'effet Hall quantique consiste très schématiquement à (cf. figure 16) :

- prendre un échantillon bi-dimensionnel rectangulaire $[0, L_x] \times [0, L_y]$ contenant un "gaz d'électrons" (puits quantique) que l'on place dans un champ magnétique orienté selon z ;
- appliquer une tension continue V_x entre les deux côtés opposés $x = 0$ et $x = L_x$, correspondant à un champ électrique \mathcal{E} parallèle à l'axe x avec $\mathcal{E}_x = V_x/L_x$. Dans le cadre d'expériences menées avec des atomes neutres, cette tension est simplement remplacée par une force \mathbf{F} uniforme parallèle à l'axe x ;
- mesurer l'intensité I_y (ou la densité de courant $J_y = I_y/L_x$) qui circule dans la direction y .

L'intensité I_y , quand elle n'est pas nulle, est proportionnelle à la tension

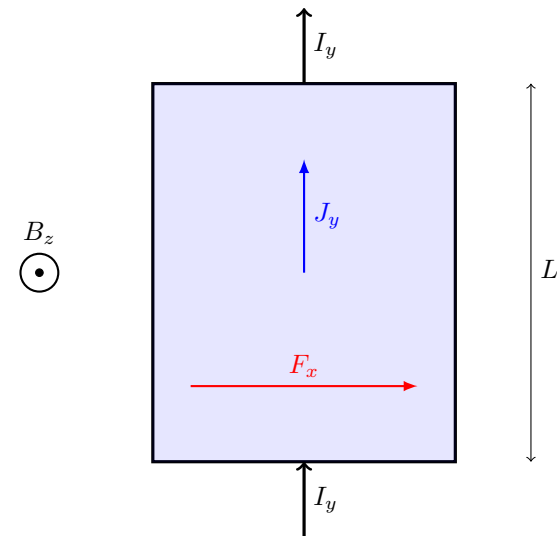


FIGURE 16. Représentation schématique d'une expérience d'effet Hall. L'application d'une force F_x selon la direction x induit une densité de courant J_y selon la direction y . Le champ magnétique appliqué est perpendiculaire au plan.

V_x . On définit ainsi le tenseur⁷ de conductivité de Hall σ_{yx} par

$$I_y = \sigma_{yx} V_x \Leftrightarrow J_y = \sigma_{yx} \mathcal{E}_x \tag{39}$$

et le résultat spectaculaire de l'effet Hall quantique (entier) est la quantification de cette conductivité :

$$\sigma_{yx} = \frac{e^2}{h} n \tag{40}$$

où n est un entier positif, négatif ou nul, e la charge des particules conductrices et h la constante de Planck. Cette quantification avec un entier n donné reste valable sur un plateau de champ magnétique, avant de basculer vers l'entier $n + 1$ quand on diminue le champ magnétique.

L'entier n a une origine topologique ; plus précisément, il révèle la topologie des bandes d'énergie peuplées pour un champ magnétique donné.

7. On a par symétrie $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$.

Le traitement désormais traditionnel de l'effet Hall quantique consiste à utiliser la théorie de la réponse linéaire pour calculer σ_{yx} pour les bandes d'énergie occupées (THOULESS, KOHMOTO et al. 1982). Le résultat fait intervenir un nombre de Chern (topologique) relié à la courbure de Berry de ces bandes.

Dans ce qui suit, nous allons adopter une démarche légèrement différente de ce traitement traditionnel. Nous allons faire une analyse locale de la dynamique d'un paquet d'ondes dans la zone de Brillouin. Pour une bande pleine, nous retrouverons bien sûr les résultats connus, mais ce traitement sera mieux adapté aux expériences récentes menées avec des atomes ou des photons. Ces expériences permettent en effet de travailler avec des bandes qui ne sont que partiellement remplies et elles donnent accès à des informations plus "riches" que la simple conductivité σ_{yx} .

3-2 Evolution du moment q

Pour mener notre analyse locale, nous allons considérer une particule placée dans le potentiel périodique $V(\mathbf{r})$ à deux dimensions ($\mathbf{r} = (x, y)$). Pour fixer les idées, nous supposons la particule préparée à l'instant $t = 0$ dans l'état de Bloch \mathbf{q}_0 de la bande fondamentale $n = 0$:

$$\Psi_{t=0}(\mathbf{r}) \equiv \psi_{\mathbf{q}_0}^{(0)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{r}} u_{\mathbf{q}_0}^{(0)}(\mathbf{r}), \quad (41)$$

ou bien dans un paquet d'ondes centré sur ce moment \mathbf{q}_0 et de largeur faible devant la taille de la zone de Brillouin. Pour simuler une expérience d'effet Hall quantique, nous supposons qu'une force uniforme (et dépendant éventuellement du temps) \mathbf{F}_t parallèle à l'axe x est appliquée à la particule en plus du potentiel $V(\mathbf{r})$. L'hamiltonien décrivant le mouvement de la particule est donc

$$\hat{H}_t = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{F}_t \cdot \hat{\mathbf{r}}. \quad (42)$$

Nous allons procéder en deux temps, en regardant séparément l'évolution $\frac{d\mathbf{q}}{dt}$ du moment \mathbf{q} de la particule et l'évolution $\frac{d\langle \mathbf{r} \rangle}{dt}$ de sa position moyenne, c'est-à-dire sa vitesse.

La première partie de notre raisonnement va consister à retrouver le phénomène des oscillations de Bloch, c'est-à-dire l'équation d'évolution

très simple pour le moment \mathbf{q} :

$$\hbar \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (43)$$

Ce phénomène a déjà été abordé dans le cours 2012-13 et nous rappelons ici les étapes qui permettent d'établir ce résultat.

Du fait de la présence de la force \mathbf{F} , le problème n'est plus périodique d'espace, et il semble que le théorème de Bloch ne puisse plus être invoqué. Toutefois il est simple de retrouver un problème périodique. Il suffit de faire la transformation unitaire générée par l'opérateur

$$\hat{U}_t = \exp[-i\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_t] \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_t = \frac{1}{\hbar} \int_0^t \mathbf{F}_{t'} dt' \quad (44)$$

pour obtenir l'hamiltonien transformé

$$\begin{aligned} \hat{H}_t &= \hat{U}_t \hat{H}_t \hat{U}_t^\dagger + i\hbar \frac{d\hat{U}_t}{dt} \hat{U}_t^\dagger \\ &= \frac{(\hat{\mathbf{p}} + \hbar \mathbf{A}_t)^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (45)$$

qui est bien périodique d'espace. Nous allons donc nous intéresser à l'évolution de l'état de la particule après cette transformation unitaire

$$\tilde{\Psi}_t(\mathbf{r}) = \hat{U}_t \Psi_t(\mathbf{r}) \quad (46)$$

en remarquant que les deux états Ψ et $\tilde{\Psi}$ coïncident en $t = 0$.

On peut alors raisonner de la manière suivante pour cet hamiltonien transformé :

— On part à l'instant initial d'un état de Bloch de quasi-moment \mathbf{q}_0 .

Comme l'hamiltonien \hat{H}_t est périodique d'espace, on va rester à chaque instant dans un état de Bloch

$$\tilde{\Psi}_t(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{r}} u_t(\mathbf{r}) \quad (47)$$

où $u_t(\mathbf{r})$ est une fonction périodique sur le réseau.

— En reportant cette expression de $\tilde{\Psi}_t$ dans l'équation de Schrödinger, on trouve que la fonction périodique $u_t(\mathbf{r})$ doit être solution de

$$i\hbar \frac{\partial u_t}{\partial t} = \left\{ \frac{[\hat{\mathbf{p}} + \hbar(\mathbf{q}_0 + \mathbf{A}_t)]^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right\} u_t(\mathbf{r}). \quad (48)$$

Il s'agit donc d'une évolution sous l'effet de l'hamiltonien $\hat{H}_{\mathbf{q}_0+\mathbf{A}_t}$, où

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} + \hbar\mathbf{q})^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad (49)$$

est l'hamiltonien usuel permettant de déterminer la partie périodique des fonctions de Bloch. On se retrouve donc face à un problème usuel d'hamiltonien dépendant d'un paramètre extérieur, en l'occurrence \mathbf{A}_t , pour lequel les fonctions propres sont connues à chaque instant (les $u_{\mathbf{q}}^{(n)}$).

- Si la bande fondamentale est à chaque instant séparée des bandes supérieures (pas de point de Dirac!) et si la force F évolue lentement dans le temps, la particule va rester à chaque instant dans la bande fondamentale et suivre quasi-adiabatement l'état propre $u_{\mathbf{q}_0+\mathbf{A}_t}^{(0)}$. Si l'on revient à l'état de la particule avant transformation unitaire

$$\Psi_t(\mathbf{r}) = \hat{U}_t^\dagger \tilde{\Psi}_t(\mathbf{r}) = e^{i(\mathbf{q}_0+\mathbf{A}_t)\cdot\mathbf{r}} u_{\mathbf{q}_0+\mathbf{A}_t}^{(0)}(\mathbf{r}) \quad (50)$$

on trouve que cet état coïncide (à une phase près) avec l'état de Bloch de la bande fondamentale de quasi-moment

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_0 + \mathbf{A}_t \quad (51)$$

d'où l'équation d'évolution recherchée (43).

Le moment \mathbf{q} parcourt donc la zone de Brillouin de manière uniforme au cours du temps. Du fait de la structure périodique de cette zone, on obtient un mouvement périodique, l'oscillation de Bloch, le long de l'axe parallèle à la force F .

Ceci termine la première partie de notre analyse, en nous donnant l'évolution du quasi-moment. Nous allons maintenant nous intéresser à l'évolution de la position de la particule.

3-3 La vitesse "anormale"

Pour déterminer l'évolution de la vitesse moyenne de la particule, nous allons faire un raisonnement très proche de celui que nous avons mis en place pour l'analyse de la pompe géométrique à la partie 5 du cours 3.

Partons de l'expression de l'état de la particule à l'ordre 1 du développement à la base de l'approximation adiabatique pour l'hamiltonien $\hat{H}_{\mathbf{q}+\mathbf{A}_t}$:

$$|u_t\rangle = |u_{\mathbf{q}_t}^{(0)}\rangle + i\hbar \sum_{n \neq 0} |u_{\mathbf{q}_t}^{(n)}\rangle \frac{\langle u_{\mathbf{q}_t}^{(n)} | \partial_t u_{\mathbf{q}_t}^{(0)} \rangle}{E_{\mathbf{q}}^{(n)} - E_{\mathbf{q}}^{(0)}} + \dots \quad (52)$$

Dans cette équation, la dépendance en t de l'état $u_{\mathbf{q}_t}^{(0)}$ provient de la variation de $\mathbf{A} = \int^t \mathbf{F}_{t'} dt'$. Pour une force $\mathbf{F} = F_x \mathbf{u}_x$ alignée avec l'axe x , on a donc

$$\hbar |\partial_t u_{\mathbf{q}_t}^{(0)}\rangle = F_x |\partial_{q_x} u_{\mathbf{q}_t}^{(0)}\rangle \quad (53)$$

où l'on a utilisé l'équation du mouvement de \mathbf{q} trouvée plus haut [cf. (43)]. Le petit paramètre du développement (52) est donc

$$\frac{F_x a}{\Delta E} \ll 1 \quad (54)$$

où on a posé que l'échelle de quasi-moment sur laquelle $|u_{\mathbf{q}}^{(0)}\rangle$ varie est de l'ordre de la taille $1/a$ de la zone de Brillouin et où ΔE représente un écart typique entre deux bandes d'énergie.

Nous allons évaluer à l'ordre 1 en ce petit paramètre la moyenne de l'opérateur vitesse

$$\hat{v} = \frac{\hat{\mathbf{p}}}{m} = -i \frac{\hbar}{m} \nabla_{\mathbf{r}} \quad (55)$$

pour l'état de Bloch $e^{i\mathbf{q}_t \cdot \mathbf{r}} u_t(\mathbf{r})$. Le terme dominant provient de la contribution de $|u_{\mathbf{q}_t}^{(0)}\rangle$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= \left(\langle u_{\mathbf{q}_t}^{(0)} | e^{-i\mathbf{q}_t \cdot \mathbf{r}} \right) \frac{\hat{\mathbf{p}}}{m} \left(e^{i\mathbf{q}_t \cdot \mathbf{r}} | u_{\mathbf{q}_t}^{(0)} \rangle \right) \\ &= \frac{1}{m} \langle u_{\mathbf{q}_t}^{(0)} | (\hat{\mathbf{p}} + \hbar\mathbf{q}_t) | u_{\mathbf{q}_t}^{(0)} \rangle \\ &= \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{q}_t}^{(0)}, \end{aligned} \quad (56)$$

où nous avons utilisé le résultat d'un des deux lemmes établis au chapitre précédent. Cette première contribution est l'expression bien connue de la vitesse de groupe.

Le terme suivant du développement provient de la contribution croisée des termes d'ordre 1 et 2 :

$$v_1 = i \frac{F_x}{m} \sum_{n \neq 0} \langle u_{\mathbf{q}_t}^{(0)} | (\hat{\mathbf{p}} + \hbar \mathbf{q}_t) | u_{\mathbf{q}_t}^{(n)} \rangle \frac{\langle u_{\mathbf{q}_t}^{(n)} | \partial_{q_x} u_{\mathbf{q}_t}^{(0)} \rangle}{E_{\mathbf{q}_t}^{(n)} - E_{\mathbf{q}_t}^{(0)}} + \text{c.c.} \quad (57)$$

En utilisant le second lemme vu au chapitre précédent, cette expression se simplifie pour donner

$$v_1 = -i \frac{F_x}{\hbar} \langle \nabla_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}_t}^{(0)} | \partial_{q_x} u_{\mathbf{q}_t}^{(0)} \rangle + \text{c.c.} \quad (58)$$

La composante selon x de v_1 s'annule quand on ajoute la contribution du complexe conjugué et on trouve pour la composante selon y

$$v_{1,y} = \frac{F_x \Omega_{\mathbf{q}_t}}{\hbar} \quad (59)$$

où l'on a introduit la *courbure de Berry* au point \mathbf{q} de la zone de Brillouin

$$\Omega_{\mathbf{q}} = i \left(\langle \partial_{q_x} u_{\mathbf{q}}^{(0)} | \partial_{q_y} u_{\mathbf{q}}^{(0)} \rangle - \langle \partial_{q_y} u_{\mathbf{q}}^{(0)} | \partial_{q_x} u_{\mathbf{q}}^{(0)} \rangle \right) \quad (60)$$

$$= i \left(\langle \nabla_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}}^{(0)} | \times | \nabla_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}}^{(0)} \rangle \right) \cdot \mathbf{u}_z. \quad (61)$$

En introduisant la notation vectorielle $\Omega_{\mathbf{q}} = \Omega_{\mathbf{q}} \mathbf{u}_z$, cette contribution à la vitesse s'écrit

$$v_{1,t} = \frac{1}{\hbar} \Omega_{\mathbf{q}_t} \times \mathbf{F}_t. \quad (62)$$

Cette vitesse est parfois appelée "vitesse anormale". On la rencontre dans les articles de KARPLUS & LUTTINGER (1954) et ADAMS & BLOUNT (1959), ces derniers étant à l'origine de la dénomination *anomalous velocity*. Une présentation "moderne" du formalisme conduisant à l'expression ci-dessus peut être trouvée dans CHANG & NIU (1995).

A cet ordre du calcul, nous obtenons donc la deuxième équation du mouvement donnant la vitesse pour le quasi-moment \mathbf{q} :

$$\hbar \mathbf{v}_{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{q}}^{(0)} + \Omega_{\mathbf{q}} \times \mathbf{F} \quad (63)$$

qui vient compléter celle écrite en (43) pour l'évolution du moment \mathbf{q} .

Ordres de grandeurs. En reprenant l'idée que l'énergie $E_{\mathbf{q}}^{(0)}$ et l'état de Bloch $|u_{\mathbf{q}}^{(0)}\rangle$ varient appréciablement sur une échelle q de l'ordre de la taille $1/a$ de la zone de Brillouin, on trouve

$$v_0 \sim \frac{a \Delta E}{\hbar}, \quad v_1 \sim \frac{a^2 F}{\hbar}, \quad (64)$$

de sorte que $v_1 \ll v_0$ si la condition de validité (54) est vérifiée⁸. Toutefois nous allons voir dans un instant que pour une bande pleine, la contribution de v_0 s'annule et la conduction est alors entièrement déterminée par v_1 . Il était donc bien nécessaire de pousser notre calcul jusqu'à l'ordre 1 inclus.

3-4 Conductance d'une bande uniformément remplie

Pour retrouver la conductance quantifiée de l'effet Hall, donnons nous un échantillon bi-dimensionnel avec une cellule unité d'aire A_{cell} , la zone de Brillouin correspondante ayant une aire dans l'espace des moments

$$A_{\text{ZB}} = \frac{(2\pi)^2}{A_{\text{cell}}}. \quad (65)$$

Nous considérons la situation où le remplissage de l'échantillon est d'une particule par cellule unité, soit une densité surfacique

$$\rho^{(2D)} = \frac{1}{A_{\text{cell}}}. \quad (66)$$

Ainsi, dans le cadre du modèle de liaisons fortes que nous avons développé pour le graphène, il y a $\gamma = 2$ sites par cellule unité, donc un taux de remplissage de $1/\gamma = 1/2$ particule par site. Comme l'existence de γ sites par cellule unité conduit à γ bandes d'énergie, notre hypothèse sur le remplissage de l'échantillon revient à dire que la bande fondamentale $n = 0$ est pleine et les $\gamma - 1$ bandes supérieures sont vides.

Nous supposons que les particules sont des fermions sans interaction, de sorte que l'opérateur densité à une particule est simplement égal à l'identité dans la base des $|\psi_{\mathbf{q}}^{(0)}\rangle$. Le flux moyen de particules

$$\mathbf{J} = \rho^{(2D)} \langle \mathbf{v} \rangle \quad (67)$$

⁸. On suppose comparable l'écart entre bandes ΔE qui intervient dans (54) et la largeur de la bande 0 qui intervient ici.

est donc obtenu en moyennant la vitesse \mathbf{v}_q donnée en (63) sur tous les moments \mathbf{q} de la zone de Brillouin :

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{A_{ZB}} \iint_{ZB} \mathbf{v}_q \, d^2q. \quad (68)$$

On constate immédiatement que la contribution de $\mathbf{v}_0 = \frac{1}{\hbar} \nabla_q E_q^{(0)}$ s'annule car la fonction $E_q^{(0)}$ est régulière et périodique sur la zone de Brillouin. Il ne reste donc que la contribution de $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\hbar} \Omega_q \times \mathbf{F}$, soit en prenant la force \mathbf{F} le long de l'axe x et en utilisant (65) :

$$J_y = \sigma_{yx} F_x \quad (69)$$

avec

$$\sigma_{yx} = \frac{1}{h} \mathcal{C} \quad (70)$$

où l'on a introduit le *nombre de Chern*

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2\pi} \iint_{ZB} \Omega_q \, d^2q. \quad (71)$$

La conductance de Hall sera quantifiée de la manière annoncée⁹ en (40) pourvu que le nombre de Chern \mathcal{C} soit un entier. Prouvons maintenant ce résultat important.

3-5 Le nombre de Chern est un entier.

Ce point a en fait déjà été prouvé au chapitre 3 lors de notre étude de la pompe géométrique. La démonstration à faire ici est en tout point semblable. Introduisons la connexion de Berry

$$\mathcal{A}_q = i \langle u_q^{(0)} | \nabla_q u_q^{(0)} \rangle \quad (72)$$

de sorte que

$$\Omega_q = \nabla_q \times \mathcal{A}_q. \quad (73)$$

9. Notons qu'il y a un facteur e^2 d'écart entre les deux expressions, e étant la charge de l'électron. En effet, la conductance habituelle de l'effet Hall caractérise la réponse du courant électrique à un champ électrique \mathcal{E} , alors que l'on regarde ici la réponse du courant de particules à une force \mathbf{F} .

La formule de Stokes appliquée "naïvement" donne alors pour le nombre de Chern

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{ZB} \Omega_q \, d^2q \stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi} \oint_{ZB} \mathcal{A}_q \cdot d\mathbf{q} \quad (74)$$

où le contour correspond au périmètre de la zone de Brillouin. Quand les états $|u_q\rangle$ sont définis de manière périodique sur cette zone, cette intégrale de contour s'annule. On pourrait en déduire que le nombre de Chern est toujours nul. Mais cette conclusion serait incorrecte, car la définition de la connexion de Berry peut présenter une ou plusieurs singularités ponctuelles dans la zone de Brillouin (KOHMOTO 1985).

Deux pistes peuvent être suivies pour contourner cette difficulté.

- La première, déjà décrite dans le cours 3, consiste à se fixer un choix de jauge, puis à utiliser un contour qui évite ces singularités (figure 26 du chapitre 3). Chaque singularité contribue alors par un facteur $\pm 2\pi$ à l'intégrale curviligne. Le nombre de Chern correspond donc à la somme algébrique de ces singularités : il peut donc être non nul, mais ce sera toujours un entier.
- L'autre possibilité consiste à utiliser dans l'espace des moments deux choix de jauge (I) et (II) reliés par la transformation

$$|u_q^{(II)}\rangle = e^{-i\chi_q} |u_q^{(I)}\rangle \quad (75)$$

ce qui entraîne pour les connexions de Berry

$$\mathcal{A}_q^{(II)} = \mathcal{A}_q^{(I)} + \nabla_q \chi_q. \quad (76)$$

Pour une cellule unité à deux sites, le choix de jauge (I) peut correspondre par exemple à celui fait jusqu'à maintenant, avec une première composante de $|u\rangle$ réelle et positive, et le choix de jauge (II) à une deuxième composante de $|u\rangle$ réelle et positive, soit pour la bande inférieure :

$$(I) : |u_q^{(I)}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (II) : |u_q^{(II)}\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (77)$$

avec simplement $\chi_q = \phi_q$. Nous avons vu au chapitre 3 que la jauge (I) conduit à une singularité en \mathbf{q} quand le pôle sud est atteint, alors que la jauge (II) conduit à une singularité en \mathbf{q} pour le pôle nord. On

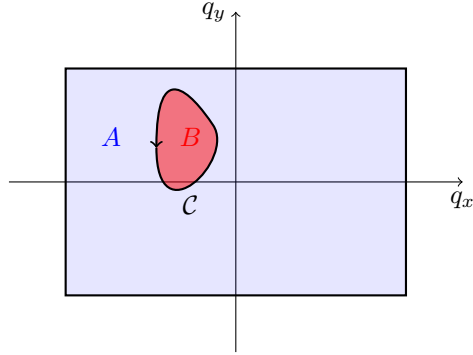


FIGURE 17. Une zone de Brillouin (supposée ici rectangulaire) est séparée en deux régions complémentaires A et B , associées à deux choix de jauge différents (I) et (II) . Ces régions sont choisies telles qu'il n'y a pas de singularité pour la jauge (I) dans la région A , et idem pour la jauge (II) dans la région B . On note C le contour fermé délimitant la frontière entre ces deux régions.

peut alors séparer la zone de Brillouin en deux¹⁰ parties complémentaires : la partie A ne contient pas de singularité pour le choix de jauge (I) et la partie B ne contient pas de singularité pour (II) (figure 17).

Séparons de la même façon l'intégrale surfacique de la courbure de Berry en deux parties, chacune pouvant être calculée par la formule de Stokes pour la jauge non singulière. En notant C le contour formant la frontière entre les zones A et B , on a :

$$\begin{aligned} \iint_{\text{ZB}} \Omega_{\mathbf{q}} d^2q &= \iint_A \Omega_{\mathbf{q}} d^2q + \iint_B \Omega_{\mathbf{q}} d^2q \\ &= \left(\oint_{\text{ZB}} - \oint_C \right) \mathcal{A}_{\mathbf{q}}^{(I)} \cdot d\mathbf{q} + \oint_C \mathcal{A}_{\mathbf{q}}^{(II)} \cdot d\mathbf{q}. \end{aligned} \quad (78)$$

Comme mentionné plus haut, l'intégrale curviligne de $\mathcal{A}_{\mathbf{q}}^{(I)}$ sur le bord de la zone de Brillouin donne un résultat nul, compte tenu de la pé-

¹⁰. On peut toujours raffiner en introduisant un troisième choix de jauge en cas de singularités communes à (I) et (II) .

riodicité en \mathbf{q} . Il reste donc :

$$\iint_{\text{ZB}} \Omega_{\mathbf{q}} d^2q = \oint_C \left(\mathcal{A}_{\mathbf{q}}^{(II)} - \mathcal{A}_{\mathbf{q}}^{(I)} \right) \cdot d\mathbf{q} = \oint_C \nabla_{\mathbf{q}} \chi_{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q}. \quad (79)$$

Or pour que le changement de jauge (75) soit monovalué, il faut que cette dernière intégrale soit un multiple de 2π , d'où le résultat.

La conclusion de cette approche fondée sur l'étude du transport nous conduit donc à la définition suivante : une bande d'énergie sera qualifiée de topologique si et seulement si son nombre de Chern

$$C = \frac{1}{2\pi} \iint_{\text{ZB}} \Omega_{\mathbf{q}} d^2q. \quad (80)$$

est un entier non nul. Dans le cas contraire $C = 0$, on dira que la bande est topologiquement triviale. Rappelons par ailleurs que la courbure de Berry $\Omega_{\mathbf{q}}$ de la bande considérée est bien définie si cette bande est isolée de ses voisines par un gap. Notre critère exclut donc les structures de bandes comportant des points de Dirac.

4 La courbure de Berry dans un réseau 2D

4-1 Comparaison de nos deux approches

Nous avons donné dans les parties qui précèdent deux caractérisations possibles de la topologie associée à une bande. La première était explicitement limitée au cas des liaisons fortes et des cellules à deux sites. En écrivant l'hamiltonien sous forme de combinaison de matrices de Pauli,

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = h_0(\mathbf{q})\hat{1} - \mathbf{h}(\mathbf{q}) \cdot \hat{\sigma} \quad (81)$$

et en introduisant le vecteur unitaire

$$\mathbf{n}(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{h}(\mathbf{q})}{|\mathbf{h}(\mathbf{q})|} \quad (82)$$

nous avons introduit l'invariant topologique

$$C = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\text{ZB}} \mathbf{n} \cdot [(\partial_{q_x} \mathbf{n}) \times (\partial_{q_y} \mathbf{n})] dq_x dq_y. \quad (83)$$

qui indique comment le vecteur \mathbf{n}_q recouvre la sphère de Bloch.

La seconde méthode, que nous avons développée pour un hamiltonien périodique général en analysant la conductivité de Hall, nous a conduit à l'invariant

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\text{ZB}} \Omega_q \, d^2q \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\text{ZB}} i \left(\langle \partial_{q_x} u_q^{(0)} | \partial_{q_y} u_q^{(0)} \rangle - \langle \partial_{q_y} u_q^{(0)} | \partial_{q_x} u_q^{(0)} \rangle \right) d^2q. \end{aligned} \quad (84)$$

Comment ces deux définitions se comparent-elles ?

Il est en fait assez simple de montrer qu'elles coïncident pour un modèle de liaisons fortes à deux sites. Nous savons que pour ce modèle à deux bandes, les états $|u_q^{(-)}\rangle$ de la bande fondamentale et le vecteur \mathbf{n} s'expriment chacun en fonction des angles θ et ϕ :

$$|u_q^{(-)}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (85)$$

et les arguments des deux intégrales peuvent être évalués en fonction de $\nabla_q \theta$ et $\nabla_q \phi$. Un calcul un peu long, mais sans difficulté, donne pour ces deux termes :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot [(\partial_{q_x} \mathbf{n}) \times (\partial_{q_y} \mathbf{n})] &= \sin \theta (\partial_{q_x} \theta \partial_{q_y} \phi - \partial_{q_y} \theta \partial_{q_x} \phi) \\ &= -2i \left(\langle \partial_{q_x} u_q^{(-)} | \partial_{q_y} u_q^{(-)} \rangle - \langle \partial_{q_y} u_q^{(-)} | \partial_{q_x} u_q^{(-)} \rangle \right) \\ &= -2\Omega_q. \end{aligned} \quad (86)$$

Cette expression peut également s'écrire en fonction du vecteur \mathbf{h} plutôt que \mathbf{n} :

$$\Omega_q = -\frac{1}{2|\mathbf{h}|^3} \mathbf{h} \cdot [(\partial_{q_x} \mathbf{h}) \times (\partial_{q_y} \mathbf{h})] \quad (87)$$

En résumé, mesurer la courbure de Berry dans un modèle à deux bandes revient à mesurer le vecteur unitaire \mathbf{n}_q . C'est précisément ce qui a été fait dans l'expérience menée récemment à Hambourg (FLÄSCHNER, REM et al. 2016) et que nous allons décrire en § 4-3. Auparavant, nous allons profiter du lien établi entre topologie et courbure de Berry pour dégager les conditions nécessaires à l'observation de bandes topologiquement non triviales.

4-2 Nombre de Chern et symétries spatio-temporelles

Courbure de Berry et symétrie d'inversion spatiale. Un hamiltonien présente la symétrie de réflexion si pour un choix approprié de l'origine des coordonnées, il satisfait

$$[\hat{S}_0, \hat{H}] = 0 \quad (88)$$

où \hat{S}_0 est l'opérateur linéaire et unitaire *réflexion* (ou *inversion de parité*) défini par son action sur une fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$:

$$\hat{S}_0 \psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r}) \quad \text{ou encore} \quad \hat{S}_0 |\mathbf{r}\rangle = |-\mathbf{r}\rangle. \quad (89)$$

Considérons un hamiltonien \hat{H} décrivant le mouvement d'une particule dans un potentiel périodique et invariant par réflexion. On en déduit une relation simple entre ses états propres, les fonctions de Bloch $\psi_q^{(n)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} u_q^{(n)}(\mathbf{r})$. En effet, la transformée par \hat{S}_0 d'un état propre doit encore être un état propre, ce qui entraîne qu'à une phase près $u_q^{(n)}(-\mathbf{r}) = u_{-q}^{(n)}(\mathbf{r})$. On en déduit alors l'invariance de la courbure de Berry

$$\text{Invariance par réflexion :} \quad \Omega_q = \Omega_{-q}. \quad (90)$$

Courbure de Berry et renversement du temps. Pour le type de problème considéré ici, dans lequel le spin n'intervient pas, l'opération de renversement du temps consiste sur le plan physique à garder la position inchangée et à inverser le sens de la vitesse. Sur le plan mathématique, l'opération de renversement du temps s'obtient en appliquant l'opérateur antilinéaire et unitaire \hat{K}_0 défini par son action¹¹ sur une fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$:

$$\hat{K}_0 \psi(\mathbf{r}) = \psi^*(\mathbf{r}). \quad (91)$$

Cette transformation ne change pas la densité de probabilité en position $|\psi(\mathbf{r})|^2$. Pour l'impulsion, l'amplitude de probabilité initiale associée à $\psi(\mathbf{r})$ est bien entendu la transformée de Fourier $\phi(\mathbf{p})$ de $\psi(\mathbf{r})$. La nouvelle amplitude de probabilité en impulsion, qui est la transformée de Fourier de la

11. L'opération de renversement du temps suppose que l'on a fait un choix de phase pour les vecteurs de base; en l'occurrence, les kets $|\mathbf{r}\rangle$ sont supposés ici "réels", c'est-à-dire que $\hat{K}_0 |\mathbf{r}\rangle = |\mathbf{r}\rangle$. L'antilinearité de \hat{K}_0 conduit alors à $\hat{K}_0 (\int \psi(\mathbf{r}) |\mathbf{r}\rangle) = \int \psi^*(\mathbf{r}) |\mathbf{r}\rangle$.

fonction d'onde transformée $\hat{K}_0\psi$, est donc $\phi^*(-\mathbf{p})$, ce qui conduit à l'inversion annoncée pour la distribution en vitesse. Pour un hamiltonien périodique et invariant par renversement du temps, un raisonnement similaire au précédent conduit à $(u_{\mathbf{q}}^{(n)}(\mathbf{r}))^* = u_{-\mathbf{q}}^{(n)}(\mathbf{r})$ dont on déduit

$$\text{Invariance par rev. du temps : } \Omega_{-\mathbf{q}} = -\Omega_{\mathbf{q}}. \quad (92)$$

Conséquences. Dans le cadre d'un modèle de liaisons fortes comme ceux qui nous intéressent majoritairement dans ce cours, un hamiltonien est invariant par renversement du temps s'il existe un choix de base des sites A_j, B_j, \dots pour lequel tous les éléments de matrices tunnel sont réels. Quand c'est le cas, la relation (92) entraîne que le nombre de Chern de chaque bande est nul, puisque les éléments de surface autour de \mathbf{q} et $-\mathbf{q}$ ont des contributions opposées à l'intégrale de la courbure de Berry :

$$\text{Invariance par rev. du temps : } \mathcal{C} = \frac{1}{2\pi} \iint \Omega_{\mathbf{q}} d^2q = 0. \quad (93)$$

Pour les problèmes sans spin que nous avons considérés ici, on ne peut avoir une bande topologiquement non triviale qu'en brisant l'invariance par renversement du temps.

Si l'hamiltonien considéré possède en plus une propriété de symétrie par rapport à l'origine, alors la combinaison de (90) et (92) entraîne que la courbure de Berry s'annule en tout point de la zone de Brillouin, la vitesse anormale étant donc elle aussi uniformément nulle :

$$\text{Invariance par réflexion + rev. du temps : } \Omega_{\mathbf{q}} = 0. \quad (94)$$

4-3 Mesure locale de la courbure de Berry

Une procédure possible pour déterminer $\theta_{\mathbf{q}}$ et $\phi_{\mathbf{q}}$ en tout point de la zone de Brillouin dans une situation à deux bandes a été proposée par HAUKE, LEWENSTEIN et al. (2014), puis implémentée par FLÄSCHNER, REM et al. (2016). Le point de départ est la distribution en impulsion associée à l'état $|u_{\mathbf{q}}^{(-)}\rangle$, qui peut être mesurée dans l'expansion balistique ré-

sultant de l'extinction soudaine du réseau optique :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{q}) &= |f(\mathbf{q}) [\cos(\theta_{\mathbf{q}}/2) + e^{i\phi_{\mathbf{q}}} \sin(\theta_{\mathbf{q}}/2)]|^2 \\ &= f(\mathbf{q}) [1 - \sin\theta_{\mathbf{q}} \cos\phi_{\mathbf{q}}]. \end{aligned} \quad (95)$$

La quantité $f(\mathbf{q})$ correspond à la distribution en impulsion de la fonction de Wannier associée à chaque site A ou B , qui est supposée être beaucoup plus large que les structures pertinentes liées à la variation en \mathbf{q} des angles $\theta_{\mathbf{q}}$ et $\phi_{\mathbf{q}}$. Le point central de (95) est que $\mathcal{N}(\mathbf{q})$ dépend de la phase relative des contributions des deux sites A et B dans l'expression de l'état de Bloch $|u_{\mathbf{q}}^{(-)}\rangle$. Plus précisément, bien que cette mesure ne soit pas suffisante pour déterminer complètement les angles $\theta_{\mathbf{q}}$ et $\phi_{\mathbf{q}}$, elle fournit la valeur du produit $\sin\theta_{\mathbf{q}} \cos\phi_{\mathbf{q}}$.

Pour aller un cran plus loin, HAUKE, LEWENSTEIN et al. (2014) ont suggéré d'appliquer une trempe soudaine aux paramètres du réseau de sorte que l'hamiltonien devienne

$$\hat{H}'_{\mathbf{q}} = (\hbar\omega_0/2) \hat{\sigma}_z. \quad (96)$$

On laisse alors le gaz évoluer dans le réseau pendant un intervalle de temps t ajustable avant de mesurer la distribution en impulsion. Puisque l'évolution pendant la durée t consiste simplement en l'ajout de la phase $\pm\omega_0 t/2$ aux amplitudes des sites A et B , la distribution en impulsion à l'instant t s'écrit :

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}, t) = f(\mathbf{q}) [1 - \sin\theta_{\mathbf{q}} \cos(\phi_{\mathbf{q}} + \omega_0 t)]. \quad (97)$$

En répétant cette procédure pour différentes durées t et en mesurant l'amplitude et la phase du signal correspondant, on a accès à la fois à $\phi_{\mathbf{q}}$ et à $\theta_{\mathbf{q}}$ en tout point \mathbf{q} de la zone de Brillouin.

Cette procédure a été implémentée par FLÄSCHNER, REM et al. (2016) à partir d'un réseau hexagonal de tubes remplis d'atomes fermioniques ^{40}K . Les paramètres initiaux sont choisis de sorte qu'il y ait initialement un grand décalage en énergie $\hbar\omega_{AB}$ entre les sites A et B . On a alors deux bandes plates dans le modèle de liaisons fortes, sans couplage tunnel entre sites, et les atomes sont préparés dans la bande d'énergie la plus basse. Pour établir une dynamique dans ce réseau, FLÄSCHNER, REM et al. (2016) ont appliqué une modulation résonnante à la fréquence $\Omega \approx \omega_{AB}$. Cette

modulation est obtenue en faisant vibrer le réseau de manière circulaire grâce à une modulation de phase des trois ondes lumineuses formant le réseau. Nous reviendrons en détail dans les cours prochains sur la description quantitative de ce mécanisme, le seul point important pour nous à ce stade étant que l'on peut ainsi obtenir une courbure de Berry qui peut prendre des valeurs significatives. La trempe nécessaire à la procédure de HAUKE, LEWENSTEIN et al. (2014) est ensuite obtenue en éteignant simplement la modulation résonnante.

Les amplitudes et les phases de l'oscillation temporelle de $\mathcal{N}(\mathbf{q}, t)$ mesurées par FLÄSCHNER, REM et al. (2016) sont montrées en figure 18, avec la courbure de Berry reconstruite à partir de

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathbf{q}} &= i \left(\langle \partial_{q_x} u_{\mathbf{q}}^{(-)} | \partial_{q_y} u_{\mathbf{q}}^{(-)} \rangle - \langle \partial_{q_y} u_{\mathbf{q}}^{(-)} | \partial_{q_x} u_{\mathbf{q}}^{(-)} \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta_{\mathbf{q}} (\nabla_{\mathbf{q}} \phi_{\mathbf{q}} \times \nabla_{\mathbf{q}} \theta_{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{u}_z.\end{aligned}\quad (98)$$

La "pixellisation" de la zone de Brillouin pour cette reconstruction est très précise, avec plus de 2800 points de mesure \mathbf{q} . Sur cette figure, on distingue très nettement des zones de courbure de Berry positive et d'autres de courbure de Berry négative. Nous avons vu que l'intégrale de $\Omega_{\mathbf{q}}$ sur toute la zone de Brillouin s'écrit $\mathcal{C} \times 2\pi$, où \mathcal{C} est le nombre de Chern de la bande. Pour l'expérience de Hambourg, la courbure de Berry ainsi reconstruite conduit à une valeur de \mathcal{C} compatible avec 0, comme attendu pour ce type de réseau modulé. FLÄSCHNER, REM et al. (2016) mesurent plus précisément $\mathcal{C} = 0.005(6)$.

La méthode proposée par HAUKE, LEWENSTEIN et al. (2014) est inspirée d'une proposition antérieure de ALBA, FERNANDEZ-GONZALVO et al. (2011) (voir aussi GOLDMAN, ANISIMOVAS et al. (2013)). Dans cette proposition, les sites A and B étaient supposés occupés par des états internes $|a\rangle$ et $|b\rangle$ différents. La mesure de la distribution en impulsion peut alors être faite indépendamment pour chaque état interne, ce qui donne accès à la polarisation locale pour la bande inférieure :

$$n_z(\mathbf{q}) \equiv \frac{h_z(\mathbf{q})}{|\mathbf{h}(\mathbf{q})|} = \cos \theta_{\mathbf{q}} = \frac{\mathcal{N}_b(\mathbf{q}) - \mathcal{N}_a(\mathbf{q})}{\mathcal{N}_a(\mathbf{q}) + \mathcal{N}_b(\mathbf{q})}.\quad (99)$$

Les deux autres composantes de \mathbf{n} peuvent également être mesurées en appliquant un couplage cohérent entre $|a\rangle$ et $|b\rangle$ avec une phase et une

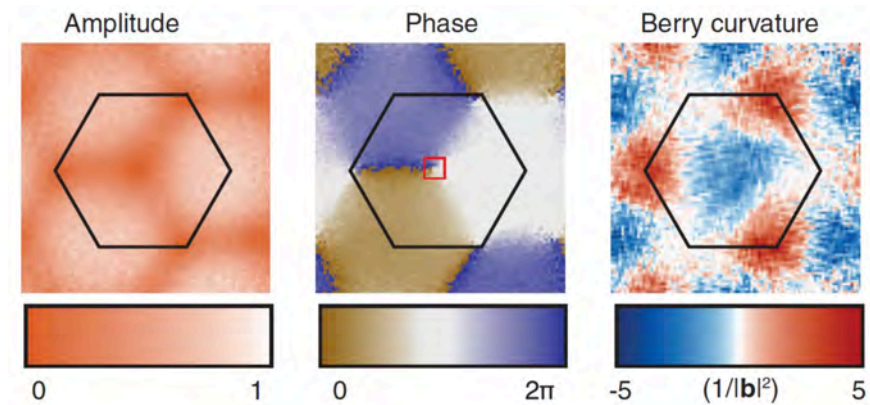


FIGURE 18. Amplitude $\propto \sin \theta_{\mathbf{q}}$ (gauche) et phase $\phi_{\mathbf{q}}$ (milieu) obtenues à partir de la mesure de l'oscillation (97) de la distribution en impulsion. Droite : courbure de Berry reconstruite. Figure extraite de FLÄSCHNER, REM et al. (2016).

durée ajustables, de manière à tourner le pseudo-spin pendant l'expansion balistique. Une fois la direction de $\mathbf{n}(\mathbf{q})$ connue en tout point de la zone de Brillouin, la valeur de la courbure de Berry peut être déterminée comme dans l'expérience de Hambourg.

Appendice 1 : couplage entre premiers voisins

Le but de cet appendice est de justifier l'expression de l'hamiltonien $\hat{H}_{\mathbf{q}}$ écrit en (11). Le site A de la cellule localisée en \mathbf{r}_j , que nous notons $|A, \mathbf{r}_j\rangle$, est couplé à 3 sites B : celui de la cellule \mathbf{r}_j et ceux des cellules localisées en $\mathbf{r}_j - \mathbf{a}_1$ et $\mathbf{r}_j - \mathbf{a}_2$ (cf. figure 2). La partie de l'hamiltonien concernant ce site est donc :

$$-J (|A, \mathbf{r}_j\rangle\langle B, \mathbf{r}_j| + |A, \mathbf{r}_j\rangle\langle B, \mathbf{r}_j - \mathbf{a}_1| + |A, \mathbf{r}_j\rangle\langle B, \mathbf{r}_j - \mathbf{a}_2|) + \text{H.c.}\quad (100)$$

Partant de la fonction de Bloch donnée en (9) et réécrite ici plus explicitement :

$$|\psi_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_j e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} (\alpha_{\mathbf{q}}|A, \mathbf{r}_j\rangle + \beta_{\mathbf{q}}|B, \mathbf{r}_j\rangle),\quad (101)$$

l'équation aux valeurs propres pour l'énergie $\hat{H}|\psi_{\mathbf{q}}\rangle = E_{\mathbf{q}}|\psi_{\mathbf{q}}\rangle$ s'écrit quand on la projette sur $\langle A, \mathbf{r}_j |$:

$$-J' \beta_{\mathbf{q}} \left(e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} + e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_j-\mathbf{a}_1)} + e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_j-\mathbf{a}_2)} \right) = E_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} \alpha_{\mathbf{q}}, \quad (102)$$

ou encore

$$H_{\mathbf{q},AB} = -J' \left(1 + e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_1} + e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_2} \right). \quad (103)$$

De même, $H_{\mathbf{q},BA} = H_{\mathbf{q},AB}^*$ et la matrice 2×2 de $\hat{H}_{\mathbf{q}}$ s'écrit pour le couplage entre proches voisins :

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 0 & H_{\mathbf{q},AB} \\ H_{\mathbf{q},BA} & 0 \end{pmatrix} \quad (104)$$

comme indiqué en (11) pour $E_A = E_B = 0$.

Appendice 2 : distribution en impulsion

Considérons une particule préparée dans un état quelconque de la bande fondamentale d'un réseau à deux sites par cellule unité :

$$|\psi\rangle = \int_{\text{ZB}} c_{\mathbf{q}} |\psi_{\mathbf{q}}^{(-)}\rangle d^2q \quad (105)$$

et cherchons sa distribution en impulsion $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$:

$$\mathcal{N}(\mathbf{k}) = |\langle \mathbf{k} | \psi \rangle|^2. \quad (106)$$

Chaque état de Bloch $|\psi_{\mathbf{q}}^{(-)}\rangle$ s'écrit

$$|\psi_{\mathbf{q}}^{(-)}\rangle = \sum_j e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} (\alpha_{\mathbf{q}} |A_j\rangle + \beta_{\mathbf{q}} |B_j\rangle). \quad (107)$$

Son produit scalaire avec l'onde plane $|\mathbf{k}\rangle$ d'impulsion $\hbar\mathbf{k}$ fait intervenir les deux produits scalaires $\langle \mathbf{k} | A_j \rangle$ et $\langle \mathbf{k} | B_j \rangle$. Introduisons les fonctions de Wannier $w_{A/B}(\mathbf{r})$:

$$w_A(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | A_0 \rangle, \quad w_B(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | B_0 \rangle \quad (108)$$

et supposons pour simplifier que ces deux fonctions sont identiques, à une translation $\mathbf{a} \equiv a\mathbf{u}_y$ près :

$$w_B(\mathbf{r}) = w_A(\mathbf{r} - \mathbf{a}). \quad (109)$$

Les fonctions de Wannier d'un site j quelconque vérifient alors

$$\langle \mathbf{r} | A_j \rangle = w_A(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad \langle \mathbf{r} | B_j \rangle = w_A(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j - \mathbf{a}) \quad (110)$$

et on trouve dans l'espace des impulsions

$$\langle \mathbf{k} | A_j \rangle = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \hat{w}_A(\mathbf{k}), \quad \langle \mathbf{k} | B_j \rangle = e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_j+\mathbf{a})} \hat{w}_A(\mathbf{k}), \quad (111)$$

où $\hat{w}_A(\mathbf{k})$ désigne la transformée de Fourier de $w_A(\mathbf{r})$.

L'amplitude de l'onde plane \mathbf{k} dans le développement de l'état $|\psi\rangle$ est donc

$$\langle \mathbf{k} | \psi \rangle = \hat{w}_A(\mathbf{k}) \int_{\text{ZB}} d^2q c_{\mathbf{q}} \left\{ \sum_j e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} \left(\alpha_{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} + \beta_{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_j+\mathbf{a})} \right) \right\} \quad (112)$$

La somme sur les sites j du réseau n'a une contribution non nulle que si $\mathbf{q} = \mathbf{k}$, ce qui donne finalement

$$\langle \mathbf{k} | \psi \rangle = \hat{w}_A(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}) \quad (113)$$

pourvu que \mathbf{k} soit dans la zone de Brillouin. La situation considérée dans l'expérience de Hambourg correspond à un remplissage uniforme de la bande ($|c_{\mathbf{k}}|$ indépendant de \mathbf{k}). Par ailleurs, le terme $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}$ correspondant au décalage de la cellule B par rapport à la cellule a peut être réincorporé dans la phase $\phi_{\mathbf{k}}$, d'où le résultat (95).

Références

- ADAMS, EN & EI BLOUNT (1959), « Energy bands in the presence of an external force field—II : Anomalous velocities », in *Journal of Physics and Chemistry of Solids* **10**, p. 286–303.
- AHARONOV, Y. & D. BOHM (1959), « Significance of electromagnetic potentials in quantum theory », in *Phys. Rev.* **115**, p. 485.

- ALBA, E., X. FERNANDEZ-GONZALVO, J. MUR-PETIT, J. K. PACHOS & J. J. GARCIA-RIPOLL (2011), « Seeing Topological Order in Time-of-Flight Measurements », in *Phys. Rev. Lett.* **107**, p. 235301.
- BELLEÇ, Matthieu, Ulrich KUHLE, Gilles MONTAMBAUX & Fabrice MORTESSAGNE (2013), « Topological transition of Dirac points in a microwave experiment », in *Physical Review Letters* **110**, p. 033902.
- CASTRO NETO, A. H., F. GUINEA, N. M. R. PERES, K. S. NOVOSELOV & A. K. GEIM (2009), « The electronic properties of graphene », in *Rev. Mod. Phys.* **81** (1), p. 109–162.
- CHANG, Ming-Che & Qian NIU (1995), « Berry phase, hyperorbital, and the Hofstadter spectrum », in *Physical Review Letters* **75**, p. 1348.
- DELPLACE, P., D. ULLMO & G. MONTAMBAUX (2011), « Zak phase and the existence of edge states in graphene », in *Phys. Rev. B* **84**, p. 195452.
- DUCA, L., T. LI, M. REITTER, I. BLOCH, M. SCHLEIER-SMITH & U. SCHNEIDER (2015), « An Aharonov–Bohm interferometer for determining Bloch band topology », in *Science* **347**, p. 288.
- FLÄSCHNER, N., BS REM, M TARNOWSKI, D VOGEL, D-S LÜHMANN, K SENGSTOCK & C WEITENBERG (2016), « Experimental reconstruction of the Berry curvature in a Floquet Bloch band », in *Science* **352**, p. 1091–1094.
- GOLDMAN, Nathan, Egidijus ANISIMOVAS, Fabrice GERBIER, P ÖHBERG, IB SPIELMAN & G JUZELIŪNAS (2013), « Measuring topology in a laser-coupled honeycomb lattice : from Chern insulators to topological semimetals », in *New journal of physics* **15**, p. 013025.
- HALDANE, F. D. M. (1988), « Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels : Condensed-Matter Realization of the "Parity Anomaly" », in *Phys. Rev. Lett.* **61**, p. 2015–2018.
- HAUKE, Philipp, Maciej LEWENSTEIN & André ECKARDT (2014), « Tomography of Band Insulators from Quench Dynamics », in *Phys. Rev. Lett.* **113**, p. 045303.
- JACQMIN, Thibaut, Iacopo CARUSOTTO, Isabelle SAGNES, Marco ABBARCHI, DD SOLNYSHKOV, Guillaume MALPUECH, Elisabeth GALOPIN, Aristide LEMAÎTRE, Jacqueline BLOCH & Alberto AMO (2014), « Direct observation of Dirac cones and a flatband in a honeycomb lattice for polaritons », in *Physical Review Letters* **112**, p. 116402.
- KARPLUS, Robert & J. M. LUTTINGER (1954), « Hall Effect in Ferromagnetics », in *Phys. Rev.* **95** (5), p. 1154–1160.
- KOHMOTO, M. (1985), « Topological Invariant and the Quantization of the Hall Conductance », in *Annals of Physics* **160**, p. 343–354.
- MIKITIK, G. P. & Yu. V. SHARLAI (1999), « Manifestation of Berry's Phase in Metal Physics », in *Phys. Rev. Lett.* **82**, p. 2147–2150.
- MILIĆEVIĆ, Marijana, Tomoki OZAWA, Gilles MONTAMBAUX, Iacopo CARUSOTTO, Elisabeth GALOPIN, Aristide LEMAÎTRE, L LE GRATIET, Isabelle SAGNES, Jacqueline BLOCH & Alberto AMO (2017), « Orbital edge states in a photonic honeycomb lattice », in *Physical Review Letters* **118**, p. 107403.
- MONTAMBAUX, G., F. PIÉCHON, J.-N. FUCHS & M. O. GOERBIG (2009), « Merging of Dirac points in a two-dimensional crystal », in *Phys. Rev. B* **80** (15), p. 153412.
- RECHTSMAN, Mikael C, Julia M ZEUNER, Andreas TÜNNERMANN, Stefan NOLTE, Mordechai SEGEV & Alexander SZAMEIT (2013), « Strain-induced pseudomagnetic field and photonic Landau levels in dielectric structures », in *Nature Photonics* **7**, p. 153.
- TARRUELL, Leticia, Daniel GREIF, Thomas UEHLINGER, Gregor JOTZU & Tilman ESSLINGER (2012), « Creating, moving and merging Dirac points with a Fermi gas in a tunable honeycomb lattice », in *Nature* **483**, p. 302.
- THOULESS, D. J., M. KOHMOTO, M. P. NIGHTINGALE & M. den NIJS (1982), « Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential », in *Phys. Rev. Lett.* **49**, p. 405–408.
- TORRENT, Daniel & José SÁNCHEZ-DEHESA (2012), « Acoustic analogue of graphene : observation of Dirac cones in acoustic surface waves », in *Physical Review Letters* **108**, p. 174301.