

# Chapitre 4

## L'état fondamental du gaz de Bose : LHY, spectre d'excitation et gouttelettes quantiques

### Sommaire

<b>1</b>	<b>Mesures de l'énergie LHY</b> . . . . .	<b>3</b>
1-1	Le problème des pertes à trois corps . . . . .	3
1-2	Mode de respiration . . . . .	4
1-3	Détermination de l'équation d'état . . . . .	5
1-4	Distribution en impulsion et énergie cinétique . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Le spectre d'excitation d'un condensat</b> . . . . .	<b>7</b>
2-1	Resommation du développement de Born . . . . .	7
2-2	Mesure du spectre de Bogoliubov . . . . .	8
2-3	Expériences de Boulder et Cambridge : $q \gtrsim 1/a$ . . . . .	9
2-4	Retour vers l'approche de Beliaev . . . . .	11
2-5	La formule de Feynman . . . . .	12
2-6	Problème résolu? . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Mélanges et gouttelettes quantiques</b> . . . . .	<b>14</b>
3-1	Position du problème . . . . .	14
3-2	Stabilité d'un mélange binaire (chp. moyen) . . . . .	14
3-3	L'énergie LHY pour un mélange . . . . .	16
3-4	Stabilisation de gouttelettes . . . . .	16

Nous continuons dans ce chapitre l'étude du gaz de Bose dilué en nous intéressant à la fois à l'énergie de son état fondamental et à son spectre d'excitation. Grâce à l'approche de Bogoliubov, nous connaissons l'expression de l'énergie  $E_0$  du fondamental pour un gaz de densité  $n = N/L^3$  :

$$\frac{E_0}{L^3} = \frac{1}{2}gn^2 \left[ 1 + \alpha \sqrt{na^3} + \dots \right] \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{128}{15\sqrt{\pi}} \approx 4.8, \quad (1)$$

où  $a$  est la longueur de diffusion caractérisant les interactions en onde  $s$  et  $g \equiv 4\pi\hbar^2 a/m$ . Le terme dominant  $gn^2/2$  représente le terme de champ moyen et le terme suivant est la correction de LEE, HUANG et al. (1957) décrivant (à l'ordre le plus bas) l'effet des fluctuations quantiques.

L'expression (1) résulte d'une approximation quadratique de l'hamiltonien vis-à-vis des opérateurs  $a_{\mathbf{k}}$  et  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$  avec  $\mathbf{k} \neq 0$ , détruisant et créant une particule dans un état d'impulsion non nulle. Cette approximation quadratique est valable quand la déplétion quantique  $n'/n = (N - N_0)/N$  donnant la fraction d'atomes en dehors de l'état  $\mathbf{k} = 0$  est faible. L'approche de Bogoliubov permet d'estimer cette déplétion :

$$\frac{n'}{n} \approx \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3}, \quad (2)$$

ce qui fait apparaître le paramètre  $\sqrt{na^3}$ . La condition d'auto-cohérence de

L'approche de Bogoliubov s'écrit donc

$$\sqrt{na^3} \ll 1. \quad (3)$$

Le spectre d'excitation se déduit de l'expression de l'hamiltonien après les transformations canoniques de Bogoliubov, qui introduisent des nouveaux opérateurs bosoniques  $b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^\dagger$  :

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hbar\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \quad (4)$$

avec pour l'approche pseudo-potentiel :

$$\hbar\omega_{\mathbf{k}} = [\epsilon_{\mathbf{k}} (\epsilon_{\mathbf{k}} + 2gn)]^{1/2}, \quad \epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (5)$$

L'action de  $b_{\mathbf{k}}^\dagger$  sur le vide de Bogoliubov crée donc une quasi-particule d'impulsion  $\hbar\mathbf{k}$  et d'énergie  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$ . La dépendance en  $k$  de  $\omega_{\mathbf{k}}$  permet d'emblée d'identifier la valeur caractéristique  $k_0$  (cf. figure 1)

$$\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} = gn \quad \Rightarrow \quad k_0 = \frac{1}{\xi} = \sqrt{8\pi na}. \quad (6)$$

Pour  $k \ll k_0$ , on trouve le régime phononique  $\omega_{\mathbf{k}} \approx ck$ , avec la vitesse du son  $c = \hbar k_0 / \sqrt{2}m$ . Pour  $k \gg k_0$ , on trouve le régime de particule libre  $\hbar\omega_{\mathbf{k}} \approx \epsilon_{\mathbf{k}} + gn$ . Rappelons l'origine du déplacement d'énergie  $gn$  dans ce régime : il doit être compris comme la différence  $gn = 2gn - gn$ . Le premier terme  $2gn$  représente l'énergie d'interaction totale (terme direct + terme d'échange) de la particule excitée d'impulsion  $\hbar k$  avec le condensat de densité  $n$ ; le second terme correspond à l'énergie initiale  $gn$  de la particule quand elle fait partie du condensat (terme direct).

Cette relation de dispersion, tracée en figure 2, est obtenue en supposant un fluide de faible densité [cf. (3)] et ne permet donc pas de décrire les systèmes en interaction forte comme l'hélium liquide : en particulier, elle ne contient pas sa fameuse structure en *roton-maxon* reportée sur la figure 3. En revanche, elle est en principe bien adaptée à la description des condensats de Bose-Einstein gazeux, tout du moins tant que l'on ne s'approche pas trop près d'une résonance de diffusion.

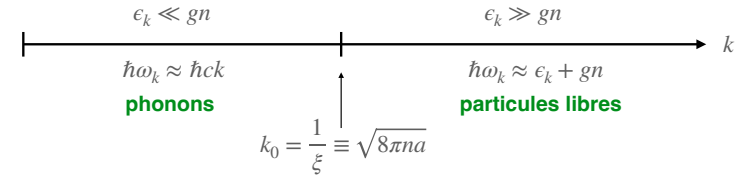
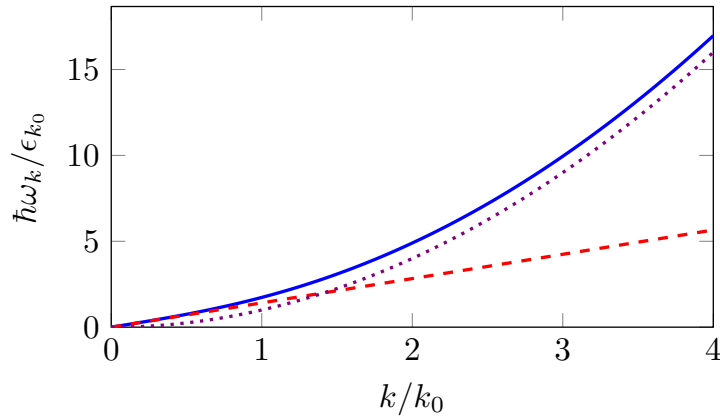


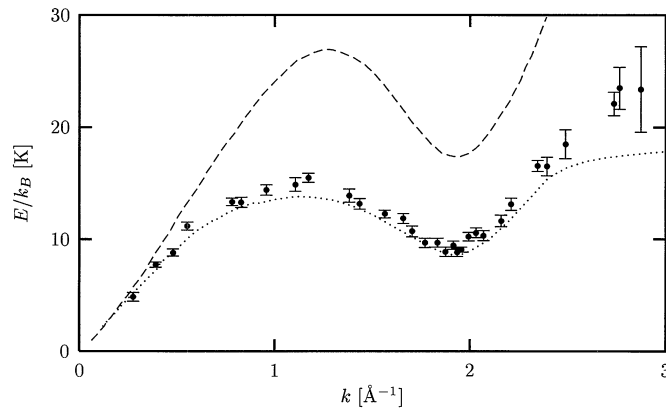
FIGURE 1. Les deux régimes de valeurs de  $k$  pour le pseudo-potential dans le cadre de l'approche de Bogoliubov. Une autre valeur caractéristique de  $k$ , de l'ordre de  $1/a \gg k_0$ , apparaîtra plus loin. Par ailleurs, pour un potentiel de portée finie  $b$ , l'échelle  $k \sim 1/b$  peut également jouer un rôle important (cf. cours 3).

Dans ce chapitre, nous allons commencer par décrire les mesures expérimentales de l'énergie LHY faites sur des gaz atomiques dilués. Nous passerons ensuite aux mesures du spectre d'excitation : nous présenterons d'abord les résultats désormais classiques de STEINHAEUER, OZERI et al. (2002) qui sont très bien décrits par (5). Ces mesures ont été faites à la fois dans le régime phononique et dans le régime de particule libre, mais en gardant toujours  $ka \ll 1$ . Nous nous intéresserons ensuite à des expériences plus récentes menées à Boulder (PAPP, PINO et al. 2008) et à Cambridge (LOPES, EIGEN et al. 2017), qui ont étendu la plage de mesure à la zone  $ka \sim 1$ , ce qui a conduit à des déviations notables par rapport à (5).

La dernière partie de ce chapitre sera consacrée au cas d'un mélange de deux gaz quantiques notés 1 et 2. Selon les valeurs des trois paramètres d'interaction  $g_{ij}$  avec  $i, j = 1, 2$ , ce mélange peut être miscible ou immiscible dans le cadre de la théorie de champ moyen. En particulier, l'immiscibilité se produit quand la relation de dispersion du mélange homogène, qui généralise (5), fait apparaître des fréquences  $\omega$  complexes, conduisant à des divergences exponentielles d'une petite perturbation initiale. Nous verrons alors, suivant la proposition de PETROV (2015), comment il est possible d'utiliser des effets LHY, donc au-delà du champ moyen, pour stabiliser malgré tout ce mélange sous forme de gouttelettes quantiques.



**FIGURE 2.** Relation de dispersion de Bogoliubov (5) en trait plein bleu avec  $k_0 = 1/\xi = \sqrt{8\pi n a}$  et  $\epsilon_{k_0} = \hbar^2 k_0^2/2m$ . La droite rouge tiretée correspond au régime de phonons. La courbe pointillée violette donne la relation de dispersion d'une particule libre  $\epsilon_k = \hbar^2 k^2/2m$ .



**FIGURE 3.** Spectre d'excitation pour l'hélium superfluide; la courbe pointillée représente les données expérimentales de DONNELLY, DONNELLY et al. (1981) et les points avec barre d'erreur les résultats du calcul Monte Carlo quantique de MORONI, GALLI et al. (1998). La ligne tiretée est une borne supérieure obtenue à partir de l'approche de Feynman. Figure extraite de PITAEVSKII & STRINGARI (2016).

## 1 Mesures de l'énergie LHY

### 1-1 Le problème des pertes à trois corps

La mesure quantitative de l'énergie LHY n'est pas aisée dans la mesure où elle n'est par définition (au moins pour un gaz à une seule composante) qu'une petite correction par rapport à l'énergie de champ moyen. On pourrait songer à accroître expérimentalement sa contribution relative en augmentant momentanément la longueur de diffusion  $a$  grâce à une résonance de Feshbach, quitte à renoncer à l'approche de Bogoliubov pour décrire précisément le système. On pourrait alors tirer parti du fait que  $E_{\text{LHY}}$  croît comme  $a^{5/2}$  [cf. (1)] alors que l'énergie de champ moyen ne croît que comme  $a$ .

Néanmoins, cette augmentation de  $a$  ne peut pas se faire en pratique jusqu'à des valeurs arbitrairement grandes. On est en effet limité par les pertes par recombinaison à trois corps, dont le taux varie comme  $L_3 \sim \hbar a^4/m$ , à un facteur multiplicatif près, au voisinage d'une résonance de diffusion (FEDICHEV, REYNOLDS et al. 1996). Dans ce processus, deux des atomes forment une molécule de taille  $\sim a$  et d'énergie  $\sim -\hbar^2/ma^2$ , le troisième corps emportant l'énergie libérée lors de la formation du dimère faiblement lié. Ce dimère peut ensuite relaxer vers un état moléculaire plus fortement lié et il s'échappe alors du piège confinant les particules. Pour qu'une mesure de l'énergie LHY soit fiable, il faut que l'augmentation de  $a$  ne soit faite que pendant une durée  $\tau$  assez courte, telle que  $L_3 n^2 \tau \ll 1$ , assurant ainsi que la densité varie peu pendant la mesure. Mais la durée  $\tau$  doit par ailleurs être au moins égale au temps que met le système pour atteindre son équilibre pour la nouvelle valeur de  $a$ , typiquement  $\hbar/\mu$ . Comme ordre de grandeur, on peut prendre ici la valeur du potentiel chimique donné par la théorie de champ moyen,  $\mu = gn$ . La conjonction de ces deux inégalités entraîne :

$$\frac{\hbar}{\mu} < \tau < \frac{1}{L_3 n^2} \quad \Rightarrow \quad n a^3 \ll 1. \quad (7)$$

À température nulle<sup>1</sup>, l'étude d'un gaz de Bose à l'équilibre ne peut se

1. Nous verrons dans un prochain chapitre que cette condition peut être assouplie à température plus élevée, dans le régime non dégénéré, et qu'elle devient  $n\lambda^3 \ll 1$ .

faire que pour de faibles valeurs de  $na^3$  (pour une revue, voir CHEVY & SALOMON (2016)).

Nous allons détailler dans ce qui suit quelques pistes qui ont été explorées pour mettre en évidence cette énergie LHY.

## 1-2 Mode de respiration

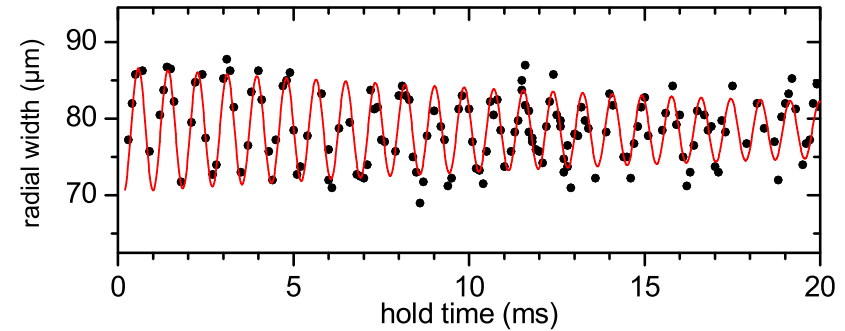
Cette approche tire parti d'un résultat théorique important établi par PITAEVSKII & ROSCH (1997). Considérons un condensat décrit par la théorie de champ moyen, confiné dans un piège harmonique isotrope à deux dimensions dans le plan  $xy$ , (i) sous forme de disque ou (ii) sous forme d'un cigare très allongé d'axe  $z$ . Dans ces deux cas, le mode de respiration dans le plan  $xy$  a toujours pour fréquence  $\omega_{\text{resp.}} = 2\omega$ , où  $\omega$  est la fréquence du piège. Ce résultat se prouve relativement simplement en étudiant l'évolution de  $\langle r^2 \rangle(t)$  à partir de l'équation de Gross–Pitaevskii à 2D :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + gN|\psi|^2\psi + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \psi \quad (8)$$

quelle que soit la valeur du produit  $Ng$  ( $\psi$  est normalisée à l'unité). Il a été vérifié expérimentalement pour la première fois par CHEVY, BRETIN et al. (2001).

Toute déviation de  $\omega_{\text{resp.}}$  par rapport à la fréquence  $2\omega$  signale donc une contribution au-delà du champ moyen à l'énergie du gaz. C'est le principe de l'expérience de ALTMAYER, RIEDL et al. (2007), menée sur un gaz de  ${}^6\text{Li}$ , l'isotope fermionique du lithium. Les auteurs se sont placés au voisinage d'une résonance de Feshbach (834 G), du côté  $a > 0$  de la résonance. En première approximation, le gaz dans son état d'équilibre est alors essentiellement formé de dimères  ${}^6\text{Li}_2$ , des molécules bosoniques qui forment un condensat de Bose–Einstein. Ce gaz est confiné dans un piège hybride : le confinement harmonique dans le plan  $xy$  est assuré par un faisceau laser de longueur d'onde 1030 nm et de waist  $54 \mu\text{m}$ . On ajuste la fréquence  $\omega/2\pi$  entre 290 et 590 Hz en variant la puissance de ce laser. Le confinement le long de l'axe  $z$  est assuré par un piège magnétique, de fréquence  $\omega_z/2\pi = 22.4 \text{ Hz}$ .

L'excitation du mode de respiration est faite en réduisant pendant un court intervalle de temps la puissance du laser de confinement. On laisse

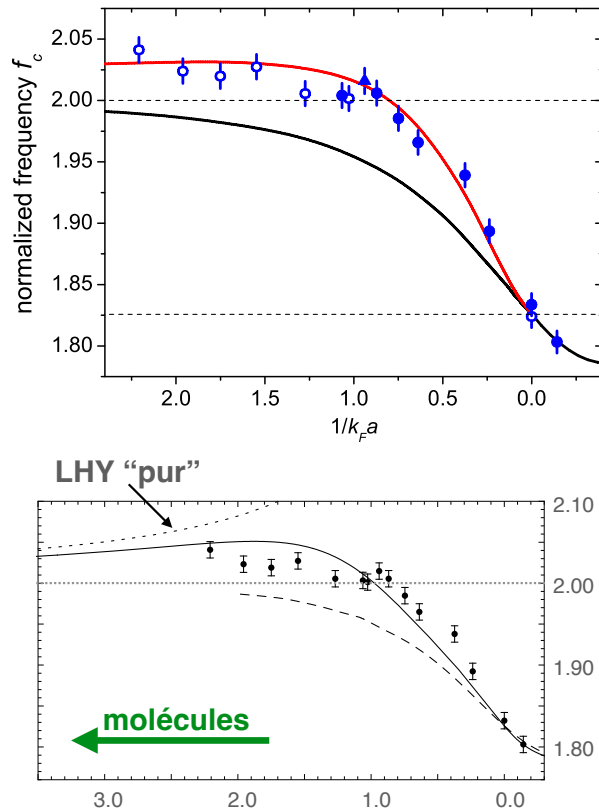


**FIGURE 4.** Evolution de  $\sqrt{\langle r^2 \rangle(t)}$  (mode de respiration) pour un gaz de  ${}^6\text{Li}$  (fermions) au voisinage d'une résonance de Feshbach. On s'est placé ici sur le côté  $a > 0$  de la résonance de sorte que les atomes de  ${}^6\text{Li}$  sont présents essentiellement sous forme de molécules bosoniques de  ${}^6\text{Li}_2$ . La fréquence (ici 1185 Hz) est mesurée avec une précision  $\sim 10^{-3}$ . Figure extraite de ALTMAYER, RIEDL et al. (2007).

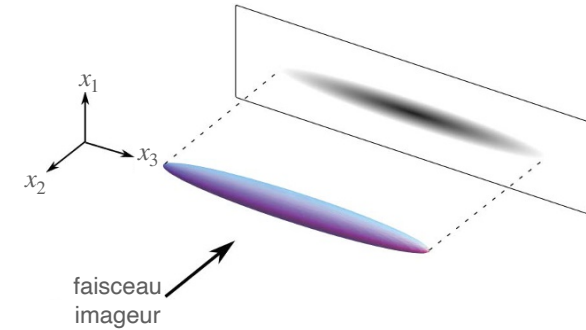
ensuite le gaz osciller dans le piège pendant une durée ajustable avant de mesurer son rayon. Un exemple d'oscillation est représenté sur la figure 4.

Cette expérience est répétée pour différentes valeurs de la longueur de diffusion  $a$  et le rapport  $\omega_{\text{resp.}}/\omega$  est tracé en fonction de  $1/a$  en figure 5. Dans le régime condensat moléculaire ( $k_F a \lesssim 1$ ), ce rapport est notablement au dessus de 2, et la déviation par rapport à 2 est en bon accord avec un calcul numérique basé sur une approche Monte Carlo quantique (figure 5, haut). Notons que les données expérimentales ont été (légèrement) corrigées pour prendre en compte la non-isotropie du piège ( $\sim 7\%$ ) ainsi que son anharmonicité.

Le fait que l'on travaille ici au voisinage d'une résonance de Feshbach complique bien sûr l'attribution aux seuls effets LHY de la valeur non nulle de  $\omega_{\text{resp.}} - 2\omega$ . Nous avons reporté en figure 5 (bas) une analyse faite par S. Nascimbene à partir des prédictions théoriques de STRINGARI (2004). Elle montre que pour les valeurs de  $1/k_F a$  explorées ici, qui restent relativement faibles, on est encore loin de la prédiction pour un "simple" condensat de bosons.



**FIGURE 5.** Haut : Variation de  $f_c = \omega_{\text{resp}}/\omega$  en fonction de  $1/k_F a$  avec  $k_F = (24m^3\omega^2\omega_z N/\hbar^3)^{1/6}$ . Les disques ouverts (resp. pleins) ont été obtenus avec  $\omega/2\pi = 290$  Hz (resp. 590 Hz). La courbe noire est la prédiction de la théorie de champ moyen et elle est compatible avec une limite  $\omega_{\text{resp}} = 2\omega$  dans la limite  $k_F a \ll 1$ , correspondant à un condensat moléculaire en faible interaction. La courbe rouge est un calcul Monte Carlo quantique, prenant en compte les corrections de type LHY. Figure extraite de ALMEYER, RIEDL et al. (2007). Bas : mêmes données expérimentales, avec en tireté la contribution des seuls effets LHY. La courbe continue est déduite de l'équation d'état mesurée par NASCIMBÈNE, NAVON et al. (2010). Figure adaptée de la thèse de S. Nascimbene.



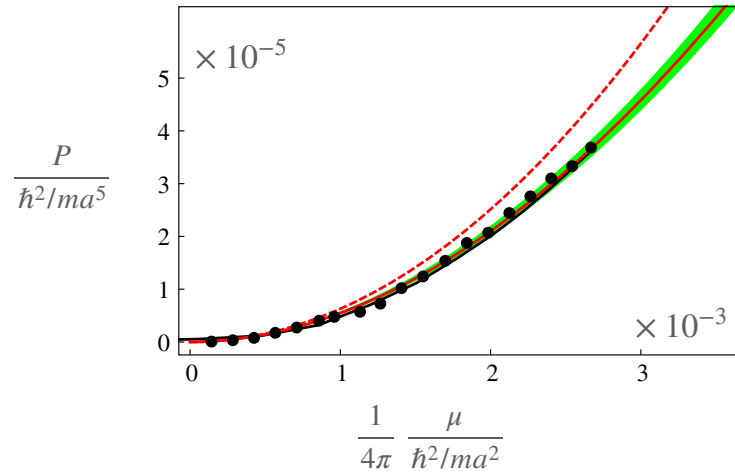
**FIGURE 6.** Principe de la mesure de l'équation d'état  $P(\mu)$  à partir de l'image d'un gaz confiné dans un piège harmonique. En utilisant l'approximation de densité locale, la pression  $P$  s'obtient à partir de  $\int n(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2$  (cf. chapitre 1).

### 1-3 Détermination de l'équation d'état

Nous avons décrit au chapitre 1 le principe de la mesure de l'équation d'état d'un gaz confiné dans un piège harmonique à partir de son profil de densité intégré selon deux directions de l'espace (NASCIMBÈNE, NAVON et al. 2010) [voir figure 6]. Dans le chapitre 1, nous nous étions intéressés à la limite de basse densité dans l'espace des phases et nous avons décrit comment on pouvait extraire de ces expériences certains coefficients du développement du viriel. Le même type d'expérience permet d'étudier l'équation d'état à très basse température, dans le régime fortement dégénéré.

NAVON, PIATECKI et al. (2011) ont utilisé un gaz de  $\sim 60\,000$  atomes de  $^7\text{Li}$  (isotope bosonique du lithium) qu'ils ont préparé à une valeur "standard" pour la longueur de diffusion,  $a \sim 10$  nm. Ils ont ensuite modifié le champ magnétique pour se rapprocher d'une résonance de Fano-Feshbach ( $B = 738$  G) et mesurer la pression du gaz pour différentes valeurs de  $a$ , allant de 30 à 100 nm. Ces mesures sont faites à très basse température de sorte que la seule variable thermodynamique pertinente en point de vue grand-canonique est le potentiel chimique  $\mu$ , que l'on peut mesurer en unité de l'échelle d'énergie  $\hbar^2/ma^2$ .

Les résultats pour la pression, mesurée en unités de  $P_a = \hbar^2/ma^5$ ,



**FIGURE 7.** Equation d'état pour un gaz de Bose de  ${}^7\text{Li}$  : mesure de la pression  $P$  en fonction du potentiel chimique  $\mu$ . Lignes rouges continue et tiretée : prédiction analytique incluant ou non la correction LHY. Ligne noire : résultats numériques obtenus par une méthode Monte Carlo quantique. La région colorée en vert délimite la zone d'incertitude liée à la détermination de  $a$ . Figure extraite de NAVON, PIATECKI et al. (2011).

sont montrés en figure 7. La prédiction de la théorie de champ moyen est  $P = gn^2/2$  et  $\mu = gn$  [avec comme toujours  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ ], et elle correspond donc à la loi quadratique  $P = \mu^2/2g$ . Cette prédiction, indiquée par la ligne tiretée rouge, n'est clairement pas en accord avec les résultats expérimentaux pour les plus grandes valeurs de  $\mu$ .

La prise en compte des fluctuations quantiques se fait en utilisant le résultat LHY donné en (1) et les relations thermodynamiques prises ici à entropie nulle (état fondamental) :

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial L^3}\right)_{S,N} = \frac{1}{2}gn^2 \left(1 + \frac{3}{2}\alpha\sqrt{na^3} + \dots\right) \quad (9)$$

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,L^3} = gn \left(1 + \frac{5}{2}\alpha\sqrt{na^3} + \dots\right) \quad (10)$$

dont on déduit par élimination de  $na^3$  :

$$P = \frac{\mu^2}{2g} \left(1 - \alpha\sqrt{\mu a^3/g}\right) \quad (11)$$

Cette prédiction LHY, indiquée en trait continu rouge sur la figure 7, est en excellent accord avec les données, tout comme les résultats Monte Carlo (ligne continue noire) obtenus en supposant une température  $T \lesssim T_c/4$ , où  $T_c$  est la température de condensation du gaz parfait.

#### 1-4 Distribution en impulsion et énergie cinétique

Pour terminer cette partie consacrée à l'énergie du fondamental du gaz de Bose, nous allons revenir sur la distribution en impulsion déduite de l'approximation de Bogoliubov et discuter l'énergie cinétique totale qui en découle.

Pour cette analyse, nous quittons momentanément l'approche pseudo-potential pour revenir à un potentiel d'interaction régulier  $V(r)$  de transformée de Fourier  $\tilde{V}_k$ . Dans le calcul de la déplétion quantique du chapitre précédent, nous avons fait apparaître la population  $\bar{n}_k$  de chaque état d'impulsion  $\hbar\mathbf{k}$  :

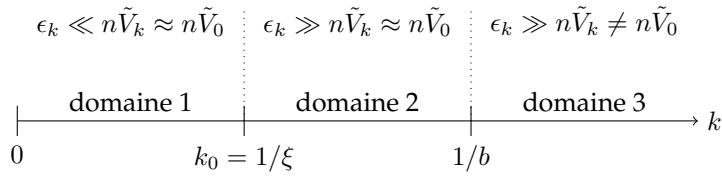
$$\bar{n}_k = |v_k|^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\epsilon_k + n\tilde{V}_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k\epsilon_k}} - 1 \right], \quad (12)$$

dont nous déduisons l'énergie cinétique

$$E_{\text{cin}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \bar{n}_k. \quad (13)$$

La population  $\bar{n}_k$  représente la distribution en impulsion du gaz, telle qu'on peut la mesurer dans une expérience de temps de vol, si on coupe brusquement le potentiel d'interaction au début de l'expansion balistique.

Pour un potentiel régulier, nous avons expliqué au chapitre précédent que l'on peut distinguer trois domaines pour  $k$ , que nous rappelons en figure 8 :


 FIGURE 8. Les trois domaines pertinents pour le nombre d'onde  $k$ .

- Le domaine phononique,  $k \ll \xi^{-1}$ , qui conduit à  $\bar{n}_k \propto 1/k\xi$ . Ces états sont donc fortement peuplés sans que cela ne conduise à une divergence de la déplétion quantique ou de l'énergie cinétique du fait du jacobien en  $k^2 dk$  qui apparaît dans les intégrations à 3D.
- Le domaine intermédiaire  $\xi^{-1} \ll k \ll b^{-1}$ , dans laquelle le terme d'énergie cinétique  $\epsilon_k$  domine le terme d'interaction  $\tilde{V}_k$ , mais où l'on peut encore remplacer  $\tilde{V}_k$  par sa valeur à l'origine  $\tilde{V}_0$ . On obtient alors une loi de puissance pour la distribution en impulsion :

$$\bar{n}_k \approx \frac{n^2 \tilde{V}_0^2}{4\epsilon_k^2} = \frac{C}{k^4} \quad \text{avec} \quad C \equiv 16\pi^2 a^2 n^2. \quad (14)$$

Cette loi en  $k^{-4}$  est une caractéristique importante des gaz en interaction. Nous la retrouverons lorsque nous étudierons le formalisme du contact de Tan.

- Le domaine de très grande impulsion,  $b^{-1} \ll k$ . La décroissance de  $\tilde{V}_k$  devient alors significative et la distribution en impulsion décroît plus vite que dans le domaine intermédiaire :

$$\bar{n}_k \propto \frac{\tilde{V}_k^2}{k^4}. \quad (15)$$

Cette zone de très grande impulsion est absente pour le pseudo-potentiel, puisque ce dernier revient à prendre  $\tilde{V}_k$  constant égal à  $g$  pour toutes valeurs de  $k$ .

La décroissance plus rapide que  $k^{-4}$  de  $\bar{n}_k$  est essentielle pour assurer que l'énergie cinétique du gaz prend une valeur finie. En effet, à trois dimensions, une distribution en impulsion variant comme  $C/k^4$  jusqu'à

l'infini conduit à une divergence de l'intégrale

$$\int \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{C}{k^4} d^3k = \int \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{C}{k^4} 4\pi k^2 dk. \quad (16)$$

Une telle divergence, qui conduit donc à une énergie cinétique infinie, se produira si l'on modélise  $V(\mathbf{r})$  un potentiel de contact puisqu'on aura alors  $\tilde{V}_k = \tilde{V}_0$  pour tout  $k$ . Comme l'énergie totale  $E_{\text{LHY}}$  est quant à elle finie, cela entraîne que la divergence positive de l'énergie cinétique doit être compensée par une divergence négative de l'énergie d'interaction. Ce dernier point se vérifie aisément; écrivons le potentiel d'interaction intervenant dans l'hamiltonien de Bogoliubov sous la forme

$$\hat{V} = gn \left( \hat{N}' + \hat{O} \right) \quad (17)$$

où  $\hat{N}' = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$  est l'opérateur nombre de particules en dehors de  $\mathbf{k} = 0$  et

$$\hat{O} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} + \text{H.c.} \quad (18)$$

La divergence provient de la contribution de  $\langle \hat{O} \rangle$  qui s'écrit dans le vide de Bogoliubov :

$$\langle \hat{O} \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \langle b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle + \text{c.c.} = -\sum_{\mathbf{k} \neq 0} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}. \quad (19)$$

L'argument de la somme se comporte en effet comme  $k^{-2}$  aux grands  $k$ , de sorte que l'intégrale tri-dimensionnelle sur  $k$  (avec son jacobien en  $4\pi k^2 dk$ ) diverge. Nous reviendrons sur ces deux divergences de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle lors de notre étude du contact.

## 2 Le spectre d'excitation d'un condensat

### 2-1 Resommation du développement de Born

La diagonalisation de l'hamiltonien de Bogoliubov menée aux chapitres précédents nous a conduit à l'expression de la relation de dispersion pour

les excitations élémentaires du gaz. Nous avons traité deux cas différents : pour un potentiel régulier à l'approximation de Born, nous avons trouvé

$$\text{Pot. régulier (Born)} : \quad \hbar\omega_k = \left[ \epsilon_k \left( \epsilon_k + 2n\tilde{V}_k \right) \right]^{1/2} \quad (20)$$

et pour le pseudo-potentiel :

$$\text{Pseudo-pot.} : \quad \hbar\omega_k = [\epsilon_k (\epsilon_k + 2ng)]^{1/2} \quad \text{avec} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (21)$$

Intéressons-nous à la première de ces deux relations, concernant le cas d'un potentiel régulier. On voit qu'elle fait intervenir la transformée de Fourier du potentiel  $\tilde{V}_k$ . Si nous nous limitons à des moments  $k$  petits devant  $1/b$ , où  $b$  est la portée du potentiel, on peut utiliser

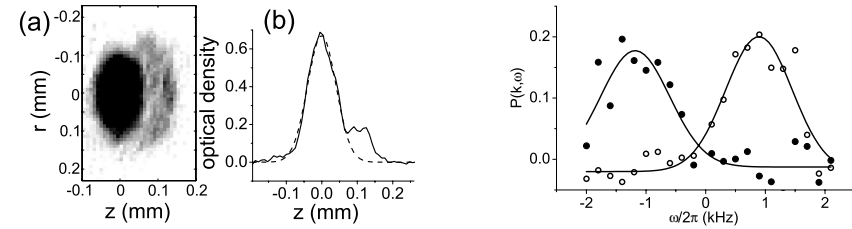
$$k \ll \frac{1}{b} : \quad \tilde{V}_k \approx \tilde{V}_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a^{(1)}}{m} \quad (22)$$

où  $a^{(1)}$  est la longueur de diffusion, à l'ordre 1 du développement de Born. Rappelons qu'il n'est légitime de se limiter à ce premier ordre que si la longueur de diffusion  $a$  est très petite devant la portée  $b$ , soit  $\frac{1}{b} \ll \frac{1}{a}$ . En fait, comme nous l'avons expliqué au chapitre précédent, il est possible d'aller plus loin dans le développement de Born et de resommer toute sa série (BELIAEV 1958a ; BELIAEV 1958b). Cela impose d'aller au-delà de l'hamiltonien de Bogoliubov : pour étudier l'interaction entre un atome d'impulsion  $\hbar\mathbf{k}$  et un atome du condensat d'impulsion nulle, il faut prendre en compte le passage par un état virtuel où les deux atomes ont pour impulsion  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  avec  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  :

$$\mathbf{k}, N-1 : 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, N-2 : 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{k}, N-1 : 0 \quad (23)$$

ce qui n'est possible que par l'action de termes comme  $a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger a_{\mathbf{k}} a_0$  pour la première flèche et  $a_{\mathbf{k}}^\dagger a_0^\dagger a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}$  pour la seconde. Ces termes, qui ne contiennent qu'un opérateur  $a_0$  ou  $a_0^\dagger$ , ont été négligés quand on a restreint l'hamiltonien à  $N$  corps à son approximation quadratique.

Une fois cette resommation effectuée, on arrive alors à une expression formellement identique à celle obtenue dans le cas du pseudo-potentiel en (21). La contrainte  $a \ll b$  n'a plus de raison d'être si tous les termes du



**FIGURE 9.** Gauche : Image d'un nuage atomique après un pulse de Bragg. Le nuage diffracté se déplace dans le sens des  $x > 0$ . Droite : courbe de résonance. Les deux types de symboles correspondent à des nuages diffractés se déplaçant dans le sens  $x > 0$  ou  $x < 0$ . Figure extraite de STEINHAEUER, OZERI et al. (2002).

développement de Born sont pris en compte (à condition que ce développement converge, bien sûr) et on arrive pour le potentiel régulier au même résultat que celui obtenu pour le pseudo-potentiel :

$$k \ll \frac{1}{a}, \frac{1}{b} : \quad \hbar\omega_k = [\epsilon_k (\epsilon_k + 2ng)]^{1/2}. \quad (24)$$

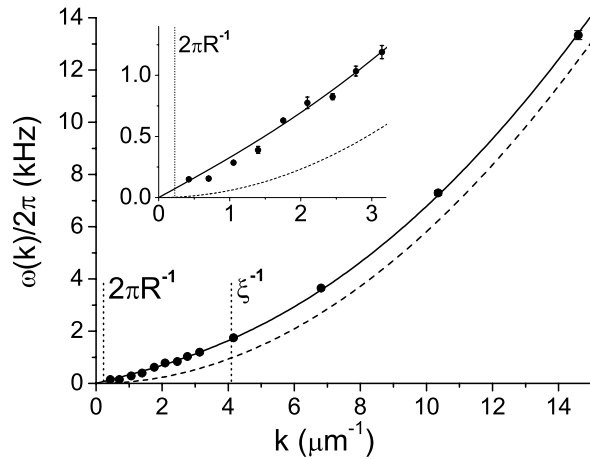
## 2-2 Mesure du spectre de Bogoliubov

Nous décrivons ici brièvement la mesure quantitative du spectre de Bogoliubov faite par STEINHAEUER, OZERI et al. (2002) [voir aussi cours 2016]. Cette expérience repose sur la spectroscopie de Bragg, que nous avons déjà décrite au chapitre précédent. Rappelons que cette technique expérimentale consiste à étudier la réponse linéaire du fluide à une sonde qui peut transférer un quantum d'impulsion  $\hbar\mathbf{q}$  et d'énergie  $\hbar\omega$ . Pour les gaz d'atomes froids, cette sonde est généralement<sup>2</sup> formée par une paire de faisceaux lumineux de vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ , les atomes gagnant l'impulsion  $\hbar\mathbf{q} = \hbar(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$  et l'énergie  $\hbar\omega = \hbar(\omega_1 - \omega_2)$  dans un processus "absorption – émission stimulée".

STEINHAEUER, OZERI et al. (2002) ont travaillé avec un condensat de rubidium 87, et une paire de faisceaux lumineux dont l'angle varie entre 3 et 130 degrés, ce qui correspond à  $q$  entre 0.4 et  $15 \mu\text{m}^{-1}$ . La longueur de

2. voir malgré tout GUARRERA, WÜRTZ et al. (2011) pour un autre type de sonde.





**FIGURE 10.** Spectre d'excitation mesuré par spectroscopie de Bragg. La courbe continue montre la prédiction (24) pour le spectre de Bogoliubov. Figure extraite de STEINHAEUER, OZERI *et al.* (2002).

cicatrisation est  $\xi \approx 0.25 \mu\text{m}$ , de sorte que  $q\xi$  varie entre 0.1 (régime phononique) et 4 (régime de particules libres). Un exemple typique de résultat est montré en figure 9 pour  $q = 2.8 \mu\text{m}^{-1}$ . Cette image prise après un temps de vol montre clairement la (faible) fraction des atomes excités par le pulse lumineux, à la droite du condensat.

Si l'on suppose que le signal observé correspond à la création d'une seule excitation élémentaire pour chaque processus de Bragg élémentaire (nous reviendrons sur cette hypothèse plus loin), la courbe de résonance de ces processus donne directement accès à la relation de dispersion recherchée  $\omega_q$ . Un exemple de résultat est montré en figure 10. L'accord avec la prédiction de Bogoliubov (24) est remarquable, aussi bien dans le régime phononique que dans celui des particules libres.

On peut s'interroger sur l'effet des termes LHY, donc au-delà du champ moyen, sur ce type de spectre d'excitation. Dans le cas phononique, ces effets vont modifier la vitesse du son dans le condensat. Partons de la relation

générale

$$c = \sqrt{\frac{1}{m} \left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_S}, \quad (25)$$

où la dérivée est prise à entropie constante, c'est-à-dire pour l'état fondamental dans le cas qui nous intéresse ici. La pression  $P$  a été donnée en (9) et on en déduit :

$$c = \sqrt{\frac{gn}{m}} \left[ 1 + \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3} + \dots \right]. \quad (26)$$

Ce résultat coïncide avec celui trouvé par Beliaev par la méthode des fonctions de Green [voir aussi MOHLING & SIRLIN (1960)]. Dans le régime de particules libres  $k\xi \gg 1$  (mais  $ka \ll 1$ ), MOHLING & SIRLIN (1960) écrivent la relation de dispersion d'une excitation sous la forme

$$\xi^{-1} \ll k \ll a^{-1} : \quad \hbar\omega(k) \approx \epsilon_k + 2gn - \mu, \quad (27)$$

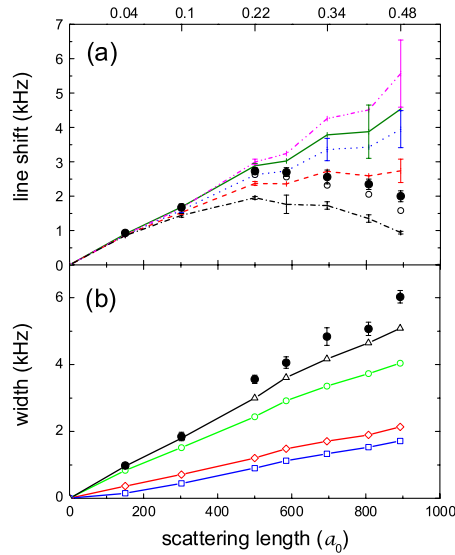
où  $\mu$  est le potentiel chimique du condensat donné en (10). L'interprétation physique de (27) est en ligne avec celle proposée plus haut dans ce régime : cette relation représente la différence entre l'énergie de la particule dans son état final,  $\epsilon_k + 2gn$ , non modifiée par les termes au-delà du champ moyen à cet ordre du calcul<sup>3</sup>, et l'énergie à fournir pour extraire une particule du condensat, c'est-à-dire le potentiel chimique  $\mu$ . Pour chacun de ces deux régimes, phononique et particule libre, il semble difficile de détecter les effets au-delà du champ moyen dans un gaz de Bose en interaction faible, compte tenu de la précision des mesures.

### 2-3 Expériences de Boulder et Cambridge : $q \gtrsim 1/a$

En utilisant respectivement du rubidium 85 et du potassium 39, PAPP, PINO *et al.* (2008) et LOPES, EIGEN *et al.* (2017) ont étendu la mesure de la réponse d'un condensat par spectroscopie de Bragg à des valeurs beaucoup plus grandes de  $a$ , en profitant de l'existence d'une résonance de Feshbach pour ces espèces atomiques.

Les résultats de PAPP, PINO *et al.* (2008) sont montrés en figure 11. La figure du haut montre l'écart  $\hbar\omega_q - \epsilon_q$  en fonction de la longueur de diffusion

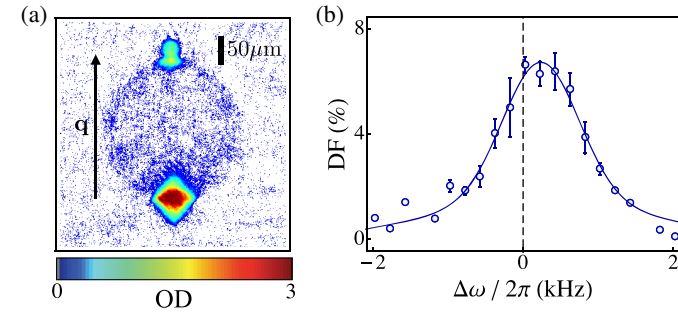
3. Cela peut se comprendre qualitativement en notant que c'est le domaine  $k \lesssim 1/\xi$  qui contribue essentiellement à l'intégrale conduisant à l'énergie LHY.



**FIGURE 11.** Haut : spectroscopie de Bragg d'un condensat de  $^{85}\text{Rb}$ , où l'on représente la fréquence de résonance  $\omega_{\text{res}}/2\pi$  mesurée après soustraction de la fréquence "à une particule"  $\epsilon_q/h$ . Les symboles ouverts correspondent aux mesures directes et les symboles fermés sont les données corrigées, une fois la contribution de la partie thermique du nuage prise en compte. Les lignes correspondent à différentes modélisations théoriques. Bas : largeur de la résonance de Bragg donnant accès, au moins qualitativement, à la durée de vie des excitations. Figure extraite de PAPP, PINO et al. (2008).

a. Dans le régime  $qa \gg 1$ , le spectre de Bogoliubov (24) prédit  $\hbar\omega_q - \epsilon_q \approx gn$ , c'est-à-dire une variation linéaire de cet écart avec  $a$ , ce qui ne correspond pas aux observations.

Ce type d'expérience a été repris sur une plus grande plage de valeurs de  $qa$  par LOPES, EIGEN et al. (2017). Dans cette expérience, trois valeurs de  $q$  ont été utilisées, correspondant à trois orientations relatives possibles des vecteurs  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ . Un exemple de résonance est montré en figure 12. Les résultats pour différentes valeurs de  $a$  et de  $q$  sont regroupés<sup>4</sup> en figure 13.



**FIGURE 12.** Gauche : image d'un nuage d'atomes de  $^{39}\text{K}$  après spectroscopie de Bragg. Le nuage en bas de la figure correspond au condensat initial. Le nuage plus petit en haut de la figure correspond aux atomes diffractés, ayant gagné l'impulsion  $\hbar\mathbf{q}$ . Droite : exemple d'une courbe de résonance permettant de déterminer  $\omega_{\text{res}}(q)$ . La ligne tiretée donne la position de la résonance "nue" :  $\hbar\omega = \epsilon_q$ . Figure extraite de LOPES, EIGEN et al. (2017).

La quantité tracée est

$$\alpha = qa \frac{\hbar\omega_{\text{res}}(q) - \epsilon_q}{gn} \quad (28)$$

et les résultats expérimentaux sont remarquablement bien ajustés par la loi :

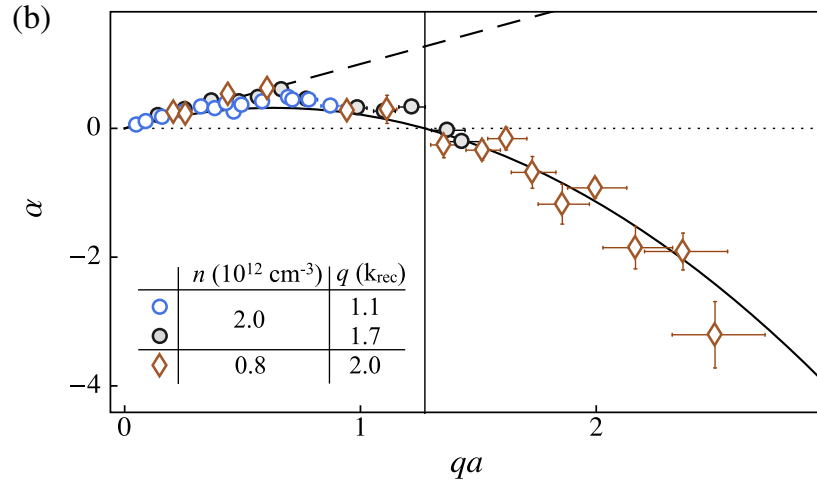
$$\alpha = qa \left(1 - \frac{\pi}{4}qa\right), \quad (29)$$

qui conduit à une annulation de  $\alpha$  en  $qa = 4/\pi \approx 1.3$ . En ce point, la fréquence de résonance pour le processus de Bragg est égale à la fréquence à un atome,  $\epsilon_q/h$ .

Nous allons expliquer la raison d'être de ce choix de la loi quadratique (29) en §2-5, mais remarquons tout de suite qu'elle n'est pas compatible avec le spectre d'excitation à une particule de Bogoliubov (24), qui prédit  $\hbar\omega_q = \epsilon_q + gn$ , et donc la loi linéaire  $\alpha = qa$  tracée en ligne droite tiretée sur la figure 13.

4. Pour cette série de données, la valeur maximale du petit paramètre  $\sqrt{na^3}$  est de l'ordre

de 0.05.



**FIGURE 13.** Positions des résonances  $\omega_{\text{res}}(q)$  en fonction de  $qa$  pour trois valeurs de  $q$  différentes, avec  $\alpha$  définie en (28). La courbe en trait plein représente la prédiction (29) basée sur la formule de Feynman (cf. § 2-5). La droite tiretée représente la prédiction pour une excitation élémentaire de Bogoliubov  $\alpha = qa$ . Figure extraite de LOPES, EIGEN et al. (2017).

## 2-4 Retour vers l'approche de Beliaev

Une première piste pour expliquer les résultats expérimentaux de Boulder et Cambridge est fournie par l'approche de Beliaev, qui a récemment été généralisée à une valeur arbitraire de  $na^3$  par HOFMANN & ZWERGER (2017) en utilisant la technique OPE (*Operator Product Expansion*). Nous allons donner ici quelques éléments pour explorer cette piste, pour conclure qu'elle ne peut à elle seule expliquer les résultats expérimentaux.

Dans son article déjà cité plus haut, BELIAEV (1958b) explique comment prendre en compte à tous les ordres en  $V$  l'interaction entre l'excitation élémentaire d'impulsion  $\hbar k$  et un atome du condensat d'impulsion nulle. Cette resommation du développement de Born fait apparaître notamment l'amplitude de diffusion  $f(k_r)$  entre les deux partenaires, avec l'impulsion relative  $k_r = k/2$ . En supposant que  $a$  est grand devant la portée effective,

on a [cf. cours 2021] :

$$f(k_r) \approx \frac{-a}{1 + ik_r a}. \quad (30)$$

À basse énergie,  $k \ll 1/a$  et on trouve  $f(k_r) \approx -a$ , ce qui conduit au spectre de Bogoliubov donné en (24). En revanche, quand  $k_r$  devient comparable à  $1/a$ , les corrections liées au dénominateur de (30) deviennent significatives. Beliaev montre que le spectre d'excitation est relié à la partie réelle de  $f(k_r)$  qui est modifiée comme :

$$\text{Re}[f(0)] = -a \quad \longrightarrow \quad \text{Re}[f(k_r)] = \frac{-a}{1 + (ka/2)^2}. \quad (31)$$

Plus précisément, le bilan d'énergie déjà mentionné dans le régime<sup>5</sup>  $k\xi \gg 1$  devient :

$$\hbar\omega_k = (\epsilon_k + 2gn) - gn \quad \longrightarrow \quad \hbar\omega_k = \left( \epsilon_k + \frac{2gn}{1 + (ka/2)^2} \right) - gn \quad (32)$$

Cette prédiction constitue une déviation significative par rapport à la relation de dispersion de Bogoliubov (24). En particulier, on voit que la différence  $\hbar\omega_k - \epsilon_k$  peut désormais s'annuler et changer de signe. Toutefois, le point d'annulation ne correspond pas à ce qui a été mesuré à Cambridge : selon (32), il devrait se produire pour  $ka = 2$ , alors qu'on le trouve expérimentalement autour de  $ka = 1.3$ . Le même type de désaccord se produit quand on cherche à ajuster les données de l'expérience de Boulder avec la loi (32) (HOFMANN & ZWERGER 2017).

**Durée de vie des excitations.** L'analyse de Beliaev permet également de calculer la durée de vie  $\tau$  d'une excitation élémentaire à partir de la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion (30). Cette durée de vie correspond à un processus dans lequel une excitation se désintègre en deux excitations de plus basse énergie. Dans le régime de particules libres, cela peut correspondre simplement au processus de collision élastique entre la particule

<sup>5</sup> Nous ne donnerons pas ici l'expression générale trouvée par BELIAEV (1958b) [cf. eq. (4.7) de cet article]. RONEN (2009) a étudié en détail comment adapter ce résultat général au cas d'un potentiel d'interaction entre atomes [voir aussi HOFMANN & ZWERGER (2017)].

d'impulsion  $\hbar\mathbf{k}$  et un atome du condensat

$$(\hbar\mathbf{k}) + (\mathbf{0}) \longrightarrow (\hbar\mathbf{k}_1) + (\hbar\mathbf{k}_2) \quad (33)$$

avec  $|\mathbf{k}_1|, |\mathbf{k}_2| < |\mathbf{k}|$ . Le résultat de ces collisions en onde  $s$  est clairement visible sur la figure 12 et il conduit à la durée de vie (MOHLING & SIRLIN 1960; HOFMANN & ZWERGER 2017) :

$$1/\xi \ll k \lesssim 1/a : \quad \tau^{-1} \sim n(8\pi a^2) \frac{\hbar k_r}{m} = \frac{gn}{\hbar} ka. \quad (34)$$

On note que pour avoir une mesure de la résonance avec une précision au moins égale à  $gn$  (nécessaire pour discriminer entre  $\hbar\omega_k$  et  $\epsilon_k$ ), le temps de mesure doit être au moins égal à  $\hbar/gn$ , ce qui est comparable à la durée de vie  $\tau$  d'une excitation quand  $ka \sim 1$ . Une description précise du processus de mesure de Bragg dans le régime de haute énergie devrait donc prendre en compte cette durée de vie finie.

## 2-5 La formule de Feynman

FEYNMAN (1954) a développé une approche puissante pour étudier le spectre d'excitation qui nous intéresse ici. Cette approche fournit le centre de gravité de la raie d'absorption :

$$\bar{\omega}(\mathbf{q}) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega \Gamma(\mathbf{q}, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\mathbf{q}, \omega) d\omega} \quad (35)$$

en le mettant sous la forme

$$\hbar\bar{\omega}(q) = \frac{\epsilon_q}{S(q)} \quad (36)$$

avec comme toujours  $\epsilon_q = \hbar^2 q^2 / 2m$  et le *facteur de structure statique*  $S(q)$  donné par :

$$S(q) = 1 + n \int [g_2(r) - 1] e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r \quad (37)$$

La fonction de corrélation spatiale  $g_2(r)$  donne la densité de probabilité pour trouver deux particules séparées de la distance  $r$  au sein du fluide.

Elle se calcule à partir de :

$$g_2(r) = \frac{1}{n^2} \langle \hat{\Psi}^\dagger(0) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(0) \rangle. \quad (38)$$

Cette fonction caractérise les fluctuations de densité du fluide, en particulier un éventuel groupement ou dégroupement de particules, et elle est normalisée de sorte qu'elle tend vers 1 quand  $r \rightarrow \infty$ .

La démonstration de la formule de Feynman pour le problème qui nous intéresse est détaillée dans l'appendice de ce chapitre. Nous en indiquons ici les ingrédients principaux. Nous considérons un fluide quantique à  $N$  particules que l'on soumet à une perturbation dépendant du temps de manière monochromatique :

$$\hat{V}(t) = \hat{V}^{(+)} e^{-i\omega t} + \text{H.c.} \quad (39)$$

où l'opérateur  $\hat{V}^{(+)}$  transfère l'impulsion  $\hbar\mathbf{q}$  à une des particules du fluide :

$$\hat{V}^{(+)} = \hbar\kappa \sum_{j=1}^N e^{i\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{r}}_j}. \quad (40)$$

À l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations, on peut utiliser la règle d'or de Fermi pour évaluer la probabilité par unité de temps  $\Gamma(\mathbf{q}, \omega)$  pour que le fluide absorbe un quantum d'impulsion  $\hbar\mathbf{q}$  et d'énergie  $\hbar\omega$ . Le calcul du numérateur de (35) donne alors le résultat exact

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}) = 2\pi\kappa^2 N \frac{\hbar q^2}{2m}, \quad (41)$$

qui ne fait donc pas intervenir la force des interactions présentes dans le système<sup>6</sup>. Le dénominateur s'écrit quant à lui :

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}) = 2\pi\kappa^2 N S(q) \quad (42)$$

d'où l'expression (36) pour  $\bar{\omega}(q)$ .

6. Ce résultat est connu sous le nom de *règle de somme f* (en anglais *f-sum rule*) ou encore *relation de Thomas-Reiche-Kuhn*. Cette terminologie provient de la physique atomique et elle concerne la somme algébrique des forces d'oscillateurs (notées *f*) des transitions électroniques – absorption ou émission de photon – dans un atome.

La détermination du facteur de structure  $S(q)$  nécessite la connaissance de la fonction  $g_2(r)$ , qui a été calculée par LEE, HUANG et al. (1957) dans le cadre de l'approche de Bogoliubov. Ce calcul est lui aussi détaillé en appendice et nous nous contenterons ici de donner le comportement de  $g_2(r)$  au voisinage de  $r = a$ , puisque c'est la valeur de  $S(q)$  pour  $q \sim 1/a$  qui nous intéresse *in fine*. LEE, HUANG et al. (1957) trouvent au voisinage de 0 :

$$r \ll \xi : \quad g_2(r) = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 + \mathcal{O}(a/\xi). \quad (43)$$

Quand on développe le carré pour former la quantité  $g_2(r) - 1$ , on trouve les termes dominants  $-2a/r$  et  $a^2/r^2$  dont les transformées de Fourier sont respectivement proportionnelles à  $-1/q^2$  et à  $1/q$ . On arrive alors au facteur de structure (cf. appendice) :

$$q\xi \gg 1 : \quad S(q) \approx 1 - \frac{1}{q^2\xi^2} + \frac{2\pi^2 na^2}{q} = 1 - \frac{1}{q^2\xi^2} \left(1 - \frac{\pi}{4} qa\right) \quad (44)$$

Il ne reste plus qu'à injecter ce résultat dans la formule de Feynman (36) pour en déduire le centre de gravité de la raie :

$$q\xi \gg 1 : \quad \hbar\bar{\omega}(q) \approx \epsilon_q \left[1 + \frac{1}{q^2\xi^2} \left(1 - \frac{\pi}{4} qa\right)\right]. \quad (45)$$

Ce résultat est celui tracé en trait continu sur la figure 13 donnant les résultats de l'expérience de LOPES, EIGEN et al. (2017) :

$$\alpha = qa \frac{\hbar\bar{\omega}(q) - \epsilon_q}{gn} = qa \left(1 - \frac{\pi}{4} qa\right). \quad (46)$$

et il semble en excellent accord avec les données expérimentales.

## 2-6 Problème résolu ?

À première vue, l'accord entre les données expérimentales et la prédiction (45) issue de la formule de Feynman semble résoudre le problème de l'interprétation des données expérimentales de Boulder et Cambridge. Mais nous allons voir que la situation n'est pas si claire.

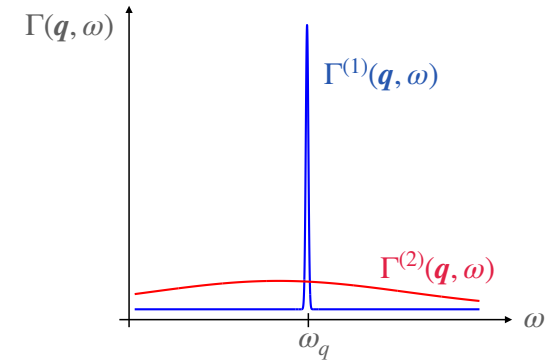


FIGURE 14. Allure générique du spectre à deux composantes attendu dans une analyse du processus de diffraction de Bragg abordé par la règle d'or de Fermi.

Une première question qui se pose est d'accorder cette prédiction avec le spectre (32) prédit par l'approche de Beliaev. Dans la mesure où le spectre (32) porte sur la relation de dispersion d'une excitation élémentaire alors que le résultat de Feynman concerne le centre de gravité de la raie, l'écart entre les deux prédictions est possible mais il mérite d'être explicité. Pour cela, le plus simple est de revenir à l'opérateur  $\hat{V}^{(+)}$  qui décrit l'excitation du système lors de la diffraction de Bragg. Cet opérateur est donné en (40) et il s'écrit en seconde quantification :

$$\hat{V}^{(+)} = \hbar\kappa \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}}. \quad (47)$$

Quand on réécrit les opérateurs  $a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger$  en fonction des opérateurs  $a_0 \approx a_0^\dagger \approx \sqrt{N_0}$  et des opérateurs  $b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^\dagger$  pour  $\mathbf{k} \neq 0$ , on voit apparaître au même ordre en  $\hbar\kappa$  :

- Un terme dominant, proportionnel à  $\sqrt{N_0}$ , correspondant à la création d'une seule excitation d'impulsion  $\mathbf{q}$  avec l'énergie  $\hbar\omega_q$ .
- Un second terme correspondant à la création d'une paire d'excitations  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ , d'impulsion totale  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{q}$ .

Cette structure en simple et double excitation est décrite en détail par GRIFFIN (1993). Pour le problème qui nous intéresse ici, nous en déduisons

la forme de  $\Gamma(\mathbf{q}, \omega)$  :

$$\Gamma(\mathbf{q}, \omega) = \Gamma^{(1)}(\mathbf{q}, \omega) + \Gamma^{(2)}(\mathbf{q}, \omega), \quad (48)$$

où  $\Gamma^{(1)}$  est un pic étroit, centré sur la fréquence  $\omega_{\mathbf{q}}$  d'une excitation élémentaire et  $\Gamma^{(2)}$  correspond à un piédestal beaucoup plus large. Une représentation (schématique!) de ce spectre est donnée en figure 14, la formule de Feynman correspondant au centre de gravité de la somme de ces deux composantes.

Il reste maintenant à comprendre pourquoi les expériences de Boulder et Cambridge seraient sensibles plutôt au centre de gravité de cette raie à double structure, plutôt qu'au pic central. À notre connaissance, cette question est ouverte<sup>7</sup>. Le problème de l'interprétation des résultats expérimentaux est rendu encore plus complexe par le fait que cette séparation entre processus à simple et double excitation n'est pas forcément pertinente au plan pratique : nous avons vu en effet que sur la durée de l'expérience, une excitation élémentaire avait une probabilité tout à fait significative de se désintégrer en deux excitations de plus faible énergie...

## 3 Mélanges et gouttelettes quantiques

### 3-1 Position du problème

Dans les expériences que nous venons de décrire, l'énergie LHY était une petite correction à l'énergie dominante de champ moyen et elle n'intervenait que très peu dans la forme d'équilibre du gaz dans son état fondamental. Cela est dû bien sûr au critère de validité  $na^3 \ll 1$  du calcul LHY. Comme nous l'avons expliqué plus haut [cf. (7)], ce critère est incontournable quand on prend en compte la nécessité d'atteindre l'équilibre en un temps suffisamment court pour que les pertes à trois corps soient négligeables. En dépit de cette contrainte, nous souhaitons aborder ici la question suivante : existe-il des situations où l'énergie LHY, malgré la petitesse de  $na^3$ , joue un rôle déterminant dans l'équilibre et dans la dynamique du gaz ?

<sup>7</sup>. Je remercie Johannes Hoffmann, Raphael Lopes et Willi Zwerger pour des nombreux échanges sur ce sujet.

Puisque la contribution LHY ne peut pas être amenée à une valeur "standard" de l'énergie de champ moyen  $gn$ , l'autre option pour que les deux termes soient comparables est d'abaisser l'énergie de champ moyen. C'est l'idée mise en avant par PETROV (2015), et basée sur un mélange de deux fluides. Le principe est de partir d'une situation où l'énergie de champ moyen pour chacun des fluides pris séparément est positive (répulsion intra-espèce), alors que l'énergie de champ moyen décrivant l'interaction entre les deux fluides est négative (attraction intra-espèce). On peut alors aboutir à un régime où la somme des énergies de champ moyen est quasi-nulle : l'énergie LHY devient déterminante pour calculer la forme d'équilibre du fluide. Nous allons voir que cet équilibre correspond à un état "liquide", avec une densité indépendante du nombre de particules. On parle donc de *gouttelettes quantiques*.

Une autre méthode pour abaisser l'énergie de champ moyen au niveau de l'énergie LHY est apparue quasi-simultanément à la proposition de PETROV (2015). Elle revient à ajouter un terme supplémentaire aux énergies de champ moyen et LHY décrivant les interactions en onde  $s$ , ce terme provenant de l'interaction dipôle-dipôle magnétique. Cette approche a été poursuivie expérimentalement par les groupes de Stuttgart (FERRIER-BARBUT, KADAU et al. 2016; SCHMITT, WENZEL et al. 2016) et d'Innsbruck (CHOMAZ, BAIER et al. 2016). Ces études ont ensuite débouché sur l'observation d'états supersolides dans ces deux groupes (BÖTTCHER, SCHMIDT et al. 2019; CHOMAZ, PETTER et al. 2019) ainsi qu'à Florence (TANZI, LUCIONI et al. 2019). Nous renvoyons les lecteurs intéressés vers les articles de revue récents de FERRIER-BARBUT (2019) et BÖTTCHER, SCHMIDT et al. (2021).

### 3-2 Stabilité d'un mélange binaire (chp. moyen)

Nous allons nous intéresser dans ce qui suit à la proposition de PETROV (2015), qui est basée sur un mélange binaire de deux fluides quantiques. Pour commencer, nous allons discuter la stabilité d'un tel mélange au niveau de l'énergie de champ moyen. Nous notons 1 et 2 les deux composantes du mélange, qui peuvent correspondre à deux espèces atomiques différentes de masse  $m_1$  et  $m_2$ , ou bien à la même espèce atomique mais avec deux états internes différents. Nous notons  $g_{11}$  et  $g_{22}$  les pa-

ramètres d'interaction de champ moyen intra-espèces et  $g_{12}$  le couplage inter-espèce. Nous prendrons pour simplifier  $m_1 = m_2$ .

Nous supposons que les couplages  $g_{11}$  et  $g_{22}$  sont positifs, c'est-à-dire que chaque composante prise séparément est stable. En revanche, nous ne faisons aucune hypothèse à ce stade sur la valeur de  $g_{12}$ . Nous verrons plus loin que la situation favorable correspond au cas où  $g_{12}$  est négatif et approximativement égal à  $-(g_{11}g_{22})^{1/2}$ .

Nous allons nous intéresser à la stabilité du mélange selon deux critères :

- Il ne doit pas y avoir de démixtion, c'est-à-dire que l'énergie du mélange doit être plus basse que l'énergie du système avec des phases séparées.
- Le système doit être stable, c'est-à-dire qu'il ne doit pas s'effondrer sur lui-même.

Commençons par évaluer l'énergie de la phase avec démixtion, où l'espèce  $i$  occupe un volume  $V_i$ , avec  $V_1 + V_2 = V$  où  $V$  est le volume total accessible. On a

$$E_{\text{demix}} = g_{11} \frac{N_1^2}{2V_1} + g_{22} \frac{N_2^2}{2V_2} \quad (49)$$

où nous avons négligé l'énergie (non extensive) résultant de la tension de surface entre les deux phases. La minimisation de cette énergie vis-à-vis de  $V_1$  (à volume total  $V$  constant) conduit à l'équilibre des pressions  $\frac{1}{2}g_{11}n_1^2 = \frac{1}{2}g_{22}n_2^2$  et on arrive à l'énergie minimale de cette phase séparée :

$$E_{\text{demix}} = g_{11} \frac{N_1^2}{2V} + g_{22} \frac{N_2^2}{2V} + \sqrt{g_{11}g_{22}} \frac{N_1 N_2}{V}. \quad (50)$$

Considérons maintenant la phase mélangée, où chaque espèce occupe tout le volume  $V$  accessible. Son énergie de champ moyen est donc

$$E_{\text{mix}} = g_{11} \frac{N_1^2}{2V} + g_{22} \frac{N_2^2}{2V} + g_{12} \frac{N_1 N_2}{V}. \quad (51)$$

La comparaison avec l'énergie de la phase séparée (50) donne immédiatement le critère :

$$\boxed{\text{Miscibilité si : } g_{12} < \sqrt{g_{11}g_{22}}} \quad (52)$$

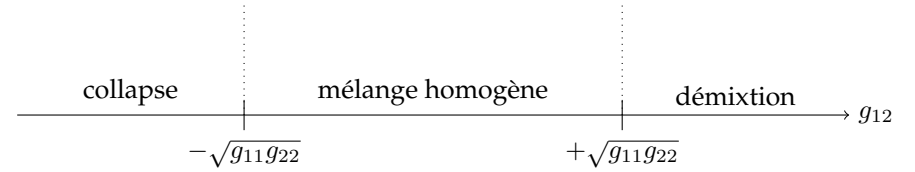


FIGURE 15. Les trois scénarios possibles selon la valeur de  $g_{12}$ .

Intéressons-nous maintenant à la stabilité de cette phase mélangée. Il faut que pour tout couple  $N_1, N_2$ , l'énergie (51) soit positive. Si ce n'était pas le cas, on pourrait abaisser l'énergie (c'est-à-dire la faire tendre vers  $-\infty$ ) en prenant un volume  $V \rightarrow 0$ , ce qui correspond à un effondrement du système sur lui-même. En réécrivant l'énergie  $E_{\text{mix}}$  sous la forme

$$E_{\text{mix}} = \frac{1}{2V} (\sqrt{g_{11}} N_1 - \sqrt{g_{22}} N_2)^2 + \frac{1}{V} (\sqrt{g_{11}g_{22}} + g_{12}) N_1 N_2, \quad (53)$$

on constate que l'énergie sera toujours positive si et seulement si

$$\boxed{\text{Stabilité si : } -\sqrt{g_{11}g_{22}} < g_{12}} \quad (54)$$

Pour continuer l'analyse, plaçons-nous pour simplifier sur la ligne "minimisante" qui annule le premier terme de (53), c'est-à-dire avec des nombres d'atomes  $N_1$  et  $N_2$  choisis tels que :

$$\sqrt{g_{11}} N_1 = \sqrt{g_{22}} N_2 \quad \Leftrightarrow \quad N_1 = N \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}} + \sqrt{g_{22}}}, \quad N_2 = N \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{11}} + \sqrt{g_{22}}}. \quad (55)$$

L'énergie de champ moyen s'écrit alors (PETROV 2015) :

$$\boxed{E_{\text{mix}} = \frac{1}{2} \delta g \frac{N^2}{V}} \quad (56)$$

avec

$$\delta g = 2 (\sqrt{g_{11}g_{22}} + g_{12}) \frac{\sqrt{g_{11}g_{22}}}{(\sqrt{g_{11}} + \sqrt{g_{22}})^2}. \quad (57)$$

Si on choisit  $g_{12}$  très proche de  $-\sqrt{g_{11}g_{22}}$  (i.e. juste au bord de la frontière du collapse de la figure 15), le paramètre  $\delta g$  est petit. L'énergie (56) a donc

la structure d'une énergie de champ moyen pour un gaz à une composante, mais avec une valeur du coefficient de couplage  $\delta g$  très réduite par rapport aux systèmes 1 et 2 de départ. C'est précisément l'effet recherché pour que l'énergie LHY puisse jouer un rôle déterminant.

On peut prolonger cette étude en calculant le spectre d'excitation du mélange homogène. Supposons que  $g_{11} = g_{22} \equiv g$  et  $N_1 = N_2$  pour simplifier l'écriture du résultat. TIMMERMANS (1998) obtient dans ce cas les deux branches d'excitation :

$$\omega_{\pm}^2(k) = \omega^2(k) \pm \frac{|g_{12}|}{g} c^2 k^2 \quad (58)$$

où  $c$  désigne la vitesse du son dans chacun des condensats pris séparément. Ces deux branches correspondent à l'excitation d'ondes de densité totale (oscillation de  $n_1 + n_2$ ) et d'ondes de "spin" (oscillation de  $n_1 - n_2$ ). Dans la limite des faibles  $k$ , on trouve donc deux branches linéaires

$$\omega_{\pm}(k) = ck \left( 1 \pm \frac{|g_{12}|}{g} \right)^{1/2}, \quad (59)$$

qui sont toutes deux réelles si et seulement le critère de stabilité (54) est satisfait. Quand ce n'est pas le cas, l'examen de (58) permet de déterminer le nombre d'onde  $k$  qui conduit à la plus grande partie imaginaire de  $\omega_{\pm}(k)$ , et donc à l'instabilité maximale.

### 3-3 L'énergie LHY pour un mélange

L'énergie LHY pour un mélange a été calculée par LARSEN (1963) et MINARDI, ANCILOTTO et al. (2019). Dans le cas homonucléaire  $m_1 = m_2$ , cette énergie s'écrit :

$$E_{\text{LHY}} = \frac{8V}{15\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} (g_{11}n_1)^{5/2} f\left(\frac{g_{12}^2}{g_{11}g_{22}}, \frac{g_{22}n_2}{g_{11}n_1}\right) \quad (60)$$

où la fonction sans dimension  $f(x, y)$  définie par

$$f(x, y) = \frac{1}{2^{5/2}} \sum_{\pm} \left[ 1 + y \pm \sqrt{(1-y)^2 + 4xy} \right]^{5/2} \quad (61)$$

est en pratique d'ordre unité. Au voisinage du point d'instabilité  $g_{12} = -\sqrt{g_{11}g_{22}}$ , on a  $x \approx 1$  de sorte que cette énergie s'écrit :

$$g_{12} \approx -\sqrt{g_{11}g_{22}} : \quad E_{\text{LHY}} = \frac{8}{15\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \frac{(g_{11}N_1 + g_{22}N_2)^{5/2}}{V^{3/2}}. \quad (62)$$

Pour un mélange dans la proportion  $N_2/N_1 = \sqrt{g_{11}/g_{22}}$  définie en (55), cette énergie se simplifie pour donner

$$E_{\text{LHY}} = \frac{8}{15\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \frac{(\bar{g}N)^{5/2}}{V^{3/2}} \quad \text{avec} \quad \bar{g} = \sqrt{g_{11}g_{22}} \quad (63)$$

c'est-à-dire l'énergie LHY d'un gaz à une composante de constante de couplage  $\bar{g}$  [cf. (1)]. L'énergie LHY n'est donc pas réduite significativement au voisinage du point d'instabilité  $g_{12} = -\sqrt{g_{11}g_{22}}$ , contrairement à l'énergie de champ moyen (56).

### 3-4 Stabilisation de gouttelettes

Pour former un édifice stabilisé par l'énergie LHY, PETROV (2015) a suggéré d'ajuster la valeur du couplage inter-espèces  $g_{12}$  au voisinage de la zone de collapse de la figure 15, en se plaçant dans la région instable. Si elle était seule, l'énergie de champ moyen (56) conduirait alors à un effondrement du gaz sur lui-même, puisque  $\delta g$  est négatif. Deux termes peuvent *a priori* venir s'opposer à cet effondrement. Pour les estimer, notons  $V = \ell^3$  le volume effectif occupé par le fluide à l'équilibre. Ces deux termes sont

— le terme d'énergie cinétique

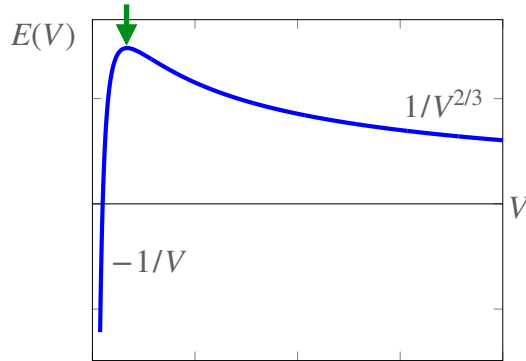
$$E_{\text{cin}} \approx \frac{N\hbar^2}{2m\ell^2} = \frac{N\hbar^2}{2mV^{2/3}} \quad (64)$$

qui est une contribution à une particule correspondant à l'énergie nécessaire pour confiner une particule dans un domaine de taille  $\ell$ ;

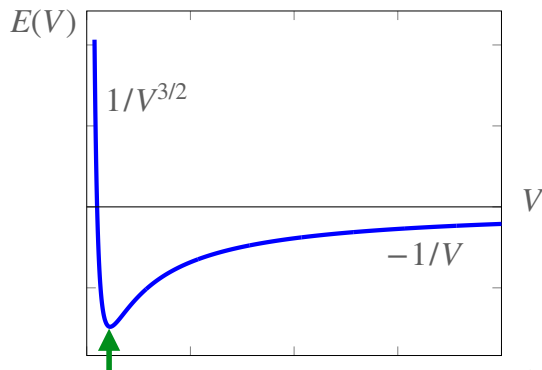
— le terme LHY calculé ci-dessus en (63).

Ces deux contributions positives augmentent quand le nuage se contracte et peuvent donc effectivement contrebalancer le terme de champ moyen.





**FIGURE 16.** Compétition entre le terme de champ moyen (56) et le terme d'énergie cinétique (64) pour un nuage 3D. L'équilibre signalé par la flèche est instable.



**FIGURE 17.** Compétition entre le terme de champ moyen (56) et le terme LHY (63). L'équilibre signalé par la flèche est stable.

Pour simplifier la discussion, nous allons passer en revue l'action séparée de chacun de ces deux termes face au terme de champ moyen. Si on ne prend en compte que l'énergie cinétique et le terme de champ moyen, le volume d'équilibre du fluide  $V$  doit minimiser

$$E_{\text{cin+MF}}(V) = \frac{N\hbar^2}{2mV^{2/3}} - \frac{|\delta g|N^2}{2V}. \quad (65)$$

Cette fonction de  $V$  est tracée sur la figure 16 et le point stationnaire qui apparaît est clairement instable pour notre problème à trois dimensions<sup>8</sup>. L'équilibre recherché ne peut donc pas se produire en pratique.

Si on ne prend en compte que le terme LHY et le terme de champ moyen, le volume d'équilibre doit minimiser

$$E_{\text{LHY+MF}}(V) = \gamma \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \frac{(\bar{g}N)^{5/2}}{V^{3/2}} - \frac{|\delta g|N^2}{2V} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{8}{15\pi^2}. \quad (66)$$

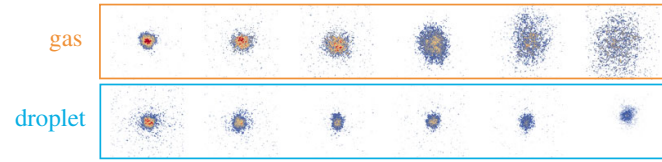
Cette fonction est tracée sur la figure 17 et elle conduit à un minimum stable : l'énergie LHY peut donc effectivement empêcher l'effondrement du gaz sur lui-même que le champ moyen tend à provoquer. Plus précisément, on trouve que ce minimum correspond à une densité  $n = N/V$  donnée à un coefficient numérique près par :

$$n \bar{a}^3 \sim \left( \frac{|\delta g|}{\bar{g}} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \bar{g} = \frac{4\pi\hbar^2 \bar{a}}{m}. \quad (67)$$

On arrive donc au résultat important suivant : le volume d'équilibre est tel que la densité au sein de la gouttelette  $n = N/V$  est indépendante du nombre d'atomes. Cela correspond à la définition d'un liquide, c'est-à-dire un état à la fois fluide et presque incompressible [ce dernier point est confirmé par l'étude des modes de vibration de la gouttelette (PETROV 2015)]. On note par ailleurs que cette densité vérifie bien le critère de validité de l'approximation de Bogoliubov  $n\bar{a}^3 \ll 1$ , si on prend soin de garder  $|\delta g|$  petit devant la valeur typique  $\bar{g}$  du coefficient de couplage.

En pratique, il convient bien sûr de prendre en compte simultanément les termes d'énergie cinétique et LHY pour étudier quantitativement la

<sup>8</sup> La situation serait différente à 1D où le terme de champ moyen varierait comme  $-|\delta g|N^2/2\ell$ . On retrouverait alors la situation bien connue qui conduit à la formation de solitons. La transition entre ces solitons et les gouttelettes que nous étudions ici est discutée par CHEINEY, CABRERA et al. (2018).



**FIGURE 18.** Évolution d'un gaz de  $^{39}\text{K}$  dans l'espace libre pour un mélange des deux états hyperfins  $|F = 1, m = 0\rangle$  et  $|F = 1, m = -1\rangle$ . Rangée du haut : expansion (régime gazeux) obtenue pour  $|\delta g|$  très petit, l'énergie cinétique jouant alors un rôle significatif; rangée du bas : régime de gouttelette obtenu pour  $|\delta g|$  plus grand et résultant essentiellement de la compétition entre énergie de champ moyen et énergie LHY. Les images sont prises à  $t = 0, 2, \dots, 10$  ms. Le nombre d'atomes initial dans la gouttelette est de l'ordre de 200 000 et la taille r.m.s. de l'ordre de  $2\mu\text{m}$ . Le rapport  $N_1/N_2$ , de l'ordre de 0.7, est en bon accord avec la prédiction théorique. Figure tirée de SEMEGHINI, FERIOLI et al. (2018).

compétition avec l'énergie négative de champ moyen. Toutefois, pour les grands nombres d'atomes, l'énergie cinétique joue un rôle faible et la prédiction (67) peut être utilisée en bonne approximation.

Nous ne décrivons pas ici l'observation expérimentale de ces gouttelettes puisque ce sujet sera détaillé dans le séminaire et l'atelier du 15 avril prochain. Signalons simplement que ces gouttelettes ont été observées en absence totale de confinement par SEMEGHINI, FERIOLI et al. (2018) à Florence et GUO, JIA et al. (2021) à Beijing, les expériences du groupe de Taruell à Barcelone étant réalisées dans un confinement à une ou deux dimensions (CABRERA, TANZI et al. 2018; CHEINEY, CABRERA et al. 2018). Un exemple de résultat du groupe de Florence est montré en figure 18.

## Appendice

### Démonstration de la relation de Feynman

Nous partons de la perturbation dépendant du temps  $\hat{V}(t) = \hat{V}^{(+)} e^{-i\omega t} + \text{H.c.}$  qui vient sonder la densité du fluide à un vecteur d'onde

particulier  $\mathbf{q}$  :

$$\hat{V}^{(+)} = \hbar\kappa \int \hat{n}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r \quad (68)$$

où l'opérateur  $\hat{n}(\mathbf{r})$  est associé à la densité spatiale au point  $\mathbf{r}$  :  $\hat{n}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}_j)$ . L'opérateur  $\hat{V}^{(+)}$  s'écrit donc :

$$\hat{V}^{(+)} = \hbar\kappa \sum_j e^{i\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{r}}_j}. \quad (69)$$

La probabilité par unité de temps pour exciter le système en supposant qu'il est initialement dans son état fondamental  $|\psi_0\rangle$  est donnée par la règle d'or de Fermi :

$$\Gamma(\mathbf{q}, \omega) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f \left| \langle \psi_f | \hat{V}^{(+)} | \psi_0 \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_0 - \hbar\omega) \quad (70)$$

et on définit la fréquence moyenne  $\bar{\omega}$  comme

$$\bar{\omega}(\mathbf{q}) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega \Gamma(\mathbf{q}, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\mathbf{q}, \omega) d\omega} = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{q})}{\mathcal{D}(\mathbf{q})} \quad (71)$$

où en fait seules les fréquences positives contribuent à  $\Gamma$  puisque le système est initialement dans son état fondamental.

**Calcul du numérateur  $\mathcal{N}(\mathbf{q})$ .** L'intégrale sur  $\omega$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{q}) &= \frac{2\pi}{\hbar^3} \sum_f \langle \psi_0 | \hat{V}^{(-)} | \psi_f \rangle \langle \psi_f | \hat{V}^{(+)} | \psi_0 \rangle (E_f - E_0) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar^3} \sum_f \langle \psi_0 | \hat{V}^{(-)} | \psi_f \rangle \langle \psi_f | [\hat{H}, \hat{V}^{(+)}] | \psi_0 \rangle \end{aligned} \quad (72)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{q}) &= \frac{2\pi}{\hbar^3} \langle \psi_0 | \hat{V}^{(-)} [\hat{H}, \hat{V}^{(+)}] | \psi_0 \rangle \\ &= -\frac{2\pi}{\hbar^3} \langle \psi_0 | [\hat{H}, \hat{V}^{(-)}] \hat{V}^{(+)} | \psi_0 \rangle \end{aligned} \quad (73)$$

Du fait de l'isotropie du système, le résultat pour  $\mathcal{N}(\mathbf{q})$  est égal à celui pour  $\mathcal{N}(-\mathbf{q})$ . Puisque la substitution  $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$  correspond à l'échange de  $\hat{V}^{(+)}$  et de  $\hat{V}^{(-)}$ , on en déduit que  $\mathcal{N}(\mathbf{q})$  est égal à

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}) = \frac{\pi}{\hbar^3} \langle \psi_0 | \left[ \hat{V}^{(-)}, \left[ \hat{H}, \hat{V}^{(+)} \right] \right] | \psi_0 \rangle. \quad (74)$$

L'hamiltonien du gaz s'écrit :

$$\hat{H} = \sum_j \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v(\hat{r}_{ij}). \quad (75)$$

Par conséquent, seul le terme d'énergie cinétique possède un commutateur non nul avec les opérateurs  $\hat{V}^{(\pm)}$ . Nous trouvons :

$$\left[ \hat{H}, \hat{V}^{(+)} \right] = \frac{\hbar \kappa}{2m} \sum_j \left[ \hat{\mathbf{p}}_j^2, e^{i\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{r}}_j} \right] = \frac{\hbar^2 \kappa}{2m} \sum_j \mathbf{q} \cdot (\hat{\mathbf{p}}_j e^{i\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{r}}_j} + e^{i\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{r}}_j} \hat{\mathbf{p}}_j) \quad (76)$$

et

$$\left[ \hat{V}^{(-)}, \left[ \hat{H}, \hat{V}^{(+)} \right] \right] = \frac{\hbar^4 \kappa^2}{m} N q^2 \quad (77)$$

de sorte qu'on obtient finalement (41).

Le lien avec la relation de Thomas–Reiche–Kuhn en physique atomique se fait en notant que pour un atome "à un électron" d'opérateur position  $\hat{x}$  et de masse  $m$ , on trouve pour un état propre  $|m\rangle$  de l'énergie :

$$\sum_n (E_n - E_m) |\langle n | \hat{x} | m \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \quad (78)$$

La démonstration est très similaire à ce qui précède, les opérateurs  $\hat{V}^{(\pm)}$  étant remplacés par  $\hat{x}$ .

**Calcul du dénominateur  $\mathcal{D}(q)$ .** L'intégrale sur  $\omega$  donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{q}) &= \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_f \langle \psi_0 | \hat{V}^{(-)} | \psi_f \rangle \langle \psi_f | \hat{V}^{(+)} | \psi_0 \rangle \\ &= \frac{2\pi}{\hbar^2} \langle \psi_0 | \hat{V}^{(-)} \hat{V}^{(+)} | \psi_0 \rangle \\ &= 2\pi \kappa^2 \left( N + \sum_{i \neq j} \langle \psi_0 | e^{i\mathbf{q} \cdot (\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{r}}_j)} | \psi_0 \rangle \right) \end{aligned} \quad (79)$$

ce qui conduit à (42).

### La fonction de corrélation spatiale $g_2(r)$

Le calcul de la fonction  $g_2(r)$  pour l'état fondamental du gaz de Bose a été mené de manière détaillée dans l'article original de LEE, HUANG et al. (1957). Nous reproduisons ici simplement les grandes lignes de ce calcul, un peu fastidieux mais sans difficulté notable. Différents aspects du comportement de la fonction  $g_2(r)$  ont été analysés dans les articles plus récents de NARASCHEWSKI & GLAUBER (1999) et HOLZMANN & CASTIN (1999).

Cette fonction de corrélation  $g_2$  s'écrit comme le carré de la norme d'un vecteur :

$$g_2(r) = \frac{1}{n^2} \|\hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(0) | 0_B \rangle\|^2, \quad (80)$$

où  $|0_B\rangle$  désigne l'état fondamental du gaz, c'est-à-dire le vide d'excitations de Bogoliubov. Remplaçons les opérateurs champ  $\hat{\Psi}(0)$  et  $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$  par leur expression en terme des opérateurs de création et de destruction des excitations élémentaires :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\mathbf{r}) &= \sqrt{n_0} + \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} a_{\mathbf{k}} \\ &= \sqrt{n_0} + \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \left( u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^\dagger \right). \end{aligned} \quad (81)$$

On constate alors que le vecteur intervenant dans (80) peut contenir 0, 1 ou 2 excitations de Bogoliubov :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(0) | 0_B \rangle &= \left( n_0 - \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right) | 0_B \rangle \\ &\quad - \frac{\sqrt{n_0}}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} v_{\mathbf{k}} (1 + e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) | 1_{\mathbf{k}} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{L^3} \sum_{\text{paires } \mathbf{k}, \mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} \left( e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \right) | 1_{\mathbf{k}} 1_{\mathbf{k}'} \rangle \end{aligned} \quad (82)$$

On en déduit la fonction de corrélation<sup>9</sup>

$$g_2(r) = [1 + F(r)]^2 + [1 + G(r)]^2 - 1 - 2\frac{n'}{n} [F(r) + G(r)] \quad (83)$$

ou encore

$$g_2(r) = 1 + 2\frac{n_0}{n} [F(r) + G(r)] + F^2(r) + G^2(r) \quad (84)$$

où nous avons adopté les mêmes notations que LEE, HUANG et al. (1957) :

$$F(r) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} v_k^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad G(r) = -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} u_k v_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (85)$$

**Comportements asymptotiques.** LEE, HUANG et al. (1957) donnent les développements à courte et longue distance de ces fonctions. Au voisinage de 0, ils trouvent :

$$r \ll \xi : \quad F(r) \approx \frac{n'}{n}, \quad G(r) \approx -\frac{a}{r} + \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3} \quad (86)$$

ce qui conduit à

$$r \ll \xi : \quad g_2(r) = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 + \mathcal{O}(a/\xi). \quad (87)$$

À grande distance, LEE, HUANG et al. (1957) trouvent :

$$r \gg \xi : \quad F(r) \sim -G(r) \sim \frac{1}{\pi^2 n \xi} \frac{1}{r^2} \quad (88)$$

ce qui conduit à

$$r \gg \xi : \quad g_2(r) \approx 1 + \mathcal{O}(r^{-4}). \quad (89)$$

### Le facteur de structure $S(q)$

Une fois connue la fonction  $g_2$ , on calcule la transformée de Fourier de  $g_2(r) - 1$  pour déterminer  $S(q)$  qui intervient directement dans la formule

9. Notons que l'équation correspondante de l'article de LEE, HUANG et al. (1957) contient un terme  $4n'/n$  au lieu de  $2n'/n$  en facteur du dernier terme de (83). Cette erreur a été signalée par GARCIA-COLIN (1960).

de Feynman. Pour mener à bien ce calcul, on part de l'expression (84) que l'on met sous la forme

$$g_2(r) = 1 + g_{2,a}(r) + g_{2,b}(r) \quad (90)$$

avec

$$g_{2,a}(r) = 2\frac{n_0}{n} [F(r) + G(r)] \quad g_{2,b}(r) = F^2(r) + G^2(r), \quad (91)$$

et on pose

$$S(q) = 1 + S_a(q) + S_b(q) \quad (92)$$

avec

$$S_{a/b}(q) = n \int g_{2,a/b}(r) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r. \quad (93)$$

**Contribution de  $g_{2,a}(r)$ .** Le calcul de la transformée de  $g_{2,a}(r)$  est simple : dans la mesure où  $F$  et  $G$  sont elles-mêmes définies en (85) comme les transformées de Fourier de  $v_k^2$  et  $-u_k v_k$ , on trouve sans calcul :

$$S_a(q) = -2\frac{n_0}{n} v_q (u_q - v_q). \quad (94)$$

À l'approximation  $n_0 \approx n$  (déplétion quantique négligée quand  $\sqrt{na^3} \ll 1$ ), nous pouvons remarquer que cette contribution à elle seule conduit au résultat pour le spectre de Bogoliubov donné en (24)

$$\frac{\epsilon_q}{1 + S_a(q)} \approx \frac{\epsilon_q}{1 - 2v_q(u_q - v_q)} = \hbar\omega_q. \quad (95)$$

En particulier, dans la limite  $q\xi \gg 1$ , nous avons vu au chapitre précédent que  $u_q \sim 1$  et  $v_q \sim 1/2q^2\xi^2 \ll u_q$ , de sorte que cette expression se simplifie pour donner

$$q\xi \gg 1 : \quad S_a(q) \approx -\frac{n_0}{n} \frac{1}{q^2\xi^2} \approx -\frac{1}{q^2\xi^2}. \quad (96)$$

**Contribution de  $g_{2,b}(r)$ .** Le calcul complet de la transformée de Fourier de  $g_{2,b}(r)$  est plus compliqué et nous allons nous contenter ici de son terme dominant pour  $q\xi \gg 1$  et  $\sqrt{na^3} \ll 1$ . On peut alors montrer que le seul

terme à prendre en compte provient de la transformée de Fourier de  $G^2(r)$ , que l'on peut évaluer en utilisant l'expression de  $G$  aux petits  $r$  donnée en (86) :

$$S_b(q) \approx n \int G^2(r) e^{-iq \cdot r} d^3r \approx n \int \frac{a^2}{r^2} e^{-iq \cdot r} d^3r = \frac{2\pi^2 n a^2}{q}. \quad (97)$$

**Bilan dans le régime  $q\xi \gg 1$ .** En combinant (92), (96) et (97), on arrive au résultat (44).

## Références

- ALTMAYER, A, S RIEDL, C KOHSTALL, MJ WRIGHT, R GEURSEN, M BARTENSTEIN, C CHIN, J HECKER-DENSCHLAG & R GRIMM (2007), « Precision measurements of collective oscillations in the BEC-BCS crossover », in *Physical review letters* **98**, p. 040401.
- BELIAEV, ST (1958a), « Application of the methods of quantum field theory to a system of bosons », in *SOVIET PHYSICS JETP-USSR* **7**, p. 289-299.
- (1958b), « Energy spectrum of a non-ideal Bose gas », in *Sov. Phys. JETP* **7**, p. 299-307.
- BÖTTCHER, Fabian, Jan-Niklas SCHMIDT, Jens HERTKORN, Kevin NG, Sean GRAHAM, Mingyang GUO, Tim LANGEN & Tilman PFAU (2021), « New states of matter with fine-tuned interactions : quantum droplets and dipolar supersolids », in *Reports on Progress in Physics* **84**, p. 012403.
- BÖTTCHER, Fabian, Jan-Niklas SCHMIDT, Matthias WENZEL, Jens HERTKORN, Mingyang GUO, Tim LANGEN & Tilman PFAU (2019), « Transient supersolid properties in an array of dipolar quantum droplets », in *Physical Review X* **9**, p. 011051.
- CABRERA, CR, L TANZI, J SANZ, B NAYLOR, P THOMAS, P CHEINEY & L TARRUELL (2018), « Quantum liquid droplets in a mixture of Bose-Einstein condensates », in *Science* **359**, p. 301-304.
- CHEINEY, P, CR CABRERA, J SANZ, B NAYLOR, L TANZI & L TARRUELL (2018), « Bright soliton to quantum droplet transition in a mixture of Bose-Einstein condensates », in *Physical review letters* **120**, p. 135301.
- CHEVY, F, V. BRETIN, P. ROSENBUSCH, K. W. MADISON & J. DALIBARD (2001), « Transverse Breathing Mode of an Elongated Bose-Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* **88**, p. 250402.
- CHEVY, F & C SALOMON (2016), « Strongly correlated Bose gases », in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **49**, p. 192001.
- CHOMAZ, L, S BAIER, D PETTER, MJ MARK, F WÄCHTLER, Luis SANTOS & F FERLAINO (2016), « Quantum-fluctuation-driven crossover from a dilute Bose-Einstein condensate to a macrodroplet in a dipolar quantum fluid », in *Physical Review X* **6**, p. 041039.
- CHOMAZ, L, D PETTER, P ILZHÖFER, G NATALE, A TRAUTMANN, C POLITI, G DURASTANTE, RMW VAN BIJNEN, A PATSCHEIDER, M SOHMEN et al. (2019), « Long-lived and transient supersolid behaviors in dipolar quantum gases », in *Physical Review X* **9**, p. 021012.
- DONNELLY, R. J., J. A. DONNELLY & R. N. HILLS (1981), « Specific heat and dispersion curve for helium II », in *Journal of Low Temperature Physics* **44**, p. 471-489.
- FEDICHEV, PO, MW REYNOLDS & GV SHLYAPNIKOV (1996), « Three-body recombination of ultracold atoms to a weakly bound s level », in *Physical review letters* **77**, p. 2921.
- FERRIER-BARBUT, Igor (2019), « Ultradilute quantum droplets », in *Physics Today* **72**, p. 46-52.
- FERRIER-BARBUT, Igor, Holger KADAU, Matthias SCHMITT, Matthias WENZEL & Tilman PFAU (2016), « Observation of quantum droplets in a strongly dipolar Bose gas », in *Physical review letters* **116**, p. 215301.
- FEYNMAN, R. P. (1954), « Atomic Theory of the Two-Fluid Model of Liquid Helium », in *Phys. Rev.* **94**, p. 262-277.
- GARCIA-COLIN, Leopoldo S (1960), « Pair Distribution Function of a Hard Sphere Bose System Calculated by the Pseudo-Potential Method », in *Journal of Mathematical Physics* **1**, p. 87-96.
- GRIFFIN, Allan (1993), *Excitations in a Bose-condensed liquid*, Cambridge University Press.
- GUARRERA, Vera, Peter WÜRTZ, Arne EWERBECK, Andreas VOGLER, Giovanni BARONTINI & Herwig OTT (2011), « Observation of local temporal correlations in trapped quantum gases », in *Physical review letters* **107**, p. 160403.
- GUO, Zhichao, Fan JIA, Lintao LI, Yinfeng MA, Jeremy M. HUTSON, Xiaoling CUI & Dajun WANG (2021), « Lee-Huang-Yang effects in the ultracold mixture of  $^{23}\text{Na}$  and  $^{87}\text{Rb}$  with attractive interspecies interactions », in *Phys. Rev. Research* **3**, p. 033247.
- HOFMANN, Johannes & Wilhelm ZWERGER (2017), « Deep Inelastic Scattering on Ultracold Gases », in *Phys. Rev. X* **7**, p. 011022.

- HOLZMANN, Markus & Yvan CASTIN (1999), « Pair correlation function of an inhomogeneous interacting Bose-Einstein condensate », in *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics* **7**, p. 425-432.
- LARSEN, David M (1963), « Binary mixtures of dilute bose gases with repulsive interactions at low temperature », in *Annals of Physics (New York)(US)* **24**.
- LEE, Tsin D, Kerson HUANG & Chen N YANG (1957), « Eigenvalues and eigenfunctions of a Bose system of hard spheres and its low-temperature properties », in *Physical Review* **106**, p. 1135.
- LOPES, Raphael, Christoph EIGEN, Adam BARKER, Konrad G. H. VIEBAHN, Martin Robert-de SAINT-VINCENT, Nir NAVON, Zoran HADZIBABIC & Robert P. SMITH (2017), « Quasiparticle Energy in a Strongly Interacting Homogeneous Bose-Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* **118**, p. 210401.
- MINARDI, F, F ANCILOTTO, A BURCHIANTI, C D'ERRICO, C FORT & M MODUGNO (2019), « Effective expression of the Lee-Huang-Yang energy functional for heteronuclear mixtures », in *Physical Review A* **100**, p. 063636.
- MOHLING, F. & A. SIRLIN (1960), « Low-Lying Excitations in a Bose Gas of Hard Spheres », in *Phys. Rev.* **118**, p. 370-378.
- MORONI, S., D. E. GALLI, S. FANTONI & L. REATTO (1998), « Variational theory of bulk  $^4\text{He}$  with shadow wave functions : Ground state and the phonon-maxon-roton spectrum », in *Phys. Rev. B* **58**, p. 909-924.
- NARASCHEWSKI, M & RJ GLAUBER (1999), « Spatial coherence and density correlations of trapped Bose gases », in *Physical Review A* **59**, p. 4595.
- NASCIMBÈNE, Sylvain, Nir NAVON, KJ JIANG, Frédéric CHEVY & Christophe SALOMON (2010), « Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas », in *Nature* **463**, p. 1057-1060.
- NAVON, Nir, Swann PIATECKI, Kenneth GÜNTER, Benno REM, Trong Canh NGUYEN, Frédéric CHEVY, Werner KRAUTH & Christophe SALOMON (2011), « Dynamics and thermodynamics of the low-temperature strongly interacting Bose gas », in *Physical review letters* **107**, p. 135301.
- PAPP, SB, JM PINO, RJ WILD, S RONEN, Carl E WIEMAN, Deborah S JIN & Eric A CORNELL (2008), « Bragg spectroscopy of a strongly interacting rb 85 bose-einstein condensate », in *Physical review letters* **101**, p. 135301.
- PETROV, DS (2015), « Quantum mechanical stabilization of a collapsing Bose-Bose mixture », in *Physical Review Letters* **115**, p. 155302.
- PITAEVSKII, L. & S. STRINGARI (2016), *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*, 2nd edition, Oxford : Oxford University Press.
- PITAEVSKII, L. P. & A. ROSCH (1997), « Breathing mode and hidden symmetry of trapped atoms in two dimensions », in *Phys. Rev. A* **55**, R853.
- RONEN, Shai (2009), « The dispersion relation of a Bose gas in the intermediate-and high-momentum regimes », in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **42**, p. 055301.
- SCHMITT, Matthias, Matthias WENZEL, Fabian BÖTTCHER, Igor FERRIER-BARBUT & Tilman PFAU (2016), « Self-bound droplets of a dilute magnetic quantum liquid », in *Nature* **539**, p. 259-262.
- SEMEGHINI, G, G FERIOLI, L MASI, C MAZZINGHI, L WOLSWIJK, F MINARDI, M MODUGNO, G MODUGNO, M INGUSCIO & M FATTORI (2018), « Self-bound quantum droplets of atomic mixtures in free space », in *Physical review letters* **120**, p. 235301.
- STEINHAEUER, J., R. OZERI, N. KATZ & N. DAVIDSON (2002), « Excitation spectrum of a Bose-Einstein condensate », in *Phys. Phys. Lett.* **88**, p. 120407.
- STRINGARI, S (2004), « Collective oscillations of a trapped superfluid Fermi gas near a Feshbach resonance », in *EPL (Europhysics Letters)* **65**, p. 749.
- TANZI, Luca, Eleonora LUCIONI, Francesca FAMÀ, Jacopo CATANI, Andrea FIORETTI, Carlo GABBANINI, Russell N BISSET, Luis SANTOS & Giovanni MODUGNO (2019), « Observation of a dipolar quantum gas with metastable supersolid properties », in *Physical review letters* **122**, p. 130405.
- TIMMERMANS, Eddy (1998), « Phase separation of Bose-Einstein condensates », in *Phys. Phys. Lett.* **81**, p. 5718.