Chaire Atomes et rayonnement

Cours 2021-22

Jean Dalibard

COLLÈGE DE FRANCE
1530

Prochains séminaires

Vendredi 11 mars : Takis Kontos, Laboratoire de Physique de l'Ecole Normale Supérieure, Paris
Circuits quantiques hybrides : de la physique atomique sur puce aux détecteurs de la matière noire de l'univers

Vendredi 18 mars : Matthias Weidemüller, Universität Heidelberg, Allemagne
Does a disordered isolated spin system thermalize?

Vendredi 25 mars : Jean-Philippe Brantut, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Suisse
Exploring and controlling Fermi gases with light in a high-finesse cavity

Vendredi 1 avril : Anna Minguzzi, LPMMC, CNRS and Université Grenoble-Alpes
Tan contact in one-dimensional quantum gases

Les interactions entre atomes dans les gaz quantiques

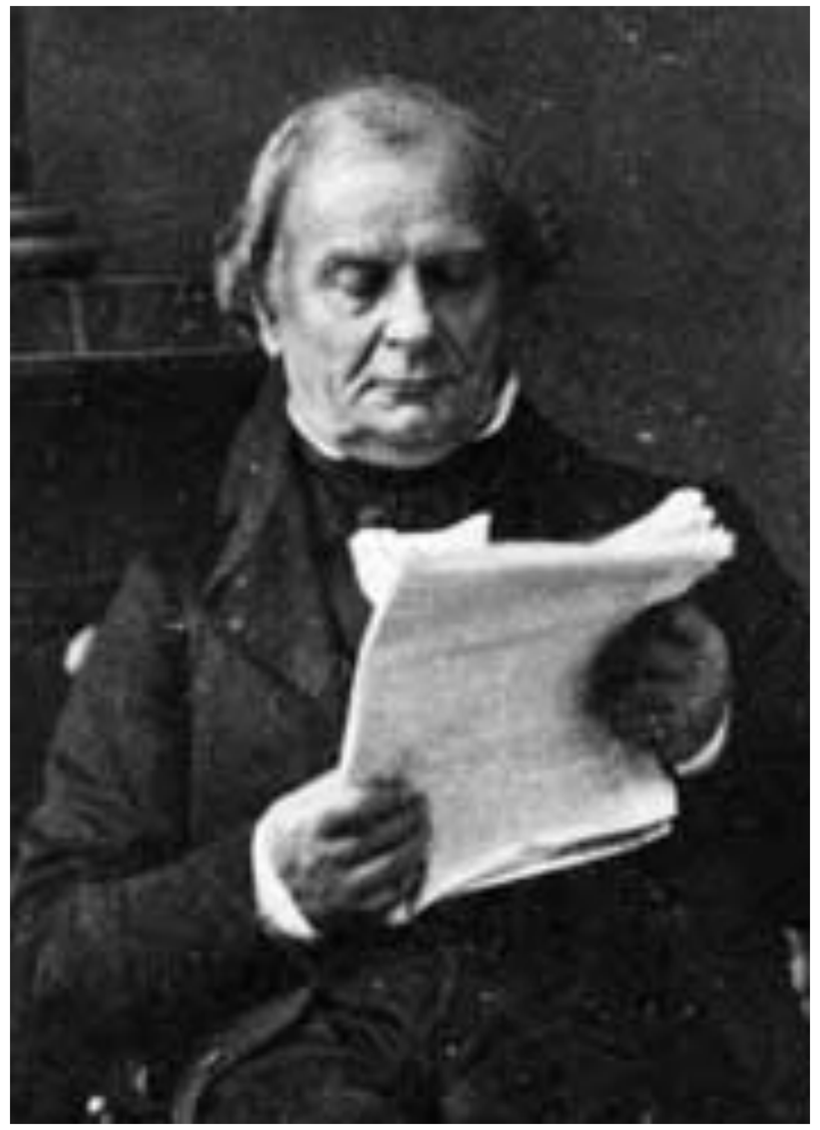
de 2 à N corps

Jean Dalibard
Chaire *Atomes et rayonnement*
Année 2021-22

COLLÈGE DE FRANCE
1530

Le lien entre microscopique et macroscopique

Propriétés des constituants de base de la matière (atomes, molécules) vs. lois macroscopiques



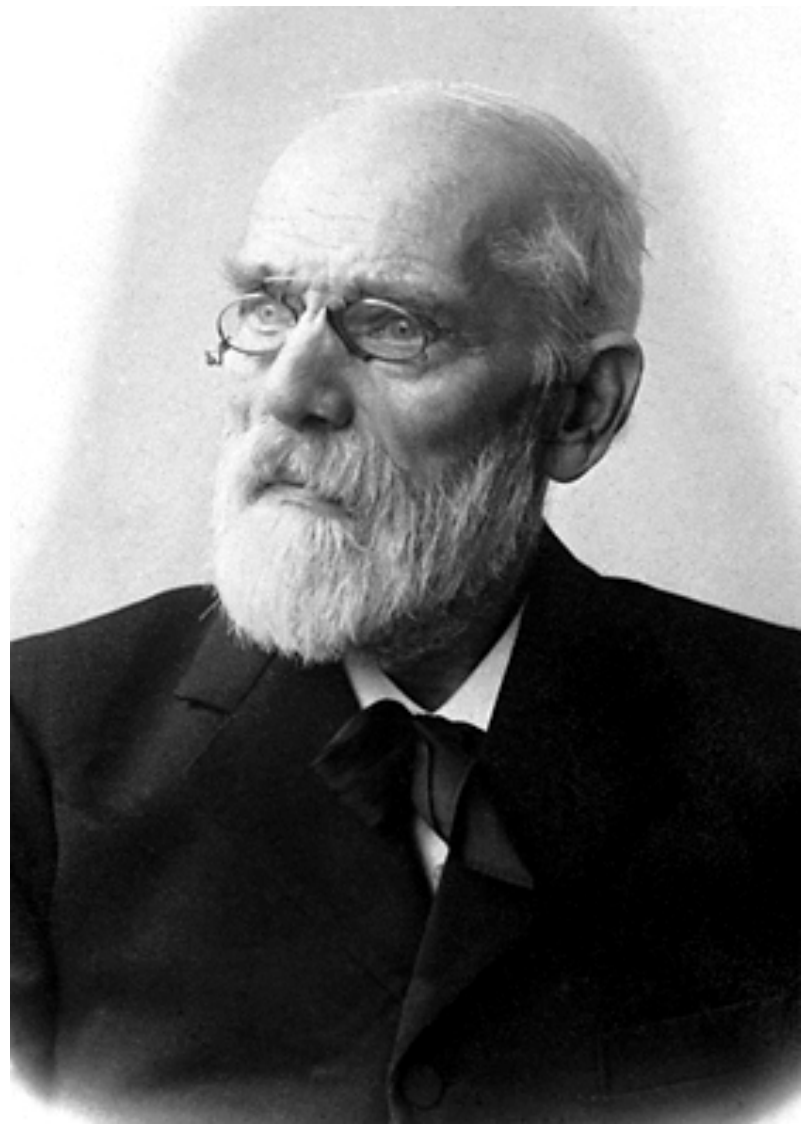
Clapeyron, 1834

Gaz parfait

$$PV = Nk_\mathrm{B}T$$

Gaz “réel”

$$\left(P + a'\frac{N^2}{V^2}\right)\left(V - Nb'\right) = Nk_\mathrm{B}T$$



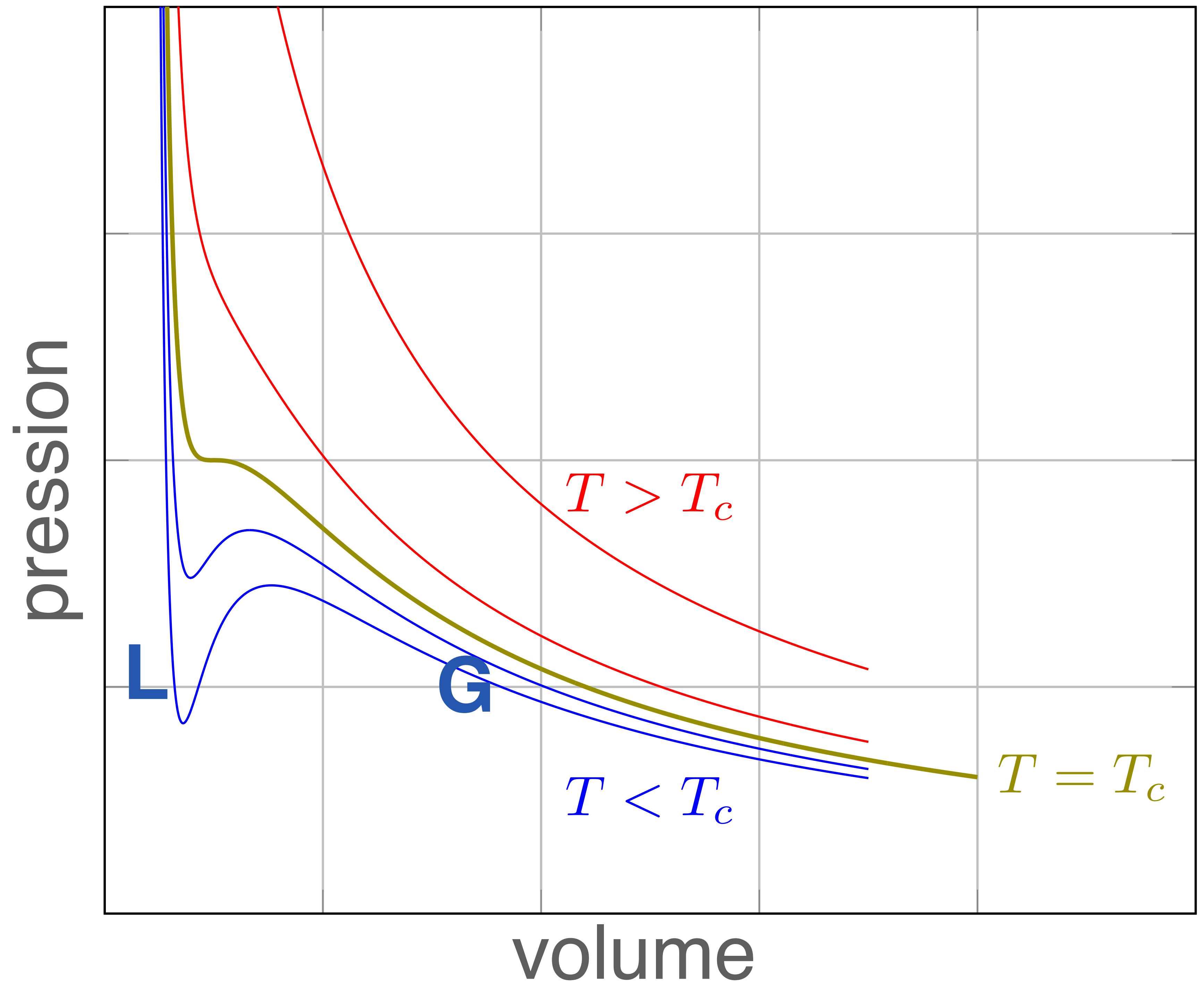
van der Waals, 1873

a' : interactions entre particules, en particulier les interactions de van der Waals

b' : volume occupé par chacune, considérée comme une sphère dure impénétrable

Transition liquide-gaz déduite de l'équation d'état de van der Waals

Réseau des courbes "isothermes"



Existence d'un point critique, de compressibilité infinie

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = 0 \qquad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = 0$$

Coordonnées : P_c, T_c, n_c

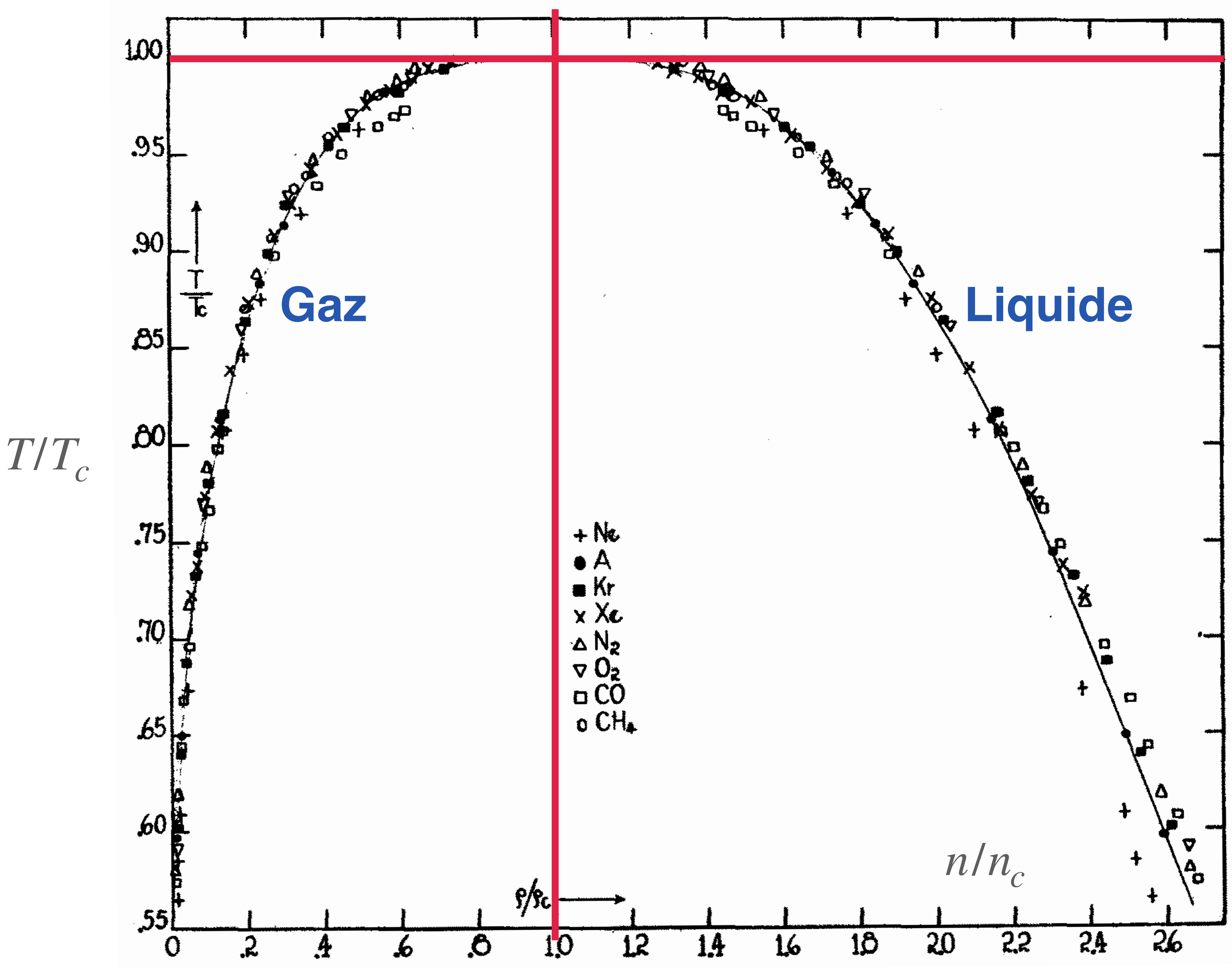
L'équation d'état peut se mettre sous une forme universelle : $\dfrac{P}{P_c} = F\left(\dfrac{T}{T_c}, \dfrac{n}{n_c}\right)$

F : **fonction identique pour tous les fluides**

Lois des états correspondants (classique)

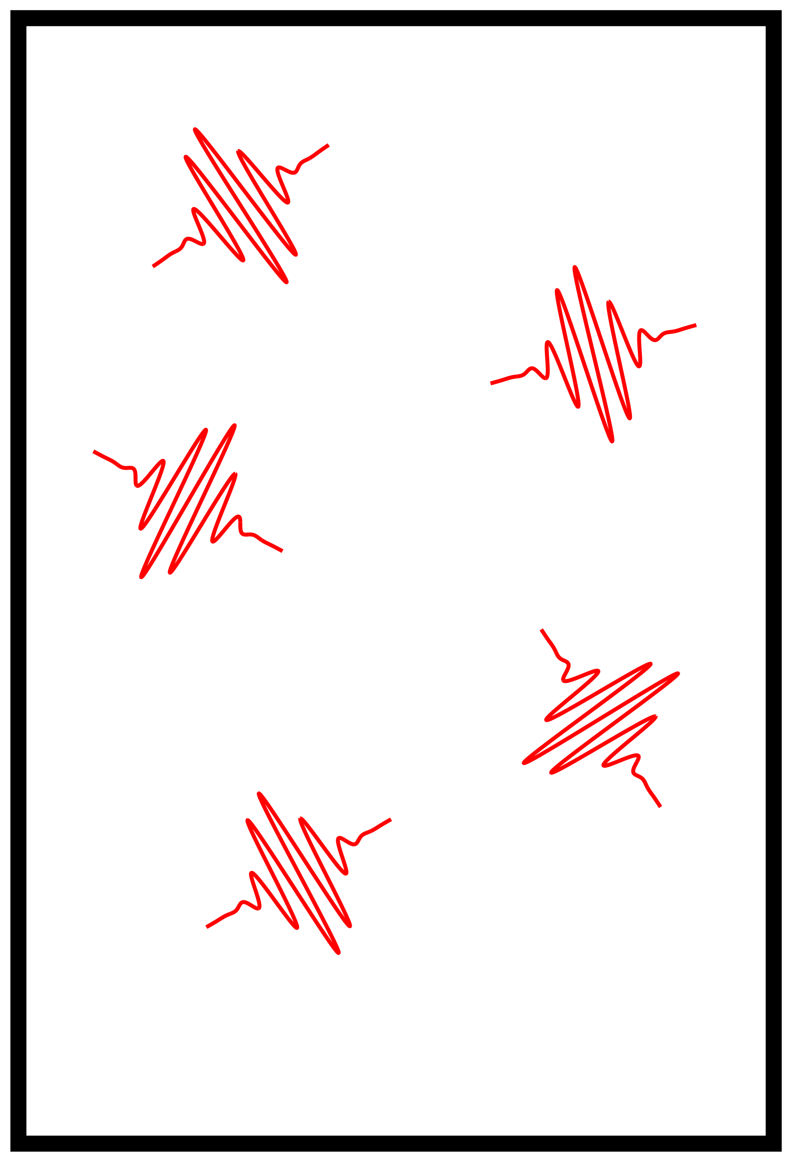
Guggenheim (1945)

Illustration de l'universalité caractéristique d'un phénomène critique



Le cours de cette année

Etude du lien “micro-macro” pour des gaz dilués ultra-froids (nK-μK) : effets quantiques prépondérants



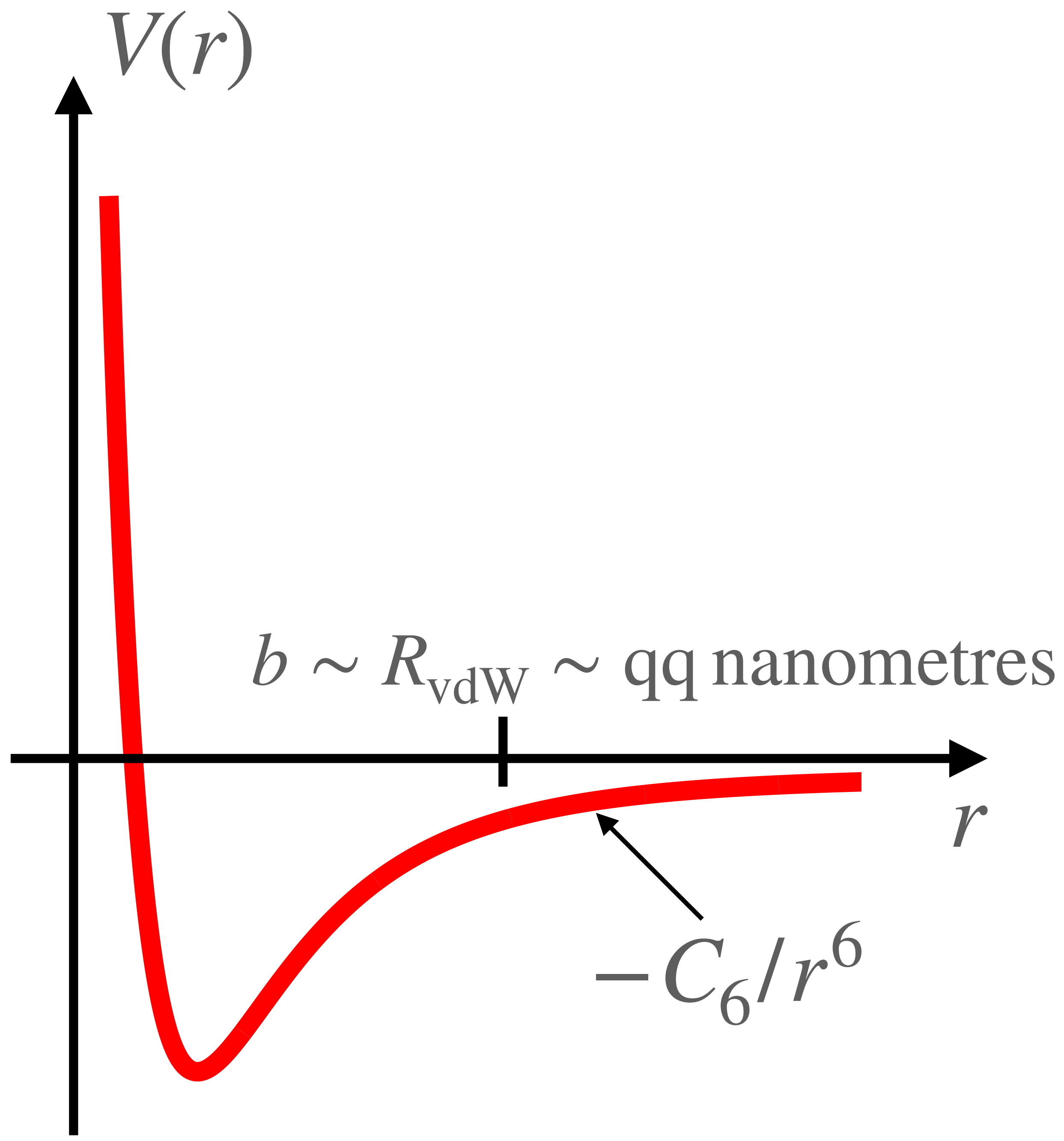
Les échelles de longueur du problème

$d = n^{-1/3}$ distance entre particules (0.1 à 1 μm)

$\lambda = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_\mathrm{B}T}\right)^{1/2}$ longueur d’onde thermique

b : portée du potentiel $\sim R_\mathrm{vdW} = \frac{1}{2}(mC_6/\hbar^2)^{1/4}$

a : longueur de diffusion (collisions en onde s)



Gaz dilué : $b \ll d$, mais pas d’hypothèse concernant le rapport $a/d = (na^3)^{1/3}$

Gaz froid : $b \ll \lambda$, mais pas d’hypothèse concernant le rapport a/λ

Plan du cours de cette année

1. Le régime faiblement dégénéré

$\lambda < d$ ou encore $n\lambda^3 < 1$ *développement du viriel*

2. Le régime dégénéré et d'interaction faible

$n\lambda^3 > 1$ et $na^3 \ll 1$

approche de Bogoliubov
correction de Lee-Huang-Yang
états "gouttelettes"

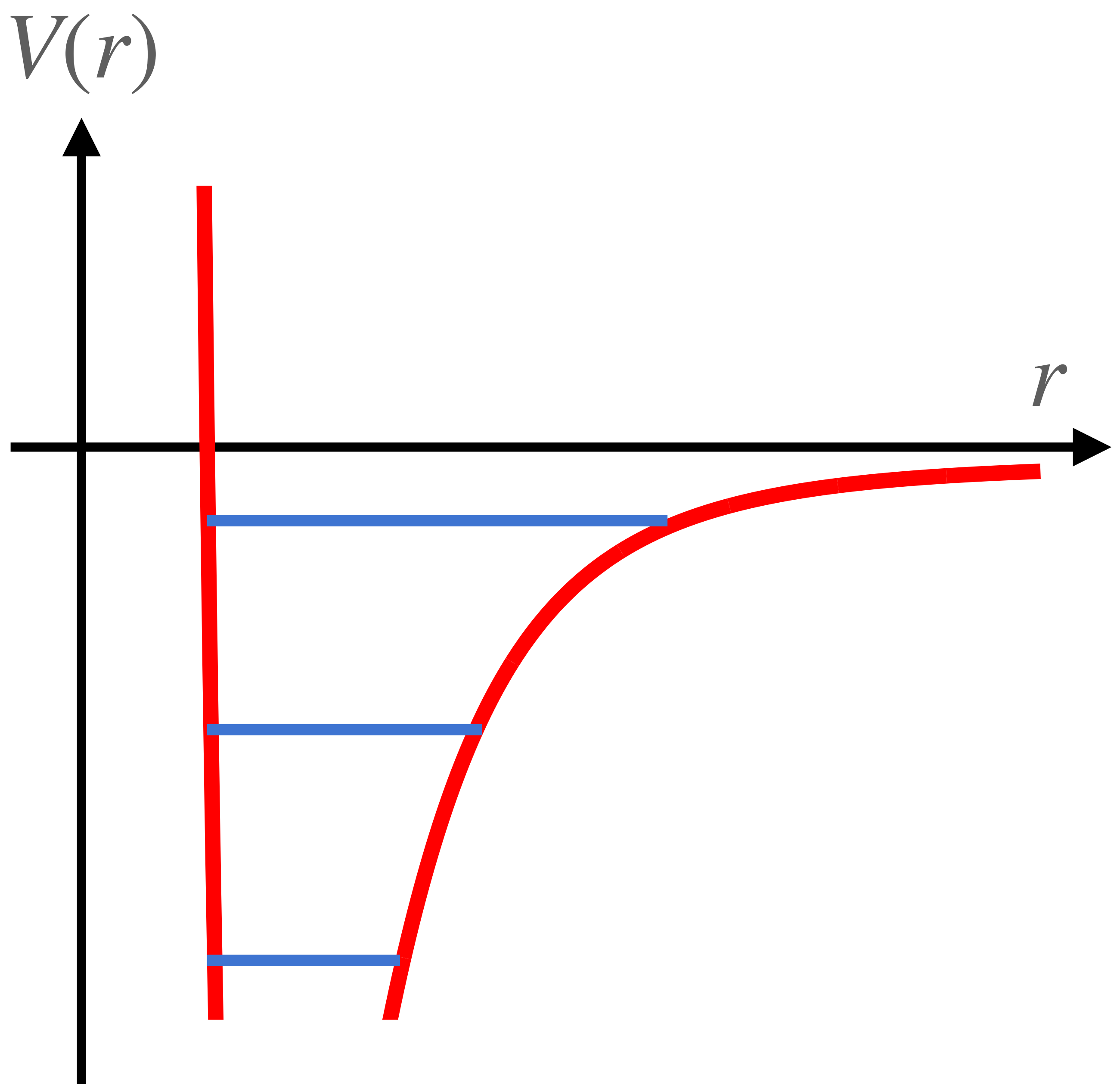
3. Le régime d'interaction arbitrairement élevée

$na^3 \gtrsim 1$ *théorie du contact*

Lien avec le cours de l'an passé

2020-21 : description détaillée de l'interaction à deux corps

en particulier, étude des états de diffusion et des états liés dans un potentiel de van der Waals



Développement de Born en puissances de V

Développement en ondes partielles

Basse énergie : onde s, de moment cinétique $\ell = 0$

longueur de diffusion a*, pseudo-potentiel* $\hat{V}_{\rm pp}$

Résonance de diffusion quand un nouvel état lié apparaît

$$|a| = +\infty$$

Cours 1

Gaz quantiques faiblement dégénérés : l'approche "développement du viriel"

Le principe du développement “en amas”

Kamerlingh Onnes,1902
Mayer & Montroll, 1941

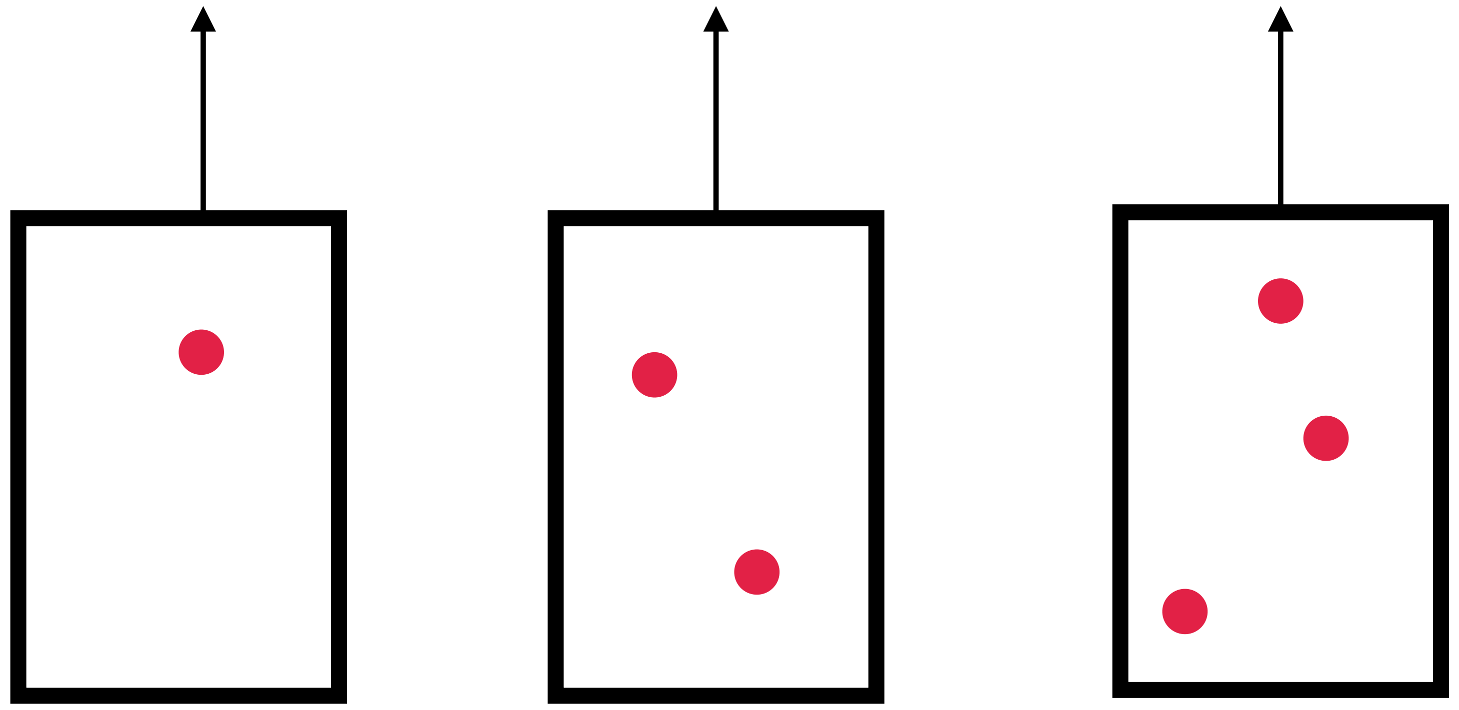
Régime $n\lambda^3 \ll 1$: gaz faiblement dégénéré

$$\lambda = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_BT}\right)^{1/2}$$

Gaz caractérisé par sa température T et son potentiel chimique μ

On cherche un développement des grandeurs thermodynamiques, pression par exemple, en fonction du petit paramètre sans dimension $z = \exp\left(\mu/k_BT\right)$ (fugacité)

$$\frac{P}{k_BT/\lambda^3} = b_1(T)\,z + b_2(T)\,z^2 + b_3(T)\,z^3 + \dots$$



Exemple de lien entre problème à petit nombre de corps et thermodynamique

A l'ordre 1 en z, nous allons voir que $z \approx n\lambda^3$

Plan du cours

$$\frac{P}{k_B T/\lambda^3} = b_1(T)\,z + b_2(T)\,z^2 + b_3(T)\,z^3 + \dots$$

1. Le développement du viriel

Gaz parfait de Boltzmann, rôle des statistiques quantiques, principe général

2. Le deuxième coefficient du viriel b_2

Interactions en onde s, cas d'une résonance de diffusion

3. Le gaz de Fermi dans le régime unitaire

Coefficients $b_3,\ b_4, \dots$

Le gaz parfait classique (statistique de Boltzmann)

Pas de corrélations entre particules : $Z_N = \frac{1}{N!} Z_1^N$ $\qquad \frac{1}{N!}$: paradoxe de Nernst

Fonction de partition grand-canonique : $Z_{\mathrm{GC}} = \sum_{N=0}^{+\infty} z^N Z_N = \sum_N \frac{(zZ_1)^N}{N!} = \exp(zZ_1)$ $\qquad z \equiv \mathrm{e}^{\mu / k_{\mathrm{B}} T}$

Grand potentiel : $\Omega(T, L^3, \mu) = -\, k_{\mathrm{B}} T \log(Z_{\mathrm{GC}}) = -\, k_{\mathrm{B}} T \, zZ_1$ avec $Z_1 = \frac{L^3}{\lambda^3}$

Pression : $P = -\frac{\Omega}{L^3} \longrightarrow \frac{P}{k_{\mathrm{B}} T / \lambda^3} = z$

Densité spatiale : $n = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_T \longrightarrow n\lambda^3 = z$

$$\left.\begin{aligned} \frac{P}{k_{\mathrm{B}} T / \lambda^3} &= z \\ n\lambda^3 &= z \end{aligned}\right\} \; P = n k_{\mathrm{B}} T$$

Développement du viriel : $b_1(T) = 1, \qquad b_j(T) = 0$ pour $j \geq 2.$

Les gaz parfaits quantiques


Prise en compte de l'indiscernabilité entre particules

$$\Omega = -\,k_\mathrm{B}T\,z\sum_j \mathrm{e}^{-E_j/k_\mathrm{B}T} \longrightarrow \begin{cases} \Omega = k_\mathrm{B}T\displaystyle\sum_j \log\left(1 - z\,\mathrm{e}^{-E_j/k_\mathrm{B}T}\right) \\ \Omega = -\,k_\mathrm{B}T\displaystyle\sum_j \log\left(1 + z\,\mathrm{e}^{-E_j/k_\mathrm{B}T}\right) \end{cases}$$

classique (Boltzmann)

Bosons polarisés

Fermions polarisés

Développement en série entière : $\log(1-x) = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^j}{j}$

$$\frac{P\lambda^3}{k_\mathrm{B}T} = z \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{P\lambda^3}{k_\mathrm{B}T} = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j^{5/2}}\,z^j \\ \dfrac{P\lambda^3}{k_\mathrm{B}T} = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j^{5/2}}\,z^j \end{cases}$$

classique

$$b_j(T) = \frac{1}{j^{5/2}}$$

$$b_j(T) = \frac{(-1)^{j+1}}{j^{5/2}}$$

Le principe du développement du viriel en présence d'interactions

On cherche un développement pour la pression en puissances de la fugacité

$$\frac{P\lambda^3}{k_B T} = \sum_{j=1}^{\infty} b_j(T)\, z^j$$

Pour calculer $b_j(T)$, on identifie terme à terme les deux expressions

$$P = \frac{k_B T}{\lambda^3}\left(b_1(T)\, z + b_2(T)\, z^2 + \dots\right) \quad \xleftrightarrow{P = -\Omega/L^3} \quad \Omega = -k_B T\ \log\left(1 + zZ_1 + z^2 Z_2 + \dots\right)$$

On trouve :

$$\begin{cases} b_1(T) = 1 \\ b_2(T) = \dfrac{1}{Z_1}\left(Z_2 - \dfrac{Z_1^2}{2}\right) \\ b_3(T) = \dfrac{1}{Z_1}\left(Z_3 - Z_1 Z_2 + \dfrac{Z_1^3}{3}\right) \end{cases}$$

nécessite Z_2 : résolution du problème à deux corps

nécessite Z_3 : résolution du problème à trois corps

Plan du cours

1. Le développement du viriel

2. Le deuxième coefficient du viriel $b_2(T)$

Interactions en onde s entre deux particules de masse m, par exemple deux bosons identiques

Rappel : pas d'interaction en onde s entre deux fermions polarisés

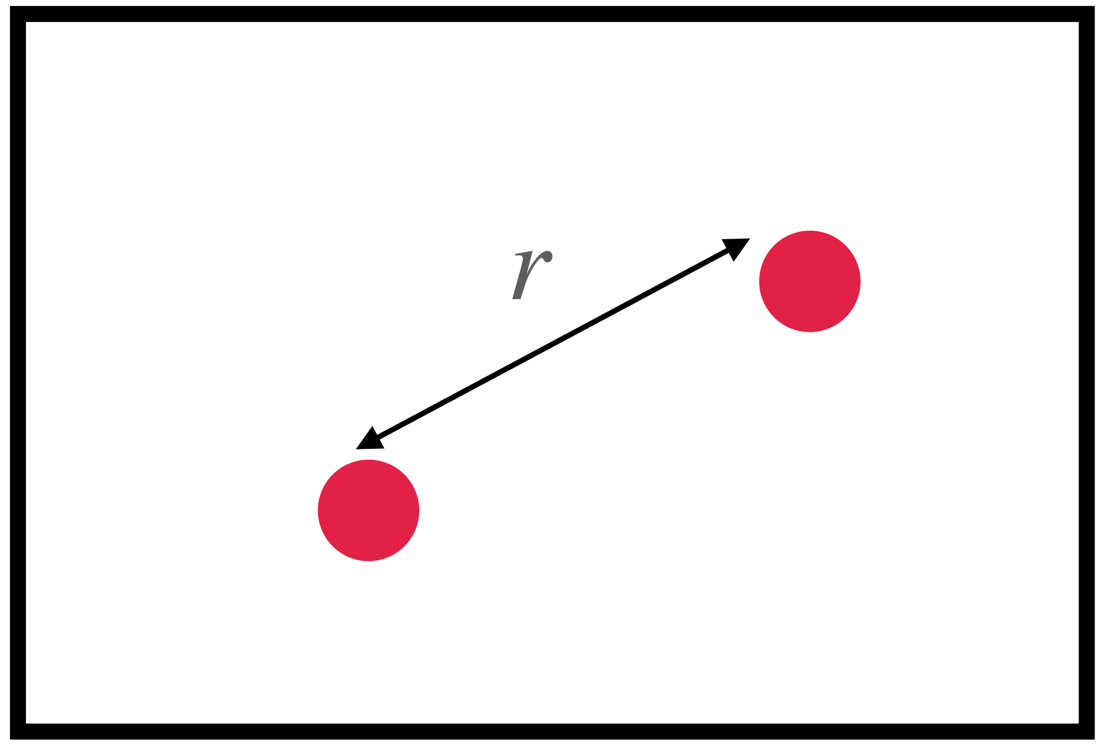
Formalisme général de Beth & Uhlenbeck appliqué aux gaz froids

3. Le gaz de Fermi dans le régime unitaire

Coefficients $b_3,\ b_4,\ \ldots$

Séparation “centre de masse - variable relative”

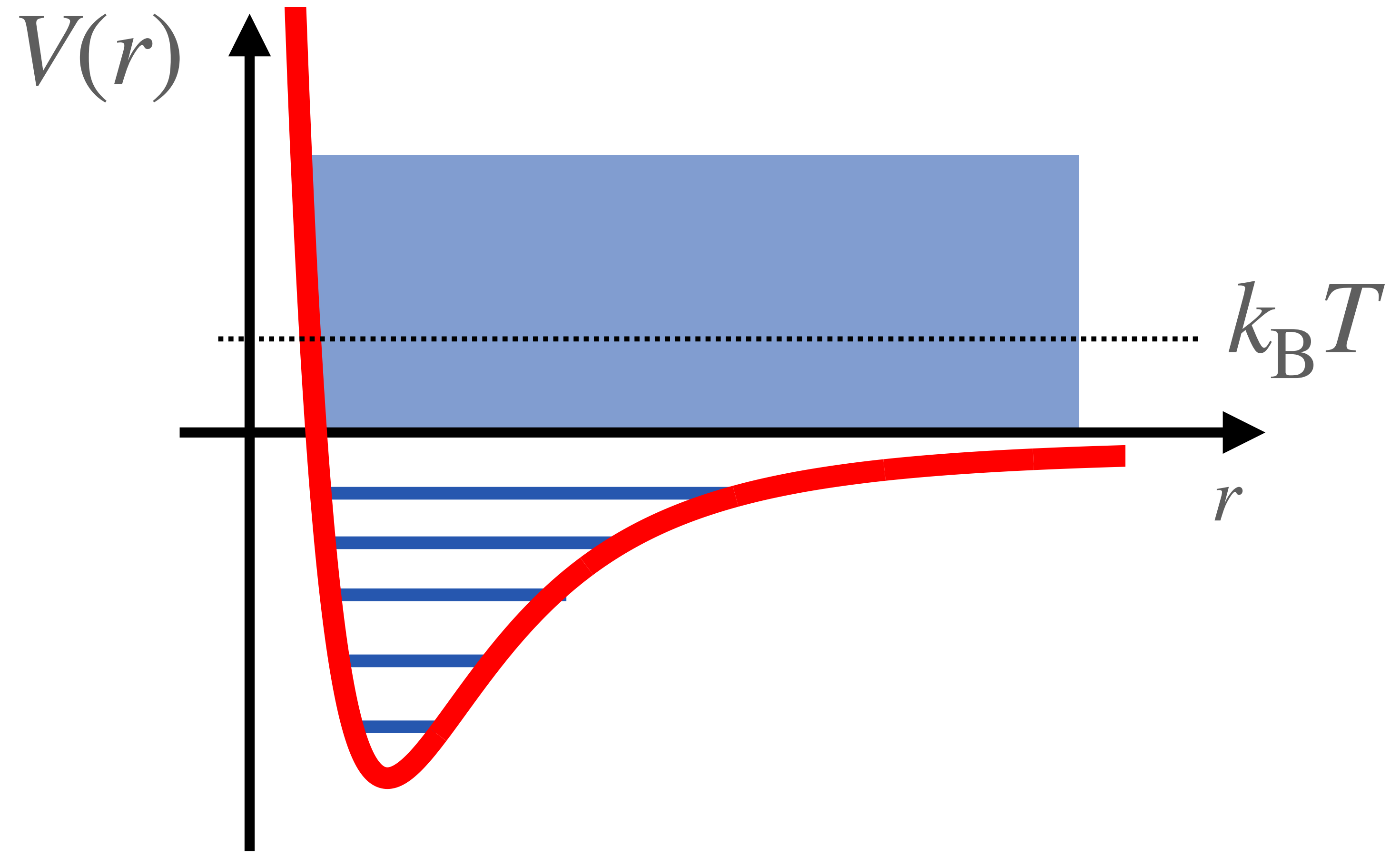
Fonction de partition pour le problème à deux corps



$$Z_2 = \sum_j \mathrm{e}^{-E_j^{(2)}/k_\mathrm{B}T} = Z_\mathrm{CdM} \times Z_\mathrm{rel}$$

Z_CdM : particule libre de masse $2m$ $\quad\rightarrow\quad$ $Z_\mathrm{CdM} = 2^{3/2}\, Z_1$

Z_rel : somme sur tous les états (libres ou liés) du mouvement relatif, masse réduite $m/2$

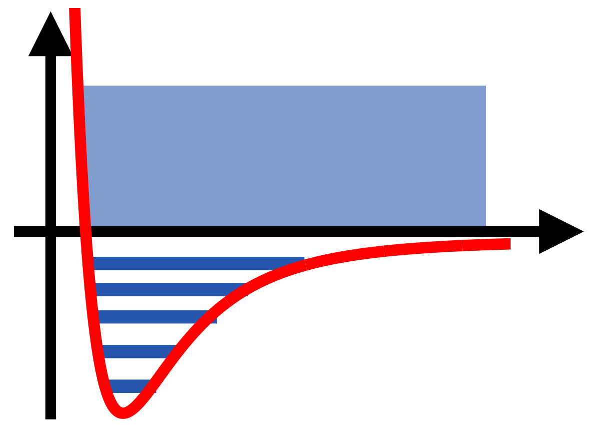


Deux cas limites intéressants

Interaction en onde s loin de résonance : $|a| \ll \lambda$

Interaction en onde s résonante : $|a| = \infty$

Interaction en onde s loin de résonance $(|a| \ll \lambda)$



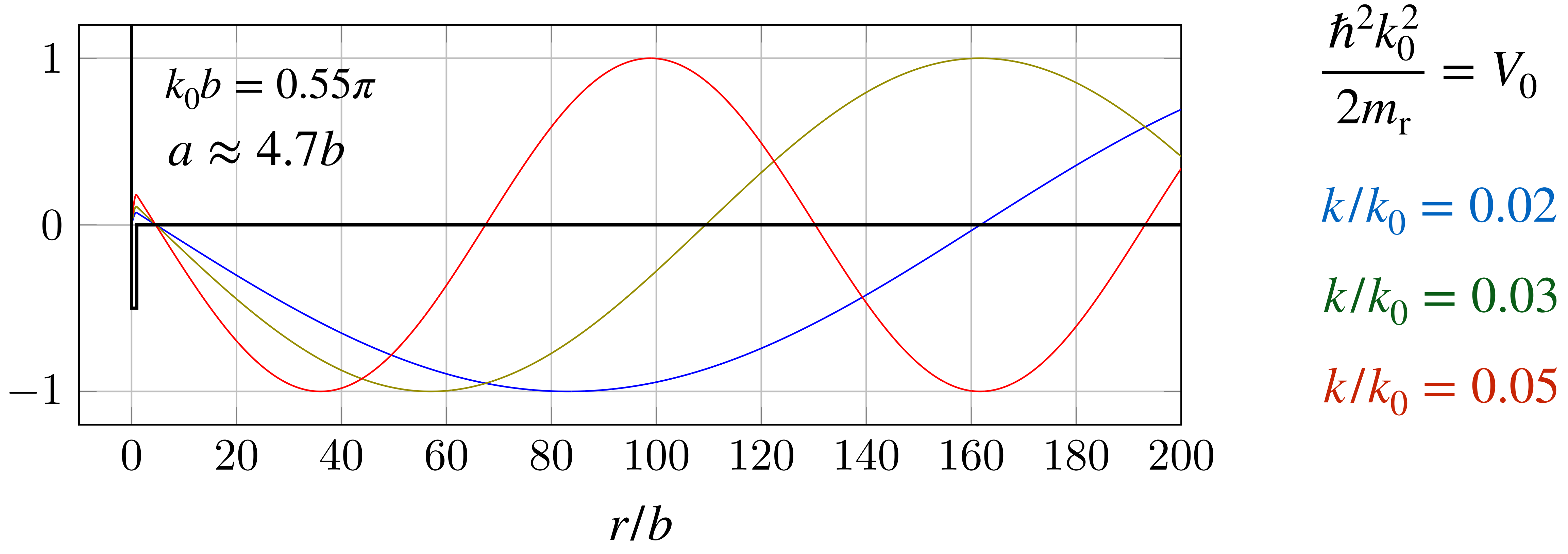
Energie de liaison des états liés $\gg k_\mathrm{B}T$

On néglige leur contribution : les dimères éventuellement formés quittent immédiatement le piège

Etats de diffusion contribuant à la fonction de partition : nombre d'onde $k \sim 1/\lambda \longrightarrow \quad ka \ll 1$

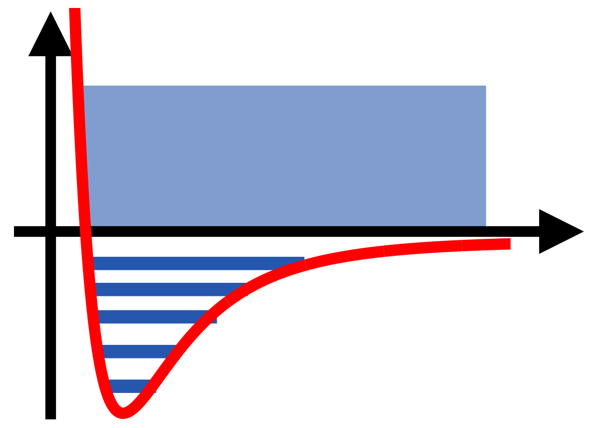
Etat stationnaire de diffusion $\psi(r) \quad : \quad u(r) = r\,\psi(r) \;\sim\; \sin\left[k(r-a)\right]$ *pour* $r \gg b$

Exemple d'un puits carré de profondeur V_0 :



La présence d'un noeud imposé en $r = a$ vient modifier la densité d'états

Interaction en onde s loin de résonance (bosons)



Fonction de partition pour la variable relative : $Z^{\mathrm{rel}}_{\ell=0} = \sum_n \mathrm{e}^{-\,\hbar^2 k_n^2\,/\,(mk_{\mathrm{B}}T)}$

Condition de quantification des nombres d'onde k_n (sphère de rayon R):

$$u(r) \sim \sin\left[k(r-a)\right] \qquad \Rightarrow \qquad k_n = n\frac{\pi}{R-a}$$

et donc : $$Z^{\mathrm{rel}}_{\ell=0} = \frac{R-a}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\hbar^2k^2/(mk_{\mathrm{B}}T)}\,\mathrm{d}k = \frac{1}{\sqrt{2}\,\lambda}\,(\,R\;-\;a\,)$$

terme présent sans interactions

terme dû aux interactions

Finalement : $$\left.\begin{aligned} &Z_2 = Z_{\mathrm{CdM}} \times Z_{\mathrm{rel}} \\ &b_2(T) = \frac{1}{Z_1}\left(Z_2 - \frac{Z_1^2}{2}\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad b_2(T) = \frac{1}{2^{5/2}} - \frac{2a}{\lambda}$$

Retour vers la thermodynamique

$$b_2^{\text{bosons}}(T) = \frac{1}{2^{5/2}} - \frac{2a}{\lambda}$$
$$b_2^{\text{fermions}}(T) = -\frac{1}{2^{5/2}}$$

Grand potentiel du gaz : $\Omega(L^3, T, \mu) \approx -k_\mathrm{B} T \, \frac{L^3}{\lambda^3} \left[z + b_2(T) z^2\right]$

On en déduit (après quelque calculs) l'énergie interne à l'ordre 2 en z :

$$E = \Omega + TS + \mu N \approx N k_\mathrm{B} T \left[\frac{3}{2} + n\lambda^3 \left(T \frac{\mathrm{d}b_2}{\mathrm{d}T} - \frac{3b_2}{2}\right)\right]$$

- **Terme lié aux statistiques quantiques :** $\pm 2^{-5/2}$

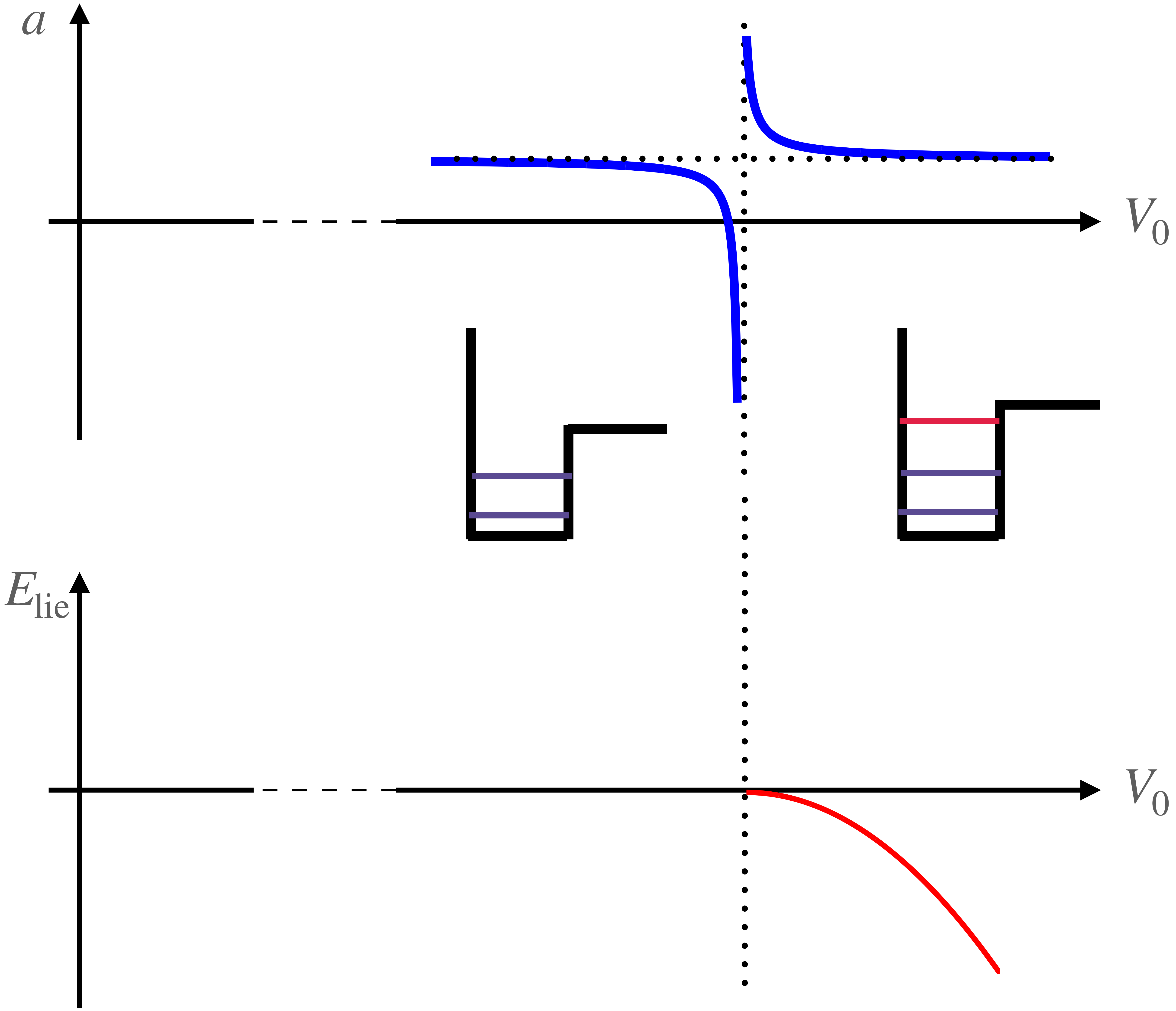
  Augmentation de la pression pour des fermions à n et T fixées (Pauli)

- **Terme lié aux interaction en onde s pour des bosons :** $-2a/\lambda$

$$\Delta E^{(\text{int.})} = gnN \quad \text{avec} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$$

(facteur 2 par rapport à l'énergie d'un condensat pur, lié à l'effet Hanbury-Brown & Twiss)

Interaction en onde s résonnante



Résonance de diffusion à énergie nulle

Se produit quand une (légère) modification du potentiel d'interaction conduit à l'apparition d'un nouvel état lié

- juste avant l'apparition du nouvel état :

  longueur de diffusion a grande et négative

- juste après l'apparition du nouvel état :

  longueur de diffusion a grande et positive

  Energie de l'état faiblement lié:

$$E_{\text{lie}} \approx -\frac{\hbar^2}{ma^2}$$

L'analyse de la collision à résonance

Ho & Mueller, 2004

Fonction d'onde radiale réduite pour le problème à deux corps : $u(r) \approx \sin\left[kr + \delta_0(k)\right]$ pour $r \gg b$

La collision est caractérisée par le déphasage en onde *s*, $\delta_0(k)$, déduit de $\tan[\delta_0(k)] = -ka$

Condition aux limites dans une sphère de rayon R : $k_n R + \delta_0(k_n) = n\pi,$ n entier positif

Intervalle entre deux valeurs de k : $(k_{n+1} - k_n)\left(R + \dfrac{\mathrm{d}\delta_0}{\mathrm{d}k}\right) = \pi$

Fonction de partition pour la variable relative :

$$Z^{\mathrm{rel}}_{\ell=0} = (\dots) + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\delta_0}{\mathrm{d}k}\mathrm{e}^{-\hbar^2k^2/mk_\mathrm{B}T}\ \mathrm{d}k \ + \ \left[\mathrm{e}^{-E_\mathrm{lie}/k_\mathrm{B}T}\right]$$

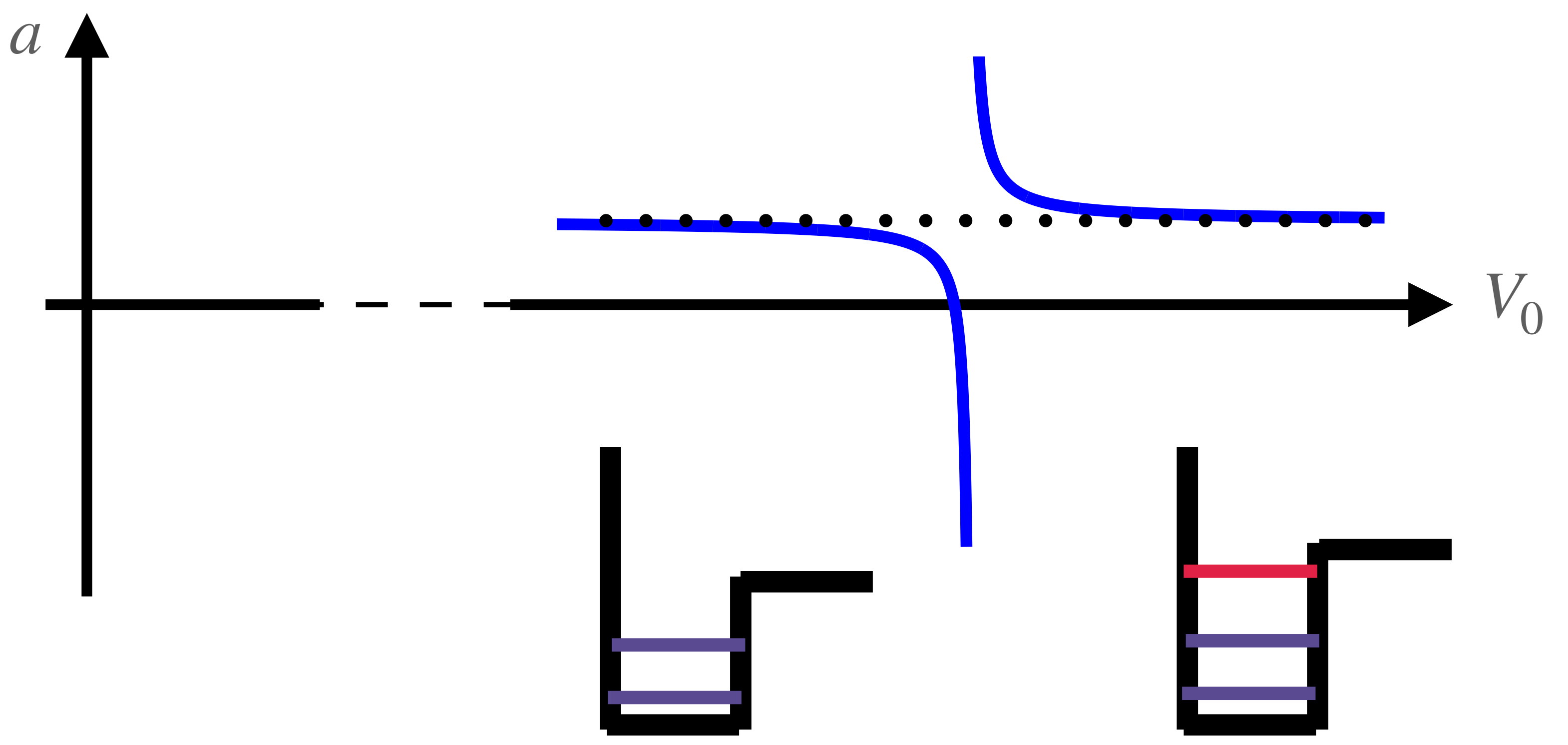
indépendant des interactions

états de diffusion

état faiblement lié (s'il existe)

Le coefficient $b_2(T)$ à résonance (bosons polarisés)

On trouve le même résultat de part et d'autre de la résonance



$$\left.\begin{array}{l} a \to -\infty \\ \\ a \to +\infty \end{array}\right\} \longrightarrow \qquad b_2^{(\mathrm{int})} = \sqrt{2}$$

ou encore : $$b_2 = \frac{1}{2^{5/2}} + \sqrt{2}$$

statistiques quantiques

interactions

à comparer au cas non résonnant : $$b_2 = \frac{1}{2^{5/2}} - \frac{2a}{\lambda}$$

Le coefficient b_2 est sans dimension et ne peut s'écrire que comme le rapport de deux longueurs

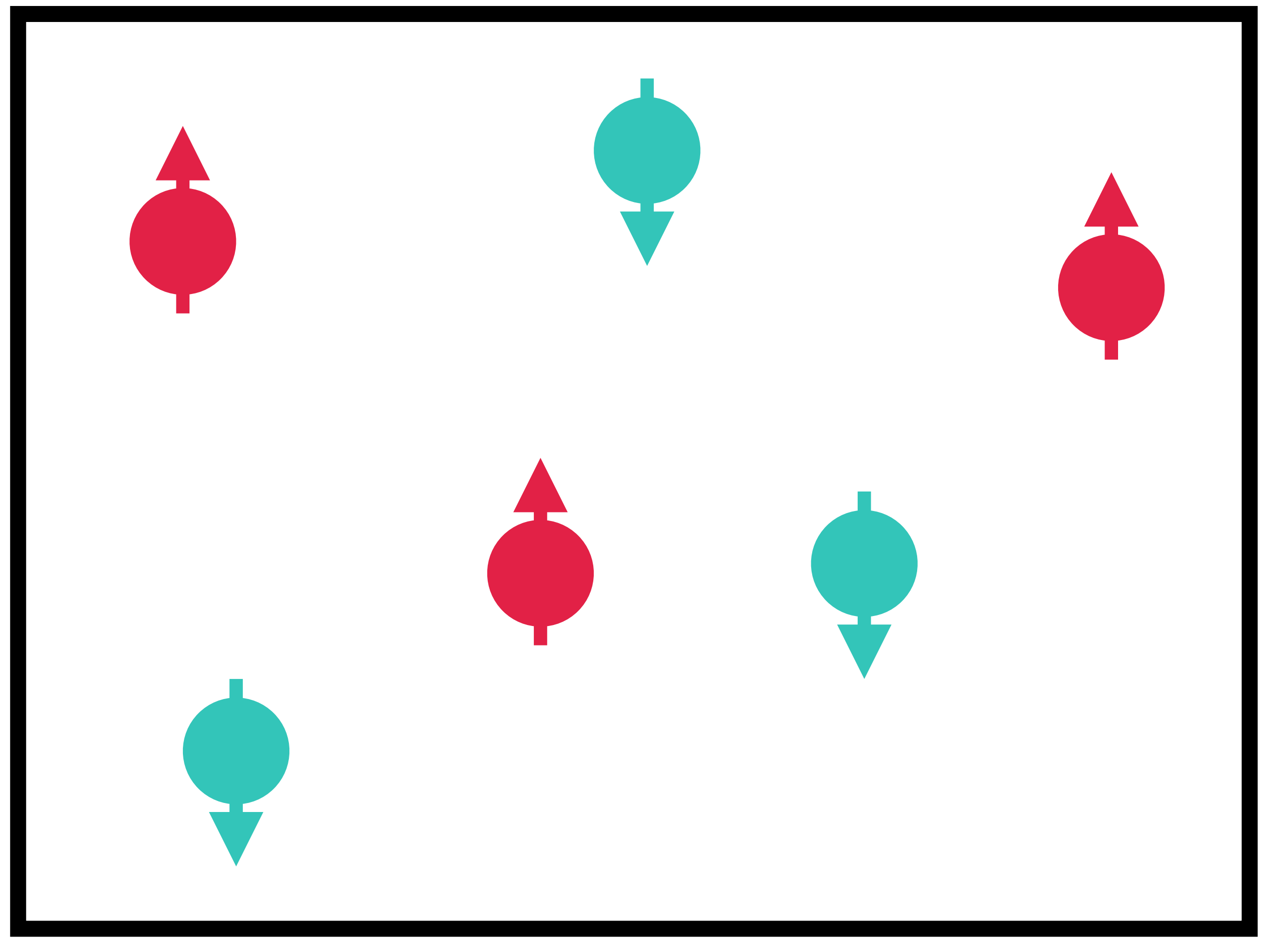
A résonance, pas d'échelle de longueur associée aux interactions : b_2 est alors un "pur" nombre

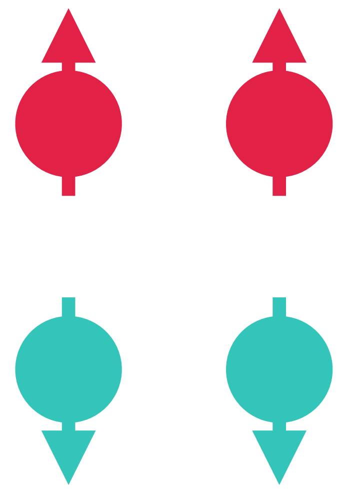
Plan du cours

1. Le développement du viriel

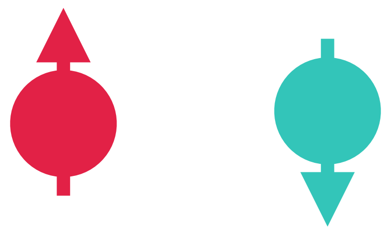
2. Le deuxième coefficient du viriel

3. Le gaz de Fermi de spin 1/2 unitaire





pas d’interaction en onde s



: interaction en onde s supposée résonnante : $|a| = +\infty$

Pourquoi le gaz de Fermi unitaire est intéressant

Le gaz de Fermi de spin 1/2 unitaire se rencontre dans plusieurs situations

- Etoiles à neutrons $a = 18$ fm $\gg r_0 = 2.8$ fm (portée effective)
- Plasma quarks-gluons
- Supraconducteurs à haute température critique

Régime unitaire : pas d'échelle de longueur liée aux interactions à deux corps ($|a| = \infty$)

Principe de Pauli : pas de longueur caractéristique additionnelle liée aux effets à trois corps ($\neq$ cas des bosons)

Invariance d'échelle : les coefficients b_j sont de purs nombres, indépendants de T

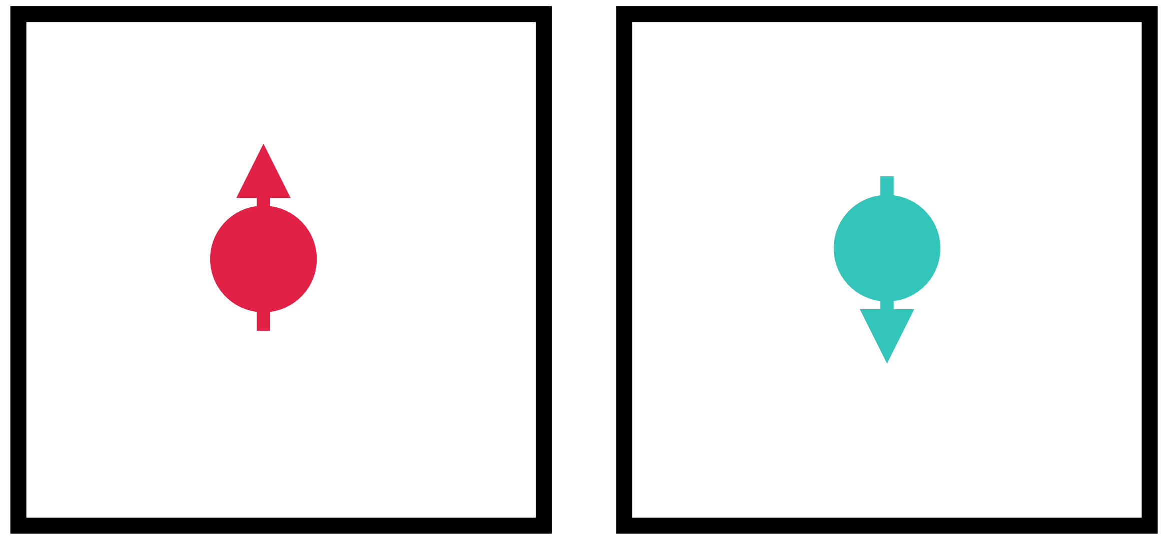
Gros efforts théoriques et expérimentaux au cours des 20 dernières années : b_3, b_4, b_5

Développement du viriel pour un gaz spineur

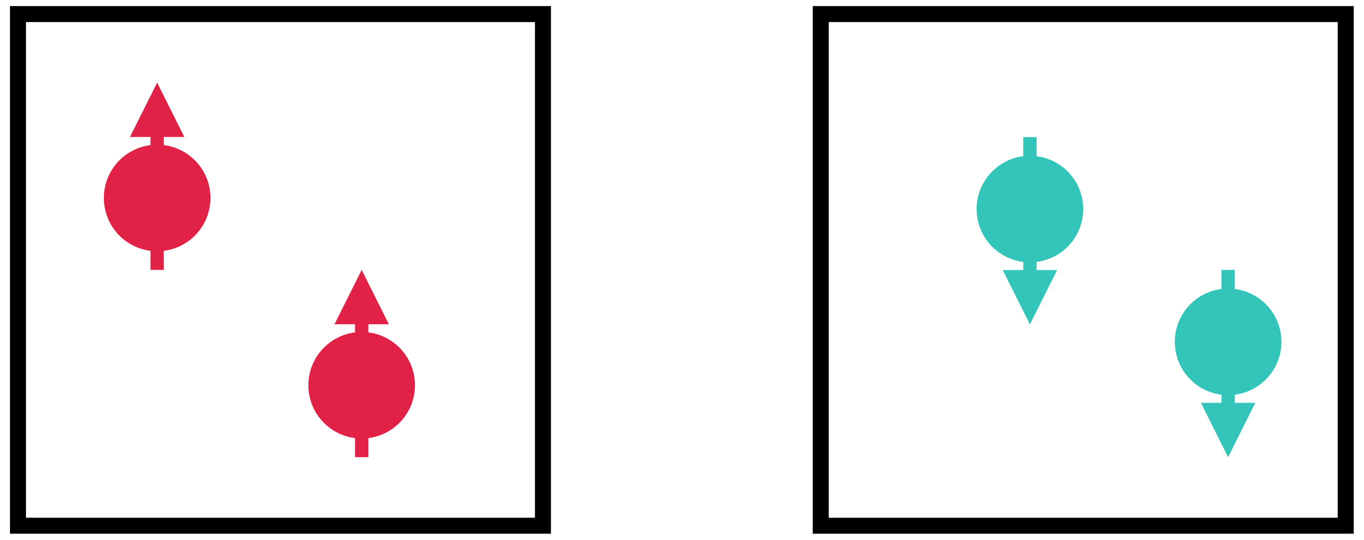
Deux composantes notées $\uparrow$ et $\downarrow$ (ou $+$ et $-$) $\longrightarrow$ Deux potentiels chimiques $\mu_\pm$

$$Z_{\mathrm{GC}} = \sum_{N_+,N_-} z_+^{N_+}\, z_-^{N_-}\, Z_{N_+,N_-} \qquad \Omega = -\,k_{\mathrm{B}}T\,\frac{L^3}{\lambda^3}\sum_{i,j} b_{i,j}\, z_+^i\, z_-^j$$

$$b_{1,0} = b_{0,1} = 1$$

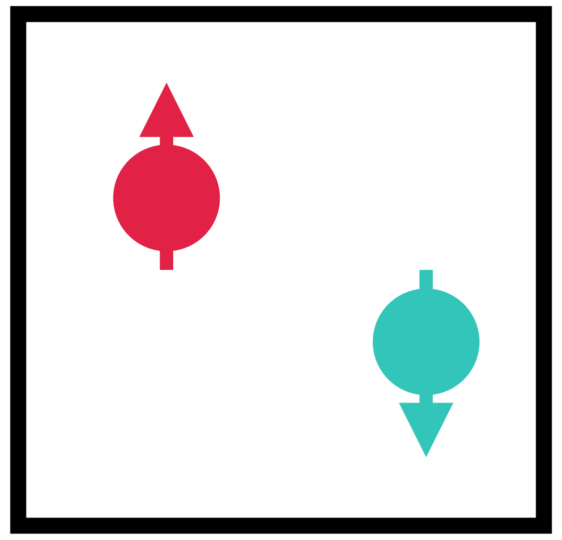


$$b_{2,0} = b_{0,2} = -\,\frac{1}{2^{5/2}}$$



pas d'interaction entre fermions polarisés,
uniquement des effets de statistique quantique

$$b_{1,1} = \sqrt{2}$$



Interaction supposée
résonnante

Le gaz de Fermi équilibré

$$\Omega = -\,k_\mathrm{B}T\,\frac{L^3}{\lambda^3}\sum_{i,j} b_{i,j}\, z_+^i\, z_-^j$$

Même nombre moyen de particules ↑ et ↓ : $\mu_+ = \mu_- \quad \Rightarrow \quad z_+ = z_- \equiv z$

Grand potentiel : $\Omega = -\,n_s\,k_\mathrm{B}T\,\dfrac{L^3}{\lambda^3}\left[\, b_1 z \;+\; b_2 z^2 \;+ \ldots\right]$

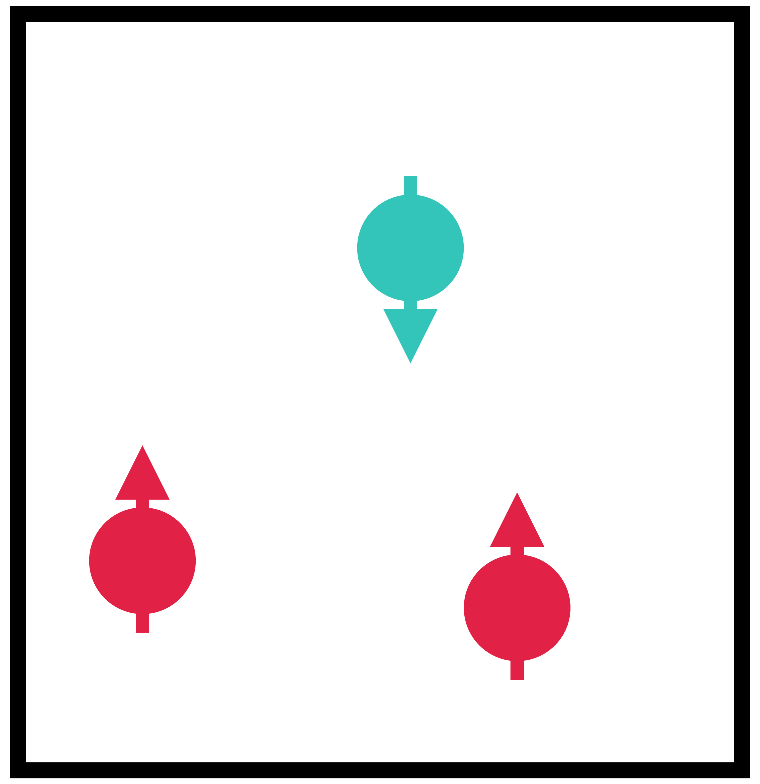
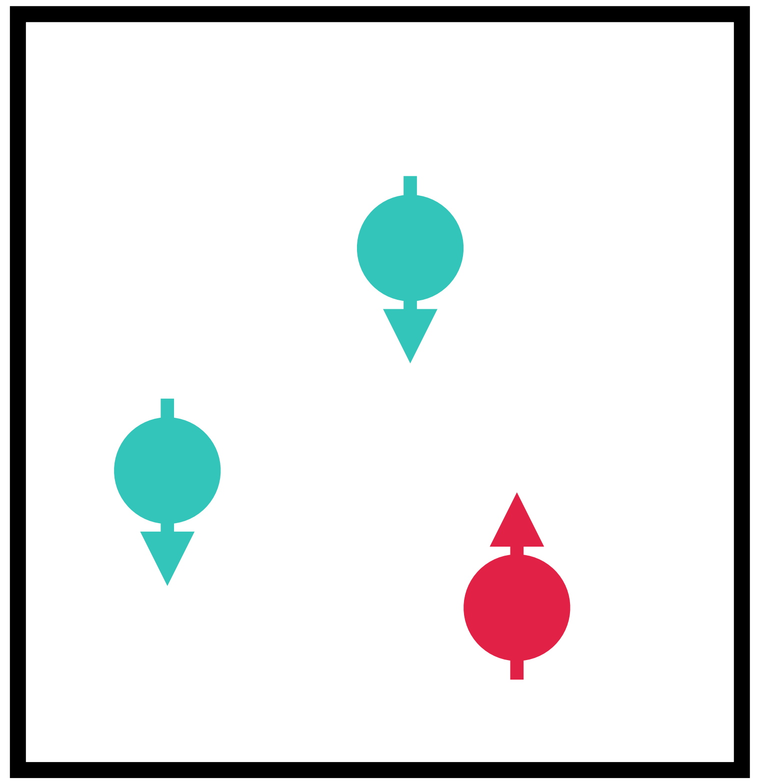
$n_s = 2$: nombre d'états de spin

avec les coefficients du développement :

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(b_{1,0} + b_{0,1}\right) = 1$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\left(b_{2,0} + b_{0,2} + b_{1,1}\right) \longrightarrow \quad b_2 = -\frac{1}{2^{5/2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Le coefficient b_3 à résonance

Il faut déterminer tous les états propres de :  ou de : 

Après une série de résultats contradictoires :

→ 2006 : Werner & Castin calculent quasi-analytiquement le spectre des 3 particules dans un piège harmonique

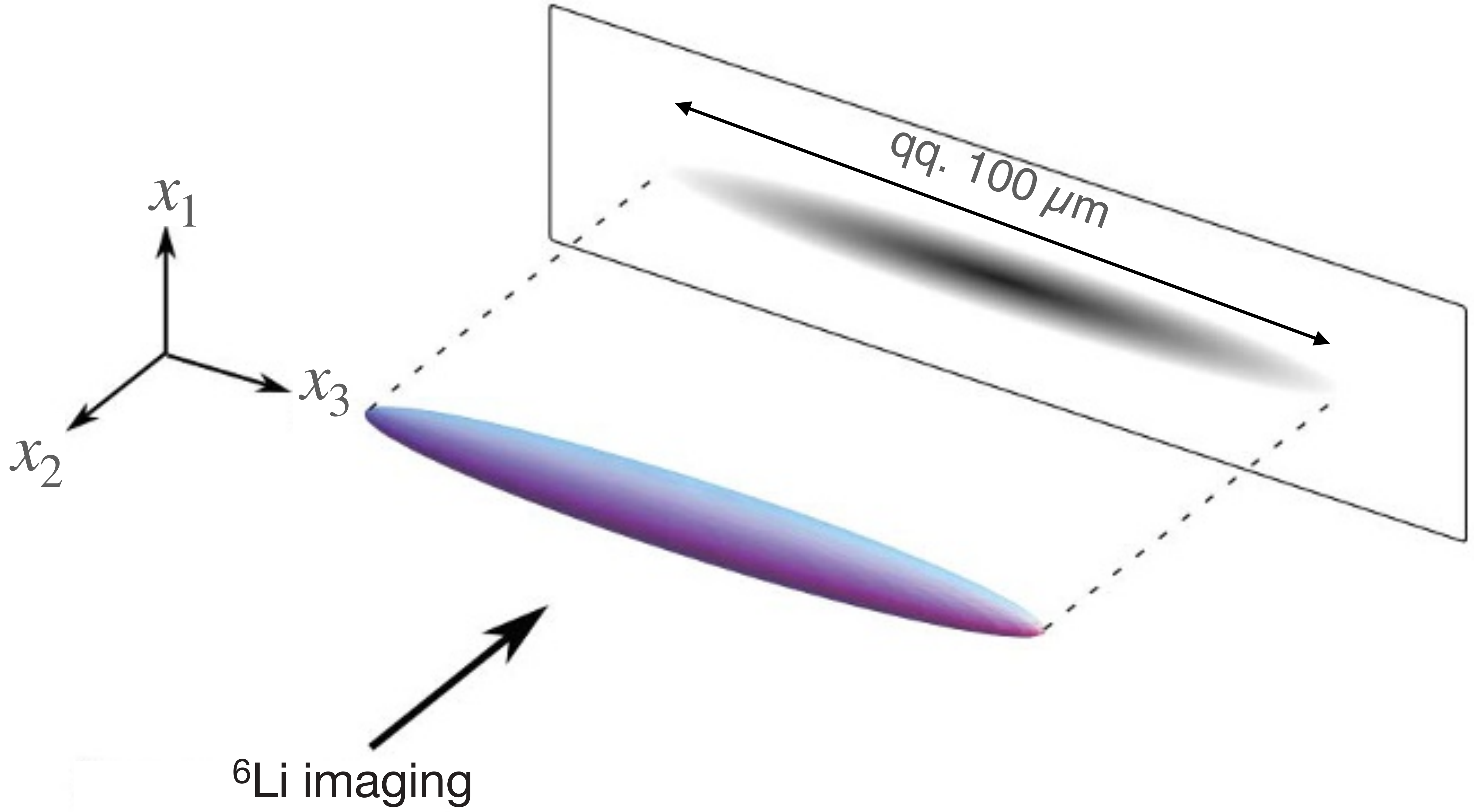
→ 2008 : Liu, Hu et al utilisent ce résultat et le connectent au cas de 3 particules non piégées

$$b_n = n^{3/2}\, b_{n,\mathrm{trap}} \qquad b_3 = \frac{1}{3^{5/2}} - 0.3551\ldots \; = -0.2910\ldots$$

Résultats expérimentaux sur le gaz de Fermi unitaire

2009-10 : groupe de l'ENS (Chevy-Salomon) sur ^{6}Li, résonance de Fano-Feshbach à 834 G

10^5 atomes confinés dans un piège harmonique à symétrie cylindrique (T de 0.15 à 1.3 μK)



Mesure de la densité par absorption d'un faisceau sonde

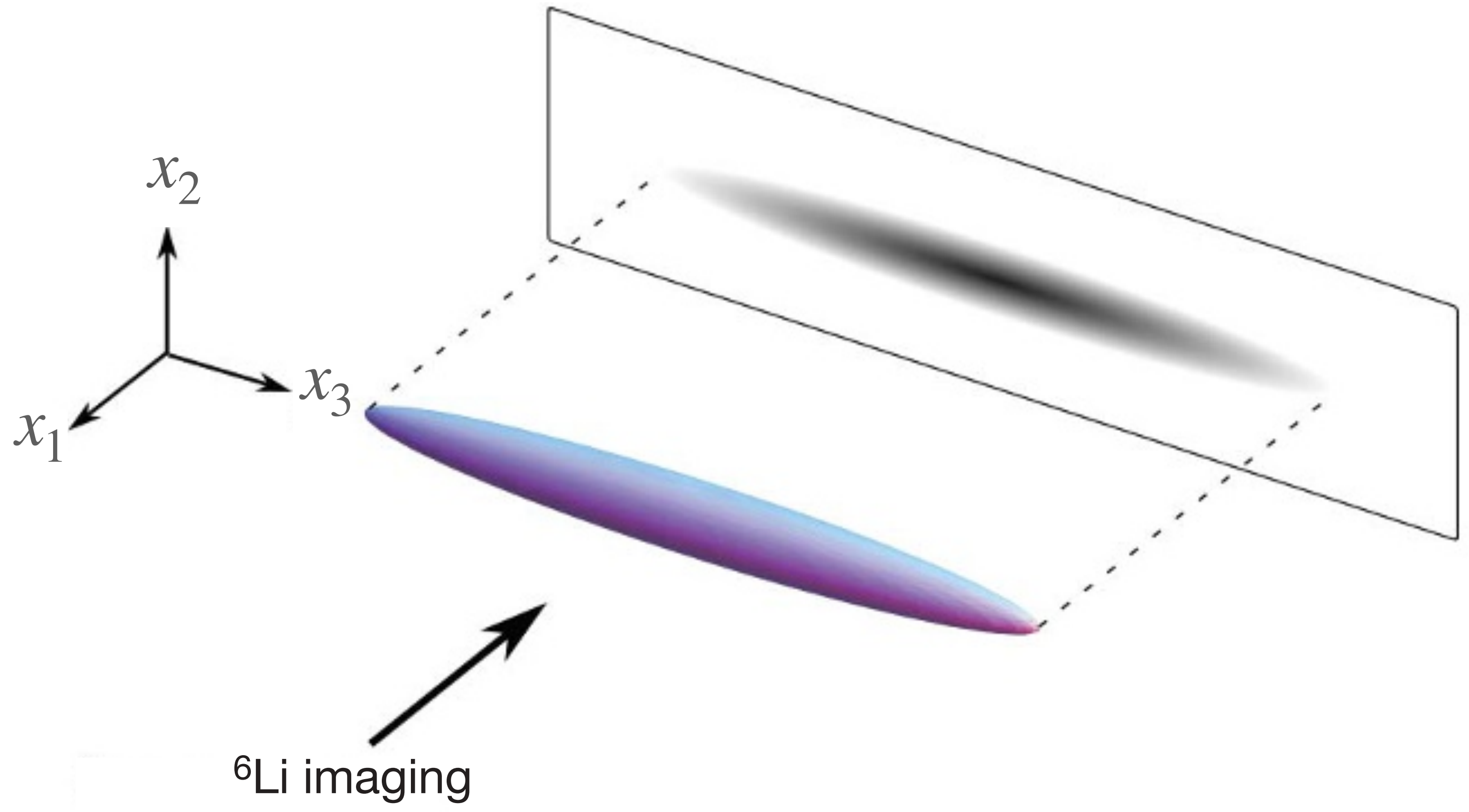
$$\bar{n}(x_3) = \int_0^\infty n(x_1, x_2, x_3)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2$$

Directement reliée à la pression !

Ho & Zhou, Nascimbene

Lien entre densité intégrée $\bar{n}(x_3)$ et pression P

Passage en coordonnées cylindriques :



$$\bar{n}(x_3) = 2\pi \int_0^\infty n(r, x_3)\; r\; \mathrm{d}r \qquad\qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

- Relation thermodynamique :

$$n_+ = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu_+}\right)_{T,\mu_-} \xrightarrow[\text{équilibré}]{\text{gaz}} n = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_T$$

- Approximation de densité locale dans le piège harmonique de fréquence transverse ω :

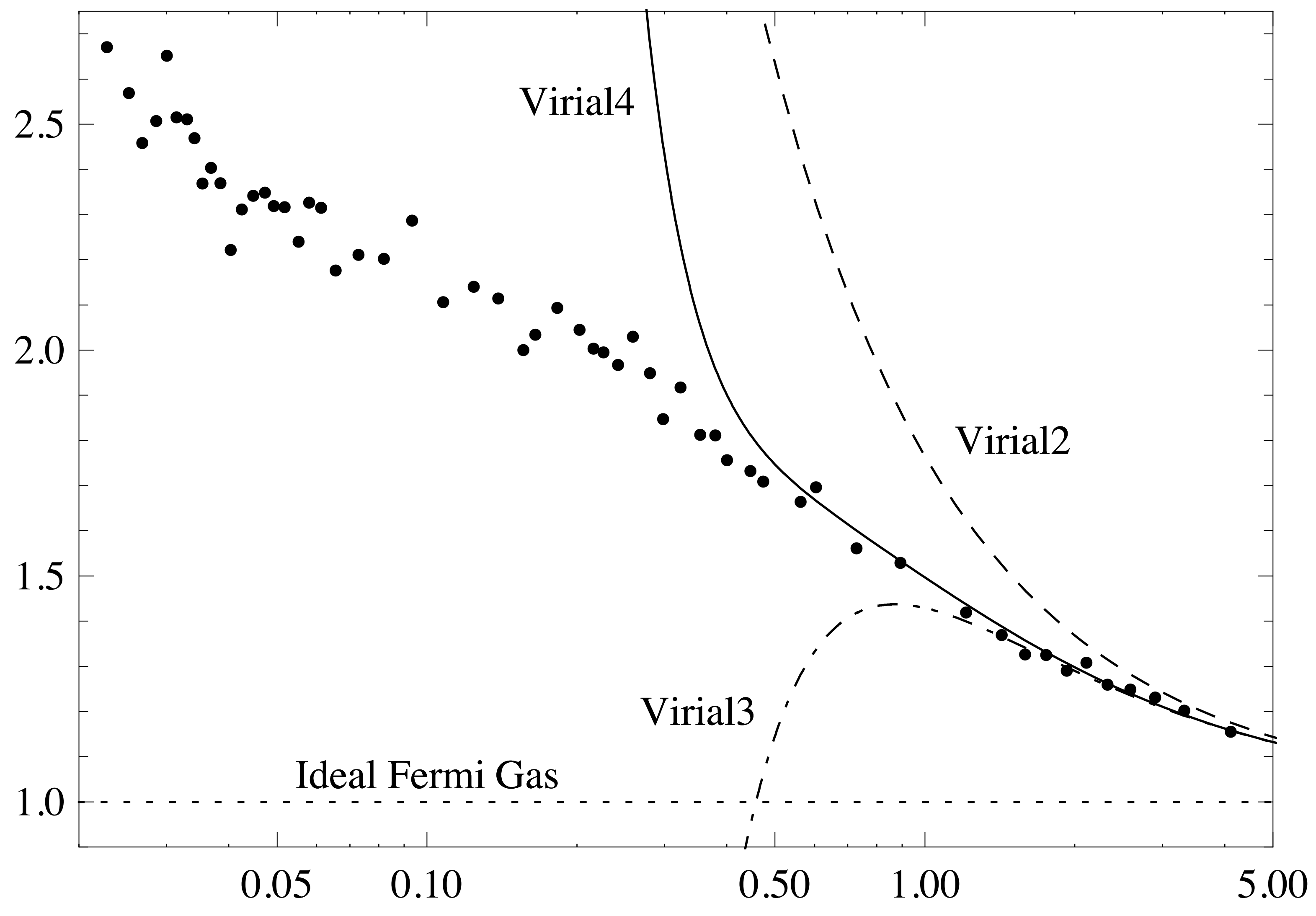
$$\mu(\boldsymbol{x}) = \mu(0{,}0{,}x_3) - V(r) \longrightarrow \mathrm{d}\mu = -\,\omega^2 r\; \mathrm{d}r$$

dont on déduit : $\bar{n}(x_3) = \dfrac{2\pi}{\omega^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{\mu(x_3)} \left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_T \mathrm{d}\mu = \frac{2\pi}{\omega^2} P[T, \mu(x_3)]$

Résultats du groupe de l'ENS en 2010

figures : S. Nascimbene, thèse

$$h = \frac{P}{P_{\text{ideal}}}$$



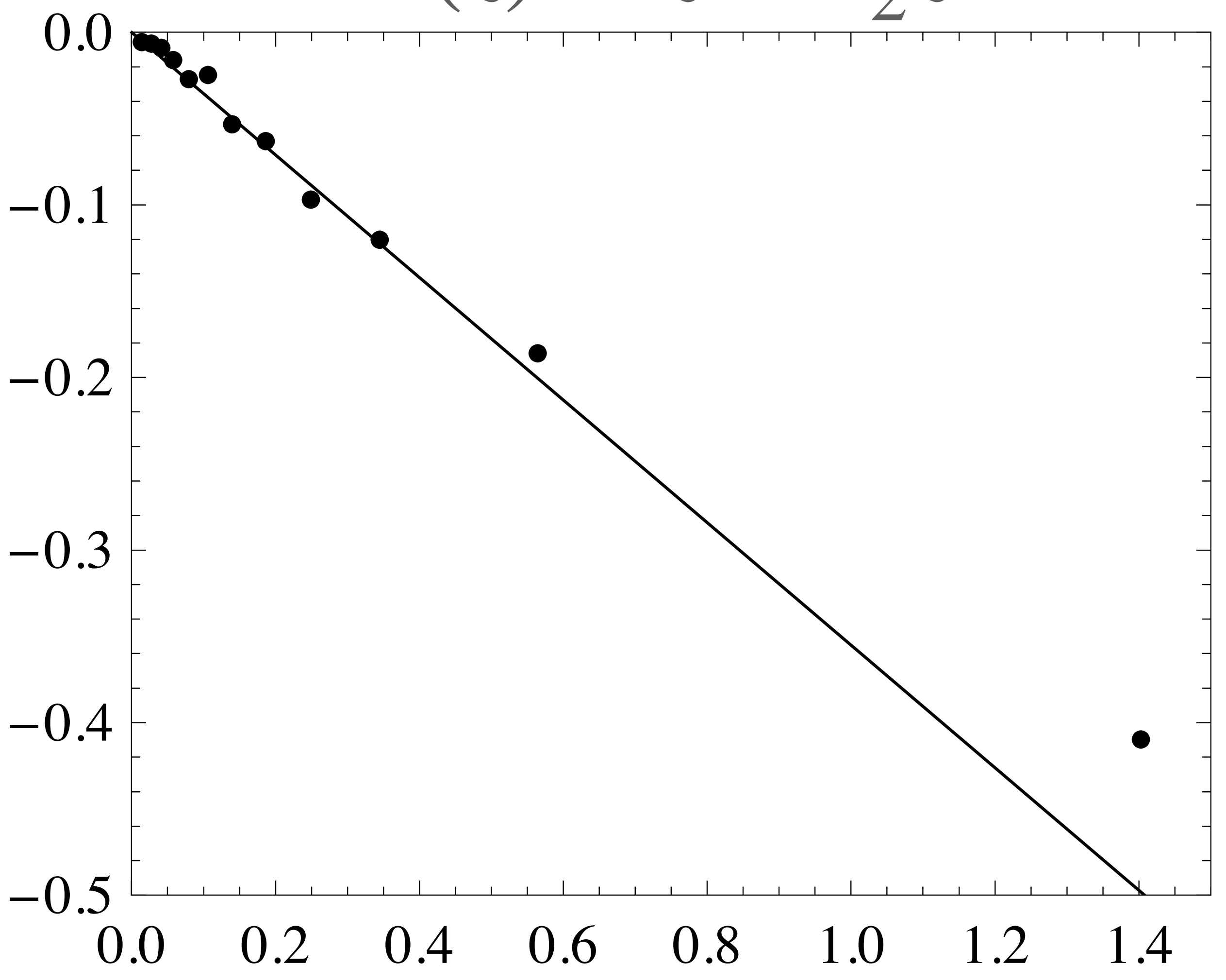
$$\zeta = 1/z$$

$$h(z) = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + \ldots$$

On suppose connus : $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = -\dfrac{1}{2^{5/2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Détermination de b_3

$$h(z) - z - b_2 z^2$$



$$z^3$$

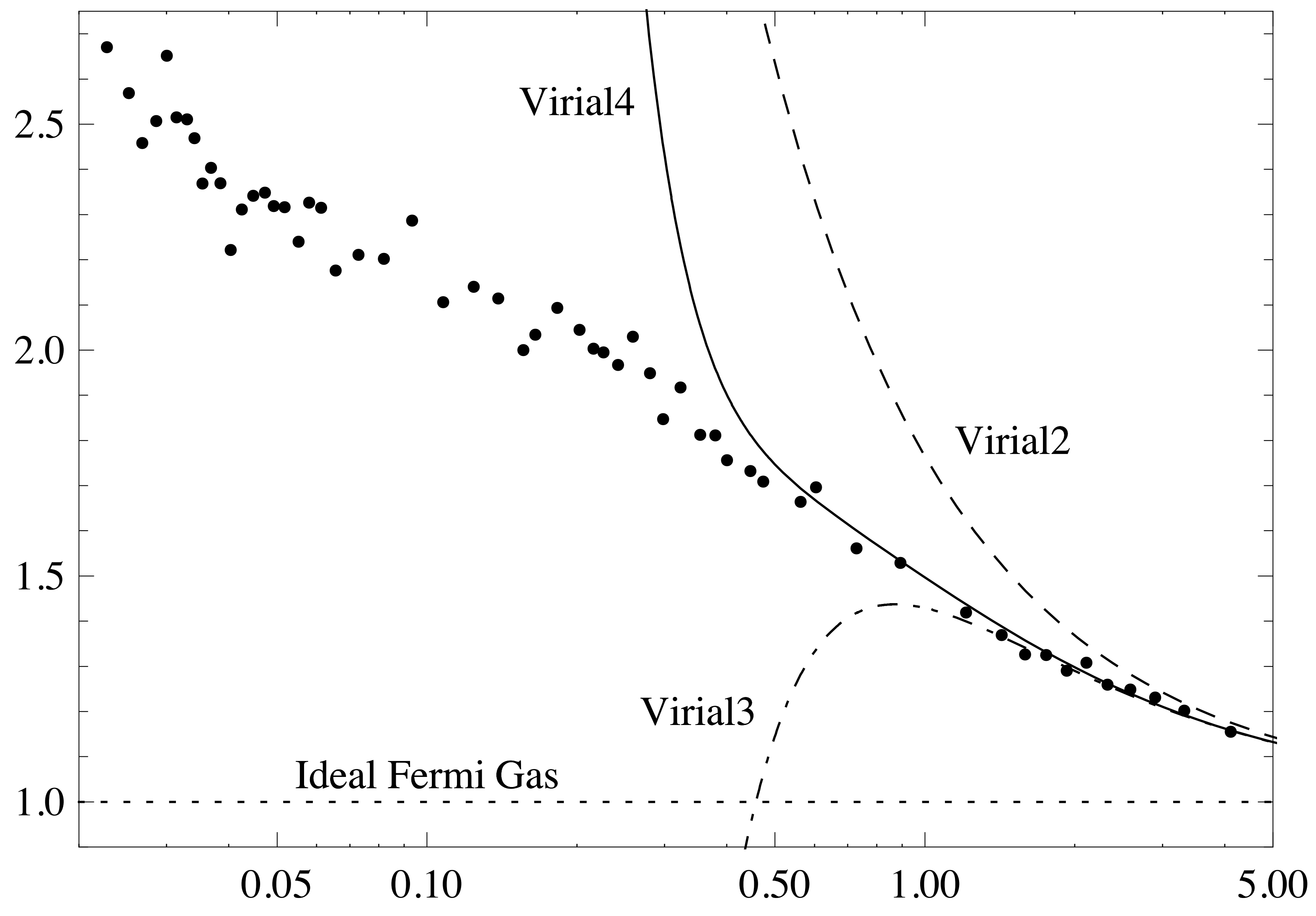
compatible avec

$$b_3 = \frac{1}{3^{5/2}} - 0.3551 = -0.2910$$

Résultats du groupe de l'ENS en 2010 (suite)

S. Nascimbene, thèse

$$h = \frac{P}{P_{\text{ideal}}}$$



$$\zeta = 1/z$$

$$h(z) = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + \dots$$

Si on suppose connus : $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = -\dfrac{1}{2^{5/2}} + \dfrac{1}{2^{1/2}} \\ b_3 = -0.2910 \end{cases}$

on déduit : $b_4 = 0.065\,(15)$

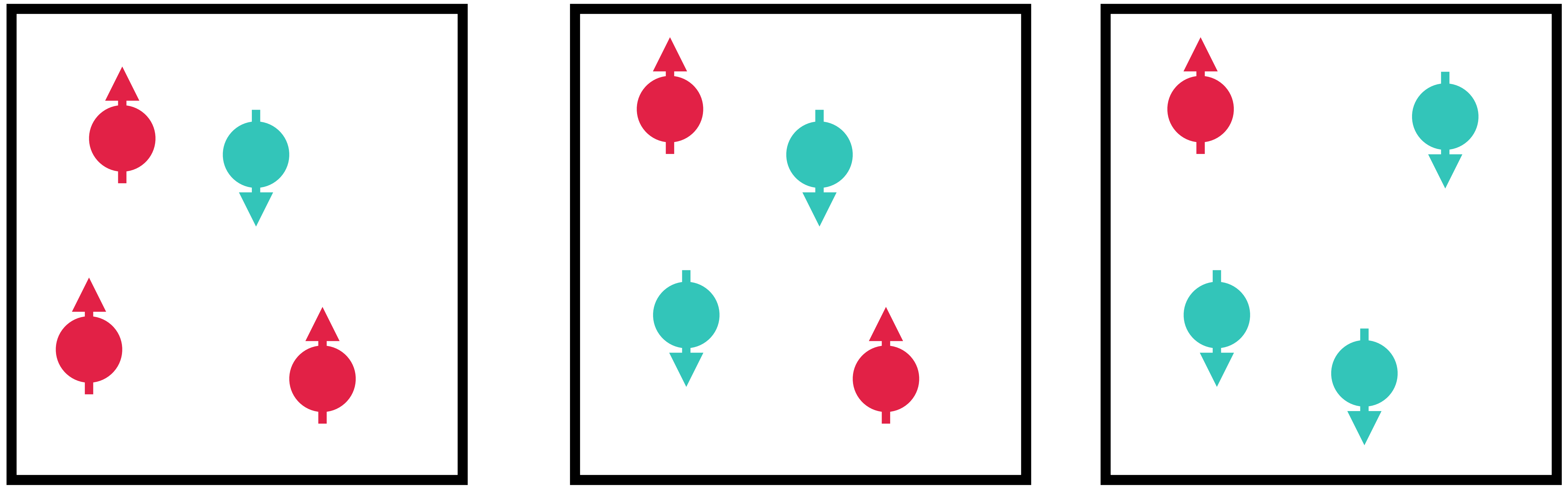
pas de prédiction théorique en 2010

Résultat confirmé en 2012 au MIT (groupe de M. Zwierlein)

Au delà des effets à trois corps

article de revue de Endo, 2020

Les prédictions pour b_4 (régime unitaire)



- 2012, Rakshit et al : $b_4 = -0.047(4)$
- 2015, Ngampruetikorn et al : $b_4 = +0.03$
- 2016, Endo & Castin : $b_4 = +0.031(1)$ [utilise une conjecture non prouvée à ce jour]
- 2016, Yan & Blume : $b_4 = +0.047(18)$
- 2020, Hou & Drut : $b_4 = +0.031$ [confirme le résultat de Endo & Castin + analyse critique des autres]

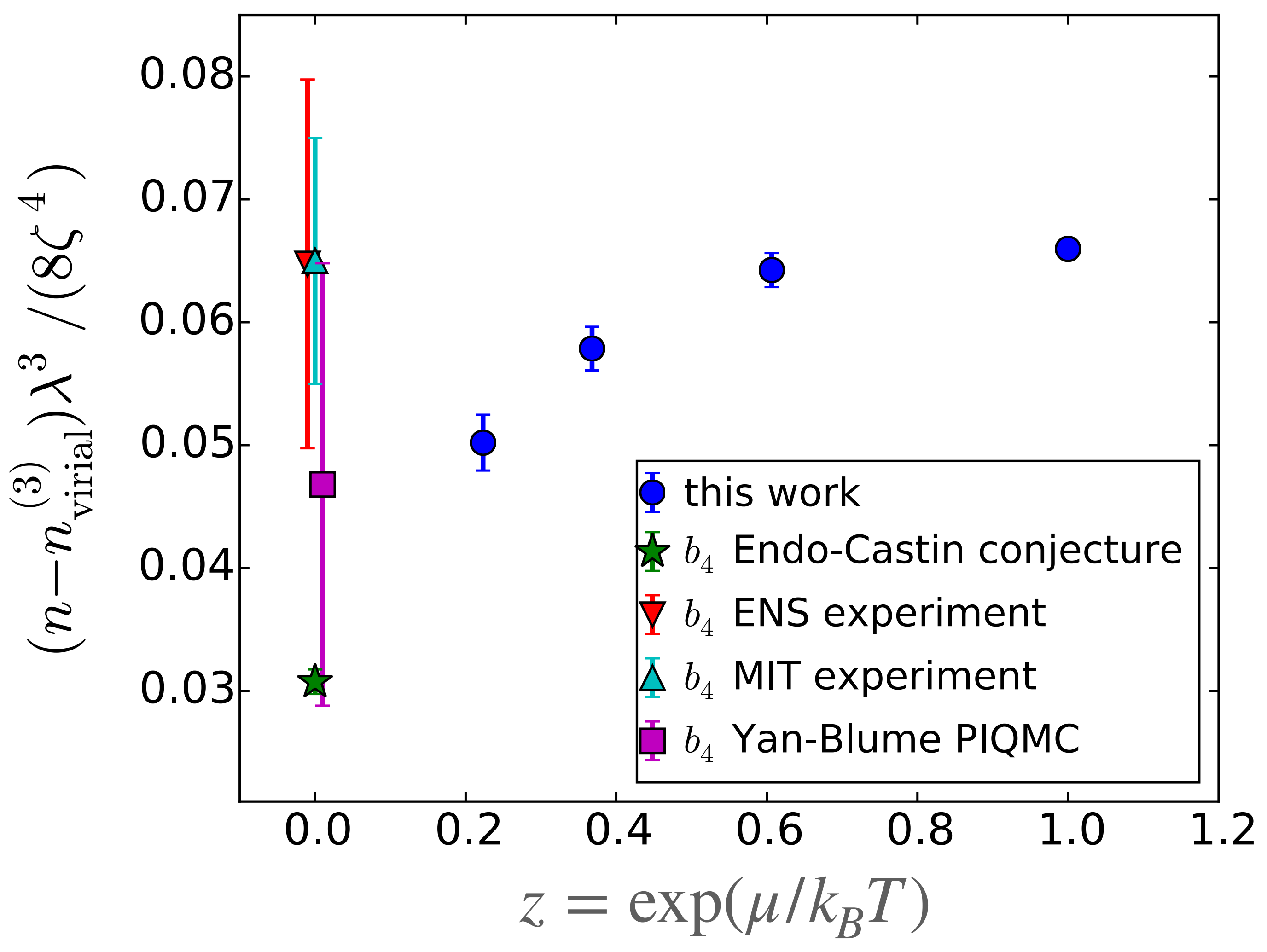
Différence significative avec le résultat expérimental ENS-MIT : $b_4^{(\mathrm{exp})} = 0.065(15)$

Explications possibles du désaccord théorie - expérience pour b_4

Endo (2020) : passage délicat du piège harmonique au cas uniforme

La variation avec ω de $b_4(\omega)$ n'est pas monotone

Calcul Monte Carlo diagrammatique [Rossi et al, 2018]



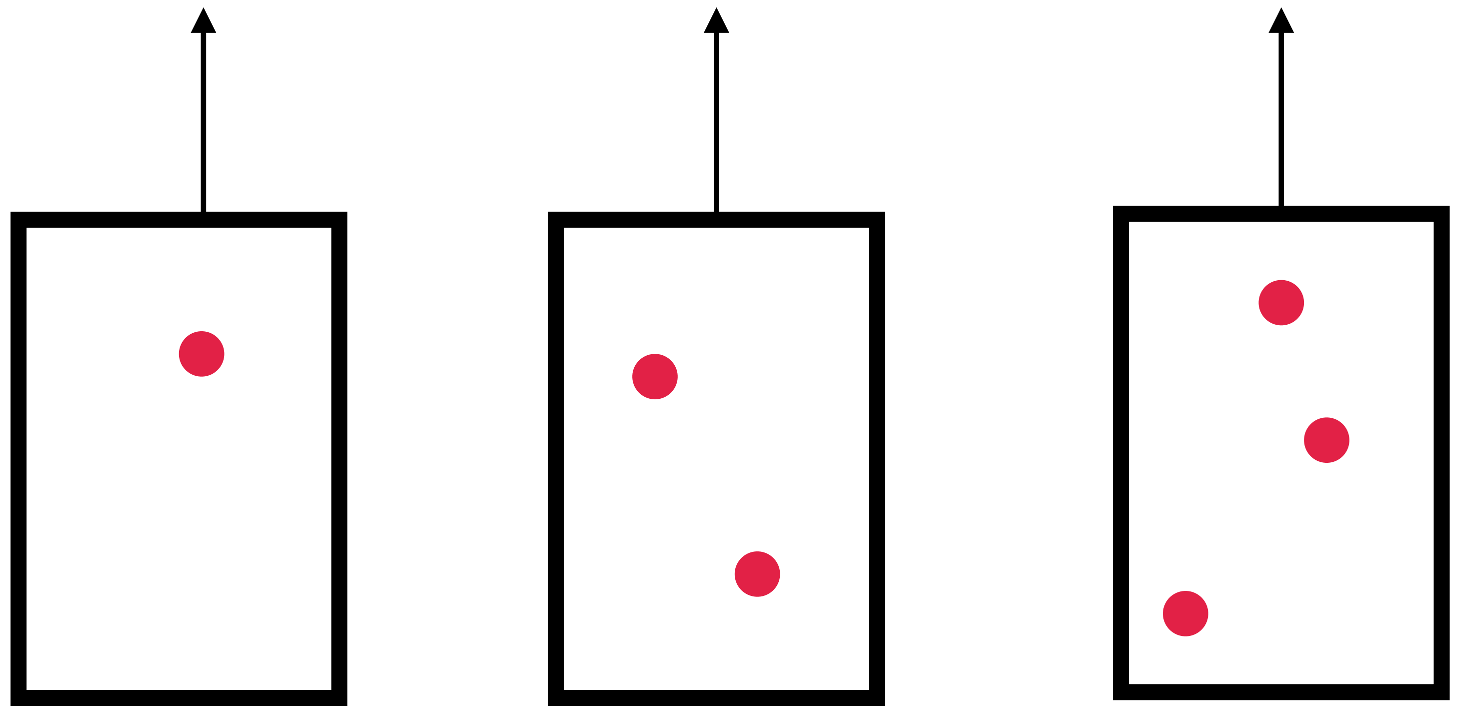
L'extrapolation des résultats entre $z = 0.6$ et $z = 1.2$ conduit au résultat expérimental

Il faut aller à des valeurs de z beaucoup plus petites pour trouver la "bonne" valeur $b_4 = 0.031$

En conclusion

Premier lien entre physique à petit nombre de particules et physique macroscopique

$$\frac{P}{k_{\mathrm{B}}T/\lambda^3} = b_1(T)\,z + b_2(T)\,z^2 + b_3(T)\,z^3 + \ldots$$



Rôle essentiel de la longueur de diffusion a pour trouver le terme dominant à basse température

[en dehors des effets à trois corps (et plus) pour les bosons (Efimov)]

Approche valable aussi bien hors résonance ($a \ll \lambda$) qu'à résonance ($|a| = +\infty$)