Chaire Atomes et rayonnement

Cours 2021-22

Jean Dalibard

COLLÈGE
DE FRANCE
1530

Prochains séminaires

Vendredi 18 mars : Matthias Weidemüller, Universität Heidelberg, Allemagne
Does a disordered isolated spin system thermalize?

Vendredi 25 mars : Jean-Philippe Brantut, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Suisse
Exploring and controlling Fermi gases with light in a high-finesse cavity

Vendredi 1 avril : Anna Minguzzi, LPMMC, CNRS and Université Grenoble-Alpes
Tan contact in one-dimensional quantum gases

Vendredi 8 avril : Atac Imamoglu, Institute for Quantum Electronics, ETH Zürich, Suisse
Strongly correlated electrons in atomically thin semiconductors

Les interactions entre atomes dans les gaz quantiques

Cours 2

L’approche de Bogoliubov

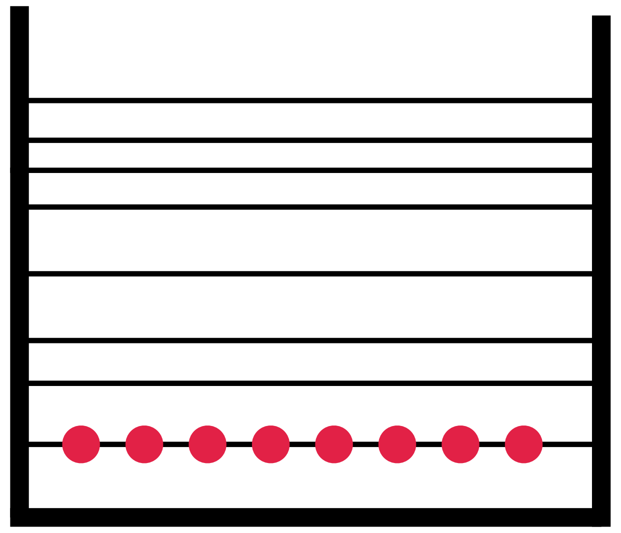
Jean Dalibard
Chaire *Atomes et rayonnement*
Année 2021-22

COLLÈGE DE FRANCE
1530

Le gaz de Bose à température nulle

Assemblée de N bosons de spin nul (ou polarisés) dans une boîte de volume L^3

En absence d'interaction, toutes les particules s'accumulent dans l'état d'impulsion nulle $\boldsymbol{k} = 0$



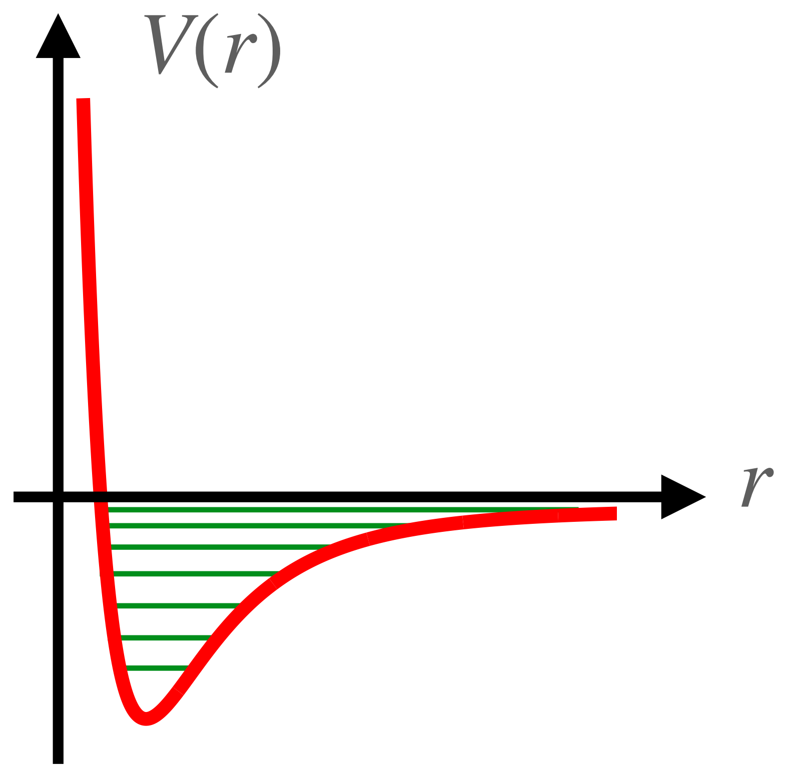
$\epsilon_0 = 0$

Comment ce résultat est-il modifié en présence d'interactions binaires ?

$$\hat{\mathscr{V}} = \sum_{i<j} V(\hat{\boldsymbol{r}}_i - \hat{\boldsymbol{r}}_j)$$

Quel potentiel choisir ?

Le potentiel réel ?



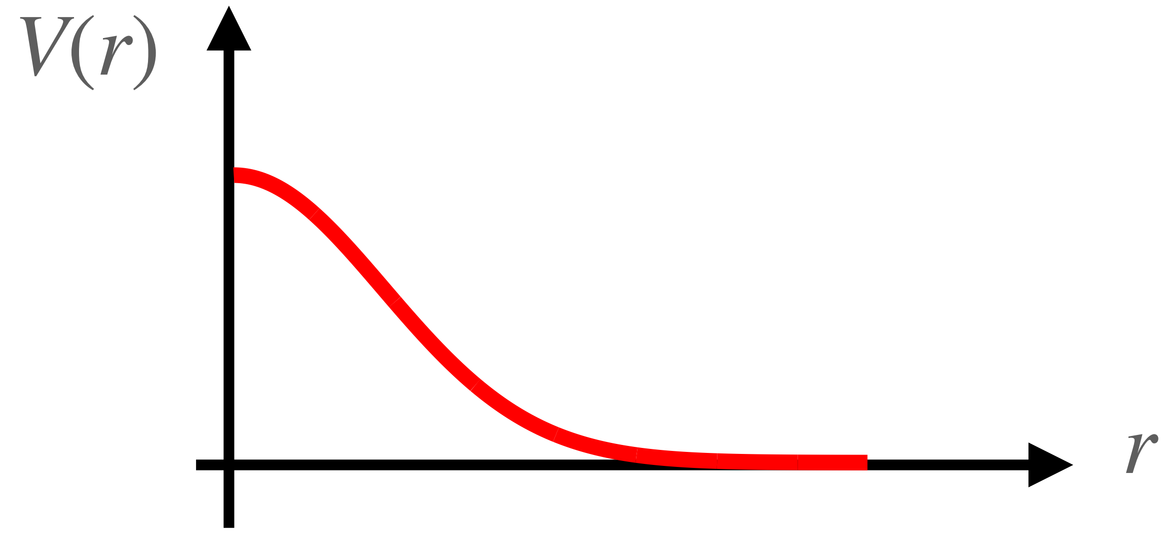
Compliqué avec tous ses états liés :
l'état fondamental ne sera certainement pas un gaz d'atomes

Un potentiel de contact, après régularisation en terme de pseudo-potentiel ?

$$\hat{V}_{\mathrm{pp}}\left[\psi(\boldsymbol{r})\right] = g\,\delta(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial r}\left[r\,\psi(\boldsymbol{r})\right]$$

cours de la semaine prochaine (subtilités mathématiques…)

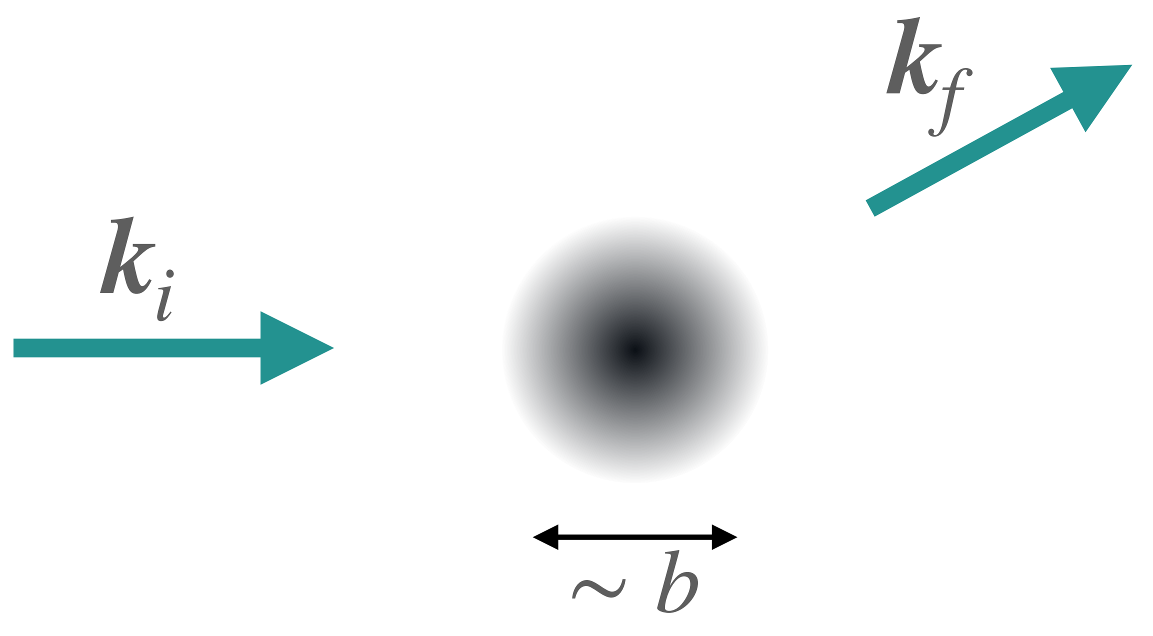
Un potentiel de faible amplitude, traitable par un développement de Born



L'essentiel est conserver la même longueur de diffusion que pour le problème réel

Le principe du développement de Born

Développement de l'amplitude de diffusion en puissances du potentiel $V(\boldsymbol{r})$



Amplitude de probabilité à l'ordre 1 en V:

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{k}_i \to \boldsymbol{k}_f) \;\propto\; \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_f - \boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}}\; V(\boldsymbol{r})\; \mathrm{d}^3 r$$

transformée de Fourier de $V(\boldsymbol{r})$

A basse énergie : $\quad k_i, k_f \ll 1/b \;\longrightarrow\; \mathscr{A}(\boldsymbol{k}_i \to \boldsymbol{k}_f) \;\propto\; \int V(\boldsymbol{r})\; \mathrm{d}^3 r \;\equiv \tilde{V}_0$

Longueur de diffusion a à l'ordre 1 en V : $\quad g \equiv \dfrac{4\pi\hbar^2 a}{m} \;\approx\; \tilde{V}_0$

Critère de validité (cours 2021) : $\quad |a| \ll b$

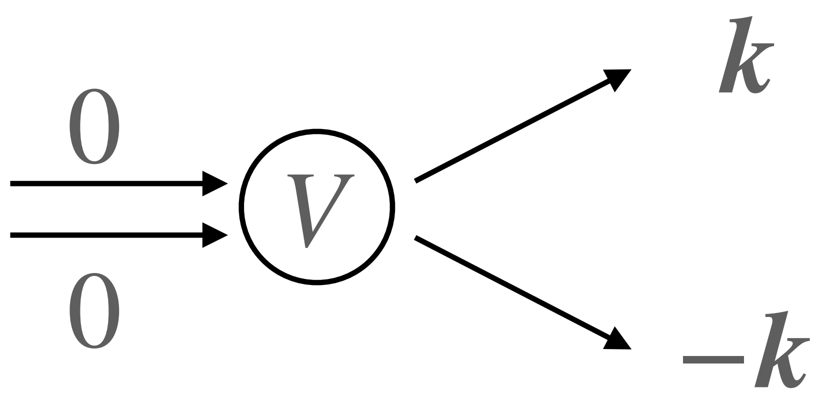
La démarche suivie dans le cours d'aujourd'hui

Simplification de l'hamiltonien en supposant que la population de l'état $\boldsymbol{k} = 0$ reste voisine de N

$\hat{H} \quad \longrightarrow \quad \hat{H}'$ *quadratique vis-à-vis des opérateurs création et annihilation* $a^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ *et* $a_{\boldsymbol{k}}$ *avec* $\boldsymbol{k} \neq 0$

Emergence d'une structure en paires de modes couplés $\{\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}\}$

Processus dominant pour faire apparaître une population d'un état $\boldsymbol{k} \neq 0$ *:*



Diagonalisation exacte de $\hat{H}'$ pour une paire de modes

Energie du fondamental et spectre d'excitation

Plan du cours

1. L’approximation quadratique pour l’hamiltonien

   Préliminaire : terme de Hartree, terme de Fock

   Le condensat vu comme un champ classique

2. L’hamiltonien de Bogoliubov à deux modes

3. Une illustration du modèle à deux modes : le gaz de spin 1

Hamiltonien en seconde quantification

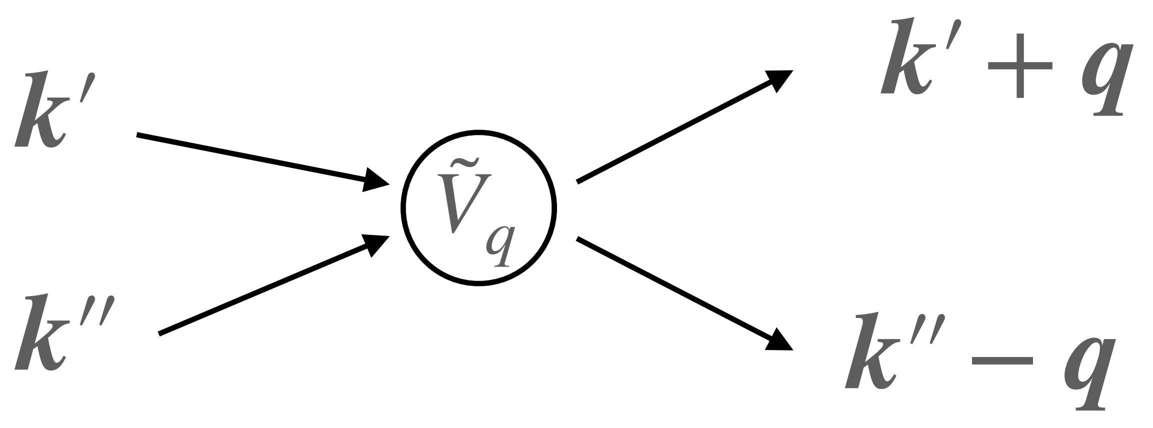
Energie cinétique et énergie d'interaction : $\hat{H} \;=\; \sum_{i=1}^{N} \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_i^2}{2m} \;+\; \sum_{i<j} V(\hat{\boldsymbol{r}}_i - \hat{\boldsymbol{r}}_j)$

Opérateurs création et destruction d'une particule dans l'état d'impulsion $\hbar\boldsymbol{k}$ *:* $a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}$ *et* $a_{\boldsymbol{k}}$

On obtient alors l'expression suivante pour l'hamiltonien à N corps :

$$\hat{H} \;=\; \sum_{\boldsymbol{k}} \epsilon_k \, a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} a_{\boldsymbol{k}} \;+\; \frac{1}{2L^3} \sum_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}'',\boldsymbol{q}} \tilde{V}_q \, a_{\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{q}}^{\dagger} \, a_{\boldsymbol{k}''-\boldsymbol{q}}^{\dagger} \, a_{\boldsymbol{k}''} \, a_{\boldsymbol{k}'}$$

$$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$



conservation de l'impulsion
lors d'une interaction élémentaire

Transformée de Fourier $\tilde{V}_{\boldsymbol{q}}$ *de* $V(\boldsymbol{r})$ *:* $\tilde{V}_{\boldsymbol{q}} = \int V(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \, \mathrm{d}^3 r$

Les hypothèses de l'approche de Bogoliubov

ON THE THEORY OF SUPERFLUIDITY *

By N. BOGOLUBOV

Mathematical Institute, Academy of Sciences of the Ukrainian SSR and Moscow State University

(Received October 12, 1946)

1909-1992

Hypothèse 1 : le condensat vu comme un champ classique

Pour l'état fondamental et les états faiblement excités, la population $\langle N_0 \rangle$ de $\boldsymbol{k} = 0$ reste grande devant 1

$$a_0 |N_0\rangle = \sqrt{N_0}\, |N_0 - 1\rangle$$
$$a_0^\dagger |N_0\rangle = \sqrt{N_0 + 1}\, |N_0 + 1\rangle$$

Les opérateurs a_0 et $a_0^\dagger$ seront traités (presque toujours) comme des nombres égaux à $\sqrt{\bar{N}_0}$ (revient à prendre $[a_0, a_0^\dagger] = 0$)

Hypothèse 2 : la faible déplétion du condensat

On suppose que $N - \langle N_0 \rangle \ll N$: développement systématique en puissances de $(N - \langle N_0 \rangle)/N$

L’approximation quadratique pour l’hamiltonien

On part de l’hamiltonien “exact” : $$\hat{H} = \sum_{\boldsymbol{k}} \epsilon_k \, a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + \frac{1}{2L^3} \sum_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}'',\boldsymbol{q}} \tilde{V}_q \, a^\dagger_{\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{q}} \, a^\dagger_{\boldsymbol{k}''-\boldsymbol{q}} \, a_{\boldsymbol{k}''} \, a_{\boldsymbol{k}'}$$

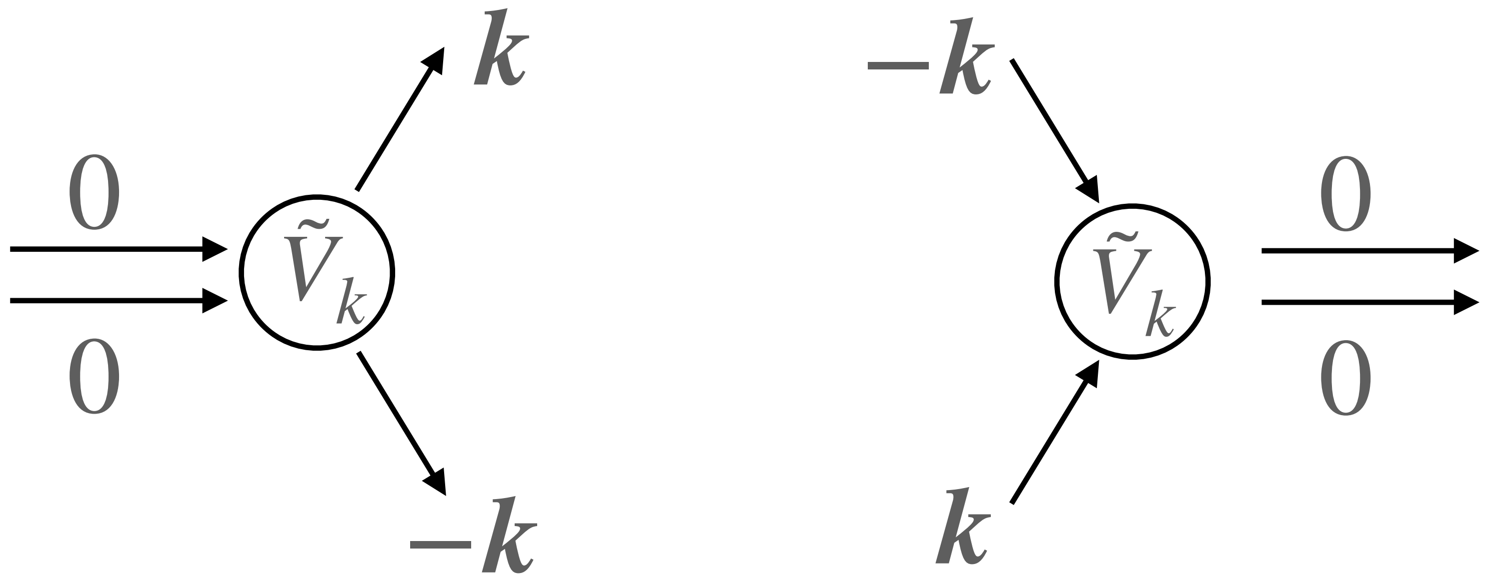
L’énergie cinétique reste inchangée. Dans l’énergie d’interaction, on garde :

⟶ Les termes avec 4 opérateurs $a_0^\dagger$, a_0 : $$\frac{N_0^2}{2L^3}\tilde{V}_0 \qquad\qquad \tilde{V}_0 = \int V(\boldsymbol{r}) \; \mathrm{d}^3 r$$

⟶ Les termes avec 3 opérateurs $a_0^\dagger$, a_0 ? Néant.

⟶ Les termes avec 2 opérateurs $a_0^\dagger$, a_0 : $$\frac{N_0}{L^3} \sum_{k \neq 0} \left(\tilde{V}_0 + \tilde{V}_k\right) a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + \frac{1}{2} \tilde{V}_k \left(a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a^\dagger_{-\boldsymbol{k}} + a_{\boldsymbol{k}} a_{-\boldsymbol{k}}\right)$$

Hartree Fock



La forme de travail pour l’hamiltonien

Expression en fonction de N plutôt que N_0, en utilisant $\quad N = \hat{N}_0 + \sum_{k \neq 0} a_k^\dagger a_k \equiv \hat{N}_0 + \hat{N}'$

$$\frac{N_0^2}{2L^3}\tilde{V}_0 \quad + \quad \underbrace{\frac{N_0}{L^3}\sum_{k\neq 0}\left(\tilde{V}_0 + \tilde{V}_k\right) a_k^\dagger a_k \;+\; \frac{1}{2}\tilde{V}_k(a_k^\dagger a_{-k}^\dagger + a_k a_{-k})}_{\text{On peut remplacer } N_0 \text{ par } N \text{ à cet ordre du calcul}} \quad + \quad \mathcal{O}(\sqrt{N_0})$$

$$\frac{\left(N - \hat{N}'\right)^2}{2L^3}\tilde{V}_0 \approx \frac{N^2}{2L^3}\tilde{V}_0 - \frac{N}{L^3}\tilde{V}_0 \sum_{k\neq 0} a_k^\dagger a_k$$

En ajoutant l’énergie cinétique et en regroupant par paires, on arrive à :

$$\hat{H}' = \frac{N^2}{2L^3}\tilde{V}_0 + \hat{H}'' \qquad \hat{H}'' = \sum_{\{k,-k\}} \left[\epsilon_k + n\tilde{V}_k\right]\left(a_k^\dagger a_k + a_{-k}^\dagger a_{-k}\right) + n\tilde{V}_k\left(a_k^\dagger a_{-k}^\dagger + a_k a_{-k}\right)$$

$$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad n = \frac{N}{L^3}$$

Le terme dominant

$$\hat{H}' = \frac{N^2}{2L^3}\tilde{V}_0 + \hat{H}''$$

Terme constant d'énergie $E = \frac{N^2}{2L^3}\tilde{V}_0 = \frac{1}{2}nN\tilde{V}_0$ $\qquad n = N/L^3$

A l'ordre 1 du développement de Born : $g \equiv \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \approx \tilde{V}_0$

On a donc : $E \approx \frac{1}{2}gnN$ *énergie de champ moyen*

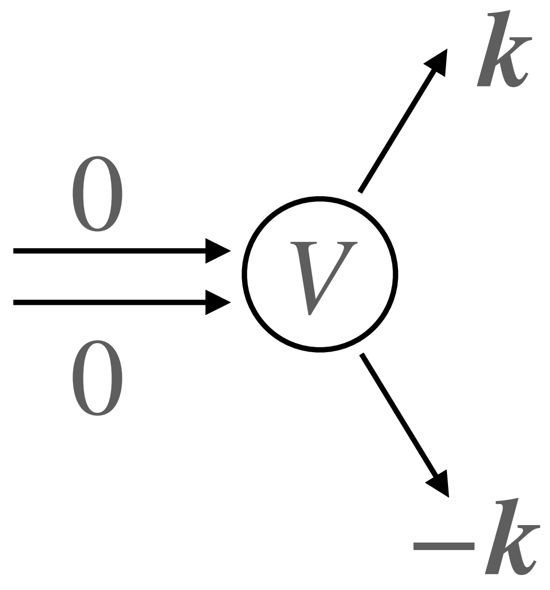
Correspond au résultat de la théorie des perturbations à l'ordre 1 en V : $E = \langle N : \boldsymbol{k} = 0 | \hat{\mathscr{V}} | N : \boldsymbol{k} = 0 \rangle$

Rappel : pour un gaz de Bose faiblement dégénéré, on a trouvé au cours 1 :

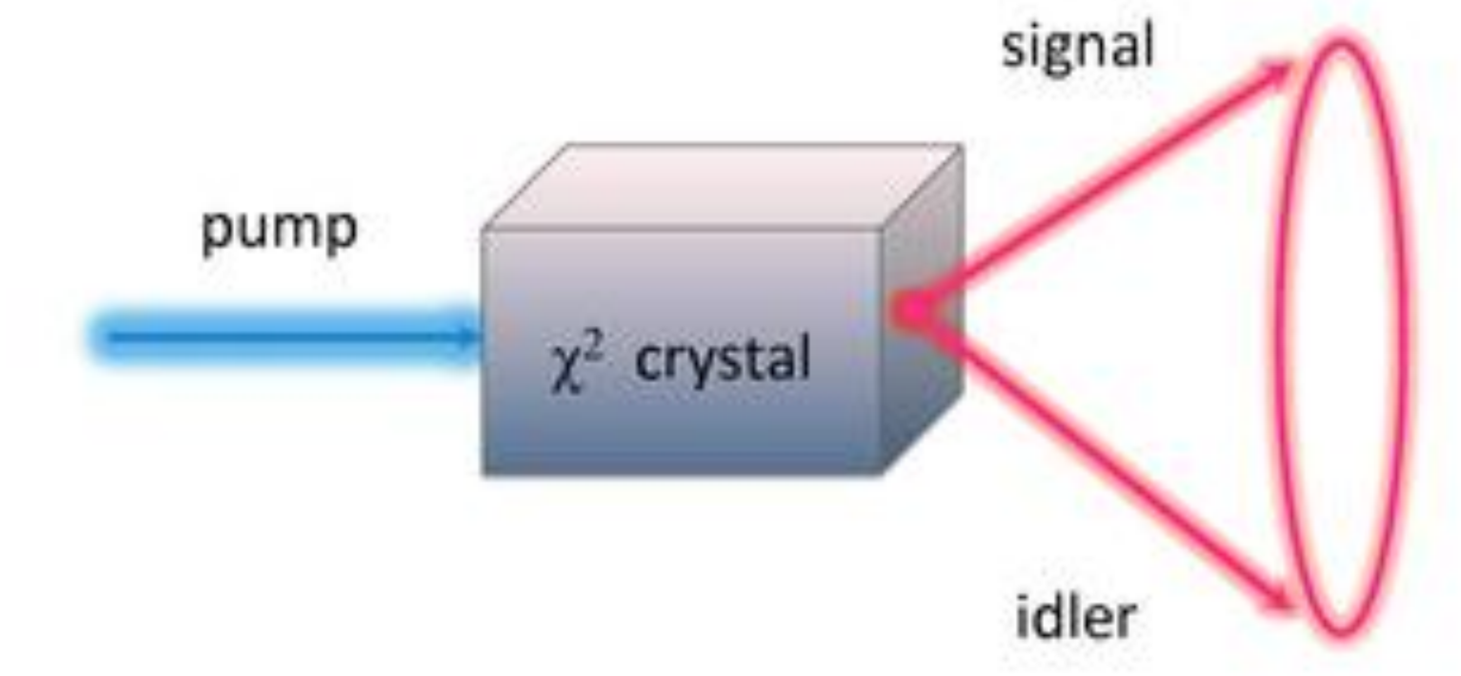
$E = gnN$ *Facteur 2 de type Hanbury-Brown & Twiss*

Non-conservation du nombre de particules

L'hamiltonien de Bogoliubov contient des termes de création de paires $\{\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}\}$ à partir du condensat, considéré comme un réservoir “infini” de particules



Analogie avec la conversion paramétrique en optique



Très utilisée pour générer des paires de photons corrélés

Le champ pompe est lui aussi traité comme un champ classique

Il faut vérifier a posteriori que le nombre de paires effectivement créées reste petit devant N

Approches équivalentes conservant le nombre de particules

Gardiner (1997), Castin & Dum (1998), Leggett (2001, 2006)

Approche variationnelle pour déterminer l'état fondamental du gaz de Bose

$$|\Psi\rangle \propto \left(a_0^\dagger a_0^\dagger - \sum_{k \neq 0} c(\boldsymbol{k}) a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{-\boldsymbol{k}}^\dagger \right)^{N/2} |0\rangle$$

⟶ $a_0^\dagger a_0^\dagger - \sum_{k \neq 0} c(\boldsymbol{k}) a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{-\boldsymbol{k}}^\dagger$ crée une paire de particules corrélées

⟶ Les coefficients $c(\boldsymbol{k})$ sont des paramètres variationnels utilisés pour minimiser l'énergie moyenne

Calcul détaillé dans Cohen-Tannoudji, Diu, Laloe (M.Q., tome 3)

Plan du cours

1. L'approximation quadratique pour l'hamiltonien

2. L'hamiltonien de Bogoliubov à deux modes

Transformation canonique
L'état fondamental vu comme un état comprimé du vide

3. Une illustration du modèle à deux modes : le gaz de spin 1

Le problème à deux modes

Problème générique de l'optique quantique ou de la matière condensée

- Deux modes bosoniques décrits par $\{a_1^\dagger, a_1\}$ et $\{a_2^\dagger, a_2\}$ $\qquad 1 \equiv \boldsymbol{k},\ 2 \equiv -\boldsymbol{k}$

  Ici, hamiltonien non perturbé : $\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 \left(a_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_0 \left(a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2}\right)$ $\qquad \omega_0$ réel positif

  Etat fondamental $n_1 = n_2 = 0$*, énergie* $\hbar\omega_0$

- Couplage quadratique vis-à-vis des $a_j^\dagger, a_j$

  Ici, création et destruction par paires : $\hat{V} = \hbar\kappa \left(a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2\right)$ $\qquad \kappa$ réel

On cherche une transformation canonique (*i.e.* préservant les relations de commutation) telle que :

- $\{b_1^\dagger, b_1\}$ et $\{b_2^\dagger, b_2\}$ combinaisons linéaires de $\{a_1^\dagger, a_1\}$ et $\{a_2^\dagger, a_2\}$
- "Diagonalise" l'hamiltonien : $\hat{H}_0 + \hat{V} = \hbar\omega_1\, b_1^\dagger b_1 \ + \ \hbar\omega_2\, b_2^\dagger b_2 \ + \ \text{cte}\,.$ avec $\omega_1, \omega_2 \geq 0$.

Transformation canonique de Bogoliubov

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0\left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1\right)$$
$$\hat{V} = \hbar\kappa\left(a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2\right)$$

On introduit les opérateurs : $b_1 = ua_1 + va_2^\dagger \qquad b_2 = ua_2 + va_1^\dagger$

Pour préserver la relation de commutation $[b_1, b_1^\dagger] = 1$, il faut que : $u^2 - v^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u = \cosh\lambda,\ v = \sinh\lambda$

idem pour $[b_2, b_2^\dagger] = 1$. *Par ailleurs, on vérifie que* $[b_1, b_2] = 0$, $[b_1, b_2^\dagger] = 0$, ...

Un calcul simple permet alors de vérifier qu'on obtient l'hamiltonien diagonal

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(b_1^\dagger b_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(b_2^\dagger b_2 + \frac{1}{2}\right)$$

pour le choix

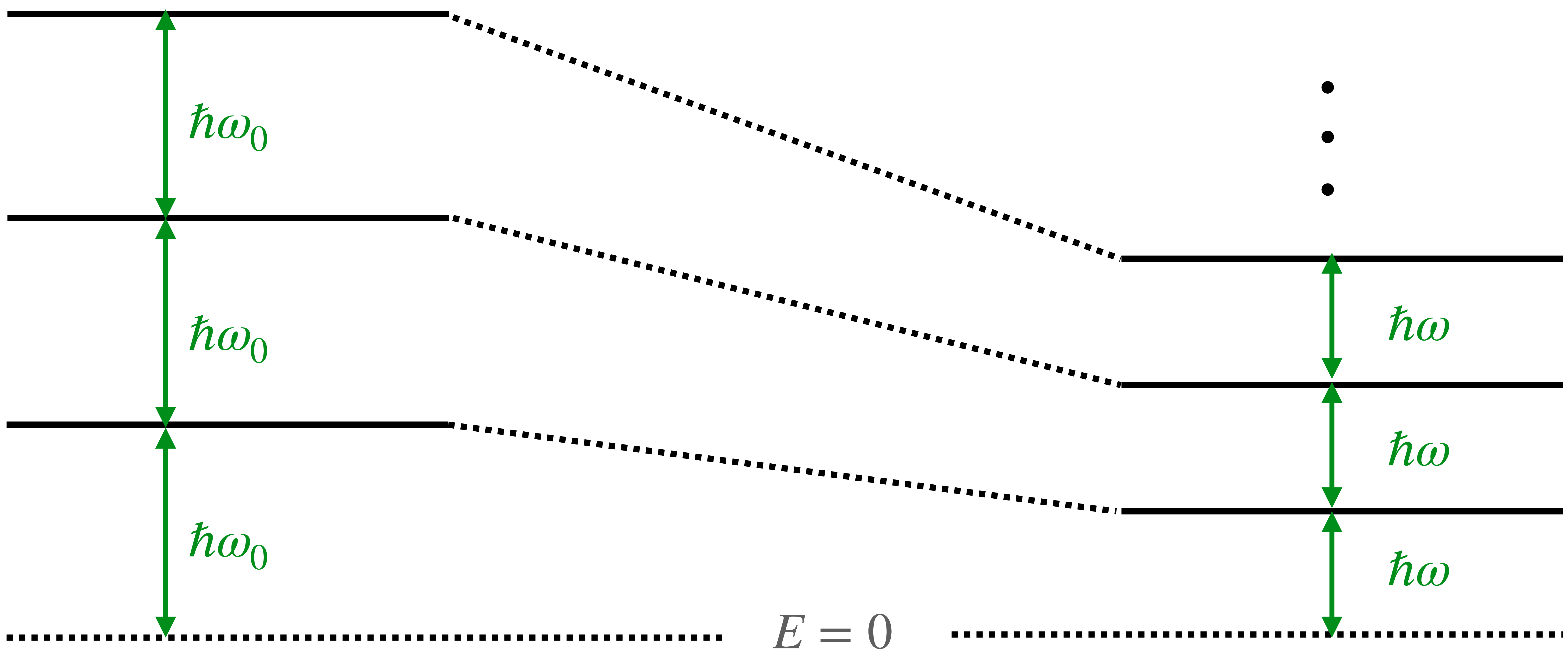
$$\tanh(2\lambda) = \frac{\kappa}{\omega_0} \qquad\qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$$

Ce choix n'est possible que si $|\kappa| < \omega_0$ (sinon, problème singulier)

Le spectre de l'hamiltonien

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0\left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1\right)$$
$$\hat{V} = \hbar\kappa\left(a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2\right)$$

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0\left(a_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_0\left(a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}} \hat{H} = \hbar\omega\left(b_1^\dagger b_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(b_2^\dagger b_2 + \frac{1}{2}\right)$$



Abaissement de l'énergie du fondamental : $\Delta E = \hbar\left(\omega - \omega_0\right) < 0$

Comparaison avec un couplage de modes “normal”

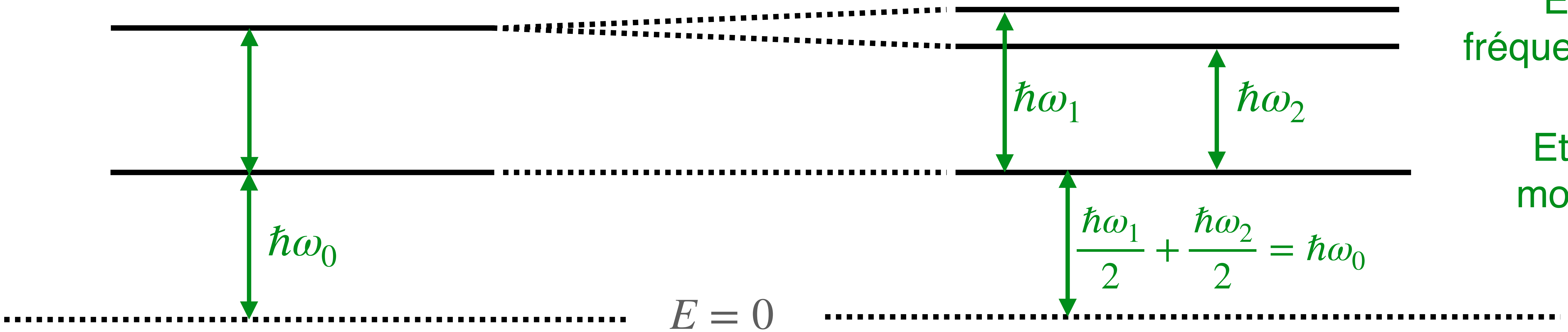
On rencontre souvent le problème de deux oscillateurs couplés :

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0\left(a_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_0\left(a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2}\right) \qquad \hat{V}' = \hbar\kappa\left(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger\right)$$

La transformation canonique est dans ce cas : $b_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1 + a_2\right) \qquad b_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1 - a_2\right)$

et elle conduit à

$$\hat{H} = \hbar\omega_1\left(b_1^\dagger b_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_2\left(b_2^\dagger b_2 + \frac{1}{2}\right) \qquad \omega_1 = \omega_0 + \kappa \qquad \omega_2 = \omega_0 - \kappa$$



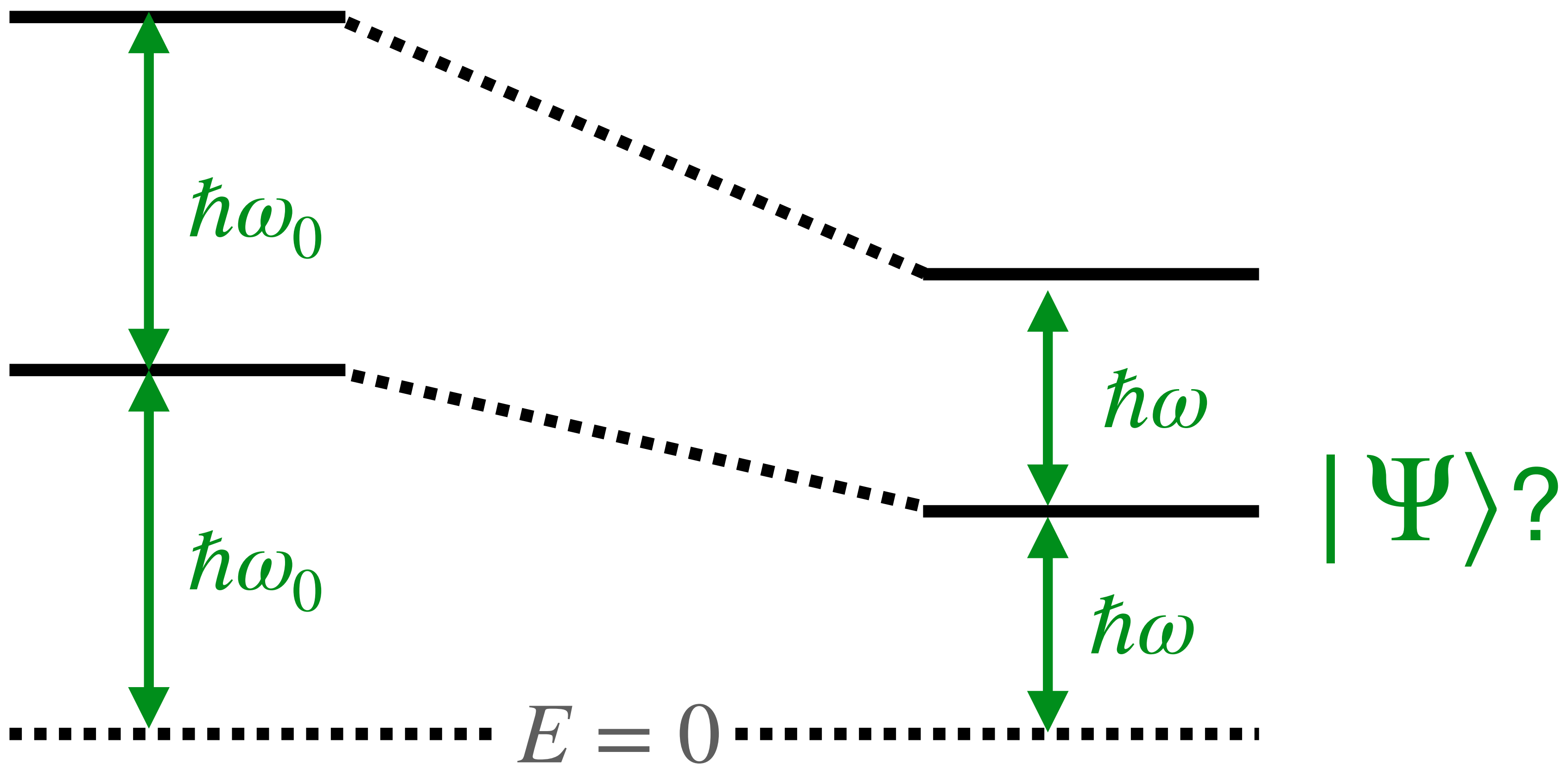
Emergence de deux fréquences propres distinctes

Etat fondamental non modifié par le couplage

Structure de l'état fondamental

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 \left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1 \right)$$

$$\hat{V} = \hbar\kappa \left(a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2 \right)$$



$$\hat{H} = \hbar\omega \left(b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2 + 1 \right) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$$

L'état fondamental $|\Psi\rangle$ est obtenu en résolvant

$$b_1 |\Psi\rangle = 0 \qquad b_2 |\Psi\rangle = 0$$

On décompose $|\Psi\rangle$ sur la base des états propres de $a_1^\dagger a_1$ et $a_2^\dagger a_2$: $\quad |\Psi\rangle = \sum_{n_1, n_2} c(n_1, n_2)\, |n_1, n_2\rangle$

- Symétrie entre les deux modes : seuls les $c(n, n)$ sont non nuls (excitation par paires)
- Relation de récurrence entre les $c(n, n)$? $\qquad b_1 = u a_1 + v a_2^\dagger \quad \to \quad u c(n, n) + v c(n-1, n-1) = 0$

$$c(n, n) = \left(-\frac{v}{u} \right)^n c(0,0) \qquad \text{avec} \quad v/u = \tanh\lambda \quad < 1$$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\cosh\lambda} \sum_n \left(-\tanh\lambda \right)^n |n, n\rangle$$

Two-mode squeezed vacuum state

Etat comprimé du vide à deux modes

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0\left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1\right)$$
$$\hat{V} = \hbar\kappa\left(a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2\right)$$

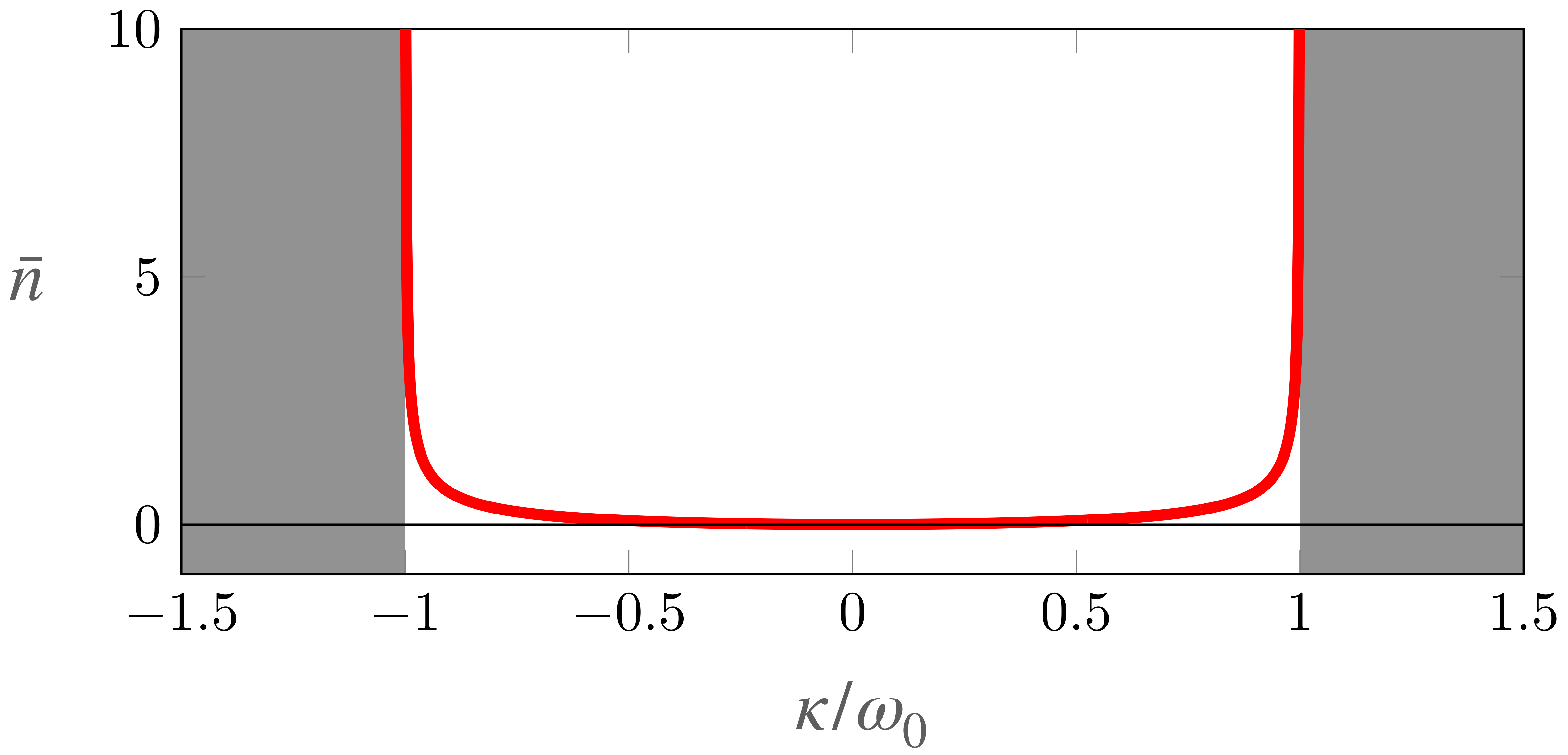
La distribution du nombre de paires dans $|\Psi\rangle$

$$\tanh(2\lambda) = \frac{\kappa}{\omega_0}$$
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$$

Etat fondamental $|\Psi\rangle = \dfrac{1}{\cosh\lambda}\sum_n \left(-\tanh\lambda\right)^n |n,n\rangle$

Nombre moyen de paires : $\bar{n} = \dfrac{\sum_n n\left(\tanh\lambda\right)^{2n}}{\sum_n\left(\tanh\lambda\right)^{2n}} = \sinh^2\lambda = v^2 = \dfrac{\omega_0 - \omega}{2\omega}$

Variance : $\Delta n^2 = \bar{n}\left(1+\bar{n}\right)$



$\bar{n}$ diverge quand on s'approche de la limite de la zone de stabilité

Pour $\bar{n} \gtrsim 1$, on a l'écart-type $\Delta n \approx \bar{n}$

Plan du cours

1. L'approximation quadratique pour l'hamiltonien

2. L'hamiltonien de Bogoliubov à deux modes

3. Une illustration du modèle à deux modes : le gaz de spin 1

L'approximation du mode spatial unique
Dynamique réversible à N corps

Interaction entre deux atomes de spin 1

Situation rencontrée fréquemment pour la colonne des alcalins du tableau périodique : ^{7}Li, ^{23}Na, ^{39}K, ^{41}K, ^{87}Rb

On ne s'intéresse qu'aux interactions de type van der Waals (interactions magnétiques négligées)

Spin total $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2$

3 valeurs possibles pour s
$$\begin{cases} s = 0 & \text{: état symétrique dans l'échange 1-2} \\ s = 1 & \text{: état antisymétrique dans l'échange 1-2} \\ s = 2 & \text{: état symétrique dans l'échange 1-2} \end{cases}$$

Basse température : seules les interactions en onde s (état orbital symétrique) jouent un rôle significatif

$\longrightarrow$ Seuls les canaux $s = 0$ et $s = 2$ contribuent à l'interaction

Ecriture sous forme d'une interaction de contact (notion précisée au cours 3) :

$$\hat{V}_{\text{int.}} = \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \otimes \left(g_0 \mathscr{P}_0 \ + \ g_2 \mathscr{P}_2\right) \qquad g_i = \frac{4\pi\hbar^2 a_i}{m}$$

Interaction magnétique effective

$$\hat{V}_{\text{int.}} = \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \otimes \left(g_0 \mathscr{P}_0 \ + \ g_2 \mathscr{P}_2\right)$$

Réécriture de $\hat{V}_{\text{int.}}$ en terme du produit scalaire $\hat{\boldsymbol{s}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_2$

$$\hat{\boldsymbol{s}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_2 = \frac{1}{2}\left(\hat{\boldsymbol{s}}^2 - \hat{\boldsymbol{s}}_1^2 - \hat{\boldsymbol{s}}_2^2\right) = \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{s}}^2 - 2 \quad \begin{cases} = -2 & \text{dans le canal } s = 0 \\ = +1 & \text{dans le canal } s = 2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \hat{V}_{\text{int.}} = \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \otimes \left(\bar{g}\,\hat{1} \ + \ g_s\,\hat{\boldsymbol{s}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_2\right)\left(\mathscr{P}_0 + \mathscr{P}_2\right)$$

$$\bar{g} = \frac{1}{3}\left(g_0 + 2g_2\right)$$

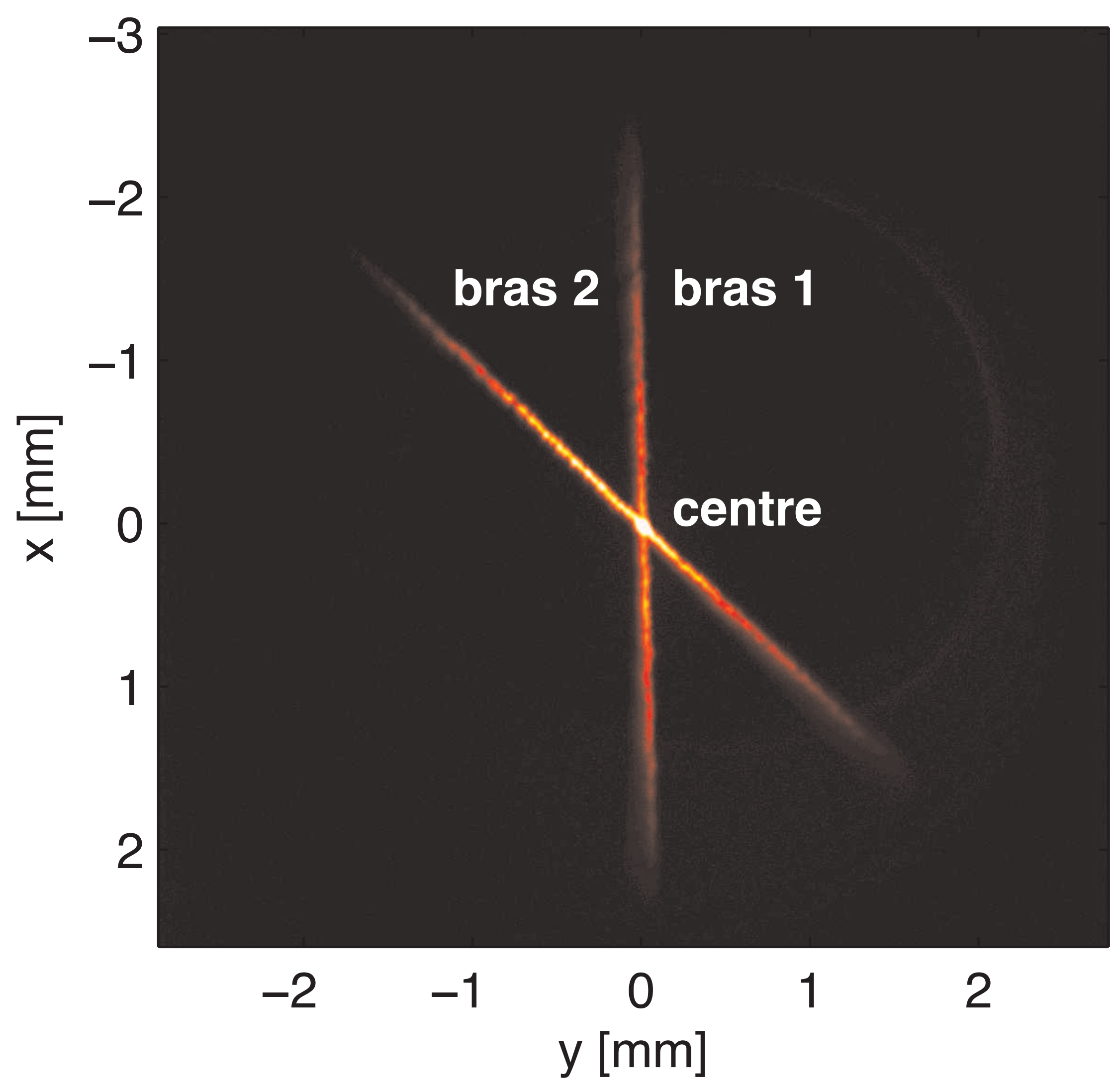
Interaction "scalaire",
indépendante de l'état de spin

$$g_s = \frac{1}{3}\left(g_2 - g_0\right)$$

Interaction effective "spin-spin",
ferromagnétique si $g_s < 0$ (^{87}Rb)
antiferromagnétique si $g_s > 0$ (^{23}Na)

Longueurs de diffusion associées pour ^{23}Na :
$\bar{a} \approx 2.8\,\text{nm}, \ \ a_s \approx 0.1\,\text{nm}$

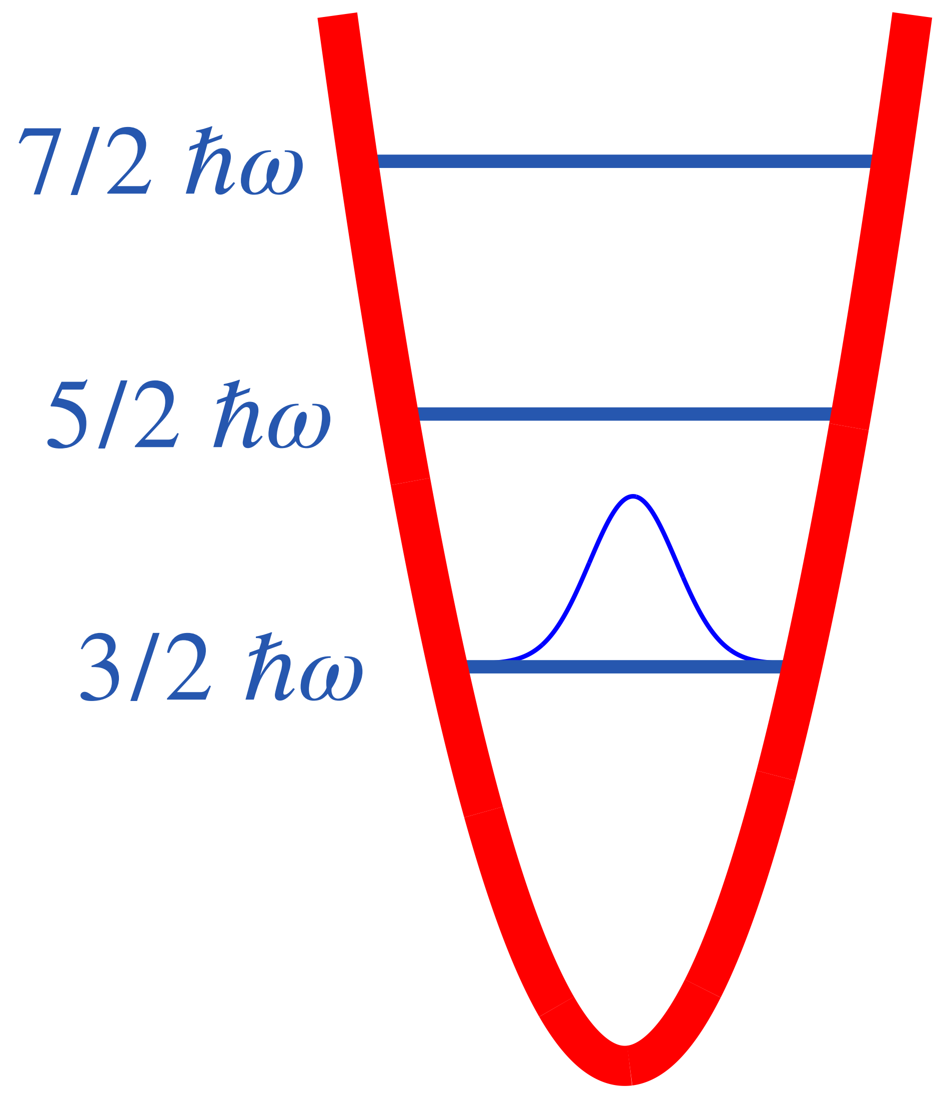
L’approximation du mode spatial unique



N atomes de ^{23}Na confinés dans un piège isotrope de fréquence ω

On suppose que l’énergie d’interaction / atome est petite devant $\hbar\omega$

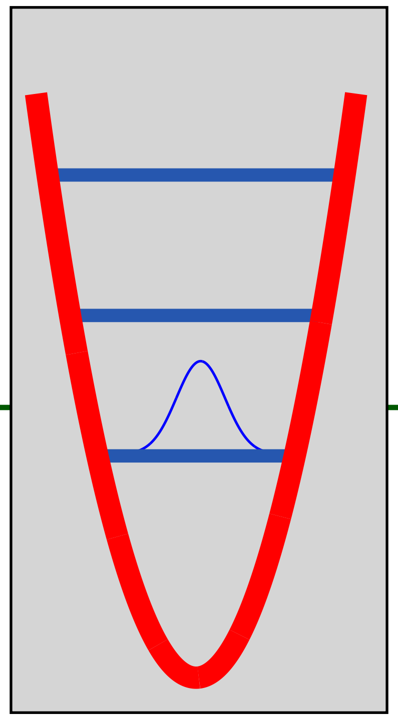
→ Les atomes occupent essentiellement l’état fondamental du piège



La dynamique spatiale est gelée et il ne reste que la dynamique de spin

SMA : single mode approximation

L’interaction de spin dans l’approximation du mode unique



On revient à $\hat{V}_{\text{int.}} = \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \otimes \left(\bar{g}\,\hat{1} \;+\; g_s\,\hat{\boldsymbol{s}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_2\right)\left(\mathscr{P}_0 + \mathscr{P}_2\right)$ que l’on évalue pour l’état orbital $\psi_0^{\otimes N}$

terme constant,
sans effet sur la dynamique

terme intéressant, avec un couplage
“deux à deux” entre tous les spins

$$\hat{V}_{\text{int.}}^{\text{SMA}} = \frac{U_s}{2N} \sum_{i,j\neq i} \hat{\boldsymbol{s}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_j \qquad\qquad \frac{U_s}{N} = g_s \int |\psi_0(\boldsymbol{r})|^4 \, \mathrm{d}^3 r$$

Analyse de $\hat{s}_i \cdot \hat{s}_j$: d’où vient la dynamique de spin ?

$m_i = +1$ ———	——— $m_j = +1$
$m_i = 0$ ———	——— $m_j = 0$
$m_i = -1$ ———	——— $m_j = -1$

Etats de spin dans un champ magnétique

Conservation de $m_i + m_j$: le seul terme modifiant la composition en spin du gaz est :

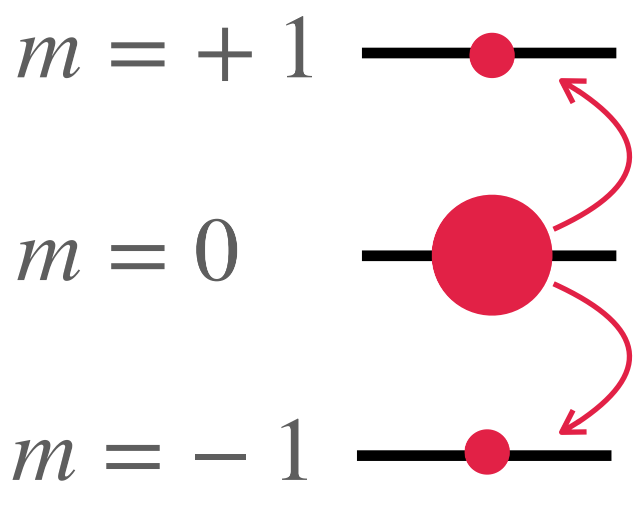
$$(m=0) \;+ (m=0) \;\leftrightarrows\; (m=+1) \;+ (m=-1)$$

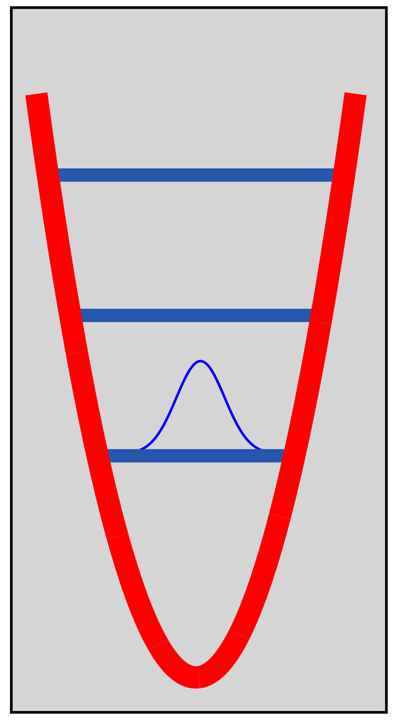
Création de paires $(+1, -1)$ à partir d’une source d’atomes en $m = 0$: on retrouve Bogoliubov

Le mode $m = 0$ traité comme un champ classique

$$\hat{V} = \frac{U_s}{2N} \sum_{i,j\neq i} \hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{s}}_j$$

On s'intéresse à une situation où les N atomes occupent très majoritairement l'état de spin $m = 0$





L'interaction spin-spin dans cette approximation (*cf.* notes de cours):

$$\hat{V}^{\text{SMA}}_{\text{int.}} \approx U_s \left(a^\dagger_{+1} a_{+1} + a^\dagger_{-1} a_{-1}\right) + U_s \left(a^\dagger_{+1} a^\dagger_{-1} + a_{+1} a_{-1}\right)$$

interaction intra-espèce

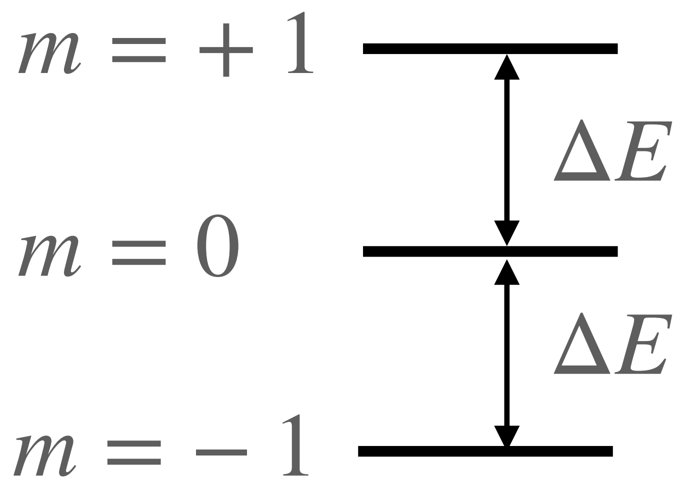
création et destruction de paires $(+1, -1)$

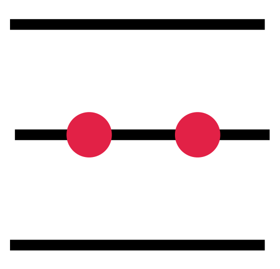
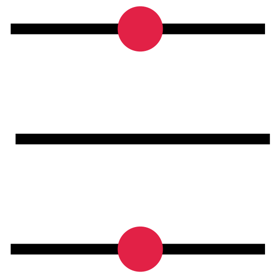
Ingrédient manquant : rôle du champ magnétique extérieur ?

Prise en compte de l'effet Zeeman

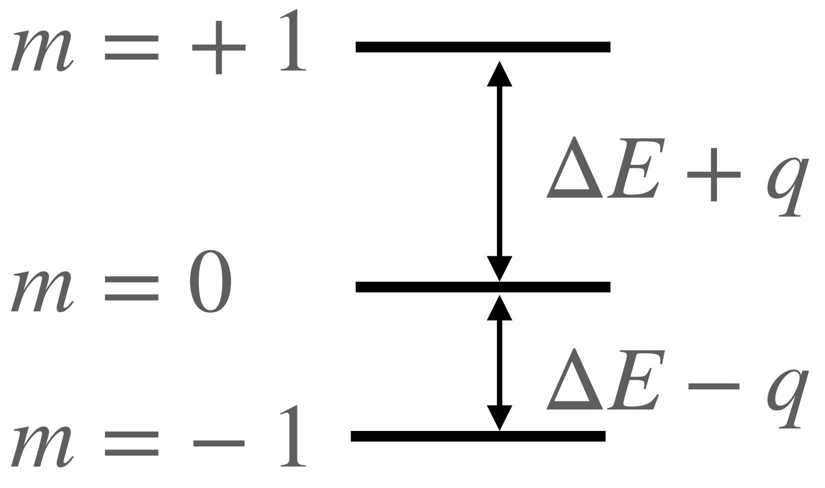
On suppose que le champ magnétique est relativement faible (de l'ordre du gauss) : on se limite aux termes linéaires et quadratiques en champ

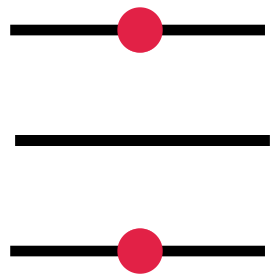
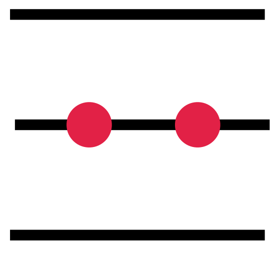
Effet Zeeman linéaire :



conduit à la même énergie pour  et  : pas d'influence sur la dynamique des paires

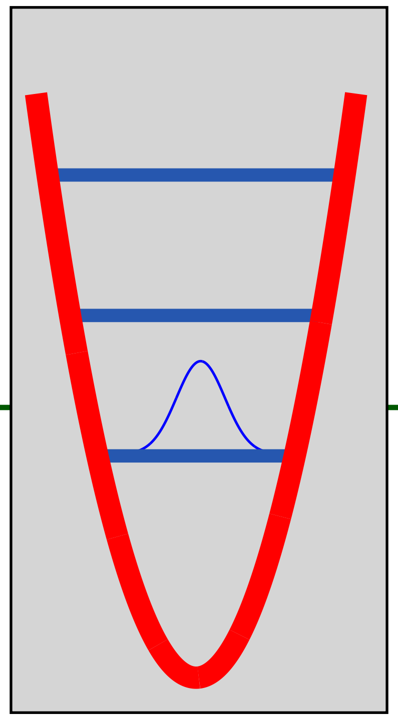
Effet Zeeman quadratique :



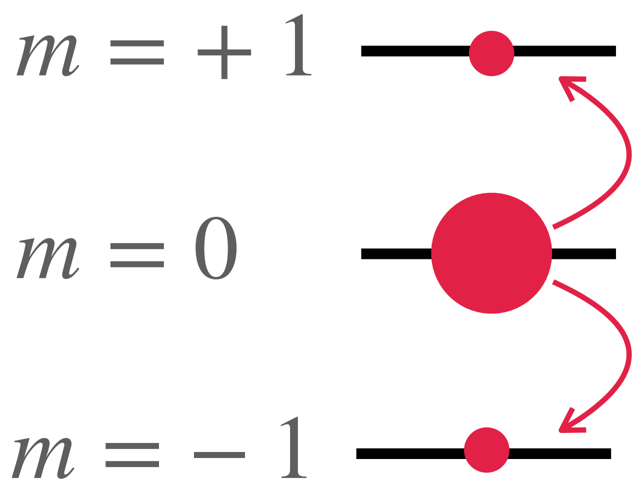
Augmente l'énergie de  par rapport à 

$$V_{\text{Zeem.}} = q\left(a^{\dagger}_{+1}a_{+1} + a^{\dagger}_{-1}a_{-1}\right)$$

L'hamiltonien de Bogoliubov retrouvé



- Interaction effective spin-spin U_s à l'approximation du mode spatial unique
- Effet Zeeman quadratique q
- Etat $m = 0$ majoritairement peuplé et traité comme un champ classique



$$\hat{H} = \underbrace{(q + U_s)}_{\hbar\omega_0}\left(a^\dagger_{+1}a_{+1} + a^\dagger_{-1}a_{-1}\right) + \underbrace{U_s}_{\hbar\kappa}\left(a^\dagger_{+1}a^\dagger_{-1} + a_{+1}a_{-1}\right)$$

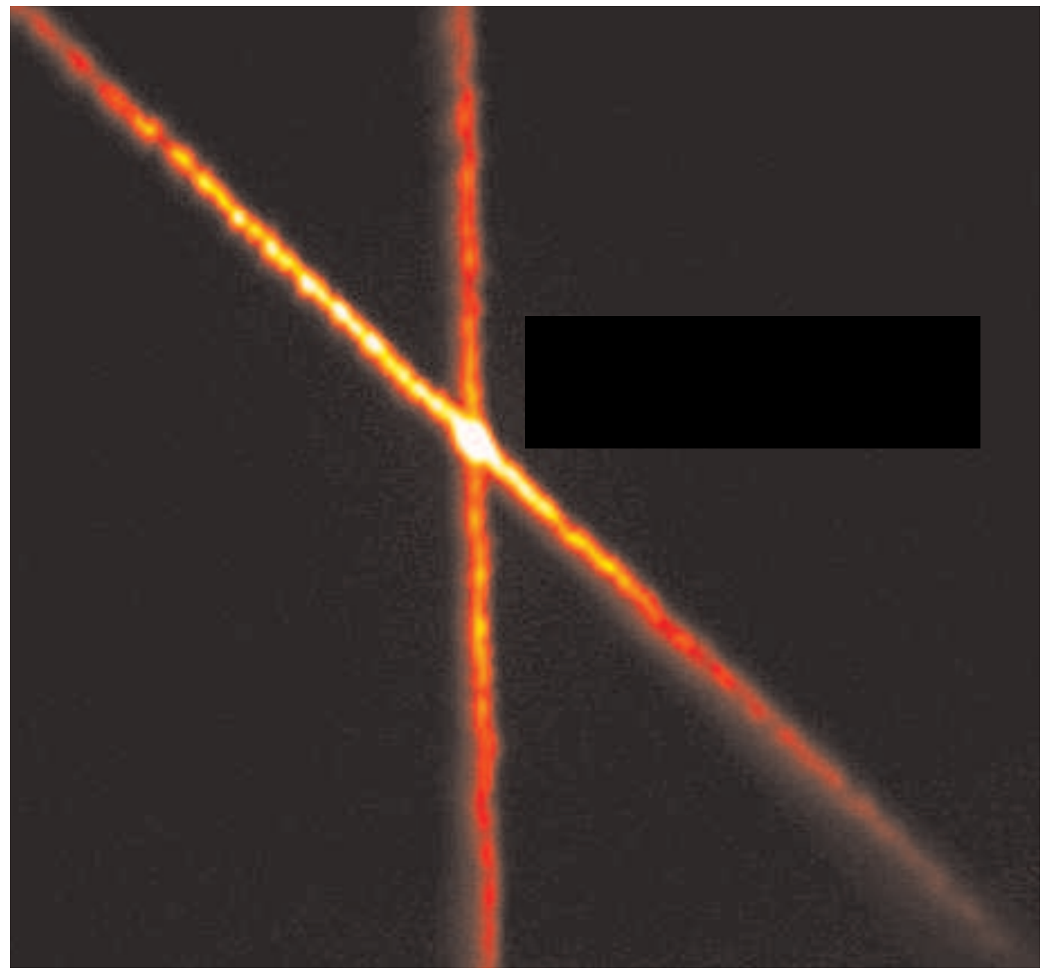
Stabilité ? Pour les atomes ^{23}Na, on a $q, U_s > 0$ et la condition $|\kappa| < \omega_0$ est satisfaite

Fréquence ω du système obtenue par la transformation canonique :

$$\hbar\omega = \left[(q + U_s)^2 - U_s^2\right]^{1/2} = \sqrt{q\,(q + 2U_s)}$$

Un gaz spineur au laboratoire

$$\hat{H} = (q + U_s)\left(a_{+1}^\dagger a_{+1} + a_{-1}^\dagger a_{-1}\right) + U_s\left(a_{+1}^\dagger a_{-1}^\dagger + a_{+1}a_{-1}\right)$$



$N \approx 5000$ atomes de ^{23}Na dans un piège optique de fréquence ~ 2 kHz

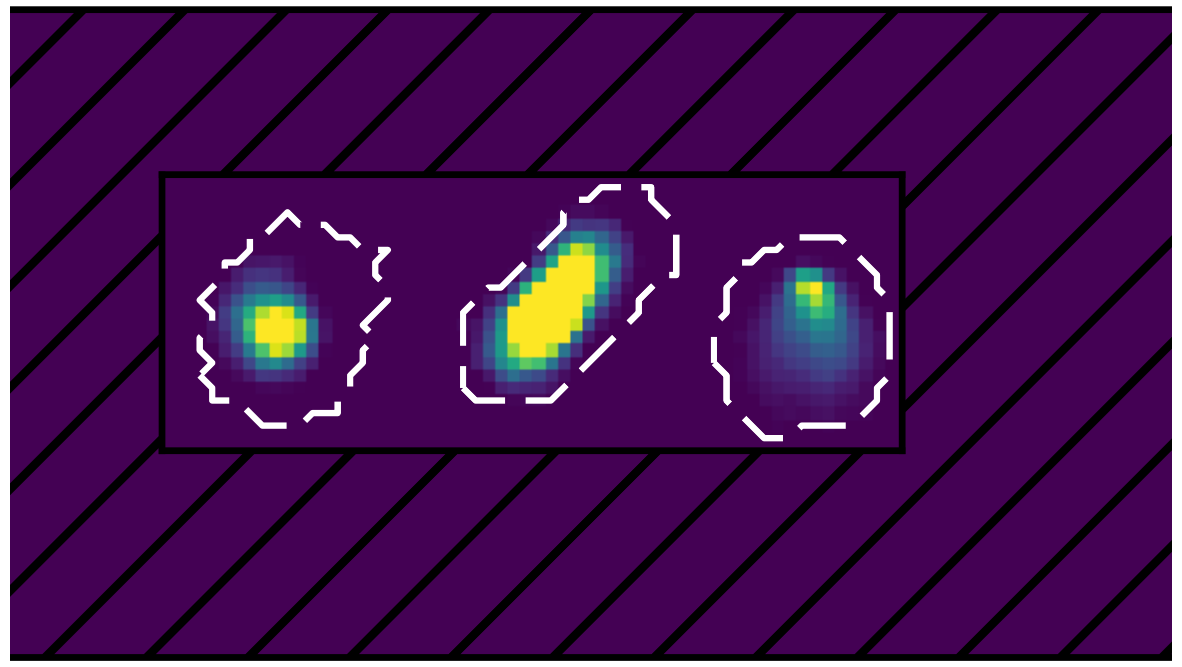
Refroidissement par laser + évaporation pour obtenir un condensat quasi-pur

Interaction spin-spin effective : $U_s/h \sim 20\,\mathrm{Hz}$

Champ magnétique ambiant $\sim 1\ \mathrm{G}$: effet Zeeman quadratique $q/h \sim 300\,\mathrm{Hz}$

$U_s \ll q$ *: tous les atomes sont initialement dans l'état de spin* $m = 0$

On abaisse soudainement le champ magnétique pour atteindre $q \lesssim U_s$ et on étudie la dynamique induite



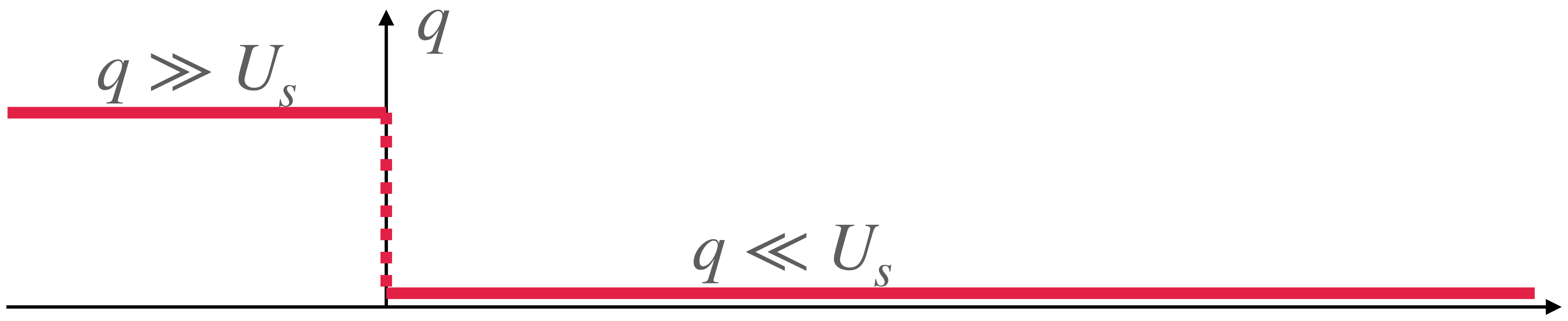
Expérience de Stern-Gerlach + phase de mélasse optique

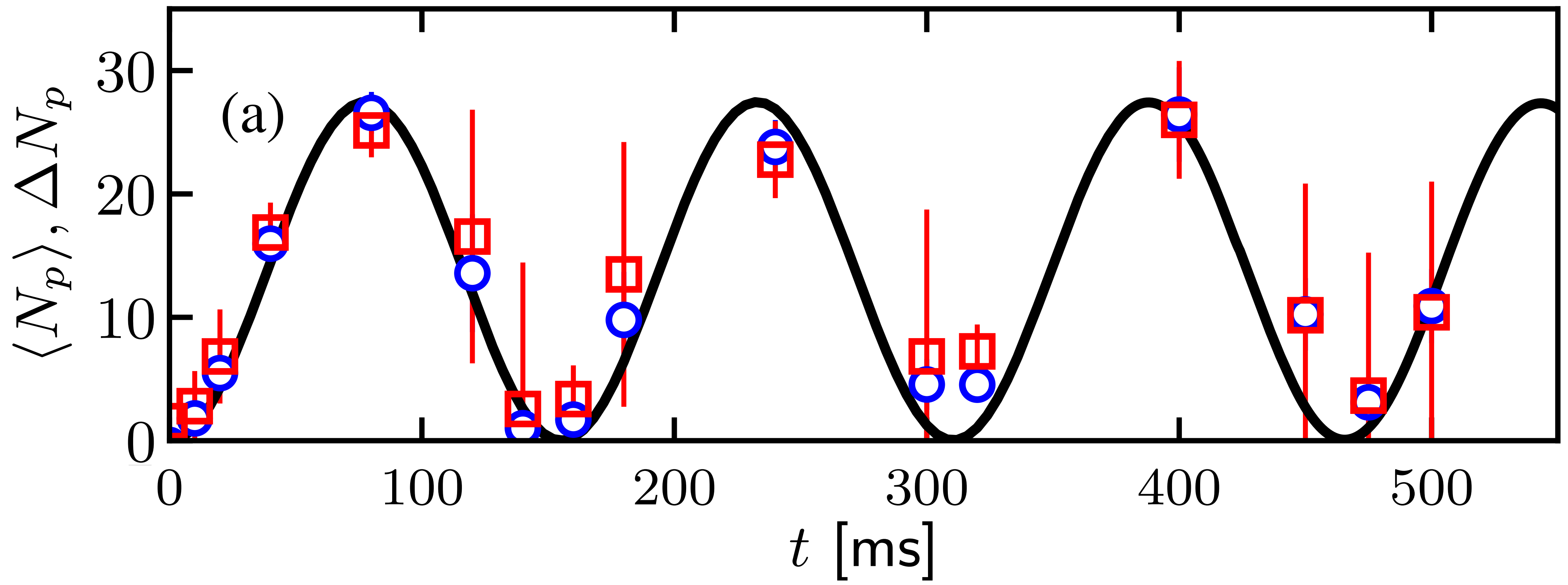
On compte la population des 3 états Zeeman $m = -1, 0, +1$
à un atome près

B. Evrard, A. Qu, F. Gerbier, J. Dalibard

Oscillation réversible à N corps

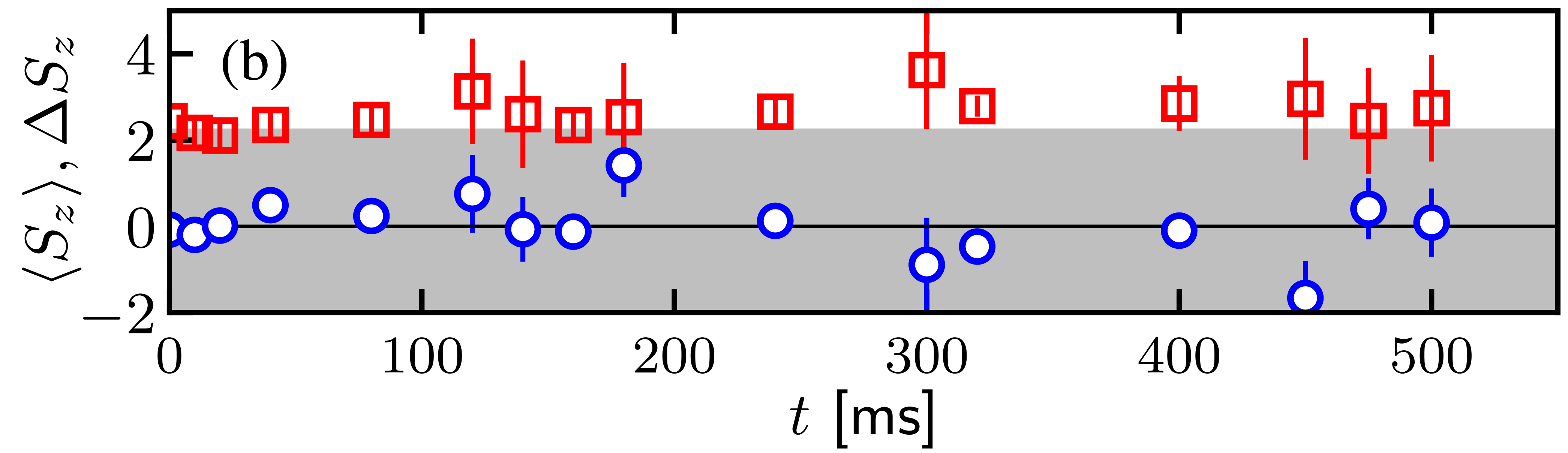
$$\hat{H} = (q + U_s)\left(a^\dagger_{+1}a_{+1} + a^\dagger_{-1}a_{-1}\right) + U_s\left(a^\dagger_{+1}a^\dagger_{-1} + a_{+1}a_{-1}\right)$$





$$N_p = \frac{1}{2}\left(N_{+1} + N_{-1}\right)$$

Pour $\langle N_p \rangle \gtrsim 1$, on trouve $\Delta N_p \approx \langle N_p \rangle$



$$S_z = N_{+1} - N_{-1}$$

On trouve $N_{+1} = N_{-1}$ au bruit de mesure près (de l'ordre de 1 atome)

valide le principe d'une création de paires

La fréquence de l'oscillation à N corps

$$\hat{H} = (q+U_s)\left(a^\dagger_{+1}a_{+1} + a^\dagger_{-1}a_{-1}\right) + U_s\left(a^\dagger_{+1}a^\dagger_{-1} + a_{+1}a_{-1}\right)$$

L'état $|\Psi(t)\rangle$ est à chaque instant un état comprimé du vide à deux modes (algèbre SU(1,1))

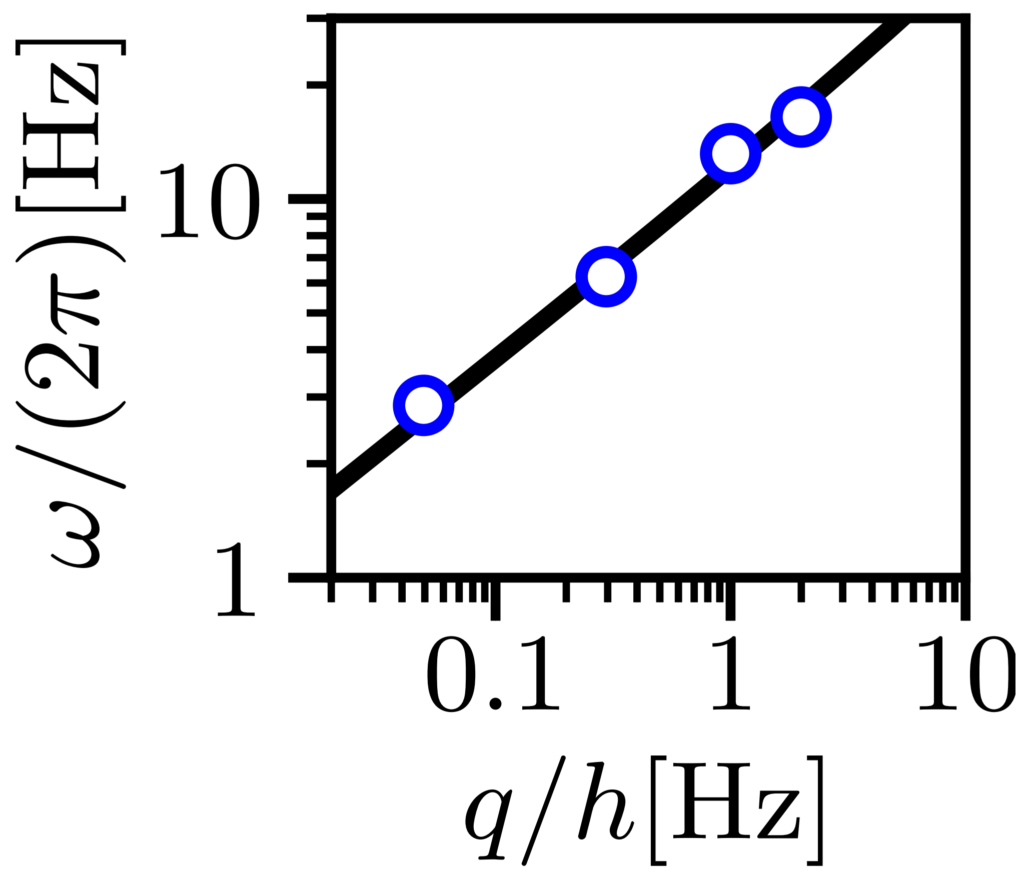
Hamiltonien quadratique : résolution exacte des équations du mouvement en point de vue de Heisenberg

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}a_{+1}}{\mathrm{d}t} = [a_{+1}, \hat{H}] = (q+U_s)a_{+1} + U_s a^\dagger_{-1} \qquad \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}a^\dagger_{-1}}{\mathrm{d}t} = [a^\dagger_{-1}, \hat{H}] = -(q+U_s)a^\dagger_{-1} - U_s a_{+1}$$

dont on déduit (*cf.* notes de cours) :

$$\bar{N}_p(t) = \left(\frac{U_s}{\hbar\omega}\right)^2 \sin^2(\omega t) \qquad \text{avec} \qquad \hbar\omega = \sqrt{q\,(q+2U_s)}$$

Très bon accord théorie-expérience



$$U_s/h = 17\,\mathrm{Hz}$$

Si $q \ll U_s$, on attend $\hbar\omega \approx \sqrt{2qU_s}$

Bilan provisoire…

Les résultats acquis

Par un développement systématique en puissances de $(N-N_0)/N$, on a obtenu un hamiltonien quadratique en $\{a_{\boldsymbol{k}}, a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\}$

$$\hat{H}' \;=\; \frac{N^2}{2L^3}\tilde{V}_0 \;+\; \sum_{\{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}\}} \left[\epsilon_k + n\tilde{V}_k\right]\left(a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}} + a^\dagger_{-\boldsymbol{k}}a_{-\boldsymbol{k}}\right) + n\tilde{V}_k\left(a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}} + a_{\boldsymbol{k}}a_{-\boldsymbol{k}}\right)$$

Cet hamiltonien fait apparaître une somme de termes indépendants, chacun portant sur une paire $(+\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k})$

Pour une paire donnée, on a su “diagonaliser” l’hamiltonien par une transformation canonique

$$\hat{H} \;=\; \hbar\omega_0\left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1\right) \;+\; \hbar\kappa\left(a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2\right) \xrightarrow{\;\omega=\sqrt{\omega_0^2-\kappa^2}\;} \hat{H} \;=\; \hbar\omega\left(b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2 + 1\right)$$

En particulier :
- *Abaissement de l’énergie du fondamental :* $\Delta E = \hbar(\omega-\omega_0) < 0$
- *Nombre moyen de paires dans le fondamental :* $\bar{n}_p = \dfrac{\omega_0-\omega}{2\omega}$

Ce qu'il reste à faire

Sommer les résultats obtenus ici pour chaque paire $(+\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k})$ sur l'ensemble des paires possibles

- Les sommes (infinies) sont-elles convergentes aux grands $\boldsymbol{k}$?

- Pour l'énergie : quelle est l'énergie de l'état fondamental du gaz de Bose en interaction (faible) ?

  Peut-on l'écrire en fonction de la longueur de diffusion a uniquement ? *Quel est le signe de ΔE ?*

- Pour le nombre de paires : quel est le nombre total d'atomes N' en dehors de l'état $\boldsymbol{k} = 0$?

  Ce nombre est-il petit devant N_0 comme supposé dans le cadre de l'approximation quadratique ?

Les réponses seront apportées :

- pour un potentiel $V(\boldsymbol{r})$ dans le cadre du développement de Born
- pour le pseudo-potentiel $\hat{V}_{\rm pp}$