

MAGISTÈRE INTERUNIVERSITAIRE DE PHYSIQUE

Examen du cours *Cohérence quantique et dissipation*, 24 novembre 2004, durée : 2 heures

Interaction avec un continuum “structuré” : de l’émission spontanée à l’oscillation de Rabi

Lorsqu’un “émetteur à deux niveaux” $|e\rangle, |g\rangle$ est couplé à un continuum de modes, le niveau supérieur $|e\rangle$ est instable. Dans ce problème, on étudie d’abord (partie A) les caractéristiques générales de la décroissance d’un état discret en fonction de la structure du continuum auquel il est couplé. On montre ensuite dans la partie B qu’il est possible d’augmenter le taux d’émission spontanée en plaçant l’émetteur dans une cavité résonnante dont les miroirs sont semi-transparents (effet Purcell). Dans la partie C, on étudie une réalisation expérimentale de la transition vers le régime de *couplage fort*, qui se produit quand l’interaction cohérente “émetteur – mode résonnant” est dominante.

A. Transition couplage faible-couplage fort

On considère un système d’hamiltonien H_0 , initialement dans l’état propre $|i\rangle$, d’énergie $\hbar\omega_i$. Cet état est couplé par l’hamiltonien \hat{V} à un ensemble d’états finals $\{|f\rangle\}$. Chaque état $|f\rangle$ est état propre de H_0 avec l’énergie $\hbar\omega_f$. Le vecteur d’état du système à l’instant t s’écrit

$$|\psi(t)\rangle = c_i(t)e^{-i\omega_i t} |i\rangle + \sum_f c_f(t)e^{-i\omega_f t} |f\rangle . \quad (1)$$

1. Donner l’équation intégral-différentielle satisfaite par $c_i(t)$. On suppose que les états finals ne sont pas couplés entre eux ($\langle f|\hat{V}|f'\rangle = 0$).
2. On suppose que la distribution d’états finals est un continuum infiniment large d’états d’énergie équidistants séparés de ϵ .

(a) Le couplage de $|i\rangle$ avec les états $|f\rangle$ est supposé constant et est noté $v = \langle f|\hat{V}|i\rangle$.

i. Montrer que la probabilité de trouver le système dans l’état $|i\rangle$ décroît exponentiellement et exprimer le taux de décroissance Γ en fonction des paramètres du problème. On rappelle $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t)$.

ii. Préciser la densité de modes du continuum et retrouver la règle d’or de Fermi.

(b) On considère maintenant le cas d’un continuum structuré tel que le couplage vaut

$$\langle f|\hat{V}|i\rangle = \frac{v}{1 + i\frac{E_f - E_i}{\hbar\Delta}} \quad \Delta > 0 . \quad (2)$$

i. Quelle est l’équation intégral-différentielle vérifiée par $c_i(t)$? On donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1 + (\omega/\Delta)^2} d\omega = \pi \Delta e^{-\Delta|t|} .$$

ii. Dériver l’équation obtenue et montrer que l’évolution de c_i est maintenant régie par l’équation différentielle linéaire :

$$\ddot{c}_i + \Delta \dot{c}_i + \frac{\Delta\Gamma}{2} c_i = 0 . \quad (3)$$

- iii. Résoudre l'équation (3). Discuter la forme des solutions obtenues selon que
 - $2\Gamma < \Delta$ (couplage faible);
 - $2\Gamma > \Delta$ (couplage fort).
- iv. Qu'obtient-on dans la limite $\Gamma \gg \Delta$?

3. Montrer sans calcul que le modèle de la question 2b s'applique également au cas d'un couplage constant ($\langle f | \hat{V} | i \rangle = v$) avec un continuum dont la densité de modes s'écrit

$$\rho(E_f) = \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{1 + \left(\frac{E_f - E_i}{\hbar\Delta}\right)^2}. \quad (4)$$

Pour quel domaine du paramètre Γ/Δ retrouve-t-on le régime prédit par la règle d'or de Fermi?

B. Emission spontanée dans l'espace libre ou en cavité

On considère dans cette partie un système à deux niveaux $|e\rangle$ et $|g\rangle$, appelé *émetteur*. La pulsation de la transition $e - g$ est notée ω_0 . Initialement préparé dans l'état excité $|e\rangle$, cet émetteur est placé dans un environnement électromagnétique caractérisé par une densité d'états $\rho(\omega)$. Le champ électromagnétique est supposé initialement dans son état fondamental, vide de photons. L'état initial du système "émetteur + champ" est donc $|i\rangle \equiv |e\rangle \otimes |0\rangle$.

Le couplage entre l'émetteur et un mode du champ de pulsation ω , caractérisé par les opérateurs de création et de destruction a^\dagger et a , est donné par l'hamiltonien *dipolaire-électrique*

$$\hat{V} = \hbar\kappa (a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+) \quad \sigma_+ = |e\rangle \langle g| \quad \sigma_- = |g\rangle \langle e| \quad (5)$$

et le facteur de couplage $\hbar\kappa$ s'écrit

$$\hbar\kappa = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} d \quad (6)$$

V est le volume du mode considéré et d est le dipôle de la transition.

N.B. Pour simplifier, on néglige les effets liés au caractère vectoriel du champ, et ceux liés à l'inhomogénéité du mode. Par ailleurs, on suppose dans toute cette partie B que la condition de validité de la règle d'or de Fermi (question A.3) est satisfaite.

1. L'émetteur est placé dans l'espace libre. Calculer le taux d'émission spontanée Γ_{libre} de l'émetteur. On rappelle la densité d'états pour le champ dans ce cas : $\rho(E) = E^2 V / (2\pi^2 \hbar^3 c^3)$.

N.B. La prise en compte du caractère vectoriel du champ et du dipôle multiplie ce résultat par un facteur 2/3.

2. **L'effet Purcell.** On plonge à présent l'émetteur dans une cavité dont la pulsation de résonance ω est égale à la pulsation ω_0 de l'émetteur. Les miroirs de la cavité ne sont pas parfaitement réfléchissants. Chaque mode de la cavité est donc lui-même couplé à un "réservoir" \mathcal{R} , constitué par les modes extérieurs à la cavité. On ne cherchera pas à décrire en détail ce couplage et on rendra simplement compte de son effet en attribuant une largeur finie $\Delta\omega$ à chaque mode de la cavité.

Pour le mode résonnant avec l'émetteur, on introduit le facteur de qualité de la cavité $Q = \omega_0/\Delta\omega$, où $\Delta\omega$ est la largeur totale à mi-hauteur de la courbe de résonance.

- (a) En se limitant au mode de pulsation ω_0 résonnant avec l'émetteur, donner la densité de modes du champ $\rho_{\text{cav}}(E)$, sachant qu'il s'agit d'une lorentzienne normée.
- (b) En déduire le taux d'émission spontanée $\Gamma_{\text{cav.}}$ de l'émetteur dans la cavité.
- (c) Montrer que l'on peut ainsi augmenter l'émission spontanée de l'émetteur. On caractérisera ce gain en fonction du *facteur de Purcell* F_p

$$F_p = \frac{\Gamma_{\text{cav.}}}{\Gamma_{\text{libre}}} \quad (7)$$

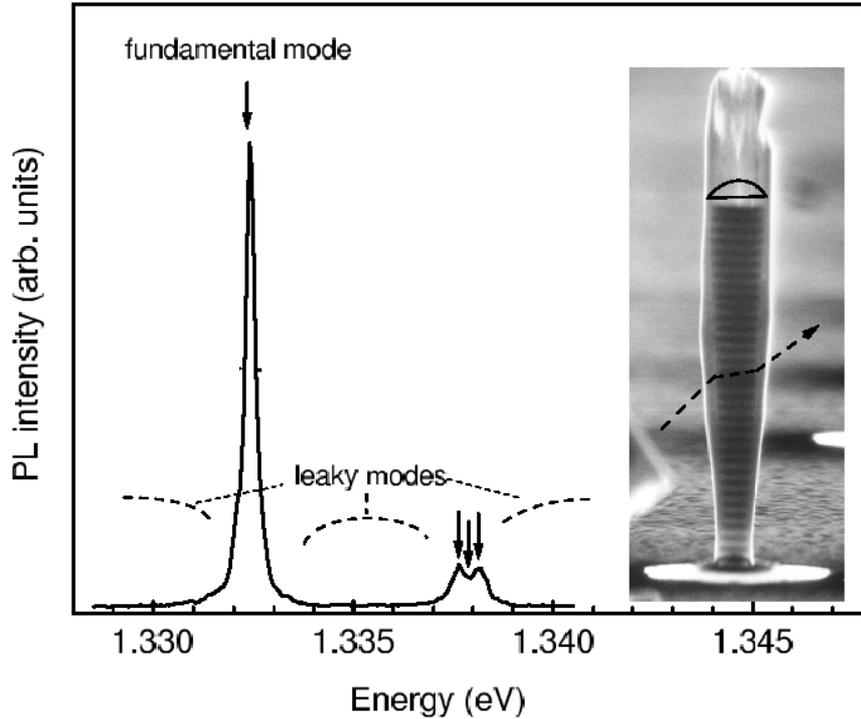


FIG. 1 – Courbe de résonance d’un micropilier de diamètre $3\ \mu\text{m}$, obtenu par J.-M. Gérard et son équipe (*Physica E* **9**, 131-139 (2001)). Ce micropilier est formé d’un empilement de semi-conducteurs formant des miroirs de Bragg. L’émetteur est situé au centre de ce micropilier.

- (d) Quelles sont les applications possibles de cet effet ? Comment peut-on faire varier expérimentalement le facteur de Purcell ?
3. Des expériences menées entre 1999 et 2001 ont montré l’effet Purcell d’un ensemble de boîtes quantiques dans une microcavité de type micropilier. Une photographie du micropilier ainsi que la courbe de résonance de son mode fondamental sont présentées sur la figure 1.
- (a) Estimer le facteur de qualité de la cavité.
- (b) Le volume du mode est de l’ordre de $V = 10\lambda^3$. En déduire le facteur de Purcell attendu.

C. Transition vers le couplage fort

Comme dans les questions B2 et B3, l’émetteur de pulsation ω_0 est placé dans une cavité électromagnétique dont un mode de pulsation ω est résonnant ou quasi-résonnant ($|\delta| \ll \omega_0$ avec $\delta = \omega - \omega_0$). On s’intéresse désormais au cas où le facteur de qualité de la cavité est très grand et on souhaite explorer des régimes non décrits par la règle d’or de Fermi.

On note $|e, n\rangle$ (resp. $|g, n\rangle$) l’état représentant l’émetteur dans l’état e (resp. $|g\rangle$) en présence de n photons dans le mode considéré.

1. On suppose d’abord que les miroirs de la cavité sont parfaitement réfléchissants ($Q = \infty$).
 - (a) Pour $\kappa = 0$, donner l’expression des énergies du système “atome – mode du champ” en fonction de ω et ω_0 .
 - (b) On prend maintenant $0 < \kappa \ll \omega_0$. Déterminer et tracer la position des niveaux d’énergie issus du sous-espace $\{|e, 0\rangle, |g, 1\rangle\}$ en fonction de δ .
 - (c) On se place strictement à résonance ($\delta = 0$) et on prépare le système dans l’état $|i\rangle = |e, 0\rangle$. Déterminer la probabilité de trouver le système dans ce même état à l’instant t .

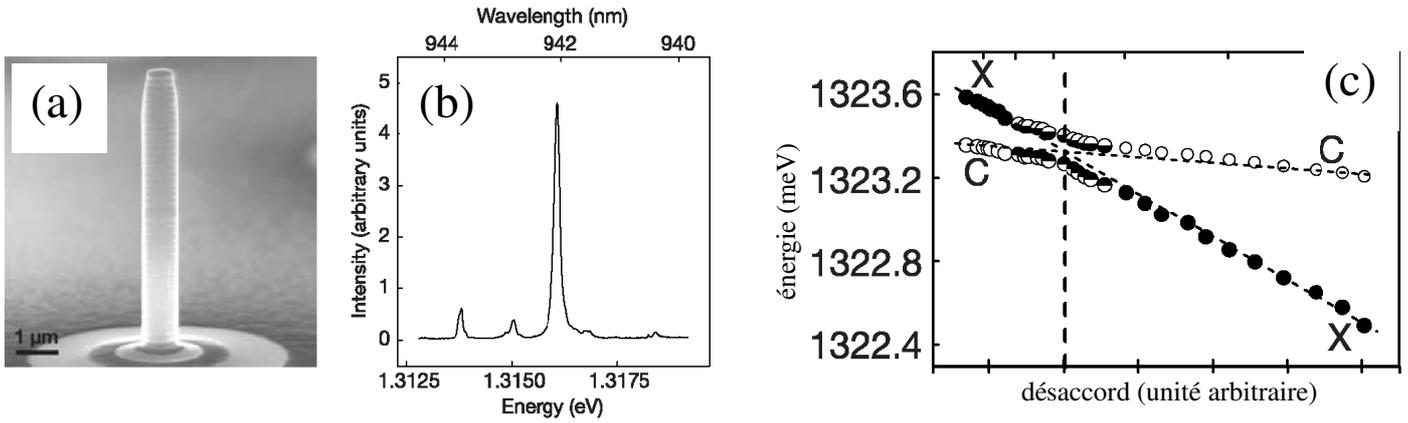


FIG. 2 – Micropilier de diamètre $0.8 \mu\text{m}$ (a) et sa courbe de résonance (b). L'émetteur est un point quantique situé au centre de ce pilier. (c) Positions des niveaux d'énergie du système "émetteur+mode résonnant" issus du sous-espace $\{|e, 0\rangle, |g, 1\rangle\}$, déterminées par photoluminescence. Ces données sont extraites de J.P. Reithmaier et al., *Nature* **432**, p. 197 (11 novembre 2004).

2. On considère maintenant une cavité réelle, avec un facteur Q grand, mais fini. On se place à résonance ($\delta = 0$).
 - (a) Relier les paramètres phénoménologiques ν , ϵ , Γ et Δ intervenant dans le modèle des questions A.2 et A.3 avec les paramètres physiques κ et $\Delta\omega$.
 - (b) Exprimer la condition de couplage fort ($2\Gamma > \Delta$) de la partie A en fonction de κ et $\Delta\omega$.
 - (c) Relier le comportement prédit en A dans le cas $\Gamma \gg \Delta$ avec celui trouvé dans la question C.1.c ci-dessus.

3. Le régime de couplage fort a été observé très récemment pour une boîte quantique dans un micropilier (figure 2a). La figure 2b représente la courbe de résonance de la cavité et la figure 2c la variation en fonction de δ des niveaux d'énergie issus du sous-espace $\{|e, 0\rangle, |g, 1\rangle\}$ (pour des raisons techniques, une fonction linéaire de δ est ajoutée au résultat de C.1.b).
 - (a) Estimer la largeur $\hbar \Delta\omega$ (en meV) et en déduire le facteur de qualité de la cavité.
 - (b) Estimer le facteur de couplage $\hbar\kappa$ (en meV).
 - (c) En déduire que le régime de couplage fort a été atteint et estimer le nombre d'oscillations de Rabi observables¹.

¹Les premiers effets de couplage fort entre un émetteur et un mode d'une cavité résonnante ont été observés sur des atomes de Rydberg traversant une cavité supraconductrice, par S. Haroche et son groupe (voir par exemple *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1800-1803 (1996)).