Magistère Interuniversitaire de Physique

Examen du cours *Cohérence quantique et dissipation*
Mercredi 16 novembre 2005, durée : 2 heures

Résonances noires et refroidissement subrecul

On considère dans ce problème un atome dont on modélise la structure interne par un système à trois états (voir figure 2). Les deux états g_1 et g_2, d'énergies respectives E_1 et E_2, sont stables et correspondent par exemple à deux sous-niveaux Zeeman du niveau d'énergie fondamental. L'état e, d'énergie E_e, est un état électronique excité, de durée de vie $\tau = \Gamma^{-1}$.

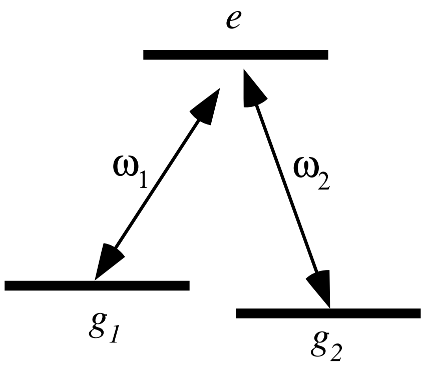

Fig. 1 – Le système à trois états considéré dans le problème

Cet atome est éclairé par deux ondes lumineuses monochromatiques. La première onde, de pulsation ω_1, excite la transition $g_1 \leftrightarrow e$; la deuxième onde, de pulsation ω_2, excite la transition $g_2 \leftrightarrow e$. On note $\delta_i = \omega_i - (E_e - E_i)/\hbar$, $(i = 1, 2)$ les désaccords respectifs de ces deux ondes.

Après « passage dans le référentiel tournant », l'hamiltonien de l'atome couplé aux ondes lumineuses s'écrit :

$$H = H_0 + V \qquad H_0 = \sum_{i=1,2} \hbar\delta_i \; |g_i\rangle\langle g_i| \qquad V = \sum_{i=1,2} \frac{\hbar\Omega_i}{2} \; (|g_i\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g_i|) \; . \tag{1}$$

Les quantités Ω_i sont les fréquences de Rabi associées aux deux ondes lumineuses, proportionnelles au carré du champ électrique de l'onde.

On décrit l'émission spontanée de photons par l'atome à l'aide de l'équation pilote vérifiée par la matrice densité atomique :

$$\dot{\rho}_{ii}|_{\text{em.spont.}} = \frac{\Gamma}{2}\rho_{ee} \qquad \dot{\rho}_{ie}|_{\text{em.spont.}} = -\frac{\Gamma}{2}\rho_{ie} \qquad \dot{\rho}_{12}|_{\text{em.spont.}} = 0 \qquad (i = 1, 2) \; ,$$

les autres termes s'en déduisant grâce aux propriétés canoniques de l'opérateur densité.

1. Evolution due à l'émission spontanée

Dans cette partie, on suppose que les ondes lumineuses ont une puissance nulle : $\Omega_i = 0$.

1.1. Quelle est l'évolution de la population de l'état excité ρ_{ee} sous l'effet de l'émission spontanée ?

1.2. L'atome est initialement dans l'état excité e. Quelle est la matrice densité correspondante ?

1.3. Déterminer la population de l'état excité à un instant t ultérieur.

1.4. En déduire la matrice densité à un temps $t \gg \Gamma^{-1}$.

1.5. Cette matrice densité correspond-elle à un cas pur ?

2. Evolution due aux ondes lumineuses

Dans cette partie, on néglige les phénomènes d'émission spontanée ($\Gamma = 0$). On pose $\Omega = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^{1/2}$ et on introduit les deux états :

$$|g_c\rangle = \frac{\Omega_1}{\Omega}|g_1\rangle + \frac{\Omega_2}{\Omega}|g_2\rangle \qquad\qquad |g_n\rangle = \frac{\Omega_2}{\Omega}|g_1\rangle - \frac{\Omega_1}{\Omega}|g_2\rangle \tag{2}$$

2.1. Quelle est l'action de V sur les états e, g_c et g_n ? Les indices 'c' et 'n' signifient respectivement *couplé* et *non couplé* ; justifier cette dénomination.

2.2. On suppose dans cette question que $\delta_1 = \delta_2$.

(a) L'atome est préparé dans l'état g_n à l'instant $t = 0$; quel est l'état de l'atome à l'instant t ?

(b) Indiquer qualitativement (i.e. sans faire de calcul) l'évolution de l'état de l'atome s'il est initialement préparé dans l'état g_c.

2.3. On suppose maintenant que $\delta_1 \neq \delta_2$. Le résultat trouvé précédemment pour un atome initialement préparé dans l'état g_n reste-t-il valable ?

3. Evolution sous l'effet combiné des ondes lumineuses et de l'émission spontanée

On suppose désormais que $\Omega_i \neq 0$ et $\Gamma \neq 0$.

3.1. Écrire l'évolution de la matrice densité sous l'effet de l'émission spontanée $\dot{\rho}|_{\text{em.spont.}}$ dans la base $\{e, g_n, g_c\}$.

3.2. On choisit $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Écrire l'évolution complète des trois populations ρ_{ee}, ρ_{nn}, ρ_{cc}. On montrera par exemple :

$$\dot{\rho}_{ee} = -\Gamma\rho_{ee} + i\frac{\Omega}{2}(\rho_{ec} - \rho_{ce})$$

Que vaut $\dot{\rho}_{ee} + \dot{\rho}_{cc} + \dot{\rho}_{nn}$?

3.3. Toujours pour $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, écrire l'évolution des trois cohérences ρ_{ec}, ρ_{en}, ρ_{cn}. On montrera par exemple :

$$\dot{\rho}_{ec} = (i\delta - \frac{\Gamma}{2})\rho_{ec} + i\frac{\Omega}{2}(\rho_{ee} - \rho_{cc})$$

3.4. Déterminer l'état stationnaire de l'équation pilote pour le cas particulier $\delta_1 = \delta_2$. Pour cela, on pourra montrer successivement que *dans l'état stationnaire* :

1. la cohérence ρ_{ec} est reliée à la population de l'état couplé ρ_{cc} par :

$$\rho_{ec} = \frac{\Omega}{2\delta + i\Gamma}\rho_{cc} \ ,$$

2. les deux cohérences ρ_{ec} et ρ_{ce} sont égales : $\rho_{ec} = \rho_{ce}$.

En déduire la valeur du taux d'émission de photons de fluorescence $\Gamma\rho_{ee}$ pour cet état stationnaire.

3.5. Sans mener de calculs compliqués, indiquer si la propriété remarquable trouvée pour l'état stationnaire dans le cas $\delta_1 = \delta_2$ se généralise au cas où les deux désaccords sont différents.

3.6. Dans une expérience[1] menée à Pise par A. Gozzini et ses collaborateurs en 1975, une vapeur de sodium (atomes correspondant au schéma étudié ci-dessus) est éclairée par des faisceaux laser de pulsation ω_1 et ω_2, quasi-résonnants avec la raie jaune (D2) du sodium (λ=589 nm). Ces faisceaux se propagent dans le même sens le long de l'axe Ox. Les atomes sont placés dans un gradient de champ magnétique de telle sorte que la différence d'énergie $E_1 - E_2$ entre deux sous-niveaux Zeeman du niveau d'énergie fondamental dépend du point x. Un phénomène baptisé *résonance noire* a alors été observé : à une abscisse x donnée, la fluorescence des atomes s'éteint (voir figure de principe ci-dessous).
Interpréter ce résultat et caractériser le point où la zone sombre est observée. Expliquer pourquoi l'effet Doppler ne joue pas de rôle dans cette interprétation.

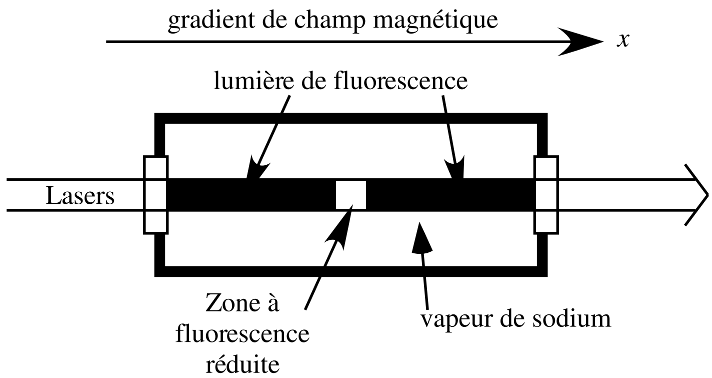

Fig. 2 – Le principe de l'expérience mettant en évidence les *résonances noires*.

[1] G. Alzetta *et al.*, Nuovo Cimento **B36**, 5 (1976).

4. Le refroidissement par résonances noires

On suppose dans cette partie que les atomes peuvent se déplacer le long de l'axe x et que les deux ondes 1 et 2 se propagent en sens inverse le long de cet axe. On traite classiquement le mouvement du centre de masse de l'atome et on note v sa vitesse. En raison de l'effet Doppler, les désaccords δ_1 et δ_2 s'écrivent donc $\delta_1 = \delta_1^{(0)} - kv$ et $\delta_2 = \delta_2^{(0)} + kv$.

On prendra dans ce qui suit $\delta_1^{(0)} = \delta_2^{(0)} = 0$.

4.1. On considère un atome de vitesse rigoureusement nulle et on suppose que sa matrice densité interne a atteint son état stationnaire. Comment évolue la vitesse de l'atome ?

4.2. On considère maintenant un atome de vitesse v non nulle à un instant donné. La vitesse atomique va-t-elle rester indéfiniment égale à v ?

4.3. On modélise le mouvement de l'atome par une marche au hasard dans l'espace des vitesses. Si l'atome a la vitesse v à l'instant t, il peut prendre une vitesse v' aléatoire à l'instant $t + dt$. Cette vitesse v' est située dans l'intervalle $[v - 2v_{\text{rec}}, v + 2v_{\text{rec}}]$, où $v_{\text{rec}} = \hbar k/M$ ($\hbar k$ est l'impulsion d'un photon et M la masse de l'atome). La probabilité de saut pendant l'intervalle de temps $[t, t + dt]$ est notée $G(v)\ dt$, et on suppose que $G(0) = 0$. En quoi ce modèle reproduit-il la physique du problème ?

4.4. Indiquer qualitativement comment la distribution en vitesse de l'atome va évoluer. Y a-t-il une largeur minimale au pic étroit susceptible d'apparaître dans cette distribution en vitesse ?

4.5. La notion de *vitesse atomique* utilisée dans cette partie vous semble-t-elle légitime ? Comment pourrait-on améliorer la description de la dynamique de l'atome ?