

FORMATION INTERUNIVERSITAIRE DE PHYSIQUE

Examen du cours *Cohérence quantique et dissipation*

Vendredi 1 décembre 2006, durée : 2 heures

Sauts quantiques dans un piège de Penning

On étudie dans ce problème la mesure du mouvement cyclotron d'un électron. La particule est confinée dans un piège de Penning et couplée au rayonnement thermique, ce qui provoque des sauts quantiques entre les différents niveaux d'énergie. Dans tout le problème, on néglige les effets associés au spin de l'électron.

Le piège de Penning consiste en la superposition d'un champ magnétique uniforme $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ ($B > 0$) et d'un champ électrostatique qui dérive du potentiel $\Phi(\mathbf{r})$:

$$q\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}M\omega_z^2 \left(z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) . \quad (1)$$

Les quantités M et q ($q < 0$) représentent respectivement la masse et la charge de l'électron. La quantité positive ω_z a la dimension d'une pulsation. Dans tout ce problème, on posera $\omega_c = |q|B/M$ (ω_c est appelée *pulsation cyclotron*) et on supposera que $\omega_z \ll \omega_c$.

1. Le mouvement quantique dans un piège de Penning

On note $\hat{\mathbf{r}}$ et $\hat{\mathbf{p}}$ les opérateurs position et impulsion pour l'électron. L'hamiltonien décrivant le mouvement quantique de cet électron dans le piège de Penning s'écrit :

$$\hat{H} = \frac{1}{2M} (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2 + q\Phi(\hat{\mathbf{r}}) ,$$

Pour le potentiel vecteur magnétique, on choisit la forme : $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$.

1.1. Développer l'hamiltonien et montrer qu'il peut s'écrire $\hat{H} = \hat{H}_{xy} + \hat{H}_z$, où \hat{H}_{xy} ne fait intervenir que les opérateurs \hat{x} , \hat{y} , \hat{p}_x et \hat{p}_y , et \hat{H}_z ne fait intervenir que les opérateurs \hat{z} et \hat{p}_z .

1.2. On s'intéresse dans cette question au mouvement selon z , appelé *mouvement axial*. Rappeler sans démonstration l'expression des opérateurs \hat{a}_z et \hat{a}_z^\dagger permettant d'écrire \hat{H}_z sous la forme $\hat{H}_z = \hbar\omega_z (\hat{N}_z + 1/2)$ avec $\hat{N}_z = \hat{a}_z^\dagger \hat{a}_z$ et $[\hat{a}_z, \hat{a}_z^\dagger] = 1$; rappeler également les valeurs propres de \hat{N}_z et \hat{H}_z .

1.3. On étudie ici le mouvement dans le plan xy sous l'effet de l'hamiltonien \hat{H}_{xy} . On pose $\Omega = \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}/2$. On introduit les deux opérateurs d'annihilation gauche et droit \hat{a}_d et \hat{a}_g :

$$\hat{a}_d = \sqrt{\frac{M\Omega}{4\hbar}} (\hat{x} - i\hat{y}) + \frac{i}{\sqrt{4\hbar M\Omega}} (\hat{p}_x - i\hat{p}_y) \quad \hat{a}_g = \sqrt{\frac{M\Omega}{4\hbar}} (\hat{x} + i\hat{y}) + \frac{i}{\sqrt{4\hbar M\Omega}} (\hat{p}_x + i\hat{p}_y) .$$

- (a) Montrer que $[\hat{a}_d, \hat{a}_d^\dagger] = 1$. On admettra de même que $[\hat{a}_g, \hat{a}_g^\dagger] = 1$.
 (b) Montrer que $[\hat{a}_d, \hat{a}_g^\dagger] = 0$. On admettra plus généralement que tout opérateur gauche commute avec tout opérateur droit, c'est-à-dire :

$$[\hat{a}_d, \hat{a}_g] = 0 \quad [\hat{a}_d, \hat{a}_g^\dagger] = 0 \quad [\hat{a}_d^\dagger, \hat{a}_g] = 0 \quad [\hat{a}_d^\dagger, \hat{a}_g^\dagger] = 0 .$$

- (c) Rappeler sans démonstration les valeurs propres de $\hat{N}_d = \hat{a}_d^\dagger \hat{a}_d$ et $\hat{N}_g = \hat{a}_g^\dagger \hat{a}_g$. Existe-t-il une base propre commune à \hat{N}_d et \hat{N}_g ?
 (d) Montrer que l'hamiltonien \hat{H}_{xy} s'écrit : $\hat{H}_{xy} = \hbar\omega_d (\hat{N}_d + 1/2) - \hbar\omega_g (\hat{N}_g + 1/2)$, où les pulsations ω_d et ω_g sont données par :

$$\omega_d = \frac{\omega_c}{2} + \Omega \quad \omega_g = \frac{\omega_c}{2} - \Omega$$

- (e) Montrer que $\omega_d \simeq \omega_c$ et $\omega_g \simeq \omega_c^2/(2\omega_c)$.
 (f) Donner les valeurs propres de l'hamiltonien \hat{H}_{xy} .

Dans ce qui suit, on appellera mouvement cyclotron et mouvement magnétron la dynamique associée respectivement aux termes $\hbar\omega_d \hat{N}_d$ et $\hbar\omega_g \hat{N}_g$.

1.4. On prend $B = 5,3$ T et $\omega_z/(2\pi) = 64$ MHz. Calculer la fréquence de chaque mouvement.

1.5. On note $|\phi_0\rangle$ l'état propre de \hat{H} associé à la valeur propre 0 pour chacun des trois opérateurs \hat{N}_d , \hat{N}_g et \hat{N}_z . En reprenant les valeurs numériques de la question 1.4, évaluer l'extension spatiale de $\phi_0(\mathbf{r})$.

1.6. L'expérience est faite pour des températures T variant entre 0,1 K et 4 K. Comparer l'énergie thermique caractéristique $k_B T$ à chacun des quanta d'énergie des mouvements *cyclotron*, *axial* et *magnétron*. Pour le(s)quel(s) de ce(s) mouvement(s) le caractère discret du spectre d'énergie joue-t-il un rôle important ?

2. Relaxation thermique d'un oscillateur harmonique

On s'intéresse dans cette partie à l'évolution d'un oscillateur harmonique d'hamiltonien $\hat{H}_0 = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2)$, quand il est couplé à un réservoir à température T . On supposera que l'équation pilote est de la forme :

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i\omega[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2}(\bar{N} + 1) (2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger \hat{a}) + \frac{\gamma}{2}\bar{N} (2\hat{a}^\dagger \hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger \hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger)$$

où le taux de relaxation γ caractérise la force du couplage entre l'oscillateur et le réservoir, et où $\bar{N} = (e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1)^{-1}$ (loi de Bose-Einstein pour le réservoir).

2.1. Écrire l'équation d'évolution des populations $P(n) = \langle n|\rho|n\rangle$ des états propres de l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique. On ne cherchera pas à résoudre cette équation dans le cas général.

2.2. Montrer que la solution stationnaire pour l'évolution des populations est de la forme $P_{\text{stat}}(n) = P_{\text{stat}}(0) \lambda^n$, où λ est un nombre qu'on exprimera en fonction des paramètres du problème.

2.3. Déterminer $P_{\text{stat}}(0)$.

2.4. Donner le nombre moyen d'excitations $\bar{n} = \sum_n n P_{\text{stat}}(n)$ et commenter le résultat.

2.5. On suppose qu'on peut mesurer « continument » l'état de l'oscillateur. Le mot « continument » signifie dans ce contexte que l'intervalle de temps entre deux mesures successives est petit devant γ^{-1} (cet intervalle de temps reste néanmoins grand devant le temps de corrélation du réservoir, ce qui permet de négliger l'effet Zénon). Tracer l'allure typique des résultats d'une série de mesure menées sur un oscillateur unique, pour un temps total de mesure recouvrant plusieurs γ^{-1} . On prendra $k_B T \sim \hbar \omega$.

3. Mesure « continue » du mouvement cyclotron

On étudie dans cette partie une méthode de détection du mouvement cyclotron. Cette méthode utilise un petit couplage entre ce mouvement et le mouvement axial. Ce couplage est induit par un champ magnétique inhomogène et on le décrit par l'hamiltonien additionnel :

$$\hat{W} = \frac{\epsilon}{2} M \omega_z^2 \hat{N}_d \hat{z}^2 .$$

Les conditions expérimentales sont choisies pour avoir $\epsilon = 4 \times 10^{-7}$.

3.1. Écrire l'hamiltonien $\hat{H}_c = \hat{H} + \hat{W}$ en fonction de \hat{N}_d , \hat{N}_g , \hat{p}_z et \hat{z} .

3.2. Expliquer pourquoi les nombres d'excitations du mouvement cyclotron (\hat{N}_d) et du mouvement magnétron (\hat{N}_g) sont des constantes du mouvement.

3.3. Montrer que les états propres de \hat{H}_c peuvent être repérés par trois nombres quantiques n_d, n_g, n_z . On notera ces états $|n_d, n_g, n_z\rangle$. Donner les valeurs propres de l'énergie en fonction de n_d, n_g, n_z et de $\omega_d, \omega_g, \omega_z$ et ϵ .

3.4. On mesure le battement entre le courant induit dans le circuit électrique par le mouvement axial, proportionnel à $\langle p_z \rangle_t$, et un oscillateur de haute stabilité, de fréquence $\omega_z/(2\pi)$ fournissant un signal proportionnel à $\sin(\omega_z t)$.

(a) Déterminer l'évolution des valeurs moyennes des opérateurs position \hat{z} et impulsion \hat{p}_z en supposant que l'état de l'électron est dans le sous-espace propre \mathcal{E}_{n_d, n_g} de \hat{N}_d et \hat{N}_g , associé aux valeurs propres n_d et n_g . On prendra $\langle \hat{z} \rangle_0 = z_0$ et $\langle \hat{p}_z \rangle_0 = 0$.

(b) Quel est, au premier ordre en ϵ , le déphasage φ entre le courant détecté et l'oscillateur après une durée τ ? Montrer que la mesure de ce déphasage conduit à une mesure du nombre d'excitation du mouvement cyclotron.

3.5. On procède à des mesures successives du déphasage φ au cours des intervalles $[0, \tau]$, $[\tau, 2\tau]$, \dots , $[(N-1)\tau, N\tau]$. La durée totale $N\tau$ de cette série de mesures pour une température T donnée est de $N\tau = 3000$ secondes, soit un nombre total de résultats de mesure $N = 3 \times 10^4$ pour $\tau = 0,1$ s. On peut suivre ainsi la variation de n_d pendant la durée $N\tau$, avec une résolution en temps égale à τ .

(a) Deux enregistrements de cette mesure sont représentés sur la figure 1 pour deux températures différentes. Commenter ces enregistrements en précisant en particulier la fraction

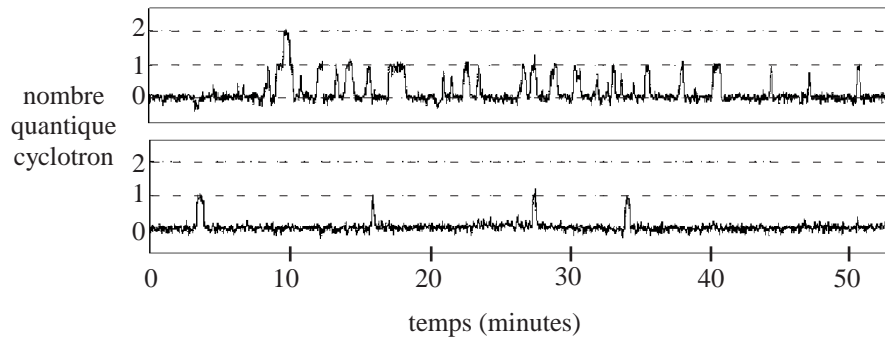


FIG. 1 – Evolution temporelle du nombre quantique n_d associé au mouvement cyclotron pour deux températures T_a et T_b .

du temps pendant laquelle l'électron se trouve dans les niveaux $n_d = 0, n_d = 1, n_d = 2, \dots$ (la précision obtenue en utilisant une règle graduée ordinaire est suffisante).

(b) Estimer les températures correspondant aux deux enregistrements de la figure 1.

3.6. Quel est l'ordre de grandeur de la plus basse température que l'on peut mesurer avec ce dispositif? Comment pourrait-on améliorer encore la sensibilité de ce « thermomètre quantique »?

Pour en savoir plus

S. Peil and G. Gabrielse, *Observing the Quantum Limit of an Electron Cyclotron : QND Measurements of Quantum Jumps between Fock States*, Phys. Rev. Lett. **83**, p. 1287 (1999).