Formation Interuniversitaire de Physique

Examen du cours *Cohérence quantique et dissipation*
Vendredi 7 décembre 2007, durée : 2 heures

La superradiance

On considère ici une situation où plusieurs atomes similaires discernables sont regroupés dans un domaine dont l'extension est de l'ordre de la longueur d'onde de résonance. On cherche à montrer que la loi habituelle régissant le phénomène d'émission spontanée est modifiée, et à mettre en évidence le phénomène de « superradiance », c'est-à-dire d'accélération de la désexcitation. On s'intéresse d'abord au cas de deux atomes, puis d'un nombre $N \gg 1$.

Dans tout le problème on posera $\hbar = 1$.

1. Le cas de deux atomes

On considère deux atomes $j = 1, 2$, qu'on modélise chacun par un système à deux niveaux $\{|g_j\rangle, |e_j\rangle\}$. Les états fondamentaux g_j sont stables, alors que l'atome j placé dans l'état e_j peut retomber dans l'état fondamental g_j par émission spontanée d'un photon, avec une durée de vie Γ^{-1}. Les atomes sont supposés fixes, et on note $\vec{r}_i$ leur position.

L'hamiltonien du système « atomes + champ électromagnétique » est modélisé par

$$\begin{aligned}
H &= H_{\text{atomes}} + H_{\text{champ}} + V && (1)\\
H_{\text{atomes}} &= \omega_0\,(\hat{P}_1 + \hat{P}_2) && (2)\\
H_{\text{champ}} &= \sum_{\vec{k}} \omega\, \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} && (3)\\
V &= \sum_{\vec{k}} g_k \left\{ \hat{a}_{\vec{k}} \left(\hat{S}_{1,+} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_1} + \hat{S}_{2,+} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_2} \right) + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \left(\hat{S}_{1,-} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_1} + \hat{S}_{2,-} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_2} \right) \right\} . && (4)
\end{aligned}$$

L'opérateur $\hat{P}_j$ désigne le projecteur $|e_j\rangle\langle e_j|$ et $\hat{S}_{j,+} = |e_j\rangle\langle g_j|$, $\hat{S}_{j,-} = |g_j\rangle\langle e_j|$. Chaque mode du champ électromagnétique est repéré par son vecteur d'onde $\vec{k}$, avec $\omega = ck$, et on ne tient pas compte de la polarisation dans ce modèle simple ; $\hat{a}_{\vec{k}}$ et $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}$ désignent les opérateurs création et destruction d'un photon du mode $\vec{k}$. On n'explicitera pas les coefficients de couplage g_k, supposés réels et fonctions de $|\vec{k}|$ uniquement.

On considère la situation initiale où un atome est dans l'état excité et l'autre dans l'état fondamental, le champ étant dans l'état « vide de photons », par exemple

$$|\Psi(0)\rangle = |e_1, g_2, 0\rangle \ . \qquad (5)$$

1.1. En utilisant la forme de l'hamiltonien ci-dessus, justifier qu'on peut chercher le vecteur d'état à l'instant t sous la forme

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha_1(t)\ e^{-i\omega_0 t}\ |e_1, g_2, 0\rangle + \alpha_2(t)\ e^{-i\omega_0 t}\ |g_1, e_2, 0\rangle + \sum_{\vec{k}} \beta_{\vec{k}}(t)\ e^{-i\omega t}\ |g_1, g_2, \vec{k}\rangle\ . \tag{6}$$

1.2. Écrire l'équation d'évolution de $\beta_{\vec{k}}$ en fonction des α_j. Intégrer cette équation pour la mettre sous la forme

$$\beta_{\vec{k}}(t) = -i g_k \sum_{j=1,2} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_j} \int_0^t e^{i(\omega-\omega_0)t'} \alpha_j(t')\ dt'\ . \tag{7}$$

1.3. Écrire l'équation d'évolution de α_j en fonction des $\beta_{\vec{k}}$. En reportant l'expression (7) obtenue ci-dessus, en déduire un système intégro-différentiel pour α_1, α_2. On posera $\vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ et

$$\mathcal{M}(\tau) = \sum_{\vec{k}} g_k^2\ e^{i(\omega_0-\omega)\tau}\ , \qquad \mathcal{N}(\tau, \vec{r}) = \sum_{\vec{k}} g_k^2\ e^{i(\omega_0-\omega)\tau} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\ . \tag{8}$$

1.4. On remplace dans $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ la somme sur $\vec{k}$ par une intégrale et on passe en coordonnées sphériques d'axe $\vec{d}$. Effectuer explicitement l'intégrale angulaire intervenant dans $\mathcal{N}(\tau, \vec{r})$. En supposant que les k qui contribuent significativement à l'intégrale radiale sont de l'ordre de $k_0 = \omega_0/c$, en déduire que

$$\mathcal{N}(\tau, r) \simeq \mathcal{M}(\tau)\ \frac{\sin(k_0 r)}{k_0 r}\ . \tag{9}$$

1.5. Atomes lointains : $k_0 d \gg 1$. Montrer que l'émission spontanée de chaque atome n'est que très peu perturbée par la présence de l'autre atome. Interpréter physiquement ce résultat. On pourra prendre pour simplifier

$$\mathcal{M}(\tau) = \Gamma\ \delta(\tau)\ . \tag{10}$$

1.6. Atomes proches : $k_0 d \ll 1$. En utilisant (10), montrer que l'évolution des α_i est donnée dans cette limite par

$$\dot{\alpha}_1 = -\frac{\Gamma}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\ , \qquad \dot{\alpha}_2 = -\frac{\Gamma}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\ . \tag{11}$$

Discuter la décroissance possible des deux états initiaux

$$|\Psi_\pm(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_1, g_2\rangle \pm |g_1, e_2\rangle\right) \otimes |0\rangle\ . \tag{12}$$

Interpréter physiquement ce résultat. Pouvait-on a priori le prévoir à partir de la forme (4) du couplage atomes-rayonnement ?

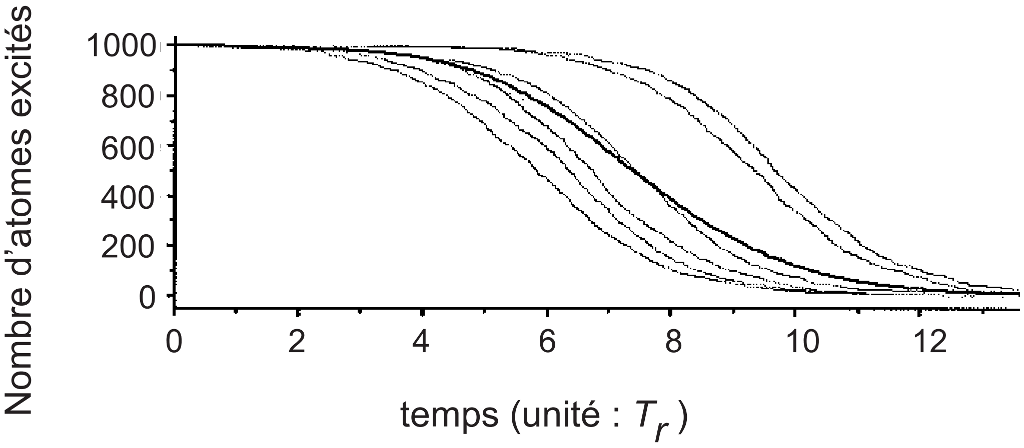

FIG. 1 – Six simulations Monte-Carlo (traits fins), et valeur moyenne sur 10 000 trajectoires (trait épais) pour l'émission collective de 1000 atomes. Figure tirée de *Exploring the quantum*, S. Haroche and J.-M. Raimond, Oxford Graduate Texts, 2006.

2. Le cas de $N \gg 1$ atomes

On considère maintenant une assemblée de N atomes. Ces atomes sont tous localisés au voisinage de l'origine $\vec{r} = 0$, dans un volume d'extension petite devant k_0^{-1}. Le couplage atomes-champ s'écrit alors

$$\hat{V} = \sum_{\vec{k}} g_k \left(\hat{a}_{\vec{k}}\, \hat{J}_+ + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{J}_- \right) \qquad \hat{J}_+ = \sum_{j=1}^{N} \hat{S}_{j,+} \qquad \hat{J}_- = \sum_{j=1}^{N} \hat{S}_{j,-}\ . \tag{13}$$

L'hamiltonien des atomes se met sous la forme

$$H_{\text{atomes}} = \omega_0 \hat{J}_z \; + \; \frac{N\omega_0}{2} \qquad \hat{J}_z = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} |e_j\rangle\langle e_j| - |g_j\rangle\langle g_j| \tag{14}$$

2.1. On pose $\hat{J}_x = (\hat{J}_+ + \hat{J}_-)/2$ et $\hat{J}_y = i(\hat{J}_- - \hat{J}_+)/2$. Montrer que $\left\{\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z\right\}$ vérifient les relations de commutation canoniques pour une observable de moment cinétique.

2.2. On pose $J = N/2$ et on note $|J, M\rangle$ les états propres communs de $\hat{J}^2$ et $\hat{J}_z$, avec en particulier $\hat{J}_z|J, M\rangle = M|J, M\rangle$, $\hat{J}_\pm|J, M\rangle = \sqrt{J(J+1) - M(M \pm 1)}|J, M \pm 1\rangle$.

(a) Expliquer pourquoi l'état $|J, J\rangle$ correspond à la situation où tous les atomes sont dans leur état excité e_i.

(b) A quoi correspond l'état $|J, -J\rangle$?

(c) En déduire la signification physique de l'état $|J, M\rangle$.

(d) Pour $N = 2$ (c'est-à-dire $J = 1$) relier $|J = 1, M = 0\rangle$ à un des deux états atomiques introduits en (12).

2.3. La relaxation de cette assemblée d'atomes par émission spontanée se décrit par l'équation pilote pour l'opérateur densité atomique $\hat{\rho}$

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \Gamma\ \hat{J}_-\hat{\rho}\hat{J}_+ \ - \ \frac{\Gamma}{2}\left(\hat{J}_+\hat{J}_-\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{J}_+\hat{J}_-\right) \tag{15}$$

En déduire l'équation d'évolution de la population P_M de l'état $|J, M\rangle$. On montrera en particulier qu'on peut définir un taux de transfert $\Gamma_{M\to M-1}$ qu'on calculera en fonction de J, M et Γ.

2.4. Le système est préparé initialement dans l'état où tous les atomes sont excités.

(a) Quel est le temps moyen pour l'émission du premier photon ?

(b) Même question pour le deuxième photon, une fois que le premier photon a été émis.

(c) Évaluer le temps moyen nécessaire pour l'émission de $N/2$ photons. On exprimera le résultat en fonction de $T_r = 1/(N\Gamma)$ et on pourra utiliser

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{q} \simeq \ln(q) \qquad \text{pour } q \gg 1$$

(d) Évaluer la dispersion du temps correspondant à cette émission de $N/2$ photons, en considérant ces émissions comme des processus aléatoires indépendants. On rappelle

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2.5. Six « trajectoires » Monte-Carlo dans le cas $N = 1000$ sont représentées sur la figure 1, ainsi que la moyenne sur 10000 trajectoires. Commenter cette figure et retrouver les prédictions faites aux questions précédentes.