

CONTRÔLE NON CLASSANT DU COURS DE PHYSIQUE PHY 311

Mercredi 11 juillet 2007, durée : 2 heures

Documents autorisés : cours, recueil de problèmes, copies des diapositives montrées en cours, énoncés et corrigés de PC, notes personnelles.

Les trois parties du problème sont de difficulté croissante, mais il est possible de progresser en admettant les résultats de certains calculs, qui sont donnés dans l'énoncé.

Il est rappelé qu'une présentation soignée et une rédaction claire ont une influence favorable sur le correcteur.

Électron flottant sur de l'hélium liquide.

On considère un électron de masse m et de charge q , en mouvement à la surface d'un bain d'hélium liquide (figure 1). On suppose que le mouvement de l'électron dans le plan Oxy de la surface est limité par des électrodes non représentées sur la figure. On ne s'intéresse dans ce problème qu'au mouvement dans la direction z perpendiculaire à la surface.



Figure 1: Géométrie du dispositif.

1 La quantification du mouvement de l'électron

1.1. Le potentiel d'interaction entre l'électron et l'hélium liquide est supposé infini si l'électron est à l'intérieur du liquide ($z < 0$). En déduire la valeur de la fonction d'onde $\psi(z, t)$ de l'électron pour $z < 0$, et rappeler la condition de continuité de $\psi(z, t)$ en $z = 0$.

1.2. Quand l'électron est placé dans le demi-espace $z \geq 0$, il possède une énergie potentielle d'origine électrostatique, due à son interaction avec son "image" électrique dans l'hélium. Cette énergie a pour expression

$$V(z) = -\frac{\Lambda}{z} \quad \text{avec} \quad \Lambda = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\epsilon - 1}{4(\epsilon + 1)},$$

où ϵ est la constante diélectrique de l'hélium.

Rappeler l'équation qui régit l'évolution temporelle de la fonction d'onde $\psi(z, t)$ de l'électron.

1.3. On cherche les solutions stationnaires de cette équation sous la forme $\psi(z, t) = \phi(z) e^{-iEt/\hbar}$. Donner sans démonstration l'équation vérifiée par $\phi(z)$ (équation de Schrödinger indépendante du temps). Dans la suite, on notera E_n , où n est un entier strictement positif, les énergies négatives (états liés) pour lesquelles cette équation admet une solution.

1.4. Recherche de l'état fondamental.

On se donne pour $z \geq 0$ la fonction d'onde $\phi_1(z) = c_1 z e^{-\kappa_1 z}$, où c_1 et κ_1 sont des nombres réels strictement positifs.

- Déterminer le coefficient κ_1 et l'énergie E_1 tels que ϕ_1 soit solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps. On exprimera κ_1 et E_1 en fonction de m , Λ et \hbar .
- Combien de fois la fonction $\phi_1(z)$ change-t-elle de signe sur l'intervalle $[0, +\infty[$?
En déduire que $\phi_1(z)$ décrit l'état fondamental du système.
- Déterminer c_1 (en fonction de κ_1) pour que $\phi_1(z)$ soit normalisée.
On donne $\int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = n!$.
- Déterminer la valeur moyenne $z_1 = \langle z \rangle$ pour un électron préparé dans l'état $\phi_1(z)$. On exprimera le résultat en fonction de m , Λ et \hbar .
- On rappelle la masse et la charge de l'électron : $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg et $q = -1.6 \times 10^{-19}$ C.
On donne également $(4\pi\epsilon_0)^{-1} = 9 \times 10^9$ J.m.C⁻² et $\epsilon \approx 1.057$.
Calculer l'énergie E_1 (en Joule, puis en milli-électronVolt) et l'extension z_1 (en nanomètres) de la fonction d'onde $\phi_1(z)$.

1.5. Recherche du premier état excité.

On considère maintenant la fonction d'onde normalisée $\phi_2(z) = c_2 z (1 - \kappa_2 z) e^{-\kappa_2 z}$, où c_2 et κ_2 sont des nombres réels strictement positifs. On ne cherchera pas à calculer c_2 .

- Déterminer le coefficient κ_2 et l'énergie E_2 tels que ϕ_2 soit solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps.
- Vérifier la relation $E_2 = E_1/4$. Donner en GHz les fréquences $\nu_1 = |E_1|/h$, $\nu_2 = |E_2|/h$, ainsi que la fréquence ν correspondant à la transition $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$, définie par $h\nu = |E_1 - E_2|$.
- Justifier que ϕ_2 correspond au premier état excité du mouvement de l'électron le long de l'axe Oz .

2 Action d'un champ électrique et absorption de rayonnement

On applique sur le système un champ électrique uniforme $\mathcal{E} > 0$, indépendant du temps, orienté suivant Oz , au moyen d'une paire d'électrodes parallèles à la surface du liquide (figure 2). La différence de potentiel entre les électrodes est notée U et la distance entre électrodes est $\ell = 4$ mm. On a $\mathcal{E} = U/\ell$.

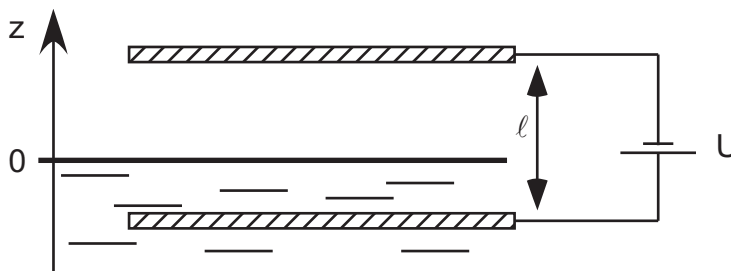


Figure 2: Une tension positive U tend à comprimer les électrons sur la surface de l'hélium, ce qui modifie la position des niveaux d'énergie E_j , $j = 1, 2, \dots$

En plus du champ constant précédent, on envoie une onde électromagnétique de fréquence ν sur l'électron piégé et on mesure la fréquence $\nu_{1 \rightarrow 2}$ qui induit la transition entre les deux niveaux d'énergie les plus bas. On trouve

U (Volt)	ν (GHz)
0	118
50	220

On utilise dans cette partie les notations de Dirac, et on introduit en particulier les kets $|\phi_j\rangle$, $j = 1, 2$ correspondant aux fonctions d'onde $\phi_j(z)$ vues dans la première partie.

2.1. En utilisant les résultats de la première partie, expliquer le résultat obtenu pour $U = 0$.

2.2. La présence du champ électrique \mathcal{E} ajoute l'énergie potentielle supplémentaire

$$W(z) = -q \mathcal{E} z$$

- Donner l'expression des éléments de matrice $\langle \phi_i | \hat{W} | \phi_j \rangle$ de \hat{W} , en fonction de la valeur moyenne z_i de la position de l'électron dans le niveau $i = 1$ ou $i = 2$, et de la quantité $d = \int_0^\infty z \phi_1(z) \phi_2(z) dz$.
- On choisit $U = 50$ V. Evaluer en GHz la quantité $|q\mathcal{E}z_1|/h$.
- On note \hat{H}_0 la restriction du Hamiltonien au sous-espace de base $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$, en l'absence de champ électrique. En présence du champ électrique, le hamiltonien total s'écrit $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$. Evaluer en GHz les quatre coefficients $\langle \phi_i | \hat{H} | \phi_j \rangle/h$, pour $i, j = 1, 2$, en prenant $U = 50$ V. En déduire que l'on peut négliger les termes non diagonaux de la matrice lors de sa diagonalisation. On donne $z_2 = 4z_1$, et $d = -64\sqrt{2}z_1/243$.
- Donner dans ce cas la variation de la fréquence $\nu_{1 \rightarrow 2}$ avec la différence de potentiel U . On exprimera le résultat en fonction de E_1, E_2, z_1, ℓ, q et h .
- Retrouver le résultat expérimental obtenu pour $U = 50$ V.

3 Arrachage de l'électron par effet tunnel

Pour une tension U négative, l'électron peut être arraché à la surface. On souhaite évaluer le temps moyen nécessaire pour qu'un électron préparé sur le niveau d'énergie E_1 s'échappe. Pour cela, on considère que lorsqu'il est dans le niveau E_1 , l'électron

- oscille dans le puits de potentiel près du liquide avec un temps caractéristique $T = \hbar/E_1$
- "tente sa chance" de s'échapper par effet tunnel avec une probabilité p à chaque oscillation.

3.1. Pour évaluer analytiquement p , on applique au potentiel réel $V_{\text{tot}}(z) = V(z) + W(z)$ vu par l'électron (figure 3) le résultat connu pour une barrière carrée :

$$p \simeq e^{-2KL}$$

La longueur $L = z_b - z_a$ correspond à la distance entre les deux points z_a et z_b où $V_{\text{tot}}(z) = E_1$ ($z_a < z_b$). Le coefficient K est donné par $K = \sqrt{2m(V_{\text{tot,max}} - E_1)}/\hbar$. Dans toute la suite on négligera le déplacement du niveau E_1 induit par le champ électrique.

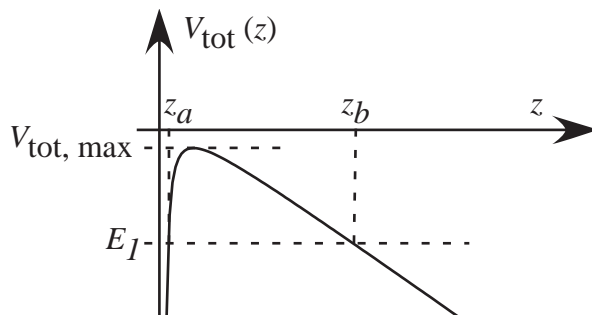


Figure 3: Potentiel total vu par l'électron pour une tension U négative.

- Pour $U = 0$, évaluer la force $q\mathcal{E}_v = -dV/dz$, prise au point $z = z_1$, qui est ressentie par l'électron du fait de son interaction avec son image électrique (\mathcal{E}_v est un champ électrique effectif "vu" par l'électron en $z = z_1$). On exprimera $q\mathcal{E}_v$ en fonction de m, Λ et \hbar .
- Dans tout ce qui suit on supposera que le champ électrique \mathcal{E} appliqué par les électrodes est tel que $|q\mathcal{E}| \ll m^2\Lambda^3/\hbar^4$. Interpréter physiquement cette hypothèse, et justifier le fait que l'on néglige le déplacement du niveau E_1 .

- (c) Écrire l'équation permettant de déterminer z_a et z_b , en fonction de E_1 , Λ , q et \mathcal{E} .
- (d) En utilisant l'expression de E_1 , et l'hypothèse $|q\mathcal{E}| \ll m^2\Lambda^3/\hbar^4$, donner une expression simple pour z_a et z_b . En déduire qu'on peut prendre $L \simeq m\Lambda^2/(2\hbar^2q\mathcal{E})$.
- (e) Montrer que dans cette approximation, on a $V_{\text{tot,max}} - E_1 \simeq |E_1|$.
- (f) Exprimer p en fonction de m , Λ , \hbar , q et \mathcal{E} .

3.2. On veut maintenant calculer la “durée de vie” de l'électron en présence du champ électrique.

- (a) En utilisant les relations de dispersion de Heisenberg, donner l'ordre de grandeur de la vitesse v_1 de l'électron sur le niveau d'énergie E_1 , en fonction de l'excursion z_1 de son déplacement. En déduire que $T = \hbar/E_1$ donne une bonne approximation du temps caractéristique d'aller-retour de l'électron piégé.
- (b) Exprimer en fonction de p la probabilité P_n que l'électron soit encore piégé à la surface de l'hélium après n “tentatives” de s'échapper. Montrer que pour $p \ll 1$ et $np^2 \ll 1$, cette probabilité s'écrit $P_n \sim e^{-np}$.
- (c) On suppose $p \ll 1$. Montrer que la probabilité que l'électron soit encore piégé au voisinage de la surface à l'instant t peut s'écrire $P(t) = e^{-t/\tau}$, et exprimer la durée de vie moyenne τ de l'électron sur le niveau d'énergie E_1 , en fonction de T et p .
- (d) On réalise avec les électrodes un champ $|\mathcal{E}| = 10^4$ V/m. Évaluer p , puis la durée de vie τ .
- (e) Pour un champ \mathcal{E} donné, la durée de vie de l'état fondamental d'énergie E_1 est-elle plus longue ou plus courte que celle de l'état d'énergie E_2 ? Lequel de ces deux niveaux est-il le plus facile à “ioniser” ?

CONTRÔLE NON CLASSANT DU COURS DE PHYSIQUE PHY 311

Mercredi 11 juillet 2007, durée : 2 heures

Corrigé.

1 La quantification du mouvement de l'électron

1.1. L'électron ne peut pas pénétrer dans l'hélium liquide, donc on a $\psi(z < 0, t) = 0$, et $\psi(z, t)$ est continue (mais non dérivable) en $z = 0$.

1.2. On utilise la forme générale de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\Lambda}{z} \psi$$

1.3. On posant $\psi(z, t) = \phi(z)e^{-iEt/\hbar}$ on obtient l'équation indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{\Lambda}{z} \phi = E_n \phi \quad \text{et} \quad E = E_n.$$

1.4. Etat fondamental.

- (a) En dérivant deux fois $\phi_1(z)$ et en reportant dans l'équation précédente, on trouve que $\kappa_1 = m\Lambda/\hbar^2$, et $E_1 = -m\Lambda^2/(2\hbar^2) = -\hbar^2\kappa_1^2/(2m)$.
- (b) La fonction d'onde $\phi_1(z)$ ne change pas de signe, elle correspond donc à l'état fondamental de l'électron.
- (c) En utilisant la condition de normalisation $\int_0^{+\infty} |\phi_1(z)|^2 dz = 1$, on obtient $c_1 = 2\kappa_1^{3/2}$.
- (d) On obtient $z_1 = \langle z \rangle = \int_0^{+\infty} z |\phi_1(z)|^2 dz = 3/(2\kappa_1) = 3\hbar^2/(2m\Lambda)$.
- (e) On trouve $E_1 = -1.04 \cdot 10^{-22} \text{J} = -0.65 \text{ meV}$, et $z_1 = 11.5 \text{ nm}$.

1.5. Premier état excité.

- (a) En dérivant deux fois $\phi_2(z)$ et en reportant dans l'équation précédente, on trouve que $\kappa_2 = m\Lambda/(2\hbar^2)$, $E_2 = -m\Lambda^2/(8\hbar^2) = -\hbar^2\kappa_2^2/(2m)$
- (b) On a $\kappa_2 = \kappa_1/2$, ce qui donne bien $E_2 = E_1/4$. On trouve $\nu_1 = 157 \text{ GHz}$, $\nu_2 = 39 \text{ GHz}$, et $\nu = \nu_1 - \nu_2 = 118 \text{ GHz}$.
- (c) La fonction ϕ_2 a un changement de signe, elle correspond donc au premier état excité du mouvement de l'électron le long de l'axe Oz .

2 Action d'un champ électrique et absorption de rayonnement

2.1. La fréquence de transition de 118 GHz pour $U = 0$ correspond bien aux résultats de la première partie.

2.2. Effet du champ électrique.

- (a) Éléments de matrice diagonaux (réels) : $\langle \phi_1 | \hat{W} | \phi_1 \rangle = -q \mathcal{E} z_1$, $\langle \phi_2 | \hat{W} | \phi_2 \rangle = -q \mathcal{E} z_2$.
Éléments non diagonaux (qui sont ici réels et égaux) : $\langle \phi_1 | \hat{W} | \phi_2 \rangle = \langle \phi_2 | \hat{W} | \phi_1 \rangle = -q \mathcal{E} d$
- (b) L'échelle d'énergie du champ appliqué est donnée (en unités de fréquence) par $|q\mathcal{E}z_1|/h = |qUz_1|/(h\ell) \sim 35 \text{ GHz}$.

- (c) En utilisant les résultats précédents, on obtient : $a_1 = \langle \phi_1 | \hat{H} | \phi_1 \rangle / \hbar = -157 + 35 = -122$ GHz, $a_2 = \langle \phi_2 | \hat{H} | \phi_2 \rangle / \hbar = -39 + 140 = 101$ GHz, et $b = \langle \phi_1 | \hat{H} | \phi_2 \rangle / \hbar = 13$ GHz. Les valeurs propres de \hat{H} sont alors de la forme $E_{\pm} = ((a_1 + a_2) \pm \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4b^2})/2$, avec $4b^2 \ll (a_1 - a_2)^2$. A l'ordre le plus bas on peut donc négliger les termes non diagonaux, et les valeurs propres sont simplement $a_1 = -122$ GHz, et $a_2 = +101$ GHz.
- (d) On a donc $\hbar\nu_{1 \rightarrow 2} = E_2 - E_1 - 3q\mathcal{E}z_1 = E_2 - E_1 + 3|qU|z_1/\ell$.
- (e) Pour $U = 50$ V on trouve $3|qU|z_1/\ell = 105$ GHz, en assez bon accord avec l'expérience.

3 Arrachage de l'électron par effet tunnel

3.1. Détermination de p .

- (a) En utilisant l'expression $z_1 = 3\hbar^2/(2m\Lambda)$, on trouve $q\mathcal{E}_v = -\Lambda/z_1^2 = -(4/9)m^2\Lambda^3/\hbar^4$.
- (b) La condition $|q\mathcal{E}| \ll m^2\Lambda^3/\hbar^4$ revient à dire que $|q\mathcal{E}| \ll |q\mathcal{E}_v|$, donc que \mathcal{E} est une petite perturbation. Ceci est cohérent avec l'hypothèse d'absence de déplacement du niveau E_1 .
- (c) La condition d'intersection s'écrit $-\Lambda/z - |q\mathcal{E}|z = -|E_1|$, ou encore $|q\mathcal{E}|z^2 - |E_1|z + \Lambda = 0$.
- (d) On vérifie facilement (voir aussi la figure) qu'il existe une solution proche de zéro, qui s'obtient en négligeant le terme en z^2 dans l'équation du second degré : $z_a \sim \Lambda/|E_1| = 4z_1/3$. L'autre solution s'obtient au contraire en négligeant le terme en Λ , et vaut $z_b \sim |E_1|/|q\mathcal{E}|$. Comme $z_a \ll z_b$, on a $L \sim z_b = m\Lambda^2/(2\hbar^2|q\mathcal{E}|)$.
- (e) On obtient $V_{\text{tot,max}} = -2\sqrt{\Lambda|q\mathcal{E}|}$, ce qui est petit en valeur absolue devant E_1 . On vérifie donc bien que $V_{\text{tot,max}} - E_1 \simeq |E_1|$, et par conséquent $K = \sqrt{2m|E_1|}/\hbar = \kappa_1$.
- (f) On a donc finalement $p = \exp(-2\kappa_1 L) = \exp(-m^2\Lambda^3/(\hbar^4|q\mathcal{E}|)) \ll 1$.

3.2. Calcul de la "durée de vie" de l'électron en présence du champ électrique.

- (a) D'après les relations de Heisenberg, on a $v_1 \sim \hbar/(mz_1)$, donc le temps caractéristique d'oscillation est $z_1/v_1 = mz_1^2/\hbar = 9\hbar/(8E_1)$. Une approximation acceptable de cette valeur est obtenue en prenant $T \sim \hbar/|E_1|$. On obtient numériquement $T \sim 10^{-12}$ s.
- (b) La probabilité de rester piégé après une "tentative" est $1 - p$, donc après n tentatives qui sont des événements aléatoires indépendants on a $P_n = (1 - p)^n = e^{n \log(1-p)} \simeq e^{-np}$.
- (c) Le nombre de "tentatives" au bout d'un temps t est $n = t/T$, donc la probabilité de "survie" au bout de t est $P(t) = e^{-pt/T}$. C'est une loi exponentielle, avec une durée de vie $\tau = T/p$.
- (d) On obtient numériquement $p = 3.7 \times 10^{-8}$, et donc $\tau = 10^{-12}/p = 27 \mu\text{s}$.
- (e) Un niveau excité étant "moins lié" à la surface, sa durée de vie sera plus courte et il s'ionisera donc plus facilement.

Pour en savoir plus

Les deux niveaux vibrationnels d'énergies E_1 et E_2 étudiés dans ce problème ont été proposés pour réaliser des bits quantiques ou "qubits".

Une description plus détaillée de cette situation physique (dont ce problème est inspiré) se trouve sur l'URL en libre accès : <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0007113>