

CONTRÔLE NON CLASSANT DU COURS DE PHYSIQUE PHY 311

Mercredi 8 juillet 2009, durée : 2 heures

Documents autorisés : cours, recueil de problèmes, copies des diapositives montrées en cours, énoncés et corrigés de PC, notes personnelles. Il est rappelé qu'une présentation soignée et une rédaction claire ont une influence favorable sur le correcteur.

États quantiques vibrationnels d'atomes piégés

On s'intéresse au mouvement quantique à une dimension d'atomes piégés dans une onde lumineuse stationnaire d'intensité $I(x) = I_0 \sin^2(kx)$, où k est le vecteur d'onde de la lumière. L'onde crée sur les atomes un potentiel proportionnel à son intensité :

$$V(x) = V_0 \sin^2(kx) . \quad (1)$$

On considère des atomes de césium (masse $m = 2.2 \cdot 10^{-25}$ kg) localisés dans le puits centré en $x = 0$. On néglige l'effet tunnel entre puits adjacents ainsi que les interactions entre atomes et l'effet de la gravité. On utilise un faisceau lumineux de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k = 0.85 \mu\text{m}$.

1 Etude des atomes dans l'état fondamental du puits

1.1. Développer au deuxième ordre en x l'expression de $V(x)$ au voisinage du minimum $x = 0$. En utilisant la mécanique classique, en déduire la fréquence $\nu = \omega/(2\pi)$ des petites oscillations des atomes en ce point.

1.2. Rappeler sans démonstration l'énergie E_0 de l'état fondamental d'un oscillateur harmonique quantique, dont l'hamiltonien est $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + V(\hat{x})$ avec $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. À quelle condition sur E_0 et V_0 le développement effectué à la question précédente est-il légitime pour déterminer l'énergie de l'état fondamental ?

1.3. Donner la valeur de ν pour un potentiel tel que $V_0/h = 10^6$ Hz. Peut-on effectivement utiliser l'approximation harmonique pour calculer l'énergie de l'état fondamental dans ce potentiel ?

1.4. On prépare un atome dans l'état fondamental $|n = 0\rangle$ de ce puits grâce au refroidissement par laser. On rappelle l'expression de la fonction d'onde $\psi_0(x)$ de cet état et l'amplitude de probabilité pour l'impulsion $\varphi_0(p)$ associée :

$$\psi_0(x) = \frac{e^{-x^2/(4\ell^2)}}{(2\pi\ell^2)^{1/4}} , \quad \varphi_0(p) = \left(\frac{2\ell^2}{\pi\hbar^2} \right)^{1/4} e^{-p^2\ell^2/\hbar^2} , \quad \text{avec } \ell = \sqrt{\hbar/(2m\omega)} . \quad (2)$$

Donner sans démonstration les dispersions (ou écarts types) en position Δx_0 et en impulsion Δp_0 pour cet état. Que peut-on dire de l'inégalité de Heisenberg dans ce cas ?

1.5. Calculer numériquement les dispersions de position Δx_0 et de vitesse $\Delta v_0 = \Delta p_0/m$ pour le puits de profondeur $V_0/h = 10^6$ Hz.

1.6. Compte tenu de l'extension spatiale de l'état $|n = 0\rangle$, peut-on le visualiser en observant avec un microscope la lumière diffusée par les atomes à $\lambda = 0.85 \mu\text{m}$?

1.7. Lorsqu'on "lâche" les atomes en éteignant le laser qui les piège, ils effectuent un vol libre. On admettra qu'au bout d'un temps de vol t_v suffisamment long, leur distribution spatiale (en x) reproduit à une homothétie près leur distribution en p initiale, avec $\Delta x(t_v) = \Delta p(0)t_v/m$. Si on peut visualiser une taille $\Delta x(t_v)$ de l'ordre de $100 \mu\text{m}$, quelle temps de vol t_v doit-on utiliser ?

2 Préparation des atomes dans le premier état excité $|n = 1\rangle$

On rappelle l'action de l'opérateur création $\hat{a}^\dagger = (\hat{X} - i\hat{P})/\sqrt{2}$ sur une fonction $\varphi(p)$:

$$\hat{a}^\dagger \varphi(p) = \frac{i\hbar}{2\ell} \frac{d\varphi}{dp} - \frac{i\ell p}{\hbar} \varphi(p) . \quad (3)$$

2.1. Rappeler sans démonstration l'énergie de l'état $|n = 1\rangle$.

2.2. Exprimer l'état $|n = 1\rangle$ en fonction de \hat{a}^\dagger et de $|n = 0\rangle$. En déduire l'amplitude de probabilité pour l'impulsion $\varphi_1(p)$ en fonction de $\varphi_0(p)$ et de l'opérateur \hat{a}^\dagger , puis calculer explicitement $\varphi_1(p)$. Tracer la densité de probabilité pour l'impulsion pour cet état.

2.3. On souhaite faire passer les atomes de l'état $|n = 0\rangle$ à l'état $|n = 1\rangle$. Pour cela, on induit à l'aide d'un laser auxiliaire une transition entre ces deux états pendant une durée t ajustable. Pendant cette période, on admettra que l'évolution de l'atome (due à la fois à l'énergie cinétique $\hat{p}^2/(2m)$, au potentiel $V(\hat{x})$ et au laser auxiliaire) dans le sous-espace de base $\{|n = 0\rangle, |n = 1\rangle\}$ est décrite par l'hamiltonien :

$$\hat{H}' = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & g \\ g & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dans la base } \{|n = 0\rangle, |n = 1\rangle\}. \quad (4)$$

- Les états $|n = 0\rangle$ et $|n = 1\rangle$ sont-ils états propres de \hat{H}' ? Sinon, déterminer ces états propres. Donner les valeurs propres correspondantes.
- Sachant que l'atome est initialement dans l'état $|n = 0\rangle$, calculer son état ultérieur $|\psi(t)\rangle$, d'abord dans la base propre de \hat{H}' , puis dans la base $\{|n = 0\rangle, |n = 1\rangle\}$.
- Calculer en fonction de g la durée t_R la plus courte non nulle pendant laquelle il faut appliquer le laser auxiliaire pour que l'atome soit avec certitude dans l'état $|n = 1\rangle$ à l'issue de cette phase. Déterminer la valeur de t_R pour $g/(2\pi) = 1$ MHz.

2.4. Cette méthode (appelée "transition Raman"), associée au refroidissement par laser, peut être utilisée pour préparer sélectivement l'état $|n = 1\rangle$ à partir de l'état $|n = 0\rangle$. Pour visualiser la distribution en impulsion de l'état obtenu, on applique une phase de vol libre puis on mesure la distribution du nuage d'atomes. Des résultats typiques sont représentés sur la figure 1. Commenter brièvement ces distributions et calculer approximativement la durée du vol libre.

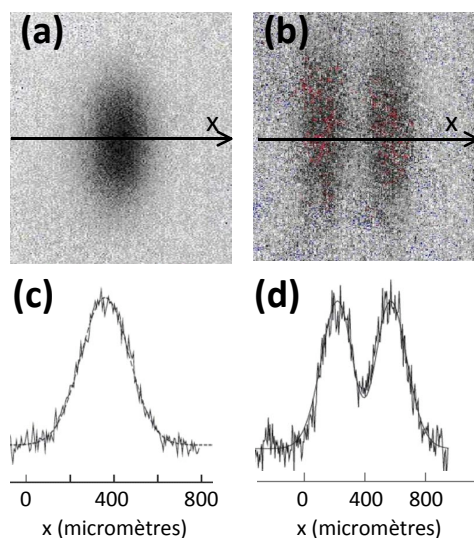


FIGURE 1 – (a,b) : Visualisations du nuage d'atomes après un temps de vol pour les états initiaux $|n = 0\rangle$ et $|n = 1\rangle$. (c,d) Profil de la densité atomique selon l'axe x , mesuré le long de chaque flèche représentée sur les figures a et b. On ne tiendra pas compte de la ligne pointillée. Note : La variable x correspond à la position où l'atome est détecté après un temps de vol de durée t_v , et est reliée à l'impulsion initiale p de l'atome par une homothétie. Selon les directions y et z , les atomes sont confinés par un potentiel qu'on ne cherchera pas à décrire.

3 Préparation d'un état non stationnaire

On reprend l'hamiltonien \hat{H}' donné en (4) couplant $|n=0\rangle$ et $|n=1\rangle$, mais on l'applique seulement pendant la durée $t_R/2$. On laisse ensuite l'atome évoluer sous l'effet de l'hamiltonien $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + V(\hat{x})$ pendant une durée ajustable τ . On termine comme précédemment par une phase de vol libre pour analyser l'état obtenu.

3.1. Déterminer l'état obtenu à l'issue de la phase d'application de l'hamiltonien \hat{H}' .

3.2. Déterminer l'état obtenu après l'évolution de durée τ sous l'effet de \hat{H} . Calculer les densités de probabilité pour l'impulsion pour les valeurs de $\tau : 0, 1/(4\nu), 1/(2\nu), 3/(4\nu)$.

3.3. La distribution spatiale obtenue après vol libre est représentée sur la figure 2 pour des durées $\tau = q\tau_0$, où q est un entier. Justifier qualitativement la forme de ces courbes, et déterminer la valeur de τ_0 .

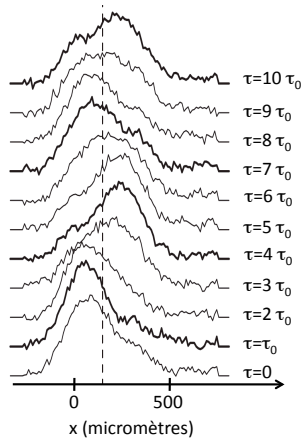


FIGURE 2 – Evolution de la distribution en impulsion d'une superposition des niveaux vibrationnels $|n=0\rangle$ et $|n=1\rangle$ pour différentes durées τ .

4 Préparation d'un état comprimé

4.1. Lemme. On considère un système d'hamiltonien \hat{H} indépendant du temps. L'état du système à l'instant t est noté $|\psi(t)\rangle$. On étudie l'évolution dans le temps de la valeur moyenne d'une quantité physique A , d'observable associée \hat{A} . Montrer que l'équation d'évolution de la valeur moyenne $\langle \hat{A} \rangle(t) = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle$ s'écrit :

$$i\hbar \frac{d\langle \hat{A} \rangle(t)}{dt} = \langle \psi(t) | [\hat{A}, \hat{H}] | \psi(t) \rangle, \quad (5)$$

où $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ est le commutateur des opérateurs \hat{A} et \hat{B} . On commencera par déduire de l'équation de Schrödinger l'équation d'évolution du bra $\langle \psi(t) |$ et on utilisera ensuite la formule standard de dérivation d'un produit pour la quantité $\langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle$.

4.2. Quelques commutateurs utiles.

(a) \hat{A} et \hat{B} étant deux opérateurs quelconques, montrer que $[\hat{A}, \hat{B}^2] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{B}]$.

(b) En partant du commutateur $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, montrer que

$$[\hat{x}, \hat{p}^2] = 2i\hbar\hat{p}, \quad [\hat{x}^2, \hat{p}] = 2i\hbar\hat{x}. \quad (6)$$

(c) On pose $\hat{C} = \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}$. Montrer que

$$[\hat{x}^2, \hat{p}^2] = 2i\hbar\hat{C}, \quad [\hat{x}^2, \hat{C}] = 4i\hbar\hat{x}^2, \quad [\hat{p}^2, \hat{C}] = -4i\hbar\hat{p}^2. \quad (7)$$

4.3. On définit les trois quantités

$$E_c(t) = \frac{\langle \hat{p}^2 \rangle}{2m}, \quad E_p(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 \langle \hat{x}^2 \rangle, \quad U(t) = \frac{\omega}{2} \langle \hat{C} \rangle. \quad (8)$$

Les atomes sont initialement préparés dans l'état $\psi_0(x)$ du piège pour lequel on rappelle que $E_c = E_p = \hbar\omega/4$ et $U = 0$. On coupe soudainement le piège à l'instant 0. On admettra que les valeurs de $\langle \hat{x}^2 \rangle$, $\langle \hat{p}^2 \rangle$ et $\langle \hat{C} \rangle$ à l'instant $t = 0$ ne sont pas modifiées lors de cette coupure soudaine. On laisse ensuite le piège éteint pendant une durée τ_1 . Pendant cette phase de vol libre, l'hamiltonien est donc $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m)$. Écrire les équations d'évolution des trois quantités E_c , E_p et U , et donner la valeur de ces quantités à l'instant τ_1 en fonction de \hbar , ω et τ_1 .

4.4. Après le vol libre de durée τ_1 , on rebranche soudainement le potentiel $V(x)$. Là encore, on admettra que les valeurs de $\langle \hat{x}^2 \rangle$, $\langle \hat{p}^2 \rangle$ et $\langle \hat{C} \rangle$ à l'instant $t = \tau_1$ ne sont pas modifiées lors de ce branchement soudain. On laisse alors l'atome évoluer jusqu'à l'instant τ_2 sous l'effet de l'hamiltonien $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + V(\hat{x})$.

- Écrire les équations d'évolution des trois quantités E_c , E_p et U pendant cette période.
- Que remarque-t-on pour la quantité $E(t) = E_c(t) + E_p(t)$? Commenter ce résultat.
- Écrire deux équations d'évolution couplées pour $T(t) = E_c(t) - E_p(t)$ et pour $U(t)$. Montrer que ces équations s'intègrent entre les instants τ_1 et τ_2 pour donner

$$T(\tau_2) = cT(\tau_1) - sU(\tau_1), \quad U(\tau_2) = sT(\tau_1) + cU(\tau_1), \quad (9)$$

où on a posé $c = \cos(\theta)$, $s = \sin(\theta)$ et $\theta = 2\omega(\tau_2 - \tau_1)$.

4.5. Montrer que la valeur minimale de $T(\tau_2)$ quand τ_2 varie est égale à $-\sqrt{U(\tau_1)^2 + T(\tau_1)^2}$.

4.6. En déduire que l'extension minimale de la distribution en impulsion des atomes s'écrit :

$$\frac{(\Delta p^2)_{\min}}{\Delta p_0^2} = 1 + 2\xi - 2\sqrt{\xi + \xi^2} \quad \text{avec} \quad \xi = (\omega\tau_1/2)^2. \quad (10)$$

4.7. Comment se comporte ce minimum quand $\xi \rightarrow 0$ ou quand $\xi \rightarrow \infty$? En déduire que pour des paramètres τ_1 et τ_2 bien choisis, on obtient un état comprimé, c'est-à-dire un état dont la dispersion en p est plus faible que celle de l'état fondamental $|n = 0\rangle$.

4.8. Que peut-on dire de la valeur initiale de Δx (avant expansion du nuage) pour un état comprimé ainsi défini?

4.9. Les résultats expérimentaux obtenus pour $\tau_1 = \tau_2 = 0$ et pour $\tau_1 = 8 \mu\text{s}$, $\tau_2 - \tau_1 = 0.4 \mu\text{s}$ sont montrés sur la figure 3. Commenter ces résultats.

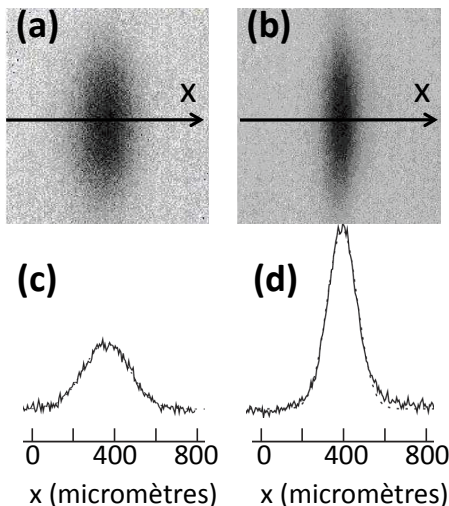


FIGURE 3 – (a-b) Visualisations du nuage d'atomes après un temps de vol pour les paramètres (a) : $\tau_1 = \tau_2 = 0$ et (b) : $\tau_1 = 8 \mu\text{s}$, $\tau_2 - \tau_1 = 0.4 \mu\text{s}$. (c-d) Profil de la densité atomique selon l'axe x , mesuré le long de chaque flèche représentée sur les figures a-b. Note : La variable x correspond à la position où l'atome est détecté après un temps de vol de durée t_v , et est reliée à l'impulsion initiale p de l'atome par une homothétie. Selon les directions y et z , les atomes sont confinés par un potentiel qu'on ne cherchera pas à décrire.

CONTRÔLE NON CLASSANT DU COURS DE PHYSIQUE PHY 311

Mercredi 8 juillet 2009, durée : 2 heures

États quantiques vibrationnels d'atomes piégés.

Corrigé

1 Etude des atomes dans l'état fondamental du puits

1.1. On développe $V(x) \simeq V_0(kx)^2$, ce qui correspond à une raideur $\kappa = 2V_0k^2$ et une pulsation $\omega = \sqrt{\kappa/m} = \sqrt{2V_0k^2/m}$. La fréquence des petites oscillations vaut donc $\nu = \sqrt{2V_0}/(m\lambda^2)$.

1.2. L'état fondamental de l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique à une dimension a pour énergie $E_0 = \hbar\omega/2 = h\nu/2$. Pour que le développement de la question précédente soit valable pour estimer cette énergie, il faut que $E_0 \ll V_0$.

1.3. La fréquence ν vaut pour les valeurs numériques proposées par l'énoncé $\nu = (2 \cdot 10^6 \times 6.62 \cdot 10^{-34} / (2.2 \cdot 10^{-25} \times (0.85 \cdot 10^{-6})^2))^{1/2} = 9.1 \cdot 10^4$ Hz. L'énergie du fondamental $h\nu/2$ est donc 22 fois plus petite que la profondeur du puits V_0 et l'approximation harmonique est justifiée.

1.4. La distribution de probabilité pour la position,

$$P_0(x) = |\psi_0(x)|^2 = \frac{e^{-x^2/(2\ell^2)}}{(2\pi\ell^2)^{1/2}},$$

est la distribution gaussienne d'écart-type $\Delta x_0 = \ell$. La distribution de probabilité pour l'impulsion,

$$\tilde{P}_0(p) = |\varphi_0(p)|^2 = \left(\frac{2\ell^2}{\pi\hbar^2}\right)^{1/2} e^{-2p^2\ell^2/\hbar^2},$$

est la distribution gaussienne d'écart-type $\Delta p_0 = \hbar/(2\ell)$. L'inégalité de Heisenberg est saturée dans ce cas : $\Delta x_0 \Delta p_0 = \hbar/2$.

1.5. On trouve $\Delta x_0 = 20$ nm et $\Delta v_0 = 12$ mm/s.

1.6. Cet état a une extension caractéristique de l'ordre de ℓ . On ne peut donc pas visualiser optiquement la densité de probabilité associée car $\ell \sim 20$ nm est très en dessous de la limite de diffraction pour une longueur d'onde visible.

1.7. La relation $\Delta x(t_v) = t_v \Delta v_0$, associée à la contrainte $\Delta x(t_v) \geq 100 \mu\text{m}$, conduit à $t_v = \Delta x(t_v)/\Delta v_0 \geq 8$ ms.

2 Préparation des atomes dans le premier état excité $|n = 1\rangle$.

2.1. L'énergie du niveau $|n\rangle$ est $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$. Le premier niveau excité a donc pour énergie $3\hbar\omega/2$.

2.2. On sait que $|n+1\rangle = a^\dagger|n\rangle/\sqrt{n+1}$, donc :

$$\varphi_1(p) = a^\dagger \varphi_0(p) = -\frac{i}{(2\pi)^{1/4}} \left(\frac{2\ell}{\hbar}\right)^{3/2} p e^{-p^2\ell^2/\hbar^2} = -2i \frac{p\ell}{\hbar} \varphi_0(p).$$

2.3. (a) Les états propres de \hat{H}' ne sont pas $|n = 0\rangle$ et $|n = 1\rangle$, mais

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n = 0\rangle \pm |n = 1\rangle).$$

Les valeurs propres correspondantes sont $\pm \hbar g/2$.

(b) On décompose l'état initial $|n = 0\rangle$ sur la base des états propres de \hat{H}' :

$$|\psi(0)\rangle = |n = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) ,$$

et on en déduit l'état à l'instant t :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-igt/2}|+\rangle + e^{igt/2}|-\rangle) .$$

L'état de l'atome est (à une phase près) égal à $|n = 1\rangle = (|+\rangle - |-\rangle)/\sqrt{2}$ à l'instant t tel que $gt = \pi$. Pour $g/(2\pi) = 1$ MHz, on trouve $t = 0.5 \mu\text{s}$.

2.4. On voit apparaître selon la direction x les formes attendues pour les densités de probabilité en impulsion pour l'état $|n = 0\rangle$ (figures a et c) et pour l'état $|n = 1\rangle$ (figures b et d). La taille des nuages (environ 100 micromètres de demi-largeur à mi-hauteur pour $|n = 0\rangle$) est compatible avec le temps de vol de 8 ms calculé précédemment.

3 Préparation d'un état non stationnaire

3.1. Si on prend $gt = \pi/2$ dans l'expression

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-igt/2}|+\rangle + e^{igt/2}|-\rangle) ,$$

on trouve

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\pi/4}|+\rangle + e^{i\pi/4}|-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n = 0\rangle - i|n = 1\rangle) .$$

3.2. Durant l'évolution dans le potentiel $V(x)$, les états propres de l'hamiltonien sont les états $|n\rangle$ et on a donc :

$$|\psi(t + \tau)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\omega\tau/2}|n = 0\rangle - ie^{-3i\omega\tau/2}|n = 1\rangle \right) .$$

La densité de probabilité pour l'impulsion est

$$\tilde{P}(p) = \frac{1}{2} |\varphi_0(p) - ie^{-i\omega\tau}\varphi_1(p)|^2$$

ce qui conduit à (en posant $q = 2p\ell/\hbar$) :

$$\begin{aligned} \tau = 0 \quad \omega\tau = 0 \quad \tilde{P}(p) &= \frac{1}{2} |\varphi_0(p) - i\varphi_1(p)|^2 \propto (1 - q)^2 e^{-q^2/2} \\ \tau = 1/(4\nu) \quad \omega\tau = \pi/2 \quad \tilde{P}(p) &= \frac{1}{2} |\varphi_0(p) - \varphi_1(p)|^2 \propto (1 + q^2) e^{-q^2/2} \\ \tau = 1/(2\nu) \quad \omega\tau = \pi \quad \tilde{P}(p) &= \frac{1}{2} |\varphi_0(p) + i\varphi_1(p)|^2 \propto (1 + q)^2 e^{-q^2/2} \\ \tau = 3/(4\nu) \quad \omega\tau = 3\pi/2 \quad \tilde{P}(p) &= \frac{1}{2} |\varphi_0(p) + \varphi_1(p)|^2 \propto (1 + q^2) e^{-q^2/2} \end{aligned}$$

3.3. On voit évoluer la superposition avec une période d'environ $6\tau_0$, avec des déformations vers la gauche ou vers la droite suivant les coefficients de la superposition. On sait par ailleurs que la fréquence vaut 90 kHz, ce qui correspond à une période de 11 μs . Il y a donc environ $\tau_0 = 2 \mu\text{s}$ entre deux enregistrements successifs.

4 Préparation d'un état comprimé

4.1. Lemme (théorème d'Ehrenfest). L'équation d'évolution du bra $\langle\psi(t)|$ est

$$-i\hbar \frac{d\langle\psi(t)|}{dt} = \langle\psi(t)|\hat{H}$$

dont on déduit

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle}{dt} &= i\hbar \frac{d\langle\psi(t)|}{dt} \hat{A} |\psi(t)\rangle + i\hbar \langle\psi(t)| \hat{A} \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} \\ &= -\langle\psi(t)|\hat{H}\hat{A}|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|\hat{A}\hat{H}|\psi(t)\rangle \\ &= \langle\psi(t)|[\hat{A}, \hat{H}]|\psi(t)\rangle . \end{aligned}$$

4.2. Quelques commutateurs utiles.

(a) On trouve en développant :

$$[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\hat{B} - \hat{B}^2\hat{A} = [\hat{A}, \hat{B}^2] .$$

(b) Les deux résultats $[\hat{x}, \hat{p}^2] = 2i\hbar\hat{p}$ et $[\hat{x}^2, \hat{p}] = 2i\hbar\hat{x}$ découlent directement du résultat précédent, associé à $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

(c) Là aussi, on trouve presque immédiatement le résultat annoncé en développant les commutateurs et en utilisant les résultats précédents : $[\hat{x}^2, \hat{p}^2] = 2i\hbar\hat{C}$, $[\hat{x}^2, \hat{C}] = 4i\hbar\hat{x}^2$ et $[\hat{p}^2, \hat{C}] = -4i\hbar\hat{p}^2$.

4.3. Durant cette phase de vol libre, le théorème d'Ehrenfest entraîne tout d'abord que $E_c(t) = E_c(0)$. On a par ailleurs :

$$\frac{dE_p}{dt} = \frac{\omega^2}{4i\hbar} \langle[x^2, p^2]\rangle = \frac{\omega^2}{2} \langle\hat{C}\rangle = \omega U$$

et

$$\frac{d\langle C \rangle}{dt} = \frac{1}{2mi\hbar} \langle[\hat{C}, p^2]\rangle = \frac{2}{m} \langle p^2 \rangle = 4E_c \quad \text{donc} \quad \frac{dU}{dt} = 2\omega E_c$$

$U(t)$ varie donc linéairement en temps, et $E_p(t)$ quadratiquement. En $t = \tau_1$, on a donc

$$E_c(\tau_1) = \frac{\hbar\omega}{4} , \quad U(\tau_1) = 2E_c(0)\omega\tau_1 = \frac{\hbar\omega^2\tau_1}{2} , \quad E_p(t) = \frac{\hbar\omega}{4} (1 + \omega^2\tau_1^2) .$$

4.4. (a) En présence du potentiel $V(x)$, on trouve pour E_c (énergie cinétique) :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{\omega^2}{4i\hbar} \langle[p^2, x^2]\rangle = -\frac{\omega^2}{2} \langle\hat{C}\rangle = -\omega U ,$$

pour E_p (énergie potentielle) :

$$\frac{dE_p}{dt} = \frac{\omega^2}{4i\hbar} \langle[x^2, p^2]\rangle = \frac{\omega^2}{2} \langle\hat{C}\rangle = \omega U ,$$

et pour la quantité C

$$\frac{d\langle C \rangle}{dt} = \frac{1}{2mi\hbar} \langle[\hat{C}, p^2]\rangle + \frac{m\omega^2}{2i\hbar} \langle[\hat{C}, x^2]\rangle = \frac{2}{m} p^2 - 2m\omega^2 x^2 = 4E_c - 4E_p ,$$

ou encore

$$\frac{dU}{dt} = 2\omega(E_c - E_p) .$$

(b) On remarque que l'énergie moyenne totale $E(t) = E_c(t) + E_p(t)$ est constante. L'hamiltonien est indépendant du temps et l'énergie est donc une quantité conservée.

(c) Par soustraction des équations d'évolution pour E_c et E_p , on trouve :

$$\frac{dT}{dt} = -2\omega U, \quad \frac{dU}{dt} = 2\omega T,$$

qui peut encore s'écrire $\ddot{T} + 4\omega^2 T = 0$, $\ddot{U} + 4\omega^2 U = 0$, d'où la solution indiquée dans l'énoncé en fonction des conditions initiales $T(\tau_1)$ et $U(\tau_1)$.

4.5. Les extrema de T sont obtenus pour $\tan(\theta) = -U(\tau_1)/T(\tau_1)$. Les minima correspondent aux points où $\cos(\theta) = -T(\tau_1)/\sqrt{U(\tau_1)^2 + T(\tau_1)^2}$ et $\sin(\theta) = U(\tau_1)/\sqrt{U(\tau_1)^2 + T(\tau_1)^2}$, d'où $T_{\min} = -\sqrt{U(\tau_1)^2 + T(\tau_1)^2}$.

4.6. On a à l'instant τ_2 :

$$\Delta p^2(\tau_2) = 2mE_c(\tau_2) = m(E(\tau_2) + T(\tau_2)).$$

L'énergie totale $E(\tau_2)$ ne varie pas pendant la deuxième phase et on a donc $E(\tau_2) = E(\tau_1) = E_c(\tau_1) + E_p(\tau_1)$, avec $E_c(\tau_1) = \hbar\omega/4$ et $E_p(\tau_1) = \hbar\omega(1 + 4\xi)/4$, ce qui donne

$$E(\tau_2) = \frac{\hbar\omega}{2}(1 + 2\xi).$$

Le minimum de $\Delta p^2(\tau_2)$ est atteint aux mêmes instants que le minimum de $T(\tau_2)$. Relions la valeur de ce minimum au paramètre ξ : $U(\tau_1)^2 = (\hbar\omega)^2\xi$ et $T(\tau_1)^2 = (E_c(\tau_1) - E_p(\tau_1))^2 = (\hbar\omega)^2\xi^2$, ce qui donne $T_{\min} = -\hbar\omega\sqrt{\xi + \xi^2}$. On en déduit

$$\Delta p_{\min}^2 = \frac{\hbar m\omega}{2} \left(1 + 2\xi - 2\sqrt{\xi + \xi^2}\right).$$

ce qui correspond au résultat donné dans l'énoncé, compte tenu de $\Delta p_0^2 = \hbar m\omega/2$.

4.7. La valeur de Δp_{\min}^2 est toujours inférieure à Δp_0^2 : on a donc bien un état "comprimé". La compression peut être arbitrairement grande car $\Delta p_{\min}^2/\Delta p_0^2 \sim 1/(4\xi)$ quand $\xi \rightarrow \infty$. Dans la limite opposée $\xi \rightarrow 0$, on trouve $\Delta p_{\min}^2 \simeq \Delta p_0^2$, ce qui est logique : si la phase de vol libre est trop courte, il n'y a pratiquement pas de modification de la distribution en impulsion.

4.8. Pour un état comprimé en impulsion, Δx augmente pour satisfaire l'inégalité de Heisenberg.

4.9. On constate effectivement une diminution de largeur en impulsion du nuage nettement en dessous de celle de l'état fondamental. Les paramètres expérimentaux correspondent à $\xi = 5.2$, ce qui devrait conduire à une compression de $\Delta p_{\min}/\Delta p_0 \sim 0.2$. La compression trouvée en pratique n'est pas aussi spectaculaire, avec un $\Delta p/\Delta p_0 \sim 0.5$.

Note. Les données expérimentales présentées dans ce problème sont extraites des références :

- I. Bouchoule, H. Perrin, A. Kuhn, M. Morinaga, C. Salomon, Phys. Rev. A, Rapid Comm. **59**, R8 (1999) : *Neutral atoms prepared in Fock states of a one dimensional harmonic potential*
- M. Morinaga, I. Bouchoule, J.C. Karam, C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **83**, 4037, (1999) : *Manipulation of motional quantum states of neutral atoms*
- I. Bouchoule, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI (06/10/2000) : *Refroidissement par bandes latérales d'atomes de Cesium et quelques applications.*
<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00141435/fr/>