**ÉCOLE POLYTECHNIQUE** **Promotion 2003**

**1er CONTRÔLE CLASSANT DU COURS DE PHYSIQUE PHY 432**

Mardi 12 avril 2005, durée : 2 heures

*Documents autorisés : cours, recueil de problèmes, copies des transparents, notes personnelles.*
*Les deux exercices et le problème sont indépendants.*

## Exercice 1 (sur 5 points) : la précession de Larmor

On considère une particule de spin $s$ plongée dans un champ magnétique homogène et uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$. On note $\hat{\vec{S}}$ l'opérateur spin de la particule et $\hat{\vec{\mu}} = \gamma\hat{\vec{S}}$ l'opérateur moment magnétique associé. On ne tient pas compte des degrés de liberté associés au mouvement du centre de masse de la particule. On pose $\omega = -\gamma B$.

1. Écrire l'hamiltonien du problème. En utilisant le théorème d'Ehrenfest, déterminer les équations d'évolution des trois composantes $\langle S_i \rangle$, $i = x, y, z$.
2. Déduire de la question précédente que le mouvement de $\langle \vec{S} \rangle$ est un mouvement de précession. Quel est le temps $T_0$ nécessaire pour faire un tour ?
3. On décompose l'état $|\psi(t)\rangle$ du spin sur la base propre $|s, m\rangle$, commune à $\hat{S}^2$ et $\hat{S}_z$ :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_m \alpha_m(t)\ |s, m\rangle\ .$$

   (a) Pour une valeur de $s$ fixée, quelles sont les valeurs possibles de $m$ ?
   (b) Donner l'évolution des coefficients $\alpha_m(t)$.
   (c) Comparer la valeur du vecteur d'état au bout d'une période $T_0$, $|\psi(T_0)\rangle$, et la valeur initiale $|\psi(0)\rangle$. Discuter le résultat obtenu en fonction des valeurs de $s$.

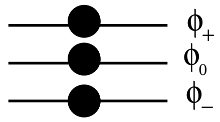
## Exercice 2 (sur 5 points) : système à trois particules identiques

Soit $\hat{h}$ l'hamiltonien d'une particule. On suppose que $\hat{h}$ possède seulement trois niveaux d'énergie $-\epsilon_0, 0, +\epsilon_0$ non dégénérés (on prend $\epsilon_0 > 0$). On note $|\phi_-\rangle, |\phi_0\rangle, |\phi_+\rangle$ les trois états associés à ces 3 valeurs propres de $\hat{h}$.

On considère un système de 3 particules **identiques et de spin nul**, qu'on numérote arbitrairement de 1 à 3. On suppose que les particules n'interagissent pas entre elles et que l'hamiltonien du système s'écrit :

$$\hat{H} = \hat{h}(1) + \hat{h}(2) + \hat{h}(3)\ .$$

1. Quels sont les résultats possibles lors d'une mesure de l'énergie totale du système ?
2. Donner les expressions de l'état fondamental et du premier état excité.
3. Indiquer la dégénérescence des niveaux d'énergie trouvés à la question 1. On pourra identifier chaque état par un dessin du type donné ci-dessous, en représentant chaque particule par un petit disque disposé sur un des états propres de $\hat{h}$ (en l'occurrence une particule dans l'état $|\phi_-\rangle$, une particule dans l'état $|\phi_0\rangle$, et une particule dans l'état $|\phi_+\rangle$).



## Problème (sur 10 points) : courant permanent dans un anneau conducteur

Une particule de masse $m$ et de charge $q$ se déplace sur un cercle de périmètre $L$, formé par un fil conducteur très mince de dimension transverse négligeable. Pour ce problème unidimensionnel, la position de la particule est repérée par l'abscisse curviligne $s$ le long du cercle et son état est décrit par la fonction d'onde $\psi(s)$. L'opérateur impulsion pour la particule s'écrit

$$\hat{\vec{p}} = \vec{u}_\theta \, \frac{\hbar}{i} \frac{d}{ds} \ , \tag{1}$$

où $\vec{u}_\theta$ est le vecteur unitaire tangeant à l'anneau au point d'abscisse $s$.

1. Justifier pourquoi on doit se limiter à des fonctions d'onde telles que $\psi(s) = \psi(s+L)$.
2. Déterminer les fonctions d'onde normées $\psi_p(s)$, états propres de l'opérateur $\hat{p} = \vec{u}_\theta \cdot \hat{\vec{p}}$ et de l'hamiltonien $\hat{H} = \hat{\vec{p}}^2/(2m)$. Montrer que les impulsions et énergies propres s'écrivent $p = nh/L$ et $\varepsilon_n = n^2h^2/2mL^2$, avec $n$ entier relatif. Donner la dégénérescence d'un niveau $\varepsilon_n$. Interpréter brièvement $\psi_p(s)$.
3. L'intensité du courant électrique engendré par le mouvement de la particule est donnée par $I = q\vec{J} \cdot \vec{u}_\theta$, où $\vec{J}$ est le courant de probabilité associé à la fonction $\psi$ :

$$\vec{J} = \Re\mathrm{e} \left( \psi^* \frac{\hat{\vec{p}}}{m} \psi \right) \ . \tag{2}$$

   Donner la valeur du courant $I_n$ quand la particule est sur le niveau d'énergie $\epsilon_n$.
4. Estimer l'intensité électrique pour un électron sur le niveau fondamental $n = 0$, puis sur le premier niveau excité $n = 1$. L'anneau a pour périmètre $L = 8.5\ \mu$m ; la masse effective de l'électron dans le matériau est $m = 6.1 \times 10^{-32}$ kg et sa charge vaut $q = -1.6 \times 10^{-19}$ C.
5. On applique un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de l'anneau. On choisit la jauge symétrique $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{B} \times \vec{r}/2$. On néglige les effets liés au spin et on rappelle que l'effet du champ magnétique se décrit simplement par la substitution $\hat{\vec{p}} \longrightarrow \hat{\vec{p}} - q\hat{\vec{A}}$ où $\hat{\vec{p}}$ est donné en (1).
   (a) Montrer que $\vec{A}(\vec{r})$ est colinéaire à $\vec{u}_\theta$ et écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps en présence du champ magnétique. On note $R = L/2\pi$ le rayon de l'anneau.
   (b) Montrer que les niveaux d'énergie sont maintenant

$$\varepsilon_n(\phi) = \frac{h^2}{2mL^2} \left( n - \frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \ , \tag{3}$$

   où $\phi = \pi R^2 B$ est le flux magnétique à travers l'anneau et $\phi_0 = h/q$. Tracer l'allure du spectre d'énergie en fonction de $\phi$ pour plusieurs valeurs de $n$. Montrer que ce spectre est périodique en flux et préciser sa période. Quelle est la dégénérescence des niveaux d'énergie ?
   (c) Le courant de probabilité en présence d'un champ magnétique est donné par :

$$\vec{J} = \Re\mathrm{e} \left( \psi^* \ \frac{\hat{\vec{p}} - q\hat{\vec{A}}}{m} \ \psi \right) \ . \tag{4}$$

   Quel est le courant électrique $I_n(\phi)$ engendré par la particule sur le niveau $\varepsilon_n$ ? Ce courant est-il nul pour une particule dans l'état fondamental du système ?
6. On suppose maintenant que $N$ électrons sont présents dans l'anneau et on néglige les interactions entre particules. On applique un champ magnétique tel que $\phi \simeq \phi_0/2$. Une mesure du courant électrique donne $I = 0$ ou $|I| = 4 \times 10^{-9}$ A, avec un signe fluctuant. Déterminer la valeur de $N$ et expliquer les fluctuations du courant.
   N.B. Pour résoudre cette question, on utilisera que les électrons se répartissent sur les états d'énergie en minimisant l'énergie totale du système tout en obéissant au principe de Pauli. Pour simplifier, on supposera que tous les électrons sont dans le même état de spin $|+\rangle_z$.

# Corrigé

## Exercice 1 : la précession de Larmor

1. L'hamiltonien est $\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B} = -\hat{\mu}_z B = -\gamma B \hat{S}_z$ ou encore $\hat{H} = \omega \hat{S}_z$. Le théorème d'Ehrenfest donne
$$\frac{d\langle S_i \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | [\hat{S}_i, \hat{H}] | \psi \rangle \ .$$
En utilisant $[\hat{S}_x, \hat{S}_z] = -i\hbar \hat{S}_y$, $[\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar \hat{S}_x$ et le fait que $\hat{S}_z$ commute évidemment avec lui-même, on arrive à
$$\frac{d\langle S_x \rangle}{dt} = -\omega \langle S_y \rangle \qquad \frac{d\langle S_y \rangle}{dt} = \omega \langle S_x \rangle \qquad \frac{d\langle S_z \rangle}{dt} = 0 \ .$$
2. Ces équations différentielles s'intègrent (par exemple) en remarquant que
$$\frac{d^2 \langle S_x \rangle}{dt^2} + \omega^2 \langle S_x \rangle = 0$$
ce qui donne $\langle S_x \rangle(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, où $A$ et $\varphi$ sont des constantes d'intégration, dépendant des conditions initiales. En reportant dans l'équation liant $\langle S_x \rangle$ et $\langle S_y \rangle$, on en déduit que $\langle S_y \rangle(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$. On a donc un mouvement de rotation uniforme à la pulsation $\omega$ pour la projection du vecteur $\langle \vec{S} \rangle$ sur le plan $xy$. La composante selon $z$ $\langle S_z \rangle$ est quant à elle constante. Il s'agit donc bien d'un mouvement de précession autour de l'axe $z$. Le temps nécessaire pour faire un tour est la période $T_0 = 2\pi/\omega$.
3. (a) Le nombre quantique $m$, caractérisant la projection du spin sur l'axe $z$, peut prendre les $2s+1$ valeurs possibles $\{-s, -s+1, \ldots, s-1, s\}$.

   (b) L'équation de Schrödinger $i\hbar\ d|\psi\rangle/dt = \hat{H}|\psi\rangle$ prend une forme très simple puisque les états $|s,m\rangle$ sont états propres de l'hamiltonien avec valeur propre $m\hbar\omega$. On obtient : $i\hbar\dot{\alpha}_m = m\hbar\omega\ \alpha_m$, qui s'intégre en $\alpha_m(t) = \alpha_m(0)\, e^{-im\omega t}$.

   (c) Au bout du temps $T_0 = 2\pi/\omega$, chaque coefficient $\alpha_m$ vaut $\alpha_m(T_0) = \alpha_m(0)\ e^{-im\omega T_0} = \alpha_m(0)\ e^{-im\,2\pi}$.
   - Si le spin $s$ est entier, $m$ est également entier et $e^{-im\,2\pi} = 1$. On trouve alors $|\psi(T_0)\rangle = |\psi(0)\rangle$.
   - Si le spin $s$ est demi-entier, $m$ est également demi-entier et $e^{-im\,2\pi} = -1$. Le signe du vecteur d'état est alors changé après une période de précession : $|\psi(T_0)\rangle = -|\psi(0)\rangle$.

**Commentaire.** Le possible changement de signe du vecteur d'état selon que le spin est demi-entier ou entier peut être mis en évidence dans une expérience d'interférence à deux voies ; dans une voie, la particule traverse une zone de champ magnétique lui faisant subir la précession de Larmor, alors que le champ est nul sur l'autre voie. La phase accumulée dans chacune des voies est révélée par la figure d'interférence obtenue en recombinant les deux chemins.

## Exercice 2 : système à trois particules identiques

Les particules sont de spin nul, et obéissent donc à la statistique de Bose-Einstein. Le vecteur d'état total doit être symétrique par échange de deux particules.

1. Les particules sont indépendantes et n'interagissent pas entre elles. L'énergie d'un configuration à trois particules est donc la somme des énergies individuelles de chaque particule, qui peuvent chacune prendre 3 valeurs : $-\epsilon_0, 0, +\epsilon_0$. La somme des trois énergies individuelles, qui donne l'énergie totale du système, vaut donc une des sept valeurs suivantes :
$$-3\epsilon_0\ ,\ -2\epsilon_0\ ,\ -\epsilon_0\ ,\ 0\ ,\ +\epsilon_0\ ,\ +2\epsilon_0\ ,\ +3\epsilon_0$$

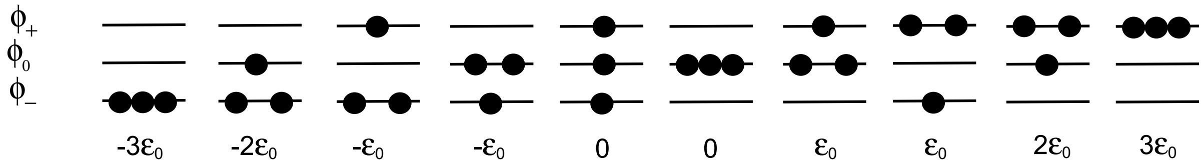



FIG. 1 – Configurations correspondant aux 10 états d'énergie.

2. L'état fondamental, d'énergie $-3\epsilon_0$, est non dégénéré. On l'obtient en plaçant chaque particule dans l'état $|\phi_-\rangle$ :

$$|\Psi_{\text{fond}}\rangle = |1:\phi_- \,;\, 2:\phi_- \,;\, 3:\phi_-\rangle \ .$$

   Le premier état excité est d'énergie $-2\epsilon_0$. Il s'obtient en plaçant deux particules dans l'état $|\phi_-\rangle$ et une particule dans l'état $|\phi_0\rangle$. Le vecteur d'état correspondant, proprement symétrisé, est

$$|\Psi_{\text{1er exc.}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1:\phi_0\,;\,2:\phi_-\,;\,3:\phi_-\rangle + |1:\phi_-\,;\,2:\phi_0\,;\,3:\phi_-\rangle + |1:\phi_-\,;\,2:\phi_-\,;\,3:\phi_0\rangle\right) \ .$$

3. On a représenté sur la figure 1 les différentes configurations de particules conduisant aux sept valeurs de l'énergie données ci-dessus. Elles sont au nombre de 10. Les états d'énergie $\pm 3\epsilon_0$ et $\pm 2\epsilon_0$ ne sont pas dégénérés. Les états d'énergie $\pm\epsilon_0$ et 0 sont dégénérés deux fois.

## Problème : courant permanent dans un anneau conducteur

1. Les deux abscisses $s$ et $s+L$ correspondent au même point de l'espace physique. Comme la fonction d'onde ne peut prendre qu'une seule valeur (comme toute fonction) en un point donné, on a $\psi(s) = \psi(s+L)$.
2. Les deux opérateurs $\hat{p} = \vec{u}_\theta \cdot \hat{\vec{p}}$ et $\hat{H}$ commutent et peuvent donc être diagonalisés simultanément. Les états propres normés de $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{d\theta}$, avec la valeur propre $p$, sont les fonctions $\psi_p(s) = e^{ips/\hbar}/\sqrt{L}$ et la condition $\psi(s) = \psi(s+L)$ entraîne $pL/\hbar = 2\pi\, n$, avec $n$ entier relatif, soit $p = nh/L$.

   Ces états sont également états propres de l'énergie cinétique avec la valeur propre $\epsilon_n = p^2/(2m) = n^2h^2/(2mL^2)$. Tous les niveaux sont dégénérés deux fois, sauf l'état fondamental qui n'est pas dégénéré.

   Ces états $\psi_p(s)$ correspondent à un courant de probabilité circulant dans le sens direct ($p > 0$) ou indirect ($p < 0$).
3. On obtient $I_n = nqh/(mL^2)$.
4. Pour l'état fondamental $n = 0$, le courant est nul. Pour le premier niveau excité, $n = \pm 1$, le courant vaut $I = \mp qh/(mL^2) = \pm 2.4 \times 10^{-11}$ A. Il s'agit d'un courant extrêmement faible.
5. Anneau dans un champ magnétique.

   (a) Le potentiel vecteur vaut

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{B}{2}\left(-y\vec{u}_x + x\vec{u}_y\right) = \frac{Br}{2}\vec{u}_\theta \qquad \text{avec} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \ .$$

   Sur l'anneau, on a $r = R$ et l'hamiltonien s'écrit

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}))^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{ds} - \frac{qBR}{2}\right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d}{ds} - i\frac{qBR}{2\hbar}\right)^2$$

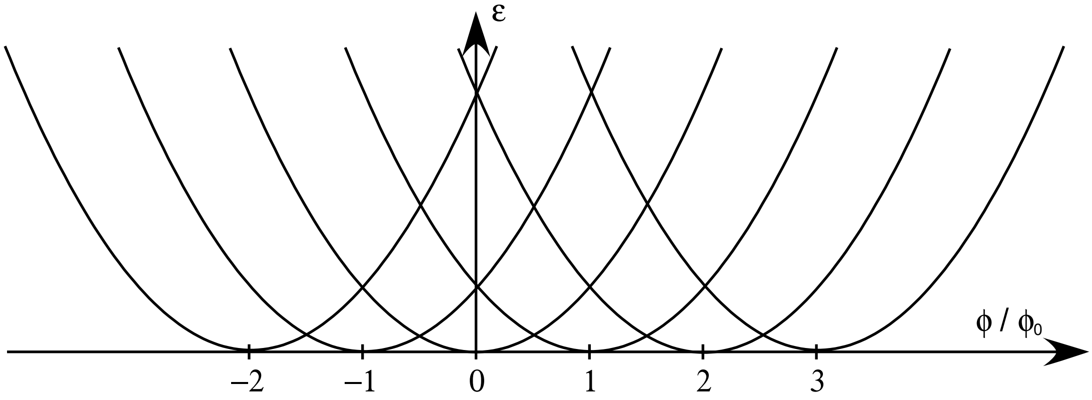



FIG. 2 – Spectre d'énergie de l'anneau conducteur en fonction du flux magnétique.

d'où l'équation de Schrödinger, permettant de déterminer les niveaux d'énergie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d}{ds}-i\frac{qBR}{2\hbar}\right)^2\psi(s)=\epsilon\,\psi(s)$$

(b) Les solutions de cette équation sont toujours de la forme $\psi_p(s) = e^{ips/\hbar}/\sqrt{L}$, avec $p = nh/L$, et les énergies correspondantes sont maintenant :

$$\epsilon_n=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{p}{\hbar}-\frac{qBR}{2\hbar}\right)^2=\frac{h^2}{2mL^2}\left(n-\frac{qBRL}{2h}\right)^2=\frac{h^2}{2mL^2}\left(n-\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2$$

avec $\phi = \pi R^2 B = LRB/2$ et $\phi_0 = h/q$. Le spectre $\{\epsilon_n(\phi),\ n \text{ entier relatif}\}$ est tracé sur la figure 2. Il est périodique en flux, de période $\phi_0$, puisque $\epsilon_n(\phi-\phi_0) = \epsilon_{n+1}(\phi)$. Les niveaux ne sont plus dégénérés, sauf pour les valeurs particulières du flux $\phi = k\phi_0/2$, avec $k$ entier.

(c) Le courant électrique généré par un électron placé sur l'état repéré par l'entier $n$ vaut

$$I_n(\phi)=\frac{hq}{mL^2}\,(n\ -\ \phi/\phi_0)\ .$$

Ce courant est en général non nul, même si la particule est placée sur le niveau fondamental. Il ne s'annule que pour des valeurs particulières du flux, $\phi = k\phi_0$, $k$ entier. En règle générale, appliquer un flux magnétique sur un anneau va donc générer un courant permanent dans cet anneau.

6. Pour la valeur particulière du flux $\phi = \phi_0/2$, chaque niveau d'énergie est doublement dégénéré (figure 3) : les énergies des états $n = 0$ et $n = 1$ coïncident, de même pour $n = -1$ et $n = 2$, $n = -2$ et $n = 3$, etc. Pour les deux états d'une paire donnée, par exemple $n = 0$ et $n = 1$, les courants sont égaux en valeur absolue et de sens opposé. Si les deux états sont occupés, le courant résultant de cette paire est nulle.

   Quand on remplit les états avec les $N$ électrons disponibles (avec un électron par niveau orbital puisque l'énoncé précise que les électrons sont tous dans le même état de spin), tout dépend donc de la parité de $N$ :

   – Si $N$ est pair, tous les couples de niveaux sont entièrement remplis jusqu'à une certaine énergie et rien au delà. Le courant résultant est donc nul (figure 3a).
   – Si $N$ est impair, les couples de niveaux sont entièrement remplis jusqu'à une certaine énergie, mais seul un des états de la paire la plus haute est peuplé. Le courant généré par cet "électron célibataire" est donc non nul (figures 3bc). Le signe du courant est aléatoire, selon que l'état concerné correspond à $n > 0$ ou $n < 0$. Cette fluctuation du signe du courant dépend en fait de la valeur exacte de $\phi$ par rapport à $\phi_0/2$, qu'on ne peut connaître avec une précision arbitrairement bonne.

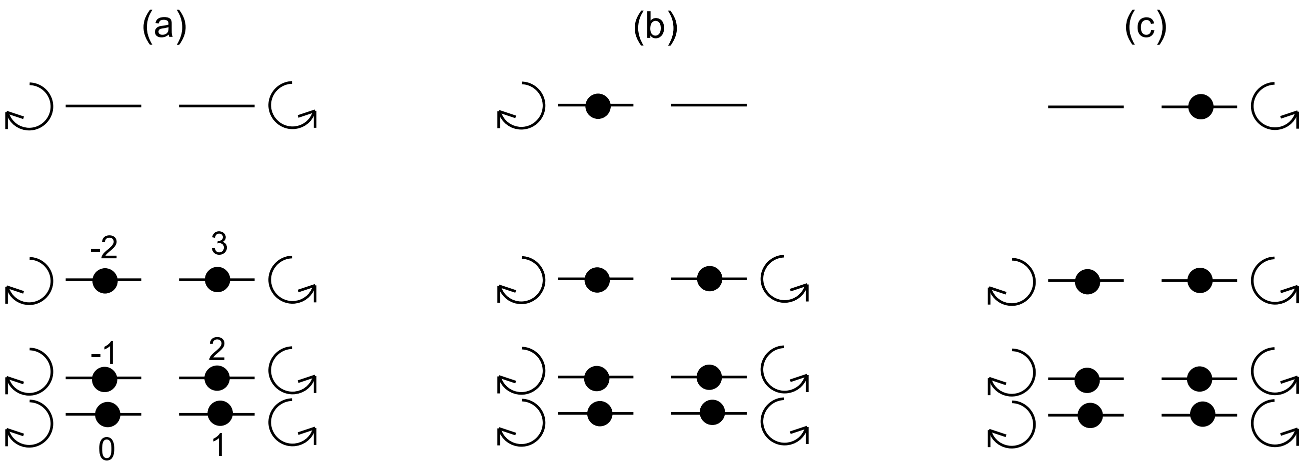



FIG. 3 – Occupation des niveaux d'énergie dans le cas particulier $\phi = \phi_0/2$. Le courant résultant est nul si $N$ est pair (a), et non nul avec un signe fluctuant si $N$ est impair (b-c).

Le courant indiqué correspond à 166 fois environ le courant obtenu pour $n = 1$. L'électron célibataire occupe donc le niveau $n = 166$, ce qui signifie qu'il y a environ $2 \times 165 = 330$ électrons sur les paires d'états occupées.