

1^{er} CONTRÔLE CLASSANT DU COURS DE PHYSIQUE PHY432

Lundi 31 mars 2008, durée : 2 heures

Documents autorisés : cours, recueil de problèmes, copies des diapositives, notes personnelles.

Le double puits symétrique : de l'effet tunnel à l'interaction d'échange

Le magnétisme est un phénomène physique qui joue un rôle essentiel dans la technologie moderne : aimants, mémoires d'ordinateurs, enregistrements sur bandes, etc. On modélise souvent le phénomène à la base du magnétisme macroscopique par une interaction effective entre moments magnétiques individuels de type $\alpha \vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j$. Le but du problème est d'élucider l'origine physique de cette interaction effective dans le cas du « super-échange ». Plus précisément, on va montrer comment une interaction locale et indépendante du spin peut donner naissance, grâce au principe de Pauli, à une interaction effective à longue portée et dépendante du spin.

On considère ici le mouvement d'une ou deux particules dans le double puits symétrique représenté sur la figure 1. On note respectivement $|g\rangle$ et $|d\rangle$ les états fondamentaux dans les puits *gauche* et *droit* lorsque l'effet tunnel à travers la barrière centrale est négligeable, et on pose par convention que leur énergie est nulle : $E_g = E_d = 0$. Dans tout ce problème, on supposera que l'effet tunnel est suffisamment faible pour que les seuls états orbitaux pertinents soient des combinaisons linéaires de $|g\rangle$ et $|d\rangle$. On introduira notamment les états *symétrique* et *antisymétrique* :

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle + |d\rangle) \quad |a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle - |d\rangle) . \quad (1)$$

Le couplage \hat{V}_{tun} correspondant à l'effet tunnel s'écrit dans la base orthonormée $\{|g\rangle, |d\rangle\}$ sous la forme :

$$\hat{V}_{\text{tun}}|g\rangle = -J |d\rangle \quad \hat{V}_{\text{tun}}|d\rangle = -J |g\rangle , \quad (2)$$

où J est un nombre réel positif, que l'on peut faire varier expérimentalement en ajustant la hauteur V_0 de la barrière.

On ne cherchera pas à calculer explicitement les fonctions d'onde associées aux états $|g\rangle$ et $|d\rangle$.

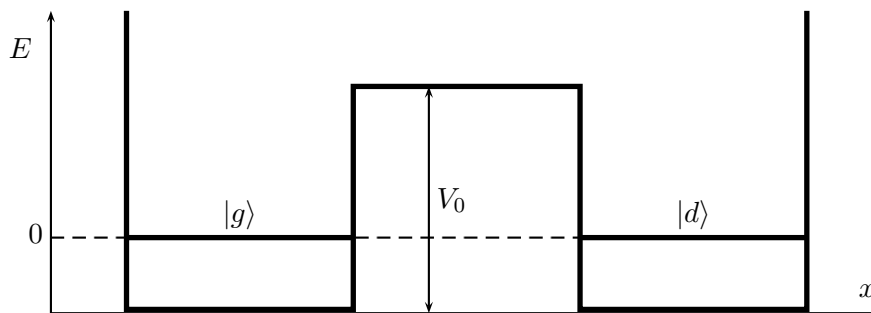


FIG. 1 – Le double puits symétrique.

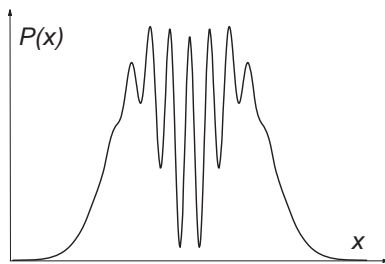


FIG. 2 – Distribution de probabilité obtenue après temps de vol pour des particules initialement dans l'état $|s\rangle$.

1 Le cas d'une particule unique

1.1. Quelles sont les énergies propres de l'hamiltonien $\hat{H} = \hat{V}_{\text{tun}}$ en présence d'effet tunnel ?

1.2. Préciser l'expression des états propres correspondants dans la base $\{|g\rangle, |d\rangle\}$. Pouvait-on prévoir leur parité compte tenu de la symétrie du problème ?

1.3. Expérience de « temps de vol ». La particule est préparée initialement dans l'état fondamental de l'hamiltonien. On coupe soudainement le potentiel du double puits, on laisse la fonction d'onde de cette particule s'étaler le long de l'axe x , puis on effectue une mesure de sa position. On répète un grand nombre de fois cette expérience et on trace la distribution de probabilité des résultats de mesure (figure 2). Commenter cette distribution en faisant éventuellement référence à un autre phénomène physique bien connu.

1.4. Indiquer sans calcul la distribution spatiale qu'on obtiendrait dans une expérience de temps de vol similaire, mais en préparant chaque particule dans l'état $|g\rangle$ au moment de la coupure soudaine du potentiel. Même question pour l'état $|d\rangle$.

2 Le cas de deux particules de spin nul

On place deux particules identiques de spin nul dans le double puits. On cherche comment la prise en compte du principe de Pauli, combinée avec l'interaction entre particules, vient modifier les résultats obtenus précédemment.

2.1. On numérote les particules 1 et 2. Si les particules étaient discernables, l'espace des états serait de dimension 4, une base possible de cet espace étant $\{|G\rangle, |D\rangle, |M_+\rangle, |M_-\rangle\}$:

$$|G\rangle = |1 : g ; 2 : g\rangle \quad |D\rangle = |1 : d ; 2 : d\rangle , \quad (3)$$

$$|M_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1 : g ; 2 : d\rangle \pm |1 : d ; 2 : g\rangle) . \quad (4)$$

Compte tenu du principe de Pauli, justifier brièvement pourquoi l'espace des états est de dimension 3, et admet comme base $\mathcal{B} = \{|G\rangle, |D\rangle, |M_+\rangle\}$.

2.2. Les particules peuvent passer d'un puits à l'autre par effet tunnel. Le couplage correspondant s'écrit $\hat{V}_{\text{tun}} = \hat{V}_{\text{tun}}^{(1)} + \hat{V}_{\text{tun}}^{(2)}$ avec

$$\hat{V}_{\text{tun}}^{(1)} |1 : g ; 2 : i\rangle = -J |1 : d ; 2 : i\rangle \quad \hat{V}_{\text{tun}}^{(2)} |1 : d ; 2 : i\rangle = -J |1 : g ; 2 : i\rangle , \quad (5)$$

$i = g, d$, et une définition analogue pour $\hat{V}_{\text{tun}}^{(2)}$. Déterminer l'action de \hat{V}_{tun} sur chacun des trois vecteurs de la base \mathcal{B} .

2.3. On suppose que ces particules interagissent entre elles quand elles occupent le même puits. En revanche, la distance entre le puits gauche et le puits droit est suffisamment grande pour que

l'interaction entre une particule à gauche et une particule à droite soit négligeable. Le couplage \hat{V}_{int} lié à l'interaction s'écrit donc :

$$\hat{V}_{\text{int}} |1 : g ; 2 : g\rangle = v |1 : g ; 2 : g\rangle \quad \hat{V}_{\text{int}} |1 : d ; 2 : d\rangle = v |1 : d ; 2 : d\rangle \quad (6)$$

$$\hat{V}_{\text{int}} |1 : g ; 2 : d\rangle = \hat{V}_{\text{int}} |1 : d ; 2 : g\rangle = 0, \quad (7)$$

où v est un nombre positif (interaction répulsive). On s'intéresse aux énergies propres et aux états propres de l'hamiltonien $\hat{H} = \hat{V}_{\text{tun}} + \hat{V}_{\text{int}}$.

- Montrer que l'état $|N_-\rangle = (|G\rangle - |D\rangle)/\sqrt{2}$ est état propre de \hat{H} avec une valeur propre qu'on précisera.
- On pose $|N_+\rangle = (|G\rangle + |D\rangle)/\sqrt{2}$. Écrire la matrice de \hat{H} dans la base $\{|N_-\rangle, |N_+\rangle, |M_+\rangle\}$.
- Déterminer les énergies propres de \hat{H} et tracer leur variation avec v , pour une valeur de J fixée.

2.4. On se place dans le cas de particules indépendantes $v = 0$.

- Montrer que le résultat pour les valeurs propres de \hat{H} est bien en accord avec les résultats obtenus dans la première partie.
- Déterminer l'état fondamental et relier le résultat à l'état fondamental à une particule trouvé dans la première partie. Y a-t-il des corrélations entre les particules quand elles sont préparées dans cet état ?

2.5. On se place dans dans le cas d'un effet tunnel faible : $J \ll v$.

- Simplifier l'expression de ces énergies propres (on donnera le résultat à l'ordre 1 en J^2/v).
- Montrer qu'on peut retrouver le résultat pour l'état fondamental en utilisant la théorie des perturbations.
- Préciser la forme de l'état fondamental de \hat{H} à l'ordre 0 en J/v . Y a-t-il des corrélations entre les particules quand elles sont préparées dans cet état ?

3 Le cas de deux particules de spin 1/2

On s'intéresse maintenant au cas où les deux particules indiscernables placées dans le double potentiel ont pour spin 1/2. Si les particules étaient discernables, l'espace des états aurait pour dimension 16 et une base possible de cet espace serait $\{|1 : i\sigma_1 ; 2 : j\sigma_2\rangle\}$, avec $i, j = g$ ou d , et où $\sigma_1 = \pm, \sigma_2 = \pm$ désignent les orientations du spin de la particule 1 et de la particule 2 le long d'un axe de quantification donné.

Le couplage par effet tunnel et l'interaction entre particules sont supposés indépendants du spin. Les expressions (5) et (7) restent donc valables, les variables de spin étant « spectatrices ». Par exemple : $\hat{V}_{\text{tun}}^{(1)} |1 : g+ ; 2 : g+\rangle = -J |1 : d+ ; 2 : g+\rangle$.

3.1. Justifier que l'hamiltonien $\hat{H} = \hat{V}_{\text{tun}} + \hat{V}_{\text{int}}$ commute avec l'opérateur *spin total* $\hat{S} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2$. En déduire qu'on peut chercher une base de vecteurs propres communs à $\hat{H}, \hat{S}^2, \hat{S}_z$.

3.2. Rappeler la forme des états propres de \hat{S}^2, \hat{S}_z et les valeurs propres associées.

3.3. On s'intéresse au sous-espace propre $S = 0$.

- Comment doit se comporter la partie orbitale du vecteur d'état par échange des deux particules ?
- En déduire qu'on peut utiliser sans modification les résultats de la section 2. Dans le cas $J \ll v$, donner sans calcul une expression approchée des énergies propres et des états propres.

3.4. On s'intéresse au sous-espace propre $S = 1$.

- Comment doit se comporter la partie orbitale du vecteur d'état par échange de deux particules ?

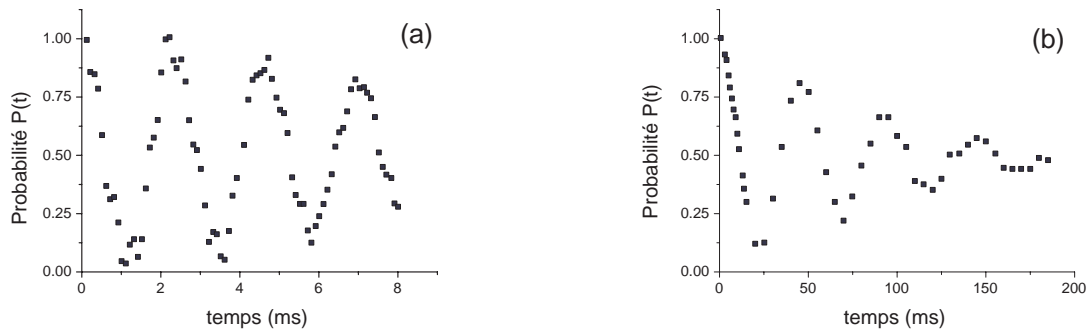


FIG. 3 – Variation dans le temps de la probabilité $\Pi(t)$ pour trouver une particule dans le puits de gauche avec le spin $+$ et une particule dans le puits de droite avec le spin $-$. Ces données sont adaptées de l'article de S. Trotsky et al, Science **319**, 295 (2008).

- (b) Quelle est la dimension de ce sous-espace propre ?
(c) Donner l'action de \hat{H} sur ce sous-espace propre.

3.5. On se place dans tout ce qui suit dans la limite $J \ll v$. Montrer que le spectre de \hat{H} comprend 4 valeurs propres qui se séparent en deux groupes distincts, l'un proche de 0 et l'autre proche de v .

3.6. On se restreint aux deux états propres de plus basse énergie de \hat{H} , ce qui est possible par exemple si la température du système est petite devant v/k_B , où k_B est la constante de Boltzmann. Montrer que la dynamique du système correspond alors à la situation physique suivante :

- il n'y a jamais deux particules dans le même puits
- tout se passe comme si les deux particules interagissaient à distance par l'hamiltonien $\hat{H}_{\text{effectif}} = \alpha \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \beta$.

Préciser la valeur des constantes α et β .

3.7. Cet effet a été mis en évidence dans une expérience récente effectuée à Mayence. Une série de doubles puits quasi-identiques ont été préparés grâce à une superposition d'ondes lumineuses stationnaires, des atomes étant ensuite piégés dans les puits de potentiel créés par ces ondes. En variant l'intensité des ondes lumineuses, on varie la hauteur de la barrière dans chaque double puits. Chaque double puits contient deux atomes que l'on prépare dans l'état initial suivant : le puits de gauche contient un atome de spin $+$, et le puits de droite contient un atome de spin $-$.

- (a) Écrire le vecteur d'état initial $|\Psi(0)\rangle$ et donner sa décomposition sur la base propre de l'hamiltonien.
- (b) Donner l'expression du vecteur d'état à l'instant t .
- (c) On mesure en fonction du temps la probabilité $P(t)$ de trouver le système dans la configuration initiale : « une particule à gauche avec un spin $+$ et une particule à droite avec un spin $-$ ». Le résultat est tracé sur la figure 3 pour deux jeux de paramètres J, v , la figure 3b étant obtenue pour des puits plus profonds que la figure 3a (intensité lumineuse plus grande). Expliquer les oscillations observées.
- (d) Les figures 3a et 3b correspondent respectivement à $J/v = 0.26$ et $J/v = 0.05$. En déduire les valeurs des fréquences J/h et v/h (où h est la constante de Planck). On exprimera les résultats en Hertz. Quelle est la conséquence principale de variation de la hauteur de la barrière V_0 : une variation de v ou une variation de J ?
- (e) Proposer une explication pour l'amortissement observé sur les figures 3a et 3b.

Corrigé

1 Le cas d'une particule unique

1.1. La matrice de \hat{H} s'écrit dans la base $\{|g\rangle, |d\rangle\}$:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ -J & 0 \end{pmatrix} . \quad (8)$$

Les valeurs propres sont $E = +J$ et $E = -J$.

1.2. Les états propres correspondants sont l'état $|s\rangle$ pour la valeur propre $-J$ (état fondamental) et $|a\rangle$ pour la valeur propre $+J$.

L'hamiltonien étant symétrique, on savait *a priori* qu'on pouvait trouver une base propre composée de vecteurs symétriques et antisymétriques.

1.3. Chaque particule est préparée dans l'état $|s\rangle$, c'est-à-dire une superposition cohérente de $|g\rangle$ et $|d\rangle$ avec des poids égaux. Quand on coupe le potentiel, les deux parties de la fonction d'onde initialement localisées à gauche et à droite s'étalent et elles se recouvrent au niveau du centre. Il se produit alors une interférence, semblable à celle qu'on obtient dans l'expérience des trous d'Young : juste après traversée de la plaque percée de deux trous, chaque particule est dans l'état *superposition cohérente d'être passée dans un trou et dans l'autre*.

1.4. Si on prépare chaque particule dans le puits de gauche, la figure d'interférence va disparaître et on observera simplement l'étalement de la fonction d'onde du puits correspondant. C'est similaire à ce qui se produit dans l'expérience des trous d'Young quand on bouche un des trous. Il en va évidemment de même si les particules sont préparées dans le puits de droite.

2 Le cas de deux particules de spin nul

2.1. Les particules étant de spin nul, il s'agit de bosons et le vecteur d'état doit être invariant si on permute les deux particules. On voit que parmi les quatre vecteurs proposés, $|G\rangle$, $|D\rangle$ et $|M_+\rangle$ ont bien cette propriété. En revanche $|M_-\rangle$ est changé de signe quand on permute les deux particules, et il ne peut donc pas intervenir dans l'écriture d'un vecteur d'état de deux bosons identiques. En résumé, l'espace des états est de dimension 3 et la base recherchée est

$$\mathcal{B} = \{|G\rangle, |D\rangle, |M_+\rangle\} .$$

2.2. On trouve

$$\hat{V}_{\text{tun}}|G\rangle = \hat{V}_{\text{tun}}^{(1)}|G\rangle + \hat{V}_{\text{tun}}^{(2)}|G\rangle = -J|1:d; 2:g\rangle - J|1:g; 2:d\rangle = -\sqrt{2}J|M_+\rangle , \quad (9)$$

$$\hat{V}_{\text{tun}}|D\rangle = -\sqrt{2}J|M_+\rangle , \quad (10)$$

$$\hat{V}_{\text{tun}}|M_+\rangle = -\sqrt{2}J(|G\rangle + |D\rangle) . \quad (11)$$

2.3. (a) En utilisant (9-10) on voit que

$$\hat{V}_{\text{tun}}(|G\rangle - |D\rangle) = 0 .$$

Par ailleurs, cet état $(|G\rangle - |D\rangle)/\sqrt{2}$ est état propre de \hat{V}_{int} avec la valeur propre v . Il est donc état propre de \hat{H} également avec la valeur propre v .

(b) L'état $|N_+\rangle$ est état propre de \hat{V}_{int} avec la valeur propre v . Par ailleurs, en additionnant (9) et (10), on trouve $\hat{V}_{\text{tun}}|N_+\rangle = -2J|M_+\rangle$. On a donc

$$\hat{H}|N_+\rangle = v|N_+\rangle - 2J|M_+\rangle .$$

L'état $|M_+\rangle$ est état propre de \hat{V}_{int} avec la valeur propre 0. Cela se comprend bien physiquement, puisqu'il ne fait intervenir que des termes où les particules sont dans des puits différents. En utilisant (11), on arrive donc à

$$\hat{H}|M_+\rangle = -2J|N_+\rangle .$$

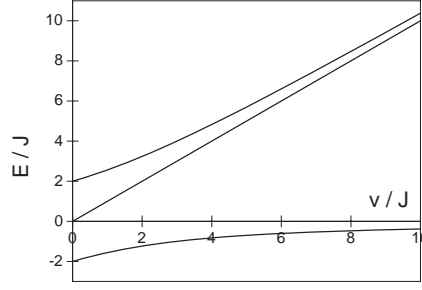


FIG. 4 – Énergies propres en fonction de v/J pour deux bosons de spin nul.

La matrice de \hat{H} dans la base $\{|N_-\rangle, |N_+\rangle, |M_+\rangle\}$ est donc

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & -2J \\ 0 & -2J & 0 \end{pmatrix} .$$

(c) On connaît déjà une valeur propre de \hat{H} , $E = v$, associée à $|N_-\rangle = (|G\rangle - |D\rangle)/\sqrt{2}$. Les deux autres valeurs propres s'obtiennent en diagonalisant la matrice 2×2 de la restriction de \hat{H} au sous-espace $\{|N_+\rangle, |M_+\rangle\}$:

$$\begin{pmatrix} v & -2J \\ -2J & 0 \end{pmatrix} . \quad (12)$$

Les valeurs propres de \hat{H} sont donc

$$v, \frac{1}{2} \left(v + \sqrt{v^2 + 16J^2} \right), \frac{1}{2} \left(v - \sqrt{v^2 + 16J^2} \right) . \quad (13)$$

Les énergies propres sont tracées sur la figure 4.

2.4. Particules indépendantes $v = 0$.

(a) On trouve les trois valeurs propres $0, \pm 2J$. Cela correspond bien à ce qu'on attend si on dispose de deux particules indépendantes, pouvant chacune prendre l'énergie $\pm J$.

(b) L'état fondamental est

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (|N_+\rangle + |M_+\rangle) &= \frac{1}{2} (|1 : g ; 2 : g\rangle + |1 : d ; 2 : d\rangle + |1 : g ; 2 : d\rangle + |1 : d ; 2 : g\rangle) \\ &= \frac{|1 : g\rangle + |1 : d\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|2 : g\rangle + |2 : d\rangle}{\sqrt{2}} , \end{aligned} \quad (14)$$

ce qui correspond au produit des deux états fondamentaux pour les particules 1 et 2, comme attendu pour des particules indépendantes. C'est un état factorisé, donc sans corrélation entre les particules.

2.5. Particules en interaction forte $J \ll v$.

(a) Un développement limité donne les valeurs propres approchées

$$v, v + \frac{4J^2}{v}, -\frac{4J^2}{v} .$$

L'état fondamental correspond à l'énergie $-4J^2/v$.

(b) Si l'effet tunnel est complètement négligeable, l'état fondamental de l'hamiltonien est $|M_+\rangle$, et son énergie est nulle. Il y a deux états excités, $|G\rangle$ et $|D\rangle$, d'énergie v . On peut utiliser la théorie des perturbations non dégénérées pour évaluer le déplacement de cet état fondamental

si l'effet tunnel est petit, mais non nul. Le résultat des perturbations au deuxième ordre s'écrit ici

$$\Delta E_{\text{fond}} = -\frac{|\langle G|\hat{V}_{\text{tun}}|M_+\rangle|^2}{v} - \frac{|\langle D|\hat{V}_{\text{tun}}|M_+\rangle|^2}{v} = -\frac{4J^2}{v}.$$

(c) À l'ordre zéro en J/v , l'état fondamental est $|M_+\rangle$. Il y a corrélation, ou plutôt anticorrélation totale entre les particules quand elles sont préparées dans cet état. Si on mesure leur position, on est certain d'en trouver une à gauche et l'autre à droite, et jamais les deux dans le même puits.

3 Le cas de deux particules de spin 1/2

3.1. Comme indiqué dans l'énoncé, ni l'opérateur \hat{V}_{tun} décrivant l'effet tunnel, ni l'opérateur \hat{V}_{int} décrivant les interactions ne dépendent du spin. L'hamiltonien $\hat{H} = \hat{V}_{\text{tun}} + \hat{V}_{\text{int}}$ commute donc avec chacune des trois composantes de l'opérateur spin total, et avec le carré du spin total \hat{S}^2 . L'ensemble $\{\hat{H}, \hat{S}^2, \hat{S}_z\}$ peut être diagonalisé simultanément.

3.2. Les valeurs propres de \hat{S}^2 sont 0 et $2\hbar^2$, correspondant respectivement à l'état singulet $S = 0$ (donc $S_z = 0$) et à l'état triplet $S = 1$ ($S_z = 0, \pm 1$).

3.3. (a) Les particules ont pour spin 1/2, ce sont donc des fermions. Le vecteur d'état des deux particules doit être antisymétrique par échange des deux particules. Or, l'état singulet est antisymétrique par échange des deux particules. Il faut donc que la partie orbitale soit symétrique.

(b) On est donc ramené à une partie orbitale ayant les mêmes propriétés d'échange que celle de deux bosons de spin nul. C'est ce qu'on a étudié dans la deuxième partie. Dans le cas $J \ll v$, on a donc les trois états propres et leur valeur propre associée

$$|M_+\rangle \otimes |S = 0\rangle : -4J^2/v \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|G\rangle - |D\rangle) \otimes |S = 0\rangle : v \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|G\rangle + |D\rangle) \otimes |S = 0\rangle : v + 4J^2/v.$$

3.4. (a) L'état de spin triplet est inchangé par échange des deux particules. Comme l'état total (orbital et spin) doit être changé de signe par cet échange, il faut que la partie orbitale soit changée de signe.

(b) Il n'y a (à un facteur de phase près) qu'un seul état orbital qui convient, c'est $(|1 : g ; 2 : d\rangle - |1 : d ; 2 : g\rangle)/\sqrt{2}$. Comme il y a trois états possibles de spin ($S_z = 0, \pm 1$), le sous-espace correspondant est de dimension 3.

(c) L'hamiltonien ne porte que sur la partie orbitale et on vérifie aisément que

$$\hat{V}_{\text{tun}}(|1 : g ; 2 : d\rangle - |1 : d ; 2 : g\rangle) = 0 \quad \hat{V}_{\text{int}}(|1 : g ; 2 : d\rangle - |1 : d ; 2 : g\rangle) = 0$$

ce qui entraîne

$$\hat{H}(|1 : g ; 2 : d\rangle - |1 : d ; 2 : g\rangle) = 0.$$

C'est donc bien un état propre de \hat{H} , et il a pour énergie 0.

3.5. En regroupant les résultats des deux questions précédentes, on trouve le spectre en énergie de l'hamiltonien, représenté sur la figure 5.

3.6. Dans la limites $J \ll v$, les deux états de plus basse énergie sont

- L'état fondamental $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1 : g ; 2 : d\rangle + |1 : d ; 2 : g\rangle) \otimes |S = 0\rangle$, d'énergie $-4J^2/v$,
- Le premier niveau excité $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1 : g ; 2 : d\rangle - |1 : d ; 2 : g\rangle) \otimes |S = 1, M_s\rangle$, dégénéré 3 fois, d'énergie 0.

Comme annoncé dans l'énoncé, tout se passe comme si les états où un puits est doublement occupé étaient inaccessibles au système. Par ailleurs, la levée de dégénérescence entre les deux niveaux donnés ci-dessus est identique à l'action de l'hamiltonien effectif $\hat{H}_{\text{effectif}} = \alpha \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \beta$, pourvu qu'on prenne

$$\alpha = 4J^2/v \quad \beta = -J^2/v.$$

$$\begin{array}{l} \text{=====} \quad E = v + 4J^2/v : \text{singulet} \\ \text{=====} \quad E = v : \text{singulet} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{=====} \quad E = 0 : \text{triplet} \\ \text{=====} \quad E = -4J^2/v : \text{singulet} \end{array}$$

FIG. 5 – Spectre de l’hamiltonien pour deux particules de spin 1/2, dans le cas d’un effet tunnel faible $J \ll v$.

3.7. (a) Le vecteur d’état initial s’écrit compte tenu du principe de Pauli

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1 : g+ ; 2d-\rangle - |1 : d- ; 2 : g+\rangle) .$$

Le produit scalaire de ce vecteur avec chacun des deux états propres pertinents

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1 : g ; 2 : d\rangle + |1 : d ; 2 : g\rangle) \otimes |S = 0\rangle \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|1 : g ; 2 : d\rangle - |1 : d ; 2 : g\rangle) \otimes |S = 1, M_s = 0\rangle$$

vaut $1/\sqrt{2}$, et on a donc

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{|1 : g ; 2 : d\rangle + |1 : d ; 2 : g\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |S = 0\rangle + \frac{|1 : g ; 2 : d\rangle - |1 : d ; 2 : g\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |S = 1, M_s = 0\rangle \right) .$$

(b) Le vecteur d’état à l’instant t vaut

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i4J^2t/(v\hbar)} \frac{|1 : g ; 2 : d\rangle + |1 : d ; 2 : g\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |S = 0\rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{|1 : g ; 2 : d\rangle - |1 : d ; 2 : g\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |S = 1, M_s = 0\rangle \right) . \end{aligned}$$

(c) Le système oscille entre les deux configurations physiques « une particule à gauche de spin + et une particule à droite de spin - » et « une particule à gauche de spin - et une particule à droite de spin + ». La première configuration physique correspond à l’état initial et la seconde à l’état

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|1 : g- ; 2 : d+\rangle - |1 : d+ ; 2 : g-\rangle) .$$

La probabilité recherchée est simplement $P(t) = |\langle \Psi(0) | \Psi(t) \rangle|^2$ et vaut donc

$$P(t) = \cos^2(2J^2t/(\hbar v)) .$$

On attend donc une oscillation de période $T = \hbar v/(4J^2)$.

(d) La première oscillation a pour période $T_1 = 2.3$ ms et la seconde $T_2 = 49$ ms. On en déduit $J_1/\hbar = 420$ Hz, $v_1/\hbar = 1600$ Hz pour la première expérience, et $J_2/\hbar = 100$ Hz, $v_2/\hbar = 2000$ Hz pour la seconde. La conséquence de l’augmentation de la hauteur de la barrière V_0 est donc la diminution de l’effet tunnel d’un facteur ~ 4 . Il y a aussi une légère augmentation de l’énergie d’interaction v , due au fait que les fonctions d’onde sont plus concentrées au fond des puits, et deux particules sur le même site interagissent donc un peu plus fortement.

(e) Il suffit que les différents puits n’aient pas exactement les mêmes couples de paramètres v, J pour que les oscillations se brouillent après un certain temps.