

1^{er} CONTRÔLE CLASSANT DU COURS DE PHYSIQUE PHY432

Lundi 12 avril 2010, durée : 2 heures

Documents autorisés : cours, recueil de problèmes, copies des diapositives, notes de PC

1 Exercice (sur 7 points) : états de Rydberg d'un atome

On appelle état de Rydberg de l'hydrogène un état très excité de cet atome, avec un nombre quantique principal $n \gg 1$.

1.1. Rappeler sans démonstration le rayon moyen $r_{n,\ell}$ et l'énergie $E_{n,\ell}$ d'un état de Rydberg pour les deux valeurs extrémales du moment cinétique $\ell = 0$ et $\ell = n-1$. Applications numériques pour $n = 100$ (valeur typique de ce qu'on arrive à produire en laboratoire).

1.2. Quelle est la longueur d'onde du photon nécessaire pour ioniser un état de Rydberg $n = 100$? À quel type de rayonnement électromagnétique cela correspond-il?

1.3. On peut également préparer d'autres espèces atomiques dans des états de Rydberg. Par exemple, dans le cas du sodium (masse atomique $A = 23$, nombre d'électrons $Z = 11$), on peut placer l'électron de valence dans un état très excité, les 10 électrons de cœur restant au voisinage du noyau. S'attend-on à une différence significative en taille ou en niveaux d'énergie de ce système, en comparaison avec les niveaux de Rydberg de l'hydrogène?

1.4. On envoie des atomes de sodium préparés dans un état de Rydberg à incidence normale sur une plaque métallique percée de fentes de largeur $d = 2$ microns (voir figure ci-dessous). Le nombre quantique n peut être varié et on fixe $\ell = 0$. La mesure de la transmission du réseau de fentes est représentée sur la figure 1b. Discuter le résultat obtenu pour

- la variation avec n de la transmission,
- la valeur de n au dessus de laquelle la transmission devient négligeable.

Proposer un mécanisme qui peut diminuer la transmission en plus de l'effet purement géométrique lié à la taille des atomes.

1.5. On s'intéresse à la transition entre deux états de Rydberg adjacents $n \rightarrow n-1$. Calculer pour $n \gg 1$ la pulsation $\omega_{n \rightarrow n-1}$ et montrer la relation $m_e e^4 \omega_{n \rightarrow n-1}^2 \approx 8 |E_{n,\ell}|^3$. Calculer par ailleurs la pulsation ω du mouvement circulaire uniforme classique d'un électron dans le potentiel coulombien $-e^2/r$ en fonction de l'énergie totale E . Comparer les deux résultats.

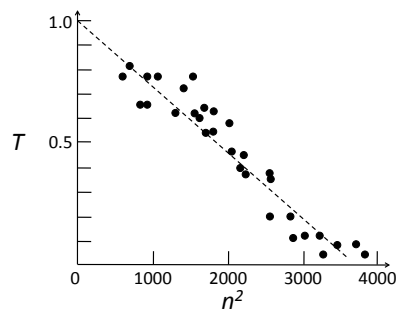
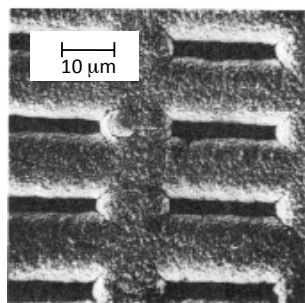


FIGURE 1 – Gauche : réseau de fentes de largeur moyenne de $d = 2$ microns (dispersion $\pm 25\%$). Droite : transmission relative du réseau de fentes en fonction du carré du nombre quantique n . On prend par convention une transmission égale à 1 quand les atomes sont dans leur état fondamental.

2 Problème (sur 13 points) : corrélations dans un système multi-particules

Pour comparer les prédictions de la mécanique quantique avec celles d'une éventuelle théorie à *variable cachée*, il est intéressant de considérer des états corrélés à plusieurs particules. La violation de l'inégalité de Bell connue pour un système à deux particules est alors remplacée par une contradiction encore plus spectaculaire, étudiée en partie 3 de ce problème. Auparavant, on passe en revue les propriétés d'un système à une, puis à deux particules de spin 1/2.

Note. Dans ce qui suit, on ne s'intéresse qu'au degré de liberté de spin, et on omet donc les aspects orbitaux de la dynamique des particules.

2.1. Mesure sur un spin 1/2. On considère une particule de spin 1/2 et on note $|+\rangle, |-\rangle$ les états propres de l'opérateur \hat{S}_z associé à la projection du spin sur l'axe Oz .

- (a) Rappeler sans démonstration l'expression des matrices \hat{S}_j ($j = x, y, z$) dans la base $|\pm\rangle$.
- (b) On mesure la composante du spin $S_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \vec{S}$ selon la direction caractérisée par le vecteur unitaire \vec{n} pointant dans la direction (θ, φ) , c'est-à-dire

$$\vec{n} = \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_y + \cos \theta \vec{u}_z . \quad (1)$$

Pour simplifier les notations, on convient dans ce problème de diviser le résultat de chaque mesure de spin par $\hbar/2$, l'observable associée à la mesure étant alors $\hat{\sigma}_{\vec{n}} = \frac{2}{\hbar} \vec{n} \cdot \hat{S} = \vec{n} \cdot \hat{\sigma}$. Écrire la matrice de l'observable $\hat{\sigma}_{\vec{n}}$ dans la base $|\pm\rangle$ et montrer qu'on a :

$$\langle + | \hat{\sigma}_{\vec{n}} | + \rangle = \cos \theta , \quad \langle - | \hat{\sigma}_{\vec{n}} | - \rangle = -\cos \theta , \quad \langle + | \hat{\sigma}_{\vec{n}} | - \rangle = e^{-i\varphi} \sin \theta , \quad \langle - | \hat{\sigma}_{\vec{n}} | + \rangle = e^{i\varphi} \sin \theta . \quad (2)$$

- (c) Quels résultats peut-on trouver lors d'une mesure de $\sigma_{\vec{n}}$?
- (d) On répète la mesure de $\sigma_{\vec{n}}$ un grand nombre de fois, sur des spins tous préparés dans l'état $|+\rangle$. Écrire la valeur moyenne du résultat des mesures en fonction de θ et φ . Même question pour des spins préparés dans l'état $|-\rangle$.

2.2. Mesure sur un système de deux spins 1/2. On considère un système formé de deux particules discernables de spin 1/2, notées a et b , et préparé dans un état donné $|\Psi\rangle$. Pour simplifier l'écriture on notera $|\eta_a \eta_b\rangle = |a : \eta_a\rangle \otimes |b : \eta_b\rangle$ l'état propre de \hat{S}_{az} et \hat{S}_{bz} avec les valeurs propres $\hbar\eta_a/2$ et $\hbar\eta_b/2$ ($\eta_a = \pm, \eta_b = \pm$).

- (a) On mesure la composante du spin de a selon une direction \vec{n}_a (et on la divise par $\hbar/2$ comme indiqué à la question 2.1.b). Quelle est l'observable associée à cette mesure et quels sont les résultats possibles ? Écrire la valeur moyenne du résultat $E(\vec{n}_a)$ en fonction de $|\Psi\rangle$, de \vec{n}_a et de $\hat{\sigma}_a$.
- (b) Évaluer $E(\vec{n}_a)$ dans le cas où le système des deux spins est préparé dans l'état singulet $|\Psi_s\rangle = (|+-\rangle - |-+\rangle)/\sqrt{2}$. On pourra introduire les angles (θ_a, φ_a) caractérisant la direction de \vec{n}_a et utiliser le résultat de la question 2.1.d. Pourquoi peut-on dire dans ce cas que le spin a apparaît comme dépolarisé ?
- (c) On dispose d'un grand nombre de paires de spins ab , toutes préparées dans le même état $|\Psi\rangle$. On mesure pour chaque paire la composante σ_{a, \vec{n}_a} du spin de a selon \vec{n}_a , et la composante σ_{b, \vec{n}_b} du spin de b selon \vec{n}_b . Pour chaque paire, on effectue ensuite le produit du résultat de la mesure de σ_{a, \vec{n}_a} et de σ_{b, \vec{n}_b} . On s'intéresse à la valeur moyenne $E(\vec{n}_a, \vec{n}_b)$ de ce produit. Indiquer et justifier la proposition correcte parmi les choix suivants :

– La moyenne vaut

$$E(\vec{n}_a, \vec{n}_b) = \langle \Psi | \left(\vec{n}_a \cdot \hat{\sigma}_a \right) \otimes \left(\vec{n}_b \cdot \hat{\sigma}_b \right) | \Psi \rangle . \quad (3)$$

– La moyenne vaut

$$E(\vec{n}_a, \vec{n}_b) = \langle \Psi | \vec{n}_a \cdot \hat{\sigma}_a | \Psi \rangle \langle \Psi | \vec{n}_b \cdot \hat{\sigma}_b | \Psi \rangle . \quad (4)$$

– Le résultat peut s'écrire indifféremment comme (3) ou (4) car ces deux expressions sont égales quel que soit $|\Psi\rangle$.

– Aucun de deux résultats ci-dessus ; indiquer dans ce cas le résultat correct.

- (d) On repère les vecteurs \vec{n}_a et \vec{n}_b par les angles (θ_a, φ_a) et (θ_b, φ_b) . On prépare le système des deux spins dans l'état singulet. Montrer que

$$E(\vec{n}_a, \vec{n}_b) = -(\cos \theta_a \cos \theta_b + \cos(\varphi_a - \varphi_b) \sin \theta_a \sin \theta_b) = -\vec{n}_a \cdot \vec{n}_b . \quad (5)$$

- (e) Que vaut $E(\vec{n}_a, \vec{n}_b)$ si on choisit $\vec{n}_a = \vec{n}_b$? Commenter le résultat obtenu.

2.3. Mesure sur un système de quatre spins 1/2. On considère maintenant un système formé de quatre particules discernables de spin 1/2, notées a, b, c, d .

- (a) Rappeler la dimension de l'espace des états de ce système à 4 particules.
 (b) Le système de quatre particules est préparé dans l'état

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|++--\rangle - |--++\rangle) , \quad (6)$$

où les vecteurs $|\eta_a \eta_b \eta_c \eta_d\rangle$ (avec $\eta_j = \pm$) sont états propres de $\hat{S}_{az}, \hat{S}_{bz}, \hat{S}_{cz}, \hat{S}_{dz}$ avec les valeurs propres $\hbar\eta_a/2, \hbar\eta_b/2, \hbar\eta_c/2, \hbar\eta_d/2$. Pour chaque quadruplet ainsi préparé, on mesure la composante σ_{j, \vec{n}_j} du spin de j selon \vec{n}_j ($j = a, b, c, d$). Les vecteurs \vec{n}_j sont choisis dans le plan xy : $\theta_j = \pi/2$. On effectue ensuite le produit des quatre résultats et on considère la valeur moyenne $E(\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{n}_c, \vec{n}_d)$ de ce produit. En suivant une démarche similaire à celle de la partie 2.2, montrer que

$$E(\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{n}_c, \vec{n}_d) = -\cos(\varphi_a + \varphi_b - \varphi_c - \varphi_d) . \quad (7)$$

- (c) Discuter physiquement les corrélations attendues dans le cas où les angles d'analyse sont choisis tels que $\varphi_a + \varphi_b = \varphi_c + \varphi_d$.
 (d) On cherche à reproduire avec une théorie à variable cachée locale la prédiction (7). Cette théorie doit fournir quatre fonctions $A(\lambda, \varphi_a), B(\lambda, \varphi_b), C(\lambda, \varphi_c), D(\lambda, \varphi_d)$, donnant les résultats des mesures de spin sur chacune des particules en fonction de la valeur de la *variable cachée* λ (inaccessible au physicien quantique) qui caractérise un quadruplet donné. On a donc $A(\lambda, \varphi_a) = \pm 1, B(\lambda, \varphi_b) = \pm 1, \dots$ Montrer que pour tout angle φ , les fonctions A, B, C, D doivent être telles que :

$$A(\lambda, 0) B(\lambda, 0) C(\lambda, 0) D(\lambda, 0) = -1 , \quad (8)$$

$$A(\lambda, \varphi) B(\lambda, 0) C(\lambda, \varphi) D(\lambda, 0) = -1 , \quad (9)$$

$$A(\lambda, \varphi) B(\lambda, 0) C(\lambda, 0) D(\lambda, \varphi) = -1 , \quad (10)$$

$$A(\lambda, 2\varphi) B(\lambda, 0) C(\lambda, \varphi) D(\lambda, \varphi) = -1 . \quad (11)$$

- (e) Dédurre de (8–11) que la fonction A ne peut pas dépendre de φ (on pourra considérer le produit de ces quatre équations).
 (f) En déduire qu'aucune théorie à variable cachée locale ne peut reproduire le résultat de la mécanique quantique (7).

Corrigé

1 Exercice : états de Rydberg d'un atome

1.1. Le rayon moyen vaut d'après le cours $\langle r_{n,\ell} \rangle = \frac{a_1}{2}(3n^2 - \ell(\ell + 1))$, où $a_1 = \hbar^2/(m_e e^2)$ est le rayon de Bohr. Les deux valeurs extrêmes pour ℓ sont $\ell = 0$ et $\ell = n - 1$, ce qui donne pour $n \gg 1$, $\langle r_{n,0} \rangle = 3a_1 n^2/2$ et $\langle r_{n,n-1} \rangle = a_1 n^2$. L'énergie ne dépend que de n et vaut $-E_I/n^2$, avec $E_I = m_e e^4/(2\hbar^2) = 13.6 \text{ eV}$. Pour $n = 100$, on obtient $a_1 = 0.75 \mu\text{m}$ pour $\ell = 0$ et $a_1 = 0.5 \mu\text{m}$ pour $\ell = n - 1$. L'énergie vaut $E_n = -1.36 \text{ meV} = 2.2 \cdot 10^{-22} \text{ J}$.

1.2. La fréquence ν du rayonnement vaut $|E_n|/h = 330 \text{ GHz}$, ce qui correspond à une longueur d'onde $\lambda = c/\nu = 0.9 \text{ mm}$. C'est le domaine des micro-ondes.

1.3. L'électron de valence, une fois qu'il est porté dans un état très excité, ressent un potentiel quasi-coulombien créé par le noyau de charge $+Zq$ et par les $Z - 1$ électrons. Le noyau et les $Z - 1$ électrons portent une charge totale $+q$ et la zone qu'ils occupent au voisinage de l'origine a une extension très petite devant le rayon moyen de l'état de l'électron de valence. On est donc ramené à un problème quasiment identique à celui des états de Rydberg de l'atome d'hydrogène.

1.4. (a) L'état de Rydberg de moment cinétique nul est un état à symétrie sphérique. On peut se représenter l'atome comme une boule de rayon $r_n = 3a_1 n^2/2$. Si le centre de la boule passe à une distance inférieure à r_n du bord de la fente, l'atome va toucher la paroi et sera vraisemblablement ionisé, adsorbé ou réfléchi. La largeur utile de la fente passe donc de d à $d - 2r_n$, soit une transmission relative (dans la limite d'une fente infiniment longue) de

$$T = \frac{d - 2r_n}{d} = 1 - \alpha n^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{3a_1}{d}. \quad (12)$$

L'expérience reproduit bien cette variation linéaire de la transmission avec n^2 .

(b) Dans notre modèle très simple, on s'attend à ce que la transmission s'annule quand $r_n = d/2$, c'est-à-dire $n = \sqrt{d/(3a_1)} = 115$. Expérimentalement, on trouve que la transmission devient quasi-nulle pour $n^2 \approx 3600$, c'est-à-dire $n \approx 60$.

Le modèle purement géométrique n'est donc pas satisfaisant pour rendre compte de manière quantitative de la valeur de n au delà de laquelle la transmission est nulle. Les atomes de n compris entre 60 et 115 ont une taille suffisamment faible pour être transmis et pourtant ils ne le sont pas. L'explication est liée à la force électrostatique attractive entre l'atome de Rydberg et son image électrique dans le métal qui compose le pourtour de la fente. L'atome de Rydberg est dévié s'il passe trop près de cette surface et va s'y coller, ce qui diminue la largeur 'utile' des fentes.

1.5. Pour $n \gg 1$, on a

$$\hbar\omega_{n \rightarrow n-1} = |E_n - E_{n-1}| = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) \approx \frac{m_e e^4}{\hbar^2 n^3}. \quad (13)$$

On peut remplacer dans cette équation n en fonction de E_n en utilisant $n^2 = m_e e^4/(2\hbar^2 |E_n|)$, ce qui donne finalement en élevant (13) au carré :

$$\omega_{n \rightarrow n-1}^2 = \frac{1}{\hbar^2} \frac{m_e^2 e^8}{\hbar^4} \frac{8\hbar^6 |E_n|^3}{m_e^3 e^{12}} = \frac{8|E_n|^3}{m_e e^4} \quad (14)$$

ce qui est le résultat annoncé dans l'énoncé. Notons que \hbar n'intervient pas dans cette relation entre pulsation de transition et énergie.

Pour un mouvement circulaire uniforme dans le potentiel coulombien, on a

$$m_e \omega^2 r = \frac{e^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad m \omega^2 r^3 = e^2 \quad (15)$$

et l'énergie totale du mouvement est $E = -e^2/(2r)$. On élimine r de ces deux relations pour trouver

$$m_e \omega^2 \frac{e^6}{8|E|^3} = e^2 \quad \Rightarrow \quad m \omega^2 e^4 = 8|E|^3 \quad (16)$$

La relation pulsation – énergie est la même dans le cas quantique pour $n \gg 1$ et dans le cas classique : il s'agit d'une illustration du *principe de correspondance* : pour les grandes valeurs des nombres quantiques, la dynamique quantique (qu'on peut illustrer par exemple en observant le mouvement de paquets d'ondes) se rapproche de la dynamique classique dans le même potentiel.

Notes. Les données expérimentales présentées dans l'énoncé sont extraites de l'article : *Measuring atomic dimensions by transmission of Rydberg atoms through micrometre size slits*, C. Fabre, M. Gross, J.-M. Raimond and S. Haroche, J. Phys. B : At. Mol. Phys. **16** L671 (1983).

2 Problème : corrélations dans un système multi-particules

2.1. Mesure sur un spin 1/2.

(a) Les matrices \hat{S}_j s'écrivent $\hat{S}_j = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_j$ où les matrices $\hat{\sigma}_j$ sont les matrices de Pauli données dans le cours :

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

(b) L'observable $\hat{\sigma}_{\vec{n}}$ a pour matrice

$$\hat{\sigma}_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \hat{\vec{\sigma}} = \sin \theta \cos \varphi \hat{\sigma}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{\sigma}_y + \cos \theta \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{+i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (18)$$

On en déduit immédiatement les quatre éléments de matrice indiqués dans l'énoncé.

(c) Les résultats possibles dans une mesure de $\sigma_{\vec{n}}$ sont les valeurs propres de la matrice (18). Cette matrice hermitienne de trace nulle et de déterminant -1 a pour polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^2 - 1$ et ses valeurs propres sont donc ± 1 . Si on revient à la variable $S_{\vec{n}}$ on trouve les valeurs propres $\pm \hbar/2$, comme il se doit pour les résultats possibles lors d'une mesure de la composante d'un spin 1/2 sur un axe.

(d) Pour un spin préparé dans un état $|\psi\rangle$ donné, la valeur moyenne des résultats de mesure de $\sigma_{\vec{n}}$ est $\langle \psi | \hat{\sigma}_{\vec{n}} | \psi \rangle$. Si on prend $|\psi\rangle$ égal à $|+\rangle$ (resp. $|-\rangle$), la moyenne des résultats de mesure sera $+\cos \theta$ (resp. $-\cos \theta$).

2.2. Mesure sur un système de deux spins 1/2.

(a) L'observable associée à la mesure de la composante de $\vec{\sigma}_a$ selon \vec{n}_a est $\hat{\sigma}_{a, \vec{n}_a} \otimes \hat{1}_b = \left(\vec{n}_a \cdot \hat{\vec{\sigma}}_a \right) \otimes \hat{1}_b$. Les résultats possibles lors de cette mesure sont les valeurs propres de $\hat{\sigma}_{a, \vec{n}_a}$, c'est-à-dire ± 1 (ou encore $\pm \hbar/2$ si on revient à \vec{S}_a). La valeur moyenne des résultats de mesure est donnée par

$$E(\vec{n}_a) = \langle \Psi | \vec{n}_a \cdot \hat{\vec{\sigma}}_a | \Psi \rangle. \quad (19)$$

(b) On reporte l'expression de l'état singulet dans (19) :

$$E(\vec{n}_a) = \frac{1}{2} \langle + - | \vec{n}_a \cdot \hat{\vec{\sigma}}_a | + - \rangle - \frac{1}{2} \langle + - | \vec{n}_a \cdot \hat{\vec{\sigma}}_a | - + \rangle - \frac{1}{2} \langle - + | \vec{n}_a \cdot \hat{\vec{\sigma}}_a | + - \rangle + \frac{1}{2} \langle - + | \vec{n}_a \cdot \hat{\vec{\sigma}}_a | - + \rangle \quad (20)$$

L'opérateur $\vec{n}_a \cdot \hat{\vec{\sigma}}_a$ dont on évalue la valeur moyenne ne porte que sur le spin a . Dans chaque élément de matrice intervenant dans la somme (20), il faut que l'état du spin b soit le même à

gauche et à droite pour que cet élément soit non nul. Il n'y a donc que les premier et dernier éléments de cette somme qui donnent une contribution non nulle :

$$E(\vec{n}_a) = \frac{1}{2}\langle +|\vec{n}_a \cdot \hat{\sigma}_a|+ \rangle + \frac{1}{2}\langle -|\vec{n}_a \cdot \hat{\sigma}_a|- \rangle = \frac{1}{2}(+\cos\theta_a) + \frac{1}{2}(-\cos\theta_a) = 0 \quad (21)$$

On trouve donc une valeur moyenne nulle pour le spin quelle que soit la direction d'analyse \vec{n}_a choisie. Ceci correspond à un spin dépolarisé.

(c) La réponse correcte est donnée en (3). Un résultat de mesure individuel est le produit du résultat de mesure de σ_{a,\vec{n}_a} par le résultat de mesure de σ_{b,\vec{n}_b} . L'observable mesurée est donc $\hat{\sigma}_{a,\vec{n}_a} \otimes \hat{\sigma}_{b,\vec{n}_b}$ et la moyenne des résultats est donnée par :

$$E(\vec{n}_a, \vec{n}_b) = \langle \Psi | \left(\vec{n}_a \cdot \hat{\sigma}_a \right) \otimes \left(\vec{n}_b \cdot \hat{\sigma}_b \right) | \Psi \rangle . \quad (22)$$

Le résultat (4) correspondrait à la procédure suivante : on moyenne d'abord tous les résultats de mesure faites sur le spin a , le résultat étant $\langle \Psi | \vec{n}_a \cdot \hat{\sigma}_a | \Psi \rangle$. On procède de même pour tous les résultats de mesure faites sur le spin b , le résultat étant $\langle \Psi | \vec{n}_b \cdot \hat{\sigma}_b | \Psi \rangle$. Enfin on effectue le produit des valeurs moyennes, ce qui donne (4). Les résultats (3) et (4) sont en général différents : la moyenne du produit n'est pas égale au produit des moyennes ! Ils ne coïncident que si l'état $|\Psi\rangle$ ne contient aucune corrélation entre particules, c'est-à-dire s'il peut s'écrire $|\Psi\rangle = |\psi_a\rangle \otimes |\psi_b\rangle$.

(d) On développe l'expression (3) en reportant l'expression de l'état singulet. On obtient alors :

$$\begin{aligned} E(\vec{n}_a) &= \frac{1}{2}\langle + - | \left(\vec{n}_a \cdot \hat{\sigma}_a \right) \left(\vec{n}_b \cdot \hat{\sigma}_b \right) | + - \rangle - \frac{1}{2}\langle + - | \left(\vec{n}_a \cdot \hat{\sigma}_a \right) \left(\vec{n}_b \cdot \hat{\sigma}_b \right) | - + \rangle \\ &- \frac{1}{2}\langle - + | \left(\vec{n}_a \cdot \hat{\sigma}_a \right) \left(\vec{n}_b \cdot \hat{\sigma}_b \right) | + - \rangle + \frac{1}{2}\langle - + | \left(\vec{n}_a \cdot \hat{\sigma}_a \right) \left(\vec{n}_b \cdot \hat{\sigma}_b \right) | - + \rangle \\ &= \frac{1}{2}(+\cos\theta_a)(-\cos\theta_b) - \frac{1}{2}(\sin\theta_a e^{-i\varphi_a})(\sin\theta_b e^{+i\varphi_b}) \\ &- \frac{1}{2}(\sin\theta_a e^{+i\varphi_a})(\sin\theta_b e^{-i\varphi_b}) + \frac{1}{2}(-\cos\theta_a)(+\cos\theta_b) \\ &= -\cos\theta_a \cos\theta_b - \cos(\varphi_a - \varphi_b) \sin\theta_a \sin\theta_b = -\vec{n}_a \cdot \vec{n}_b . \end{aligned}$$

(e) Si $\vec{n}_a = \vec{n}_b$, on trouve $E(\vec{n}_a, \vec{n}_b) = -1$: il y a anti-corrélation parfaite entre les résultats des deux mesures et on trouve seulement un des deux couples de résultats $(+-)$ ou $(-+)$, mais jamais $(++)$ ou $(--)$.

2.3. Mesure sur un système de quatre spins 1/2.

(a) La dimension de l'espace des états est $2^4 = 16$.

(b) La valeur moyenne recherchée est

$$E(\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{n}_c, \vec{n}_d) = \langle \Psi | \hat{\sigma}_{a,\vec{n}_a} \hat{\sigma}_{b,\vec{n}_b} \hat{\sigma}_{c,\vec{n}_c} \hat{\sigma}_{d,\vec{n}_d} | \Psi \rangle \quad (23)$$

et s'écrit comme somme de 4 termes quand on y reporte l'expression de $|\Psi\rangle$:

$$\begin{aligned} E(\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{n}_c, \vec{n}_d) &= \frac{1}{2}\langle + + - - | \hat{\sigma}_{a,\vec{n}_a} \hat{\sigma}_{b,\vec{n}_b} \hat{\sigma}_{c,\vec{n}_c} \hat{\sigma}_{d,\vec{n}_d} | + + - - \rangle \\ &- \frac{1}{2}\langle + + - - | \hat{\sigma}_{a,\vec{n}_a} \hat{\sigma}_{b,\vec{n}_b} \hat{\sigma}_{c,\vec{n}_c} \hat{\sigma}_{d,\vec{n}_d} | - - + + \rangle \\ &- \frac{1}{2}\langle - - + + | \hat{\sigma}_{a,\vec{n}_a} \hat{\sigma}_{b,\vec{n}_b} \hat{\sigma}_{c,\vec{n}_c} \hat{\sigma}_{d,\vec{n}_d} | + + - - \rangle \\ &+ \frac{1}{2}\langle - - + + | \hat{\sigma}_{a,\vec{n}_a} \hat{\sigma}_{b,\vec{n}_b} \hat{\sigma}_{c,\vec{n}_c} \hat{\sigma}_{d,\vec{n}_d} | - - + + \rangle . \quad (24) \end{aligned}$$

Chacun des termes de cette somme se calcule simplement. Par exemple, le premier terme vaut :

$$\langle + + - - | \hat{\sigma}_{a,\vec{n}_a} \hat{\sigma}_{b,\vec{n}_b} \hat{\sigma}_{c,\vec{n}_c} \hat{\sigma}_{d,\vec{n}_d} | + + - - \rangle = \langle + | \hat{\sigma}_{a,\vec{n}_a} | + \rangle \langle + | \hat{\sigma}_{b,\vec{n}_b} | + \rangle \langle - | \hat{\sigma}_{c,\vec{n}_c} | - \rangle \langle - | \hat{\sigma}_{d,\vec{n}_d} | - \rangle . \quad (25)$$

Comme on choisit les $\theta_j = \pi/2$, on a $\langle +|\hat{\sigma}_{j,\vec{n}_j}|+\rangle = \langle -|\hat{\sigma}_{j,\vec{n}_j}|-\rangle = 0$; le premier et le dernier terme de la somme (24) sont nuls. Le deuxième terme vaut $(-1/2)e^{i(\varphi_c+\varphi_d-\varphi_a-\varphi_b)}$ et le troisième est le complexe conjugué du deuxième. On obtient donc finalement :

$$E(\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{n}_c, \vec{n}_d) = -\cos(\varphi_c + \varphi_d - \varphi_a - \varphi_b) . \quad (26)$$

(c) Si les angles d'analyse sont choisis tels que $\varphi_c + \varphi_d = \varphi_a + \varphi_b$, alors $E(\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{n}_c, \vec{n}_d) = -1$, ce qui signifie qu'il y a corrélation parfaite entre les quatre résultats de mesure pour un quadruplet donné : il y a toujours deux mesures qui donnent $+$ et deux mesures qui donnent $-$. Notons qu'on a $\langle \Psi|\hat{\sigma}_{a,\vec{n}_a}|\Psi\rangle = 0$ (et la même chose pour b, c, d), ce qui signifie que les mesures sur un spin donné donnent autant de fois $+$ que $-$ en moyenne : chaque spin apparaît donc comme dépolarisé. C'est seulement quand on combine les mesures faites sur les 4 spins d'un même quadruplet qu'on "découvre" cette corrélation parfaite.

(d) La théorie à variable cachée doit reproduire la corrélation parfaite vue ci-dessus si on veut qu'elle soit équivalente à la mécanique quantique. Il faut donc que pour tout quadruplet d'angles $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_d$ tels que $\varphi_c + \varphi_d = \varphi_a + \varphi_b$, on ait :

$$A(\lambda, \varphi_a) B(\lambda, \varphi_b) C(\lambda, \varphi_c) D(\lambda, \varphi_d) = -1 , \quad (27)$$

ce qui exprime que le produit des quatre résultats de mesure est avec certitude égal à -1 . Les équations (8–11) de l'énoncé correspondent aux 4 choix possibles (qui vérifient tous $\varphi_c + \varphi_d = \varphi_a + \varphi_b$) :

1. $\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi_d = 0$,
2. $\varphi_a = \varphi_c = \varphi$ et $\varphi_b = \varphi_d = 0$,
3. $\varphi_a = \varphi_d = \varphi$ et $\varphi_b = \varphi_c = 0$,
4. $\varphi_a = 2\varphi$, $\varphi_c = \varphi_d = \varphi$ et $\varphi_b = 0$.

(e) Les fonctions A, B, C, D valent ± 1 . On a donc pour toutes valeurs de λ et φ_a : $A^2(\lambda, \varphi_a) = 1$ et de même pour B, C, D . Quand on effectue le produit des quatre équations (8–11), on arrive donc à

$$A(\lambda, 0)A(\lambda, 2\varphi) = 1 , \quad \forall \lambda, \varphi \quad (28)$$

ce qui peut également s'écrire puisque $A^2(\lambda, \varphi_a) = 1$:

$$A(\lambda, 0) = A(\lambda, 2\varphi) , \quad \forall \lambda, \varphi . \quad (29)$$

On en déduit que la fonction $A(\lambda, \varphi_a)$ est en fait indépendante de l'angle φ_a et dépend seulement de λ . Il en va bien sûr de même pour B, C, D qui doivent être respectivement indépendantes des angles $\varphi_b, \varphi_c, \varphi_d$.

(f) Si A, B, C, D ne dépendent pas des angles $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_d$, alors, dans une théorie à variable cachée locale, la fonction de corrélation

$$E(\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{n}_c, \vec{n}_d) = A(\lambda, \varphi_a) B(\lambda, \varphi_b) C(\lambda, \varphi_c) D(\lambda, \varphi_d) \quad (30)$$

ne dépendra pas des orientations $\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{n}_c, \vec{n}_d$. Mais ce résultat ne peut pas être en accord avec le résultat quantique qui indique en particulier que $E = -1$ pour $\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi_d = 0$ et $E = 1$ pour $\varphi_a = \varphi_b = 0$, $\varphi_c = \varphi_d = \pi/2$.

On ne peut donc pas construire de théorie à variable cachée locale qui reproduit les résultats prédits par la mécanique quantique pour ce système de quatre spins.

Note. Les états corrélés à plusieurs particules sont souvent appelés états GHZ, initiales de Greenberger, Horne et Zeilinger, qui ont été les premiers à suggérer leur utilisation dans le contexte de tests de la mécanique quantique. Voir par exemple D. Greenberger *et al.*, Am. J. Phys. **58**, 1131 (1990). La réalisation pratique d'un état corrélé à quatre particules (photons) est décrite dans l'article suivant : J.-W. Pan *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 4435 (2001).