

Des cages de lumière pour les atomes : la physique des pièges et des réseaux optiques

Le refroidissement et le piégeage de particules par laser figurent sans conteste parmi les avancées majeures de la physique atomique et de l'optique quantique au cours des trois dernières décennies. Grâce à la lumière issue de faisceaux lasers, il est en particulier possible de créer des « paysages de potentiel » qui permettent de contrôler le mouvement d'atomes préalablement refroidis. Les atomes peuvent rester confinés dans ces cages de lumière pendant de longues durées et leur dynamique y prend des formes très variées, en fonction de la nature du paysage réalisé.

Un type de confinement particulièrement intéressant est celui obtenu grâce à une onde lumineuse stationnaire, qui permet de réaliser un potentiel périodique appelé « réseau optique ». Le mouvement des atomes dans un réseau optique présente une analogie profonde avec celui des électrons dans un cristal, ce qui en fait un outil important pour le programme de simulation quantique de phénomènes de la matière condensée à l'aide d'atomes froids.

Le cours de cette année est consacré à la présentation des principes de base qui régissent le mouvement des atomes dans ces réseaux optiques. Nous y décrirons également un certain nombre d'expériences récentes exploitant cette dynamique très particulière. Nous rencontrerons aussi bien des aspects liés à la métrologie que des illustrations de phénomènes de matière condensée. Le cours sera composé des six chapitres suivants :

Cours 1. Le potentiel dipolaire. Nous y montrerons comment décrire la force $F(\mathbf{r})$ créée par un faisceau lumineux monochromatique, quand ce

faisceau présente un gradient d'intensité $I(\mathbf{r})$. Nous évaluerons cette *force dipolaire* d'abord pour un modèle simple « d'atome à deux niveaux », puis pour un modèle plus réaliste de transition atomique. Nous montrerons que cette force dérive d'un potentiel $V(\mathbf{r})$, appelé *potentiel dipolaire* et proportionnel à $I(\mathbf{r})$ dans la limite des faibles intensités. Nous terminerons en évaluant le rôle des processus d'émission spontanée, qui peuvent créer un chauffage indésirable sur les atomes piégés.

Cours 2. Réseaux optiques : les principes de base. Nous centrerons notre exposé sur le cas du potentiel dipolaire périodique créé par une onde stationnaire, $V(x) = V_0 \sin^2(kx)$ où k est le nombre d'onde du faisceau lumineux créant l'onde stationnaire. Nous verrons comment appliquer à ce problème les outils et concepts issus de la physique du solide pour traiter le mouvement d'électrons dans le potentiel périodique d'un réseau cristallin. Nous verrons que l'échelle d'énergie naturelle est donnée par l'*énergie de recul* $E_r = \hbar^2 k^2 / (2m)$ où m est la masse de l'atome. Nous présenterons le théorème de Bloch, la notion de zone de Brillouin et nous décrirons la limite des liaisons faibles $V_0 \ll E_r$, utilisée en particulier dans les nombreuses expériences de diffraction de Bragg.

Cours 3. Réseaux optiques dans le régime des liaisons fortes. Nous continuerons dans ce cours à importer les concepts de physique des solides aux réseaux optiques, en nous intéressant cette fois-ci au cas des liaisons fortes $V_0 \gg E_r$ et en introduisant le concept de fonction de Wannier. Dans cette limite des liaisons fortes, le passage par effet tunnel d'un atome de

basse énergie d'un site à un autre n'est possible que si ces deux sites sont contigus. On peut alors décrire la dynamique des particules dans le réseau par un hamiltonien très simplifié, *l'hamiltonien de Hubbard*, dont nous décrirons les principales propriétés. Nous aborderons le rôle joué par les interactions dans un réseau en nous intéressant à la stabilisation de dimères occupant un même site, même si les atomes composant ce dimère se repoussent.

Cours 4. Réseaux dépendant du temps. La possibilité de varier dans le temps les paramètres du laser créant l'onde stationnaire ouvre de nombreuses perspectives. On peut par exemple réaliser des réseaux en mouvement $V(x, t) = V_0 \sin^2[k(x - x_0(t))]$, où $x_0(t)$ est une fonction contrôlée du temps. Dans ce cours, nous établirons l'équivalence de plusieurs hamiltoniens pour ce problème en utilisant des transformations unitaires, chaque hamiltonien pouvant se révéler utile pour aborder un phénomène donné. Nous nous intéresserons plus précisément au phénomène de localisation dynamique, obtenu en modulant périodiquement la position $x_0(t)$. Nous verrons que cette modulation peut avoir des conséquences spectaculaires, comme la suppression quasi-totale de l'effet tunnel. Nous décrirons la mise en évidence et l'exploitation de cet effet pour des réseaux à une ou à deux dimensions.

Cours 5. Les oscillations de Bloch dans un réseau optique. Quand on superpose une force constante à la force périodique créée par un réseau, un phénomène quantique étonnant apparaît : les particules se mettent à osciller. Les atomes froids confinés dans des réseaux optiques ont permis d'étudier en grand détail ce phénomène et nous en présenterons plusieurs mises en évidence expérimentales. Nous discuterons également l'intérêt métrologique de ces oscillations de Bloch, à la fois pour déterminer des constantes fondamentales comme le rapport \hbar/m et pour mesurer très précisément des forces comme la gravité.

Cours 6. Topologie dans un réseau : l'exemple des points de Dirac. Les réseaux optiques permettent de réaliser des potentiels plus complexes que les potentiels sinusoïdaux en $\sin^2(kx)$. En particulier, on peut produire des réseaux bi-dimensionnels analogues à celui du graphène, pour lesquels

certains points singuliers de la zone de Brillouin, appelés *points de Dirac*, apparaissent. Au voisinage de ces points, le comportement des particules est similaire à celui de particules ultra-relativistes, avec une relation de dispersion quasi-linéaire. Nous verrons comment le contrôle des paramètres du réseau permet de faire bouger les points de Dirac à l'intérieur de la zone de Brillouin, voire même de les faire disparaître. Nous décrirons une expérience récente qui permis de mettre ces points en évidence et d'exploiter le contrôle disponible sur la topologie de la zone de Brillouin.

En raison de la limite de temps disponible, ce programme de cours ne recouvre que très partiellement l'activité de recherche actuelle, extrêmement intense, sur les réseaux optiques. Ainsi, nous n'aborderons que ponctuellement les effets d'interactions entre particules, gardant pour un cours d'une année ultérieure des phénomènes importants comme la transition entre l'état superfluide et l'isolant de Mott. Nous n'aborderons pas non plus cette année le magnétisme artificiel dans les réseaux : il fera lui aussi l'objet d'une prochaine série de cours. Nous espérons malgré tout que les outils mis en place dans les chapitres qui vont suivre et la description des expériences qui y est faite permettront à l'auditeur/lecteur intéressé de pouvoir aborder plus aisément les multiples thèmes de recherche liés à ces « cristaux de lumière ».

Chapitre 1

Le potentiel dipolaire

Sommaire

1	Atome « à deux niveaux » et approche semi-classique : équations de Bloch optiques	2
1-1	L'approximation d'un atome à deux niveaux . . .	2
1-2	L'approche semi-classique	2
1-3	Force et potentiel dipolaires	3
1-4	Approximation du champ tournant.	4
2	Le point de vue de l'atome habillé	5
3	Le cas des atomes alcalins	6
3-1	Lumière de polarisation linéaire	7
3-2	Lumière de polarisation quelconque	7
4	Approche quantique	9
4-1	Variables lentes et variables rapides	9
4-2	Hamiltonien effectif pour le centre de masse atomique	9
5	Réseau rouge ou réseau bleu ?	10
5-1	Le « paradoxe » de Gordon & Ashkin (1980) . . .	10
5-2	Transitions Raman dans un réseau très profond .	10
5-3	Les taux de transition $n \rightarrow n'$	11
6	Références	13
7	Complément	14

Le point de départ du cours de cette année réside dans le fait que la lumière peut créer un potentiel $V(\mathbf{r})$ sur des atomes. Nous nous limiterons ici à une lumière monochromatique de pulsation ω et nous allons montrer que, dans une limite perturbative à définir, ce potentiel est proportionnel à l'intensité lumineuse. La maîtrise du profil d'intensité lumineuse $I(\mathbf{r})$ permet donc de réaliser un « paysage » de potentiel entièrement contrôlable.

Le but de ce premier cours est d'établir la relation entre $V(\mathbf{r})$ et $I(\mathbf{r})$. Nous allons commencer notre étude par une approche semi-classique simple avant de passer à un traitement quantique. Pour une revue sur la force dipolaire et les pièges, on pourra consulter l'article très détaillé de Grimm et al. (2000).

Pour décrire l'action de la lumière sur un atome, nous allons commencer par considérer une hypothétique espèce atomique qui n'aurait qu'un seul électron de valence (comme les alcalins), cet électron n'ayant pas de spin (donc pas de structure fine atomique), le noyau atomique étant lui-même de spin nul. Nous considérerons de plus pour commencer le cas où seule une transition atomique entre en jeu, depuis l'état fondamental de moment cinétique nul vers un état excité de moment cinétique 1. Nous enrichirons ensuite peu à peu cette description de l'atome pour aboutir au cas où le niveau fondamental possède un spin (électronique et/ou nucléaire) non nul, et où le potentiel $V(\mathbf{r})$ dépend du spin du niveau occupé.

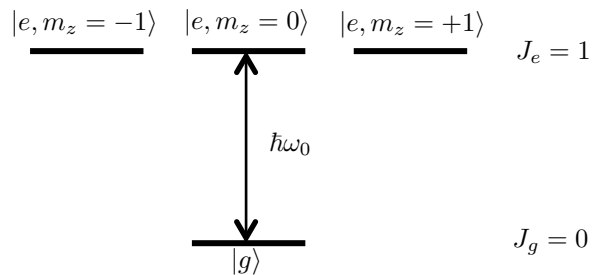


FIGURE 1.1. Transition modélisant un atome à deux niveaux : le niveau fondamental de moment cinétique nul est couplé à un niveau excité de moment cinétique unité. Le champ électromagnétique est supposé polarisé linéairement et on choisit l'axe de quantification du moment cinétique parallèle à cette polarisation. Le couplage atome-champ porte alors sur la transition $|g\rangle \leftrightarrow |e, m_z = 0\rangle$.

1 Atome « à deux niveaux » et approche semi-classique : équations de Bloch optiques

1-1 L'approximation d'un atome à deux niveaux

Notre point de départ dans ce paragraphe est comme indiqué en introduction

- Une onde laser de polarisation linéaire ϵ , dont le champ électrique s'écrit

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \mathcal{E}(\mathbf{r}) \cos[\omega t - \varphi(\mathbf{r})]. \quad (1.1)$$

L'amplitude \mathcal{E} du champ et sa phase φ dépendent *a priori* toutes deux de la position.

- Une transition atomique qu'on modélise par un état fondamental de moment cinétique nul $|g\rangle$, et un niveau excité de moment cinétique unité, de base $\{|e, m_z\rangle, m_z = -1, 0, +1\}$ où on a pris l'axe de quantification pour la base du moment cinétique parallèle à ϵ . On note $\hbar\omega_0$ la différence d'énergie entre $|g\rangle$ et $|e\rangle$.

L'interaction entre l'atome et l'onde électromagnétique est traitée à l'approximation dipolaire électrique, ce qui entraîne que l'état $|g\rangle$ est couplé à

l'état $|e, m = 0\rangle$, que l'on notera plus simplement $|e\rangle$ dans la suite. Ce couplage dipolaire électrique est de la forme

$$\begin{aligned} \hat{V}_{\text{d.e.}}(\hat{\mathbf{r}}, t) &= -\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathcal{E}(\hat{\mathbf{r}}, t) \\ &= -d_0 \mathcal{E}(\hat{\mathbf{r}}) (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \cos[\omega t - \varphi(\hat{\mathbf{r}})] \end{aligned} \quad (1.2)$$

où d_0 est le dipôle atomique réduit, caractéristique de la transition atomique considérée, où $\hat{\mathbf{r}}$ représente ici l'opérateur associé à la position du centre de masse de l'atome et où l'on a introduit les opérateurs montant et descendant :

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|, \quad \hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|. \quad (1.3)$$

Notons que cette possibilité de restreindre le problème à une transition à deux niveaux reste vraie si la polarisation de l'onde lumineuse est arbitraire. Il suffit de prendre pour $|e\rangle$ la combinaison linéaire des trois états $|e, m\rangle$ couplé à $|g\rangle$. Par exemple, si l'onde est polarisée circulairement, on prendra pour $|e\rangle$ un des deux états $|e, m = \pm 1\rangle$.

On définit également l'opérateur force

$$\begin{aligned} \hat{F} &= -\nabla_{\mathbf{r}} \hat{V}_{\text{d.e.}}(\hat{\mathbf{r}}, t) \\ &= d_0 (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \nabla_{\mathbf{r}} \{\mathcal{E}(\hat{\mathbf{r}}) \cos[\omega t - \varphi(\hat{\mathbf{r}})]\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

qui fait intervenir à la fois les gradients de l'amplitude \mathcal{E} et de la phase φ du champ électromagnétique.

1-2 L'approche semi-classique

L'approche semi-classique consiste à décrire classiquement le mouvement du centre de masse de l'atome, tout en prenant en compte le caractère quantique de sa dynamique interne. Pour un atome immobile au point \mathbf{r} , on peut alors évaluer la force moyenne agissant sur l'atome à partir de la valeur stationnaire des éléments de matrice de l'opérateur densité de l'atome $\hat{\rho}$:

$$\rho_{eg} = \text{Tr}(\hat{\sigma}_- \hat{\rho}), \quad \rho_{ge} = \text{Tr}(\hat{\sigma}_+ \hat{\rho}). \quad (1.5)$$

Cette valeur stationnaire se calcule elle-même grâce aux équations de Bloch optiques, qui sont la superposition de l'évolution hamiltonienne semi-classique de l'opérateur densité

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_{\text{s.c.}}, \hat{\rho}] \quad (1.6)$$

et de l'évolution irréversible liée aux processus d'émission spontanée, notamment

$$\left. \frac{d\rho_{eg}}{dt} \right|_{\text{sp.}} = -\frac{\Gamma}{2}\rho_{eg}, \quad \left. \frac{d\rho_{ge}}{dt} \right|_{\text{sp.}} = -\frac{\Gamma}{2}\rho_{ge}. \quad (1.7)$$

Dans (1.6), l'hamiltonien semi-classique $\hat{H}_{\text{s.c.}}$ est la somme du couplage dipolaire électrique et de l'hamiltonien pour les variables internes d'un atome isolé :

$$\hat{H}_{\text{s.c.}} = \hat{V}_{\text{d.e.}} + \hbar\omega_0|e\rangle\langle e|. \quad (1.8)$$

Dans (1.7), le coefficient Γ représente la largeur naturelle de l'état excité $|e\rangle$, qui a donc pour durée de vie Γ^{-1} . Dans le cadre de ce modèle à deux niveaux, le coefficient Γ s'exprime lui-même en fonction du dipôle réduit d_0

$$\Gamma = \frac{d_0^2\omega_0^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3}. \quad (1.9)$$

1-3 Force et potentiel dipolaires

L'équation d'évolution pour ρ_{eg} peut s'écrire explicitement à partir des équations de Bloch optiques (Cohen-Tannoudji et al. 1992):

$$\frac{d\rho_{eg}}{dt} = -(i\omega_0 + \frac{\Gamma}{2})\rho_{eg} - i\Omega \cos(\omega t - \varphi) (\rho_{gg} - \rho_{ee}), \quad (1.10)$$

où on a introduit la *pulsation de Rabi* Ω :

$$\hbar\Omega(\mathbf{r}) = -d_0\mathcal{E}(\mathbf{r}). \quad (1.11)$$

Dans la plupart des expériences de piégeage d'atomes par laser, on choisit une combinaison entre intensité du laser et désaccord vis à vis de la résonance atomique $\omega - \omega_0$ de sorte que la population stationnaire de l'état excité soit très petite devant 1, l'atome occupant essentiellement son état fondamental. On peut alors poser $\rho_{gg} \approx 1$, $\rho_{ee} \approx 0$ dans (1.10), ce qui permet de trouver le régime stationnaire forcé

$$\rho_{eg}(t) = \frac{\Omega}{2} \left[\frac{e^{-i(\omega t - \varphi)}}{\omega - \omega_0 + i\Gamma/2} - \frac{e^{i(\omega t - \varphi)}}{\omega + \omega_0 - i\Gamma/2} \right], \quad (1.12)$$

la valeur pour ρ_{ge} s'en déduisant par conjugaison complexe. Dans toutes les applications que nous allons considérer dans la suite, le désaccord

$$\Delta = \omega - \omega_0 \quad (1.13)$$

est très grand (en valeur absolue) devant la largeur naturelle Γ (et *a fortiori* $\omega + \omega_0 \gg \Gamma$). On peut donc prendre à l'ordre le plus bas du calcul

$$\rho_{eg}(t) = \frac{\Omega}{2} \left[\frac{e^{-i(\omega t - \varphi)}}{\omega - \omega_0} - \frac{e^{i(\omega t - \varphi)}}{\omega + \omega_0} \right]. \quad (1.14)$$

On en déduit le dipôle atomique moyen en régime stationnaire

$$\mathbf{d}(t) = \text{Tr} \left[\hat{\mathbf{D}} \hat{\rho}(t) \right] = \epsilon d_0 \frac{\Omega}{\Delta} \cos(\omega t - \varphi) = -\frac{d_0^2}{\hbar\Delta} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t), \quad (1.15)$$

où on a posé

$$\frac{1}{\bar{\Delta}} = \frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega + \omega_0}. \quad (1.16)$$

Selon le signe de $\bar{\Delta}$, lui-même donné par le signe du désaccord Δ , le dipôle est en phase (si $\Delta < 0$) ou en opposition de phase (si $\Delta > 0$) avec le champ électrique.

Il est alors simple de calculer la valeur moyenne \mathbf{f} de l'opérateur force $\hat{\mathbf{F}}$ défini en (1.4) :

$$\mathbf{f} = (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{d}) \boldsymbol{\nabla} [\mathcal{E} \cos(\omega t - \varphi)]. \quad (1.17)$$

En utilisant l'expression (1.15) pour le dipôle moyen, on voit immédiatement qu'il va apparaître deux types de termes : des termes indépendants du temps et des termes oscillant en $e^{\pm 2i\omega t}$. La pulsation ω étant très grande (fréquence optique), le micromouvement du centre de masse atomique induit par ces termes oscillants est négligeable et on peut se limiter aux termes indépendants du temps. On constate alors que le terme lié au gradient de la phase $\boldsymbol{\nabla}\varphi$ a une contribution nulle, et il ne reste que le terme en $\boldsymbol{\nabla}\mathcal{E}$, lié au gradient d'intensité de l'onde lumineuse.

On trouve ainsi l'expression de la force dipolaire f_{dip} , dérivant du potentiel V :

$$\mathbf{f}_{\text{dip}} = -\boldsymbol{\nabla}V \quad \text{avec} \quad V(\mathbf{r}) = \frac{\hbar\Omega^2(\mathbf{r})}{4\bar{\Delta}} = \frac{d_0^2\mathcal{E}^2(\mathbf{r})}{4\hbar\bar{\Delta}}. \quad (1.18)$$

L'interprétation physique de ce potentiel est très simple dans le point de vue adopté ici. Le faisceau lumineux éclairant l'atome induit un dipôle $\mathbf{d} = \alpha(\omega) \mathcal{E}$, où la polarisabilité $\alpha(\omega)$ se déduit de (1.15) :

$$\alpha(\omega) = -\frac{d_0^2}{\hbar\Delta}. \quad (1.19)$$

Le dipôle induit interagit alors avec le champ incident et l'énergie d'interaction correspondante s'écrit $-(1/2)\mathbf{d}\cdot\mathcal{E}$, dont la moyenne sur le temps redonne (1.18). Notons que notre traitement perturbait conduisant à la forme

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha(\omega)}{4}\mathcal{E}^2(\mathbf{r}) \quad (1.20)$$

pour le potentiel dipolaire se généralise sans difficulté au cas où plusieurs niveaux excités e_1, e_2, \dots ont une contribution non négligeable. La polarisabilité totale est obtenue en faisant la somme sur ces niveaux des différents termes en d_i^2 , $i = 1, 2, \dots$, avec les dénominateurs d'énergie en $\omega \pm \omega_i$.

Le point essentiel qui se lit sur (1.18) ou (1.20) est le suivant : la lumière crée sur les atomes un potentiel $V(\mathbf{r})$ proportionnel à l'intensité lumineuse locale $I(\mathbf{r}) \propto \mathcal{E}^2(\mathbf{r})$. Selon le signe du désaccord $\omega - \omega_0$, ce potentiel attire ($\omega < \omega_0$, désaccord rouge) ou repousse ($\omega > \omega_0$, désaccord bleu) les atomes des régions de haute intensité lumineuse. Dans le cas d'un réseau optique, qui nous intéressera lors des cours suivants, nous choisirons une variation périodique pour la fréquence de Rabi en prenant par exemple à une dimension

$$\Omega(x) = \Omega_0 \sin(kx). \quad (1.21)$$

Cette variation est obtenue en prenant une onde lumineuse stationnaire. Les atomes vont alors s'accumuler au voisinage de nœuds ($\Delta > 0$) ou des ventres ($\Delta < 0$) de l'onde.

Et la force de pression de radiation ? Nous ne voyons pas apparaître de force liée au gradient de la phase à l'ordre auquel nous avons fait notre calcul. Ainsi, si l'onde laser est une onde plane progressive, $\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_0$, $\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, nous trouvons qu'il n'y a pas de force agissant sur l'atome alors qu'on s'attendrait à trouver une pression de radiation non nulle. Ceci est lié à l'approximation qui a fait passer de (1.12) à (1.14) et qui impose que

le dipôle forcé est exactement en phase ou en opposition de phase avec le champ électrique. Dans ce cas, le terme lié au gradient de la phase dans l'expression (1.17) de la force moyenne

$$\text{Pression de radiation : } \mathbf{f}_{\text{p.r.}} = -(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{d}) \mathcal{E} \nabla \varphi \sin(\omega t - \varphi) \quad (1.22)$$

à une moyenne temporelle nulle. Pour trouver une valeur moyenne non nulle pour ce terme, il faut (au minimum) pousser le calcul un cran plus loin à l'ordre Γ/Δ et prendre dans (1.12) :

$$\frac{1}{\omega - \omega_0 + i\Gamma/2} \approx \frac{1}{\omega - \omega_0} - i\frac{\Gamma/2}{(\omega - \omega_0)^2}. \quad (1.23)$$

Le dipôle moyen acquiert alors une partie en quadrature $[\sin(\omega t - \varphi)]$ avec le champ incident, qui conduit à une moyenne temporelle non nulle de (1.22). En pratique, nous n'aurons pas besoin de regarder ces termes correctifs dans ce cours.

1-4 Approximation du champ tournant.

On notera que notre traitement ne nécessite pas l'approximation du champ tournant (RWA). Cette approximation requiert l'hypothèse supplémentaire (Cohen-Tannoudji et al. 1992)

$$\text{approximation du champ tournant : } |\Delta| \ll \omega_0, \quad \bar{\Delta} \approx \Delta. \quad (1.24)$$

Le gros intérêt de cette approximation est de permettre des calculs analytiques avec les équations de Bloch même si l'excitation laser est non perturbative, c'est-à-dire même si on ne peut pas faire l'approximation $\rho_{gg} \approx 1$, $\rho_{ee} \approx 0$ dans (1.10). Elle permet de simplifier les calculs dès le départ en remplaçant le couplage dipolaire électrique par

$$\hat{V}_{\text{d.e.}}^{\text{rwa}} = \frac{\hbar\Omega}{2} \left[\hat{\sigma}_+ e^{-i(\omega t - \varphi)} + \hat{\sigma}_- e^{+i(\omega t - \varphi)} \right]. \quad (1.25)$$

Toutefois cette approximation peut être « marginale » dans certaines expériences de piégeage d'atomes froids. Par exemple, si on manipule des atomes de rubidium, $\lambda_0 = 780 \text{ nm}$, par un laser à $\lambda = 1064 \text{ nm}$, le terme non résonnant augmente le potentiel dipolaire de 15%. Au contraire, pour un laser désaccordé sur le bleu de la résonance à la valeur typique de $\lambda = 532 \text{ nm}$, le terme non résonnant réduit le potentiel RWA de 19%.

1. ne pas oublier le facteur 1/2 lié au fait que ce dipôle est induit !

2 Le point de vue de l'atome habillé

Le point de vue de l'atome habillé est une alternative très commode au calcul du potentiel dipolaire par les équations de Bloch optiques que nous venons de voir (Dalibard & Cohen-Tannoudji 1985). Il est particulièrement simple dans le cas où l'approximation du champ tournant est valable. Ce point de vue consiste à étudier les niveaux d'énergie du système *atome + mode du laser*. On part d'une base de ce système en absence de couplage $\{|g, N\rangle, |e, N\rangle, N \in \mathbb{N}\}$, où N représente le nombre de photons dans le mode du laser. On constate immédiatement que si $|\Delta| \ll \omega_0$, ces niveaux se regroupent par multiplicités de dimension 2 (cf. figure 1.2) :

$$|g, N\rangle : \text{énergie } N\hbar\omega, \quad |e, N-1\rangle : \text{énergie } (N-1)\hbar\omega + \hbar\omega_0, \quad (1.26)$$

l'écart entre ces deux niveaux étant $\hbar|\Delta|$. A l'approximation RWA, l'interaction atome-laser (1.25) s'écrit dans ce point de vue

$$\hat{V}_{\text{d.e.}}^{\text{rwa}} = \frac{\hbar\Omega_1(\mathbf{r})}{2} [\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger] \quad (1.27)$$

où \hat{a} et \hat{a}^\dagger détruisent et créent un photon dans le mode du laser, dont le profil est décrit par $\Omega_1(\mathbf{r})$. Cette quantité Ω_1 peut être comprise comme la pulsation de Rabi au point \mathbf{r} quand un seul photon est présent dans le mode considéré pour exciter l'atome.

L'interaction (1.27) ne couple que les deux niveaux d'une même multiplicité de l'atome habillé :

$$\langle e, N-1 | \hat{V}_{\text{d.e.}}^{\text{rwa}} | g, N \rangle = \frac{\hbar\Omega_1(\mathbf{r})}{2} \sqrt{N}. \quad (1.28)$$

À ce stade, la valeur de Ω_1 et le nombre de photons N sont indéterminés. Quand on est en présence d'un problème d'électrodynamique en cavité, la valeur de Ω_1 est imposée par le volume de la cavité elle-même. Pour un atome dans l'espace libre, seule importe la valeur du produit $\Omega_1 \sqrt{N}$ qu'on prend égal à la fréquence de Rabi Ω . Pour simplifier les notations, nous allons supposer que la phase $\varphi(\mathbf{r})$ du laser est nulle. Cette phase n'intervient de toute façon pas dans l'expression de l'énergie des états habillés [voir par exemple (1.34)] et nous la réinsérerons de manière naturelle dans l'expression des états habillés (1.38).

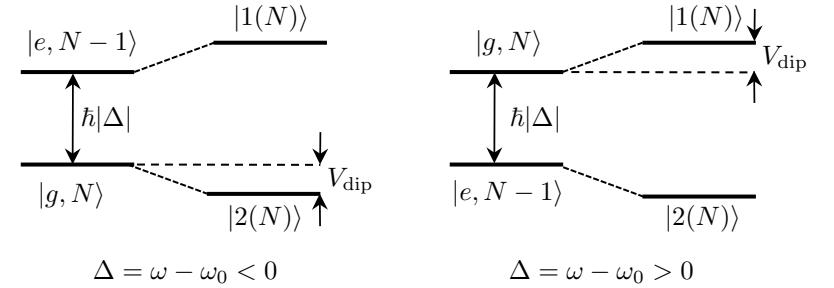


FIGURE 1.2. Niveaux de l'atome habillé, en absence et en présence de couplage entre l'atome et le champ électromagnétique, et pour les deux signes possibles du désaccord Δ . Le potentiel dipolaire V_{dip} s'interprète comme le déplacement lumineux du niveau fondamental $|g\rangle$. Ce déplacement se fait vers le bas ou vers le haut, selon que le désaccord Δ est négatif ou positif.

Il est alors très simple de trouver les énergies propres pour un atome localisé au point \mathbf{r} . L'hamiltonien pour la multiplicité $\{|g, N\rangle, |e, N-1\rangle\}$ s'écrit

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \Omega \\ \Omega & -\Delta \end{pmatrix} + \epsilon_N \quad (1.29)$$

où on a posé

$$\epsilon_N = (N - \frac{1}{2})\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega_0. \quad (1.30)$$

Il est utile d'introduire l'angle de mélange θ défini par

$$\cos[2\theta(\mathbf{r})] = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2(\mathbf{r})}}, \quad \sin[2\theta(\mathbf{r})] = \frac{\Omega(\mathbf{r})}{\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2(\mathbf{r})}}, \quad (1.31)$$

pour écrire l'hamiltonien sous la forme :

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} + \epsilon_N. \quad (1.32)$$

Les vecteurs propres s'écrivent

$$\begin{aligned} |1(N)\rangle &= \cos \theta |g, N\rangle + \sin \theta |e, N-1\rangle \\ |2(N)\rangle &= \sin \theta |g, N\rangle - \cos \theta |e, N-1\rangle \end{aligned} \quad (1.33)$$

et les énergies associées sont

$$E_{N,\pm} = \epsilon_N \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}, \quad (1.34)$$

avec le signe + pour $|1(N)\rangle$ et – pour $|2(N)\rangle$.

Dans la limite perturbative qui nous intéresse ici, $|\Omega| \ll |\Delta|$, et on obtient l'expression approchée des niveaux d'énergie qui se « repoussent » sous l'effet du couplage

$$N\hbar\omega + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}, \quad (N-1)\hbar\omega + \hbar\omega_0 - \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}. \quad (1.35)$$

La première valeur est le niveau issu de $|g, N\rangle$, qui est le niveau peuplé qui nous intéresse ici. La seconde correspond au niveau issu de $|e, N-1\rangle$ dont la population est négligeable. Le potentiel dipolaire $\hbar\Omega^2/4\Delta$ [cf. (1.18)] s'interprète donc très simplement comme un déplacement de l'énergie de l'état $|g, n\rangle$ sous l'effet du couplage avec le laser. Ce déplacement peut se faire vers le bas ou vers le haut, selon que le niveau « repoussant » $|e, N-1\rangle$ est au dessus ou au dessous de $|g, N\rangle$ (cf. figure 1.2).

Pour $\Delta > 0$, l'angle 2θ défini en (1.31) peut être choisi proche de 0, et l'état propre connecté à g s'écrit

$$\Delta > 0 : \quad \overline{|g, N\rangle} = |1(N)\rangle \approx |g, N\rangle + \frac{\Omega}{2\Delta} |e, N-1\rangle \quad (1.36)$$

Pour $\Delta < 0$, l'angle 2θ peut être choisi voisin de π , de sorte que

$$\Delta < 0 : \quad \overline{|g, N\rangle} = |2(N)\rangle \approx |g, N\rangle - \frac{\Omega}{2|\Delta|} |e, N-1\rangle. \quad (1.37)$$

On peut donc poser dans les deux cas, en remettant la dépendance explicite en position et en réinsérant l'éventuelle phase $\varphi(\mathbf{r})$ du laser [cf. (1.25)]

$$\overline{|g, N\rangle}(\mathbf{r}) \approx |g, N\rangle + \frac{\Omega(\mathbf{r})}{2\Delta} e^{i\varphi(\mathbf{r})} |e, N-1\rangle. \quad (1.38)$$

L'expression (1.38) est très commode car elle permet de calculer les valeurs stationnaires des éléments de matrice de l'opérateur densité à l'ordre deux en Ω . En effet à cet ordre, on peut montrer que la population stationnaire de l'autre état habillé de (1.33) est nulle (elle est au moins d'ordre 4

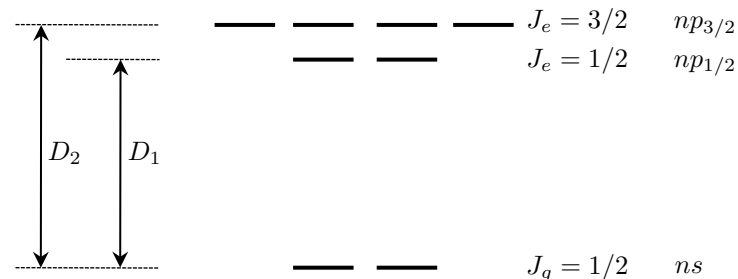


FIGURE 1.3. Modélisation de la transition de résonance d'un atome alcalin. On a négligé l'effet de l'interaction hyperfine avec le spin nucléaire, et la dégénérescence liée à ce spin.

en Ω/Δ , voir par exemple Dalibard & Cohen-Tannoudji (1985)). On peut donc déduire de (1.38) l'élément de matrice ρ_{eg} déjà donné en (1.14)

$$\rho_{eg} = \langle e, N-1 | \left(\overline{|g, N\rangle} \overline{\langle g, N|} \right) |g, N\rangle = \frac{\Omega e^{i\varphi}}{2\Delta}, \quad (1.39)$$

la différence avec (1.14) étant qu'on a fait ici l'approximation RWA et que l'évolution temporelle explicite en $e^{-i\omega t}$ de (1.14) est ici implicitement contenue dans la différence entre les nombres de photons à gauche et à droite. On déduit également de (1.38) la population Π_e de l'état excité à cet ordre du calcul

$$\Pi_e = \langle e, N-1 | \left(\overline{|g, N\rangle} \overline{\langle g, N|} \right) |e, N-1\rangle = \frac{\Omega^2}{4\Delta^2}, \quad (1.40)$$

expression très utile pour estimer le taux d'émission spontanée $\gamma = \Gamma\Pi_e$.

3 Le cas des atomes alcalins

Le modèle d'une transition $J_g = 0 \leftrightarrow J_e = 1$ s'applique bien aux atomes alcalino-terreux (au moins si leur spin nucléaire est nul), mais il ne peut pas être utilisé tel quel pour les atomes alcalins. Compte tenu de l'importance pratique de ces derniers, nous allons donner quelques indications sur la manière dont les résultats précédents sont transformés. Pour simplifier les notations, nous nous plaçons ici dans l'approximation du champ tournant.

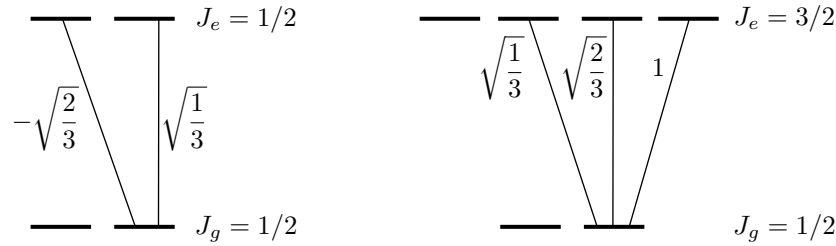


FIGURE 1.4. Amplitude des couplages pour les deux transitions D_1 et D_2 de la raie de résonance d'un atome alcalin, à partir du niveau fondamental $m_z = +1/2$. Le spin du noyau est supposé nul. Les amplitudes des couplages à partir du niveau fondamental $m_z = -1/2$ prennent des valeurs symétriques par rapport à celles indiquées ici.

Nous envisagerons pour commencer le cas d'un atome alcalin simplifié pour lequel le spin nucléaire serait nul (figure 1.3). L'état fondamental, un état ns , est alors doublement dégénéré du fait du spin de l'électron de valence et son moment cinétique vaut $J_g = 1/2$. La transition de résonance se fait vers l'état np qui, du fait de l'interaction de structure fine, est clivé en deux sous-niveaux de moment cinétique $1/2$ et $3/2$ notés $np_{1/2}$ et $np_{3/2}$. Les deux résonances $ns \leftrightarrow np_{1/2}$ et $ns \leftrightarrow np_{3/2}$ correspondent aux raies D_1 et D_2 , de pulsation ω_1 et ω_2 .

3-1 Lumière de polarisation linéaire

Si le faisceau lumineux est polarisé linéairement, la symétrie du problème entraîne que le déplacement lumineux des deux sous-niveaux $|g, m_z = \pm 1/2\rangle$ sont identiques². Dans ce cas, l'opérateur déplacement lumineux est proportionnel à l'identité dans le sous-espace $|g, m = \pm 1/2\rangle$. En utilisant l'algèbre des moments cinétiques et les coefficients de Clebsch-Gordan indiqués sur la figure 1.4, on montre que ce déplacement lumineux vaut

$$\hat{V} = \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta} \hat{1} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\Delta_1} + \frac{2}{\Delta_2} \right), \quad (1.41)$$

2. On a intérêt à choisir comme précédemment l'axe de quantification selon la direction de cette polarisation pour s'en convaincre.

où $\Delta_1 = \omega - \omega_1$ et $\Delta_2 = \omega - \omega_2$ sont les désaccords du laser par rapport aux transitions de résonance D_1 et D_2 . Il suffit donc de prendre une moyenne pondérée des deux désaccords pour retrouver le résultat de la transition $0 \leftrightarrow 1$. Ce résultat reste valable quand on prend en compte la structure hyperfine de l'atome, pourvu que les désaccords Δ_1 et Δ_2 soient grands devant la structure hyperfine des niveaux excités $np_{1/2}$ et $np_{3/2}$, ce qui sera toujours le cas en pratique dans la suite de ce cours.

Quand $\Delta_{1,2}$ est grand devant l'écart de structure fine $\omega_2 - \omega_1$, alors $\Delta_1 \approx \Delta_2$ et l'effet de la structure fine ne se fait pas sentir. En revanche, quand le désaccord est comparable à l'écart de structure fine, le résultat est notablement modifié. En particulier, on voit qu'il existe une valeur particulière de Δ , telle que $\Delta_2 = -2\Delta_1$ pour laquelle \hat{V} s'annule. Pour l'atome de rubidium, les longueurs d'onde des raies D_1 et D_2 sont $\lambda_1 = 795$ nm et $\lambda_2 = 780$ nm ; ce désaccord particulier est donc obtenu en choisissant un laser de longueur d'onde $\lambda = 790$ nm. Pour cette valeur de λ , le potentiel dipolaire ressenti par les atomes est nul ; les atomes continuent à « voir » le faisceau lumineux et à diffuser des photons (ce n'est pas un état noir), mais ils ne ressentent pas de force dipolaire.

3-2 Lumière de polarisation quelconque

La situation se complique si la polarisation du laser n'est pas choisie linéaire, mais elliptique ou circulaire. Dans ce cas, l'opérateur déplacement lumineux n'est plus proportionnel à l'identité dans le sous-espace $|g, m = \pm 1/2\rangle$, ce qui permet de générer des potentiels dépendant du spin S associé à ce niveau. Ecrivons le champ laser sous la forme

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} \mathcal{E}(\mathbf{r}) e^{i(\omega t - \varphi)} + \text{c.c.} \quad (1.42)$$

où le vecteur polarisation $\boldsymbol{\epsilon}$ est désormais complexe. Introduisons le « vecteur fréquence de Rabi » $\boldsymbol{\Omega}$ dont les trois composantes complexes Ω_α , $\alpha = x, y, z$ caractérisent le couplage atome-laser

$$\hbar\Omega_\alpha = -d_0 \mathcal{E}(\mathbf{r}) (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{u}_\alpha) \quad (1.43)$$

dans la base cartésienne \mathbf{u}_α . On peut aussi introduire les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ dans la base standard

$$\Omega_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp\Omega_x + i\Omega_y), \quad \Omega_0 = \Omega_z. \quad (1.44)$$

À partir ce vecteur $\boldsymbol{\Omega}$, on peut assez facilement mettre l'opérateur déplacement lumineux sous la forme

$$\hat{V} = \frac{\hbar|\boldsymbol{\Omega}|^2}{4\Delta} \hat{1} + \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{S}}, \quad (1.45)$$

où le champ magnétique effectif vaut

$$\mathbf{B} = \frac{i}{6} \left(\frac{1}{\Delta_2} - \frac{1}{\Delta_1} \right) \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega}^*. \quad (1.46)$$

L'origine de ce résultat est claire ; prenons par exemple une polarisation lumineuse circulaire σ_- proche de la transition D_1 (on oublie alors la transition D_2). On voit immédiatement sur la figure 1.4 (gauche) que le niveau fondamental $|g, m_z = -1/2\rangle$ n'est pas couplé à la lumière, alors que le niveau $|g, m_z = +1/2\rangle$ l'est avec un coefficient de Clebsch–Gordan égal à $-\sqrt{2/3}$. Le différentiel de déplacement lumineux entre ces deux niveaux est décrit par ce champ magnétique effectif \mathbf{B} . Plus précisément, la combinaison du terme scalaire et du terme vectoriel de (1.45) rend compte du fait que $|g, m_z = -1/2\rangle$ ne ressent aucun potentiel alors que $|g, m_z = +1/2\rangle$ est déplacé deux fois plus que si la lumière avait une polarisation linéaire de même intensité.

On voit que la partie vectorielle du déplacement lumineux (Cohen-Tannoudji & Dupont-Roc 1972; Deutsch & Jessen 1998) proportionnelle à \mathbf{B} , est comparable, voire plus grande que la partie scalaire si le désaccord est choisi du même ordre que la structure fine. En particulier, cette partie vectorielle n'est pas nulle si on choisit le désaccord $\Delta_2 = -2\Delta_1$ annulant la partie scalaire. En revanche, cette partie vectorielle décroît comme $1/\Delta^2$ si on choisit un désaccord grand devant la structure fine. Elle devient donc rapidement négligeable devant la partie scalaire, qui ne décroît que comme $1/\Delta$. Ce dernier point est logique : si le désaccord est très grand devant la structure fine, cette dernière est négligeable pendant le temps caractéristique Δ^{-1} associée à l'interaction atome-lumière. Si on peut négliger la

structure fine, on se ramène à la transition $J_g = 0 \leftrightarrow J_e = 1$ étudiée en première partie, puisque le spin de l'électron est « spectateur » dans l'hamiltonien de couplage entre l'atome et la lumière. La dégénérescence entre les deux sous-niveaux de spin $\pm 1/2$ ne peut donc pas être levée en absence de structure fine.

Examinons deux cas particulier de l'expression générale (1.46) :

- Pour une polarisation linéaire, par exemple $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{u}_z$, alors le produit vectoriel $\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_z$ est nul, ainsi que le champ magnétique effectif. Nous avons déjà mentionné ce résultat plus haut.
- Pour une polarisation circulaire, par exemple un faisceau lumineux se propageant le long de l'axe Oz tel que $\boldsymbol{\Omega} = \Omega(\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$, alors le produit vectoriel $(\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y) \times (\mathbf{u}_x - i\mathbf{u}_y) = -2i\mathbf{u}_z$ et le champ magnétique effectif est aligné selon Oz :

$$\mathbf{B} = \frac{|\Omega|^2}{6} \left(\frac{1}{\Delta_2} - \frac{1}{\Delta_1} \right) \mathbf{u}_z. \quad (1.47)$$

Notons qu'à la différence d'un champ magnétique usuel, appliqué de l'extérieur avec des bobines, ce champ magnétique fictif peut avoir des variations spatiales sur des échelles de l'ordre de la longueur d'onde optique : c'est par exemple le cas quand on forme une onde stationnaire en superposant deux ondes de même fréquence, de directions opposées et de polarisations linéaires non parallèles.

Il reste à prendre en compte la structure hyperfine du niveau fondamental. Si le noyau a un spin I , ce niveau est clivé en deux sous-niveaux de moment cinétique $F = I \pm 1/2$. Le théorème de Wigner-Eckart indique que l'opérateur déplacement lumineux s'écrit dans ce cas

$$\hat{V} = \frac{\hbar|\boldsymbol{\Omega}|^2}{4\Delta} \hat{1} + \mathbf{B}' \cdot \hat{\mathbf{F}}, \quad (1.48)$$

avec pour le niveau $F = I \pm 1/2$:

$$\mathbf{B}' = \pm \frac{\mathbf{B}}{2I + 1}. \quad (1.49)$$

Les champs magnétiques effectifs sont donc opposés pour les deux niveaux hyperfins. Les conclusions énoncées précédemment sur les valeurs relatives des composantes scalaires et vectorielles de cet opérateur déplacement lumineux sont inchangées.

4 Approche quantique

L'approche semi-classique nous a fourni la valeur du potentiel dipolaire, mais il faut valider ce résultat par une approche qui traite quantiquement le mouvement de l'atome. La plus grande classe d'applications des réseaux optiques porte en effet sur des aspects directement liés à la nature quantique de ce mouvement : bandes d'énergie, états minimaux, phases géométriques... Fort heureusement, la structure du traitement semi-classique qui nous a permis de calculer le potentiel dipolaire peut être transposée presque mot à mot ; nous n'aurons que peu d'éléments à ajouter pour obtenir l'hamiltonien complètement quantique décrivant le mouvement du centre de masse. Pour minimiser les aspects techniques de cette étude, nous allons nous restreindre au cas d'un atome à deux niveaux, comme considéré en § 1-1. Le cas d'un atome multi-niveaux est traité en détail par Gerbier & Castin (2010).

4-1 Variables lentes et variables rapides

Le problème auquel nous sommes confrontés est celui de l'élimination de variables rapides au profit de variables lentes. Les variables rapides sont celles qui concernent la dynamique interne de l'atome, les variables lentes sont liées au mouvement du centre de masse. L'évolution de l'ensemble de ces variables est décrite par l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{d.e.}} + \hbar\omega_0|e\rangle\langle e|, \quad (1.50)$$

où le couplage atome-lumière à l'approximation dipolaire électrique a été donné en (1.2). À l'évolution réversible décrite par cet hamiltonien, il faut ajouter l'évolution irréversible due aux processus d'émission spontanée. Cette évolution a été donnée en (1.7) pour les éléments de matrice de l'opérateur densité entre $|g\rangle$ et $|e\rangle$. Nous n'aurons pas besoin ici de l'expression explicite des termes décrivant l'évolution de $\hat{\rho}_{ee}$ et $\hat{\rho}_{gg}$; ils sont donnés dans Gerbier & Castin (2010).

Considérons l'évolution de l'opérateur densité total $\hat{\rho}$ de l'atome, qui porte à la fois sur les degrés de liberté internes et externes. Intéressons-nous pour commencer à l'évolution de $\hat{\rho}_{eg} = \langle e|\hat{\rho}|g\rangle$ qui est un opérateur

vis-à-vis des variables externes seulement. Cette évolution se déduit de celle écrite en point de vue semi classique (1.10) :

$$\frac{d\hat{\rho}_{eg}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{\rho}_{eg} \right] - (i\omega_0 + \frac{\Gamma}{2})\hat{\rho}_{eg} - i\Omega \cos(\omega t - \varphi) (\hat{\rho}_{gg} - \hat{\rho}_{ee}). \quad (1.51)$$

Nous allons procéder à deux approximations à ce stade, similaires à ce qui a été fait dans le cas semi-classique. D'une part nous allons négliger la fraction d'atomes dans l'état excité, et donc omettre le terme $\hat{\rho}_{ee}$ dans l'équation qui précède. D'autre part nous allons supposer que l'évolution de $\hat{\rho}_{eg}$ due aux variables internes, avec les fréquences caractéristiques Δ et Γ , est beaucoup plus rapide que celle due aux variables externes, provenant par exemple de l'hamiltonien d'énergie cinétique $\hat{p}^2/2m$. Dans ces conditions, on peut (i) omettre le premier commutateur du membre de droite de (1.51), (ii) négliger la variation de $\hat{\rho}_{gg}$ sur une durée $\sim \Gamma^{-1}$, (iii) intégrer formellement (1.51) dans la limite $|\Delta| \gg \Gamma$ pour obtenir finalement, de manière très similaire à (1.14) :

$$\hat{\rho}_{eg}(t) = \frac{\Omega}{2} \left[\frac{e^{-i(\omega t - \varphi)}}{\omega - \omega_0} - \frac{e^{i(\omega t - \varphi)}}{\omega + \omega_0} \right] \hat{\rho}_{gg}(t). \quad (1.52)$$

Ce résultat signifie que les opérateurs densité correspondant aux « cohérences optiques » ρ_{eg} et ρ_{ge} suivent adiabatiquement l'évolution beaucoup plus lente de l'opérateur densité restreint au niveau fondamental $|g\rangle$.

4-2 Hamiltonien effectif pour le centre de masse atomique

On reporte ensuite le résultat (1.52) dans l'équation d'évolution de $\hat{\rho}_{gg}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_{gg}}{dt} &= \left. \frac{d\hat{\rho}_{gg}}{dt} \right|_{\text{sp.}} + \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{\rho}_{gg} \right] \pm i\Omega \cos(\omega t - \varphi) (\hat{\rho}_{eg} - \hat{\rho}_{ge}), \\ &\approx \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}), \hat{\rho}_{gg} \right]. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Notons qu'on s'est limité ici à l'ordre le plus bas non nul en $1/\Delta$ et qu'on a lissé les termes en $e^{\pm 2i\omega t}$, comme on l'avait fait dans le cadre de l'approximation semi-classique. Notons également que le terme décrivant l'évolution par émission spontanée de ρ_{gg} est $\propto \Gamma\rho_{ee}$; il ne contribue pas à cet

ordre du calcul et n'aura une influence qu'à un ordre supérieur en Γ/Δ [voir par exemple Gerbier & Castin (2010)].

Le résultat (1.53) correspond exactement à ce qu'on recherchait. Cette équation d'évolution purement hamiltonienne décrit le mouvement d'une particule de masse m , sans structure interne, dans le potentiel dipolaire $V(\mathbf{r})$ donné en (1.18). C'est cet hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}}) \quad (1.54)$$

qui va servir de point de départ à la suite du cours, en ajoutant éventuellement les modifications liées au spins électronique et nucléaire étudiées en § 3.

5 Réseau rouge ou réseau bleu ?

5-1 Le « paradoxe » de Gordon & Ashkin (1980)

Dans toute la suite de ce cours, nous utiliserons les pièges lumineux, en particulier les réseaux optiques périodiques, dans un régime où les phénomènes d'émission spontanée sont négligeables. L'émission spontanée apparaît en effet comme une nuisance³ : son caractère aléatoire constitue un chauffage des atomes, qu'il s'agit de réduire au maximum. Ce régime non dissipatif est obtenu en rendant la population de l'état excité trouvée en (1.40) :

$$\Pi_e = \frac{\Omega^2}{4\Delta^2} \quad (1.55)$$

la plus petite possible, pour une valeur donnée du potentiel optique

$$V = \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}. \quad (1.56)$$

Ceci conduit à choisir des désaccords et des intensités les plus grand possibles : en gardant Ω^2/Δ constant, la quantité $\Omega^2/\Delta^2 \rightarrow 0$ si Ω, Δ deviennent très grands.

3. La situation est très différente pour l'utilisation initiale des réseaux optiques, où on cherchait les moyens optimaux pour refroidir une assemblée d'atomes.

Considérons plus précisément un réseau optique généré par une onde stationnaire à une dimension, $\Omega(x) = \Omega_0 \sin(kx)$ conduisant au potentiel

$$V(x) = V_0 \sin^2 kx, \quad V_0 = \frac{\hbar\Omega_0^2}{4\Delta} \quad (1.57)$$

Un paramètre disponible pour minimiser l'effet de l'émission spontanée est le choix du signe du désaccord, pour une profondeur de réseau V_0 donnée. Pour un désaccord $\Delta > 0$ (bleu), les atomes sont piégés au voisinage des noeuds de l'onde stationnaire composant le réseau. Au contraire, pour $\Delta < 0$ (rouge), le potentiel est minimal aux ventres de l'onde stationnaire. On pourrait naïvement penser que, concernant les phénomènes d'émission spontanée, la situation est plus favorable pour un désaccord bleu que pour un désaccord rouge, car l'intensité est plus faible à l'endroit où se trouvent les atomes.

Ce raisonnement naïf a été invalidé par Gordon & Ashkin (1980), qui ont calculé le coefficient de diffusion en impulsion pour un atome dans une onde stationnaire. Ils ont montré que à V_0 donné, ce coefficient de diffusion est le même en tout point de l'onde stationnaire et ne dépend pas du signe de Δ . Toutefois, ils n'ont pas interprété physiquement ce résultat qui est donc resté quelque peu « mystérieux ». Il a été analysé par Cohen-Tannoudji (1992), puis repris récemment dans un cadre plus général par Gerbier & Castin (2010). La transposition de ce problème au cas d'atomes en cavité a été étudiée par Murr et al. (2006).

Dans le complément donné à la fin de ce chapitre, nous résumons l'argument initial de Gordon & Ashkin (1980) et sa transposition dans le formalisme développé dans le paragraphe 4, en reprenant notamment la démarche de Gerbier & Castin (2010). Dans ce qui suit, nous allons expliquer le résultat *a priori* surprenant de Gordon & Ashkin (1980) en utilisant le formalisme de l'atome habillé, que nous avons présenté précédemment.

5-2 Transitions Raman dans un réseau très profond

Pour expliquer le résultat paradoxal de Gordon & Ashkin (1980), nous allons considérer un réseau de grande profondeur V_0 de sorte que le mouvement d'un atome est confiné au fond d'un puits de potentiel ; l'effet tunnel vers les puits adjacents est supposé négligeable.

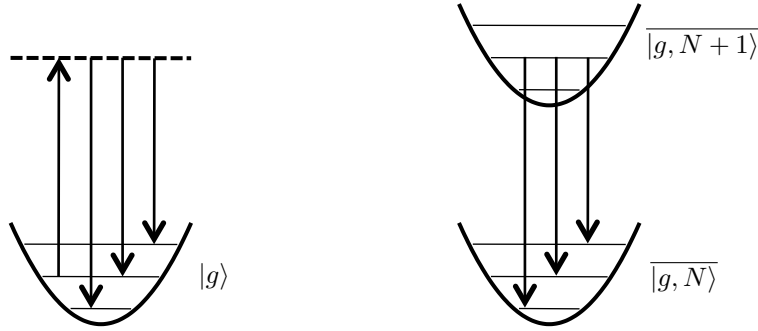


FIGURE 1.5. Gauche : transition Raman pouvant causer un changement de l'état de vibration n de l'atome. Droite : ces mêmes transitions dans le point de vue de l'atome habillé correspondent à une « cascade » radiative.

Dans le cas d'un réseau désaccordé sur le bleu, nous prenons comme en (1.57) un réseau 1D avec une fréquence de Rabi $\Omega(x) = \Omega_0 \sin(kx)$ et nous faisons l'hypothèse que l'extension du mouvement spatial de l'atome est petite devant $k^{-1} = \lambda/(2\pi)$ de sorte qu'on peut faire l'approximation $\sin(kx) \approx kx$. Le mouvement de l'atome est alors un mouvement de vibration harmonique dans le potentiel

$$V(x) \approx \frac{\hbar\Omega_0^2 k^2}{4\Delta} x^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2, \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{\hbar\Omega_0^2 k^2}{2m\Delta}}. \quad (1.58)$$

Les états propres du mouvement dans ce potentiel sont les fonctions de Hermite $H_n(x/a_{\text{oh}})$, où la taille caractéristique de l'état fondamental est

$$a_{\text{oh}} = \sqrt{\hbar/m\omega}, \quad (1.59)$$

les énergies correspondantes étant $(n + 1/2)\hbar\omega$.

Dans le cas d'un réseau désaccordé sur le rouge, nous prendrons $\Omega = \Omega_0 \cos(kx)$ pour conserver un puits centré en $x = 0$. Les expressions pour la pulsation ω au fond du puits, la taille de l'état fondamental a_{oh} et le spectre en énergie $(n + 1/2)\hbar\omega$ sont inchangées (au changement $\Delta \rightarrow -\Delta$ près).

Les phénomènes d'émission spontanée vont causer des transitions entre les niveaux d'énergie de ce puits en induisant des transitions Raman

(figure 1.5) : l'atome, initialement dans l'état fondamental électronique g et un état de vibration n pour son centre de masse, peut passer dans un état électronique excité e en absorbant un photon du faisceau laser créant l'onde stationnaire, puis retomber dans l'état fondamental électronique en émettant un photon de fluorescence. Lors de cette retombée, l'atome peut atteindre un autre état de vibration n' : La diffusion Raman crée donc une marche au hasard de l'état du centre de masse, ce qui correspond à un chauffage.

Le formalisme de l'atome habillé est très commode pour visualiser cette marche au hasard. La transition Raman que nous venons de décrire correspond à une transition de la multiplicité $\{|g, N + 1\rangle, |e, N\rangle\}$ vers la multiplicité immédiatement inférieure $\{|g, N\rangle, |e, N - 1\rangle\}$ (figure 1.5). Plus précisément, à l'ordre le plus bas non nul en Ω , c'est la transition

$$\overline{|g, N + 1\rangle} \longrightarrow \overline{|g, N\rangle} \quad (1.60)$$

qui a une contribution significative. L'état $\overline{|g, N + 1\rangle}$ a un recouvrement non nul (faible) avec $|e, N\rangle$ et il est donc instable du point de vue de l'émission spontanée. En se désexcitant, il émet un photon (le photon Raman dans l'image ci-dessus) et il peut tomber dans l'état $\overline{|g, N\rangle}$, qui a lui-même un recouvrement non nul (fort) avec $|g, N\rangle$.

5-3 Les taux de transition $n \rightarrow n'$

Nous allons maintenant évaluer les taux de transitions $n \rightarrow n'$ en utilisant la règle d'or de Fermi (ROF). Le couplage \hat{W} entre l'atome et les modes vides du rayonnement responsable de l'émission spontanée s'écrit

$$\hat{V}_{\text{vac}} = \sum_{k'} \mathcal{V}_{k'} e^{ik'x} \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{\sigma}_- + \text{h.c.} \quad (1.61)$$

où $\hat{a}_{k'}^\dagger$ crée un photon de vecteur d'onde k' le long de l'axe x . La largeur naturelle de l'état atomique excité $|e\rangle$ vaut dans ce modèle

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle g; k' | \hat{V}_{\text{vac}} | e; \text{vac} \rangle \right|^2 \rho(\hbar ck' = \hbar\omega_A), \quad (1.62)$$

où $\rho(E)$ représente la densité d'états pour une énergie finale $\hbar c |k'|$ égale à l'énergie initiale d'un atome excité $\hbar\omega_A$ (soit $k' = \pm\omega_A/c$).

L'état initial correspond au vide de rayonnement et à l'atome dans l'état $|\Psi_n^{(N+1)}\rangle$, correspondant au niveau vibrationnel n et l'état interne habillé $|g, N+1\rangle$:

$$\langle x | \Psi_n^{(N+1)} \rangle = H_n(x) \{ \cos[\theta(x)] |g, N+1\rangle + \sin[\theta(x)] |e, N\rangle \}. \quad (1.63)$$

L'état final correspond à un photon k' émis et à l'état atomique $|\Psi_{n'}^{(N)}\rangle$. Le taux recherché $\gamma_{n \rightarrow n'}$ s'écrit alors en utilisant la ROF

$$\begin{aligned} \gamma_{n \rightarrow n'}(k') &\propto |\langle \Psi_{n'}^{(N)} ; k' | e^{ik'x} \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_- | \Psi_n^{(N+1)} ; \text{vac} \rangle|^2 \\ &\propto |\langle \Psi_{n'}^{(N)} | e^{ik'x} \hat{\sigma}_- | \Psi_n^{(N+1)} \rangle|^2 \end{aligned} \quad (1.64)$$

En reportant l'expression (1.63) dans l'élément de matrice à calculer, on arrive à

$$\begin{aligned} \gamma_{n \rightarrow n'}(k') &\propto \left| \int H_{n'}(x) H_n(x) e^{ik'x} \sin[\theta(x)] \cos[\theta(x)] dx \right|^2 \\ &\propto \left| \frac{1}{2\Delta} \int H_{n'}(x) H_n(x) e^{ik'x} \Omega(x) dx \right|^2, \end{aligned} \quad (1.65)$$

où on a utilisé l'approximation $\sin(2\theta) \approx \Omega/\Delta$ [cf. (1.31)]. Munis de ce résultat, nous sommes désormais en mesure de comparer ce qui se passe quand l'atome est confiné au voisinage d'un nœud (réseau bleu) ou d'un ventre (réseau rouge) de l'onde stationnaire.

Réseau bleu. Nous avons déjà indiqué que nous nous limitons ici au cas où l'extension spatiale de la distribution de probabilité de l'atome est petite devant $1/k$. On peut donc faire dans l'intégrale (1.65) l'approximation $\Omega(x) \approx \Omega_0 kx$, $e^{ik'x} \approx 1$, et cette intégrale se ramène simplement à

$$\gamma_{n \rightarrow n'} \propto \frac{\Omega_0^2}{4\Delta^2} |\langle H_{n'} | k\hat{x} | H_n \rangle|^2, \quad (1.66)$$

soit, en rétablissant les coefficients de proportionnalité omis jusqu'ici :

$$\gamma_{n \rightarrow n'} = \frac{\gamma_0}{2} (ka_{\text{oh}})^2 [(n+1) \delta_{n',n+1} + n \delta_{n',n-1}], \quad (1.67)$$

où on a introduit le taux de diffusion γ_0 « typique » pour une fréquence de Rabi Ω_0 :

$$\gamma_0 = \Gamma \frac{\Omega_0^2}{4\Delta^2}. \quad (1.68)$$

L'expression (1.67) appelle deux remarques importantes.

- La localisation de l'atome au voisinage d'un nœud de l'onde stationnaire conduit à une forte réduction du taux d'émission de photons par rapport au taux typique γ_0 , par un facteur $(ka_{\text{oh}})^2 = \hbar k^2 / (m\omega) \ll 1$ pour le niveau de vibration fondamental $n = 0$. C'est un effet qui découle logiquement du fait que l'atome ressent une intensité lumineuse très réduite sur l'extension de sa fonction d'onde, de l'ordre de a_{oh} .
- On constate sur (1.67) que l'émission d'un photon s'accompagne forcément d'un changement de niveau d'une unité, avec un taux $\propto (n+1)$ pour la transition $n \rightarrow n+1$, correspondant au gain d'énergie $\hbar\omega$, et un taux $\propto n$ pour la transition $n \rightarrow n-1$, correspondant à la perte d'énergie $\hbar\omega$ (figure 1.6). Le gain d'énergie par unité de temps pour une atome préparé dans la bande n vaut donc :

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{\gamma_0}{2} (ka_{\text{oh}})^2 [(n+1)\hbar\omega - n\hbar\omega] = \gamma_0 E_r \quad (1.69)$$

où on a introduit l'énergie de recul

$$E_r = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (1.70)$$

Réseau rouge. Dans ce cas, pour évaluer l'intégrale (1.65), on peut faire l'approximation que la fréquence de Rabi est constante sur l'extension de la fonction d'onde atomique : $\Omega(x) = \Omega_0 \cos(kx) \approx \Omega_0$. On développe l'exponentielle $e^{ik'x}$ au premier ordre en x et on obtient

$$\gamma_{n \rightarrow n'}(k') \propto \frac{\Omega_0^2}{4\Delta^2} |\langle H_{n'} | 1 + ik'\hat{x} | H_n \rangle|^2 \quad (1.71)$$

ou encore

$$\gamma_{n \rightarrow n'} = \gamma_0 \left\{ \delta_{n,n'} + \frac{(ka_{\text{oh}})^2}{2} [(n+1) \delta_{n',n+1} + n \delta_{n',n-1}] \right\} \quad (1.72)$$

où on a pris $k' \approx k$. Le terme dominant est cette fois-ci $\gamma_0 \delta_{n,n'}$, c'est-à-dire une émission spontanée de photons sans changement de niveau de vibration (figure 1.6). Le taux correspondant est élevé, comme on l'attend aux ventres d'une onde stationnaire, mais ce processus ne correspond pas à

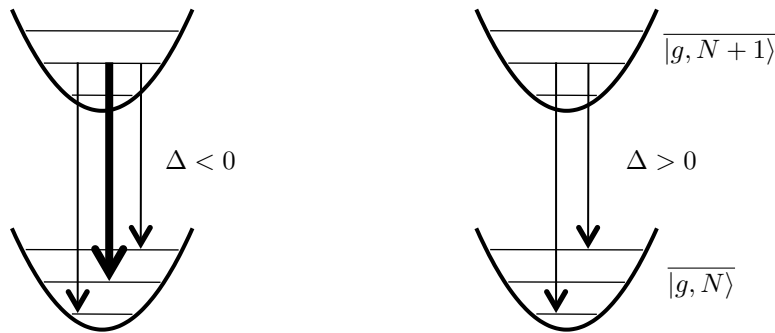


FIGURE 1.6. Les transitions principales dans le point de vue de l'atome habillé (régime de Lamb-Dicke). Pour un laser désaccordé sur le rouge de la transition atomique ($\Delta < 0$), le taux de fluorescence est élevé : la plus grande partie des photons sont émis sur la raie sans recul $n \rightarrow n$, le restant correspondant aux transitions $n \rightarrow n \pm 1$. Pour un faisceau désaccordé sur le bleu ($\Delta > 0$), les photons sont uniquement émis sur les raies $n \rightarrow n \pm 1$. Le taux de chauffage est le même dans les deux cas, à Ω_0 et $|\Delta|$ donnés.

une variation de l'énergie de l'atome : cette émission de photon sans recul est l'équivalent de l'effet Mossbauer en physique nucléaire, et il est rencontré fréquemment en physique des ions piégés (effet Lamb-Dicke). Le changement d'énergie provient du second terme de (1.72) qui fait intervenir des sauts d'un état de vibration n vers un état voisin $n \pm 1$. Ces sauts sont beaucoup plus rares que les précédents, et ils conduisent à un gain d'énergie par unité de temps identique à celui trouvé pour un réseau bleu [équation (1.69)].

Pour conclure, on retrouve avec cette analyse simple le résultat de Gordon & Ashkin (1980) : le taux de chauffage est effectivement le même aux nœuds et aux ventres d'une onde stationnaire. Toutefois, les mécanismes conduisant à ce taux sont très différents. Pour un réseau bleu et des atomes localisés aux nœuds, le taux de diffusion de photons est très réduit mais chaque émission de photon s'accompagne d'un changement d'énergie ($\hbar\omega$). Pour un réseau rouge et des atomes localisés aux ventres, le taux d'émission spontanée est beaucoup plus élevé, mais l'énergie moyenne gagnée lors d'une émission donnée est beaucoup plus faible car la plupart des

émissions se font sans recul.

Nous nous sommes limités ici au cas où l'effet tunnel entre les différents puits du réseau est négligeable. Quand cet effet tunnel devient significatif, les niveaux de vibration discrets n deviennent des bandes d'énergie et une différence notable entre réseau bleu et réseau rouge apparaît. La « raie sans recul » trouvée plus haut dans le cas rouge devient une raie où il n'y a pas de changement de bande. Si les bandes sont étroites, l'énergie apportée par ces transitions reste faible. Néanmoins, il y a une décohérence associée à ces multiples transitions : on peut en effet considérer que chaque émission spontanée « localise » l'atome avec une résolution de λ . Un paquet d'ondes s'étendant sur plusieurs sites perdra donc beaucoup plus vite sa cohérence dans le cas d'un réseau rouge que dans celui d'un réseau bleu, même si les taux de chauffage $d\bar{E}/dt$ sont similaires. Cette différence est étudiée en détail par Gerbier & Castin (2010).

6 Références

- Cohen-Tannoudji, C. (1992), « Atomic motion in laser light », in *Fundamental Systems in Quantum Optics*, ed. by J. Dalibard, J.-M. Raimond & J. Zinn-Justin, North-Holland Amsterdam, , pp. 1–164.
- Cohen-Tannoudji, C. & J. Dupont-Roc (1972), « Experimental Study of Zeeman Light Shifts in Weak Magnetic Fields », in *Phys. Rev. A* 5.2, pp. 968–984.
- Cohen-Tannoudji, C., J. Dupont-Roc & G. Grynberg (1992), *Atom-Photon Interactions*, New York: Wiley.
- Dalibard, J & C Cohen-Tannoudji (1985), « Dressed atom approach to atomic motion in laser light – the dipole force revisited », in *Journal of the Optical Society of America B-Optical Physics* 2.11, 1707–1720.
- Deutsch, Ivan H. & Poul S. Jessen (1998), « Quantum-state control in optical lattices », in *Phys. Rev. A* 57 (3), pp. 1972–1986.
- Gerbier, Fabrice & Yvan Castin (2010), « Heating rates for an atom in a far-detuned optical lattice », in *Phys. Rev. A* 82 (1), p. 013615.
- Gordon, J. P. & A. Ashkin (1980), « Motion of atoms in a radiation trap », in *Phys. Rev. A* 21 (5), pp. 1606–1617.

Grimm, R, M Weidemuller & YB Ovchinnikov (2000), « Optical dipole traps for neutral atoms », in *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, vol. 42, , 95–170.

Murr, K., P. Maunz, P. W. H. Pinkse, T. Puppe, I. Schuster, D. Vitali & G. Rempe (2006), « Momentum diffusion for coupled atom-cavity oscillators », in *Phys. Rev. A* 74 (4), p. 043412.

7 Complément

L'argument initial de Gordon & Ashkin (1980)

Partons de l'hamiltonien d'un « atome à deux niveaux » notés $\{|g\rangle, |e\rangle\}$, de fréquence de résonance $\omega_A = (E_e - E_g)/\hbar$, éclairé par un champ laser monochromatique de fréquence ω_L , l'intensité du couplage étant caractérisée par la fréquence de Rabi (éventuellement complexe) $\Omega(x)$. Dans le cadre de l'approximation du champ tournant, cet hamiltonien s'écrit

$$\hat{H}_{AL} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \hbar\Delta\hat{P}_e + \frac{\hbar\Omega(\hat{x})}{2}\hat{\sigma}_+ + \frac{\hbar\Omega^*(\hat{x})}{2}\hat{\sigma}_- \quad (1.73)$$

où \hat{P}_α désigne le projecteur sur l'état $|\alpha\rangle$ ($\alpha = |g\rangle, |e\rangle$) et où $\hat{\sigma}_\pm$ sont les opérateurs montant et descendant définis en (1.3).

À la dynamique hamiltonienne décrite par \hat{H} s'ajoute l'évolution irréversible due aux phénomènes d'émission spontanée, caractérisés par la largeur naturelle Γ de l'état excité $|e\rangle$.

Le raisonnement de Gordon & Ashkin (1980) part de la limite d'une masse m infinie, de sorte que l'atome a une vitesse nulle et reste immobile en un point x . L'impulsion peut en revanche être non nulle, et on définit la force moyenne $f(x)$

$$f(x) = \langle \hat{F}(x) \rangle \quad (1.74)$$

et le coefficient de diffusion en impulsion $D_p(x)$

$$D_p(x) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} \langle \hat{F}(x, 0)\hat{F}(x, t) + \hat{F}(x, t)\hat{F}(x, 0) \rangle - \left(\langle \hat{F}(x) \rangle \right)^2 \right] dt, \quad (1.75)$$

On a introduit ici l'opérateur force :

$$\hat{F}(x) = -\frac{d\hat{H}}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{\hbar\Omega(x)}{2} \right) \hat{\sigma}_+ + \text{c.c.} \quad (1.76)$$

Les valeurs moyennes de (1.74-1.75) sont prises sur l'état stationnaire atomique pour les variables internes, compte tenu de la dissipation produite par les phénomènes d'émission spontanée. Dans la définition (1.75), la quantité $F(\hat{x}, t)$ désigne l'opérateur force en représentation de Heisenberg.

Le calcul explicite du coefficient de diffusion est relativement technique, et passe par l'utilisation du théorème de régression quantique. Nous nous contenterons de donner ici le résultat de Gordon & Ashkin (1980), que nous retrouverons au paragraphe suivant par une méthode un peu plus légère. Concentrons-nous sur le cas d'une onde stationnaire

$$\Omega(x) = \Omega_0 \sin(kx), \quad \Omega_0 \text{ réelle positive,} \quad (1.77)$$

et sur la limite des grands désaccords

$$\Omega_0 \ll |\Delta|. \quad (1.78)$$

La force moyenne est naturellement égale à la force dipolaire

$$f(x) = -\frac{dV(x)}{dx}, \quad V(x) = \frac{\Omega_0^2}{4\Delta} \sin^2(kx). \quad (1.79)$$

Le coefficient de diffusion en impulsion vaut quant à lui⁴

$$D_p = \hbar^2 k^2 \Gamma \frac{\Omega_0^2}{8\Delta^2}. \quad (1.80)$$

Ce coefficient de diffusion est indépendant du point x considéré : que l'atome soit placé en un nœud de l'onde stationnaire ($x = 0, \text{ mod } \pi$) ou en un ventre ($x = \pi/2, \text{ mod } \pi$), la diffusion en impulsion et donc le chauffage lié aux processus d'émission spontanée sont les mêmes !

4. Nous avons légèrement adapté le résultat de Gordon & Ashkin (1980) au cas où les photons émis spontanément par l'atome se propagent le long de l'axe x .

Le résultat de Gordon & Ashkin (1980) dans le formalisme de § 4

Nous revenons désormais à une description quantique du mouvement du centre de masse de l'atome et nous décrivons l'approche proposée par Gerbier & Castin (2010) pour retrouver le résultat de Gordon & Ashkin (1980).

Nous avons vu au paragraphe 4 que lorsqu'on peut négliger le chauffage lié au caractère aléatoire des phénomènes d'émission spontanée, la dynamique de l'atome est décrite par l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}), \quad V(x) = V_0 \sin^2(kx), \quad V_0 = \frac{\Omega_0^2}{4\Delta}. \quad (1.81)$$

Nous allons maintenant calculer la variation dans le temps de l'énergie moyenne

$$\bar{E}(t) = \langle \hat{H} \rangle_t = \text{Tr}(\hat{H}\hat{\rho}(t)), \quad (1.82)$$

où $\hat{\rho}(t)$ représente l'opérateur densité de l'atome, opérateur agissant à la fois dans l'espace des variables internes et celui des variables externes. En l'absence de phénomènes d'émission spontanée, cette valeur moyenne serait constante, mais ce n'est pas le cas si ces phénomènes sont pris en compte et on s'attend à trouver un chauffage qu'il s'agit de comparer au résultat de Gordon & Ashkin (1980).

Partons de l'équation du mouvement pour $\hat{\rho}$:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \left. \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right|_{\text{sp.}} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_{\text{AL}}, \hat{\rho}], \quad (1.83)$$

où le premier terme de cette *équation pilote* décrit l'évolution due à l'émission spontanée. On en déduit

$$\frac{d\bar{E}(t)}{dt} = \text{Tr} \left(\hat{H} \left. \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right|_{\text{sp.}} \right) + \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{H}_{\text{AL}}] \rangle_t. \quad (1.84)$$

Évolution due à l'émission spontanée. Dans (1.83) le terme d'évolution lié à l'émission spontanée s'écrit

$$\left. \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right|_{\text{sp.}} = -\frac{\Gamma}{2} (\hat{\mathcal{P}}_e \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{\mathcal{P}}_e) + \Gamma \int \mathcal{N}(k') \hat{\sigma}_- e^{ik'\hat{x}} \hat{\rho} e^{-ik'\hat{x}} \hat{\sigma}_+ dk'. \quad (1.85)$$

La première ligne de cette équation donne la décroissance des éléments de matrice de $\hat{\rho}$ faisant intervenir l'état excité :

$$\left. \frac{d\hat{\rho}_{ee}}{dt} \right|_{\text{sp.}} = -\Gamma \hat{\rho}_{ee}, \quad \left. \frac{d\hat{\rho}_{eg}}{dt} \right|_{\text{sp.}} = -\frac{\Gamma}{2} \hat{\rho}_{eg}, \quad \left. \frac{d\hat{\rho}_{ge}}{dt} \right|_{\text{sp.}} = -\frac{\Gamma}{2} \hat{\rho}_{ge}, \quad (1.86)$$

et la deuxième ligne décrit l'alimentation de la population de l'état fondamental $\hat{\rho}_{gg}$ par décroissance de l'état excité. Notons que ces éléments de matrice $\hat{\rho}_{\alpha\beta}$ (avec $\alpha, \beta = e, g$) restent des opérateurs vis-à-vis des variables externes x et p décrivant le mouvement du centre de masse de l'atome. La fonction $\mathcal{N}(k')$ décrit la distribution de la projection sur l'axe x du vecteur d'onde du photon émis spontanément. Puisqu'on prend ici un modèle 1D, on supposera que ces photons se propagent le long de l'axe x , avec une probabilité égale d'être émis dans le sens positif et dans le sens négatif, ce qui revient à prendre

$$\mathcal{N}(k') = \frac{1}{2} (\delta(k - k') + \delta(k + k')). \quad (1.87)$$

Évaluons maintenant la contribution du premier terme de (1.84). L'hamiltonien \hat{H} qui intervient dans ce terme a lui-même deux contributions, $\hat{p}^2/2m$ et $V(\hat{x})$. Commençons par $\hat{p}^2/2m$ et écrivons

$$\text{Tr} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} \left. \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right|_{\text{sp.}} \right) = \int \frac{p^2}{2m} \left(\langle p | \left. \frac{d\hat{\rho}_{ee}}{dt} \right|_{\text{sp.}} | p \rangle + \langle p | \left. \frac{d\hat{\rho}_{gg}}{dt} \right|_{\text{sp.}} | p \rangle \right) dp. \quad (1.88)$$

En utilisant (1.85-1.87), on obtient

$$\langle p | \left. \frac{d\hat{\rho}_{gg}}{dt} \right|_{\text{sp.}} | p \rangle = \frac{\Gamma}{2} (\langle p + \hbar k | \hat{\rho}_{ee} | p + \hbar k \rangle + \langle p - \hbar k | \hat{\rho}_{ee} | p - \hbar k \rangle). \quad (1.89)$$

En reportant ce résultat dans (1.88), on arrive à

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} \frac{d\hat{\rho}}{dt} \Big|_{\text{sp.}} \right) &= -\frac{\Gamma}{2m} \int p^2 \langle p | \hat{\rho}_{ee} | p \rangle dp \\ &\quad + \frac{\Gamma}{4m} \int [(p + \hbar k)^2 + (p - \hbar k)^2] \langle p | \hat{\rho}_{ee} | p \rangle dp \\ &= \Gamma \Pi_e \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \end{aligned} \quad (1.90)$$

où Π_e représente la population totale de l'état excité :

$$\Pi_e = \int \langle p | \hat{\rho}_{ee} | p \rangle dp. \quad (1.91)$$

On vérifiera par un calcul similaire que la contribution de $V(x)$ (via \hat{H}) au premier terme de (1.84) est nulle. On arrive donc à

$$\text{Tr} \left(\hat{H} \frac{d\hat{\rho}}{dt} \Big|_{\text{sp.}} \right) = \Gamma \Pi_e E_r, \quad (1.92)$$

expression qui s'interprète simplement : $\Gamma \Pi_e$ correspond au taux de diffusion de photon par l'atome. Chaque photon émis spontanément donne un choc aléatoire de $\pm \hbar k$ à l'atome, donc une augmentation moyenne d'énergie $E_r = \hbar^2 k^2 / 2m$. À l'ordre deux en fréquence de Rabi, la valeur de Π_e est [cf. (1.40)]

$$\Pi_e \approx \frac{\langle \Omega^*(\hat{x}) \Omega(\hat{x}) \rangle}{4\Delta^2}, \quad (1.93)$$

ce qui donne pour l'onde stationnaire

$$\text{Tr} \left(\hat{H} \frac{d\hat{\rho}}{dt} \Big|_{\text{sp.}} \right) = \Gamma E_r \frac{\Omega_0^2}{4\Delta^2} \langle \sin^2(kx) \rangle. \quad (1.94)$$

Pour un atome localisé au voisinage d'un nœud de l'onde stationnaire, $\sin^2(kx)$ tend vers 0, le taux de diffusion de photons tend également vers 0, ainsi que l'augmentation d'énergie correspondante. C'est le terme « intuitif » de (1.84).

Deuxième terme de (1.84). Le commutateur $[\hat{H}, \hat{H}_{\text{AL}}]$ se calcule aisément :

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{H}_{\text{AL}}] &= -\frac{\hbar k \Omega_0}{4m} (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{p} \cos(k\hat{x}) + \cos(k\hat{x}) \hat{p}) \\ &\quad + \frac{\hbar k \Omega_0^2}{8m\Delta} (\hat{p} \sin(2k\hat{x}) + \sin(2k\hat{x}) \hat{p}). \end{aligned} \quad (1.95)$$

Nous cherchons un résultat à l'ordre 2 en Ω_0/Δ . Commençons donc par évaluer les éléments de matrice de $\hat{\sigma}_\pm \hat{p}$ à l'ordre désiré pour obtenir la valeur moyenne de la première ligne de (1.95). L'équation pilote (1.83) donne

$$\frac{d\hat{\rho}_{eg}}{dt} \approx \left(i\Delta - \frac{\Gamma}{2} \right) \hat{\rho}_{eg} - i \frac{\Omega(\hat{x})}{2} \hat{\rho}_{gg}, \quad (1.96)$$

où on a négligé la contribution de $\hat{\rho}_{ee}$. Dans l'hypothèse (réaliste) où le temps caractéristique d'évolution des variables externes est long devant Γ^{-1} , on peut considérer que la dynamique interne de l'atome suit adiabatiquement la dynamique externe et résoudre (1.10) en⁵

$$\hat{\rho}_{eg} = \frac{\Omega(\hat{x})}{2\Delta + i\Gamma} \hat{\rho}_{gg}, \quad \text{et de même } \hat{\rho}_{ge} = \hat{\rho}_{gg} \frac{\Omega^*(\hat{x})}{2\Delta - i\Gamma}. \quad (1.99)$$

Pour évaluer la première ligne de (1.95), on commence par prendre la trace sur les variables internes. À l'ordre désiré en Ω_0/Δ , on trouve :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\text{int}} [(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \hat{\rho}] &= \frac{\Omega_0}{2\Delta} [\sin(k\hat{x}) \hat{\rho}_{gg} + \hat{\rho}_{gg} \sin(k\hat{x})] \\ &\quad + i \frac{\Gamma \Omega_0}{4\Delta^2} [\hat{\rho}_{gg} \sin(k\hat{x}) - \sin(k\hat{x}) \hat{\rho}_{gg}]. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Reportons finalement ce résultat dans la trace de (1.95). On constate que la contribution de la deuxième ligne de (1.95) annule exactement celle is-

⁵ On peut ensuite pousser le calcul un cran plus loin pour obtenir l'expression de $\hat{\rho}_{ee}$ à l'ordre le plus bas. En partant de

$$\frac{d\rho_{ee}}{dt} = -\Gamma \hat{\rho}_{ee} + \frac{i}{2} \hat{\rho}_{eg} \Omega^*(\hat{x}) - \frac{i}{2} \Omega(\hat{x}) \hat{\rho}_{ge}, \quad (1.97)$$

et en utilisant (1.99) on obtient la valeur « stationnaire » pour les variables internes

$$\hat{\rho}_{ee} = \frac{1}{4\Delta^2} \Omega(\hat{x}) \hat{\rho}_{gg} \Omega^*(\hat{x}), \quad (1.98)$$

ce qui permet en particulier de retrouver (1.93).

sue de la première ligne de (1.100). Il ne reste finalement que la contribution provenant de la deuxième ligne de (1.100) qui après un calcul simple donne

$$\frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{H}_{AL}] \rangle_t = \Gamma E_r \frac{\Omega_0^2}{4\Delta^2} \langle \cos^2(kx) \rangle. \quad (1.101)$$

C'est le terme « contre-intuitif » de (1.84), qui est d'autant plus important que l'atome est localisé au voisinage des nœuds de l'onde stationnaire.

Au total, quand on somme les deux contributions (1.94) et (1.101), on arrive au résultat

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \Gamma E_r \frac{\Omega_0^2}{4\Delta^2}, \quad (1.102)$$

qui est indépendant de l'état spatial de l'atome dans l'onde stationnaire et également indépendant du signe du désaccord de cette onde : c'est le résultat trouvé initialement par Gordon & Ashkin (1980).