

# Chapitre 4

## Réseaux dépendant du temps

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Quelques hamiltoniens pertinents</b> . . . . .	<b>2</b>
1-1	Transformations unitaires . . . . .	2
1-2	Changement de référentiels . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Le réseau vibrant</b> . . . . .	<b>3</b>
2-1	Hamiltonien à l'approximation des liaisons fortes	5
2-2	L'expérience de Pise (Lignier et al. 2007) . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Une approche « naïve » au réseau vibrant</b> . . . . .	<b>7</b>
3-1	Étude préliminaire : un système à deux sites . . . . .	7
3-2	Analogie avec un spin 1/2 dans un champ oscillant	8
3-3	Le réseau vibrant : approche naïve . . . . .	9
<b>4</b>	<b>L'approche de Bloch pour un réseau vibrant</b> . . . . .	<b>10</b>
4-1	Théorème de Bloch dans le cas dépendant du temps . . . . .	10
4-2	Évolution du quasi-moment $q(t)$ . . . . .	10
4-3	Localisation dans la bande fondamentale . . . . .	11
4-4	La méthode de Floquet . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Réseau vibrant à 2D : l'expérience d'Hambourg</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Références</b> . . . . .	<b>17</b>

---

Parmi les possibilités offertes par les réseaux optiques, on trouve au premier rang le contrôle dans le temps des paramètres du réseau. Nous avons déjà abordé au cours 2 les conséquences d'une variation de l'amplitude du réseau et discuté les deux limites, adiabatique et soudaine, pour le branchement ou le débranchement du potentiel périodique. Dans ce cours et le suivant, nous allons nous intéresser à un autre type de variation temporelle : nous allons étudier les phénomènes qui apparaissent quand on varie dans le temps la position des nœuds du réseau, en remplaçant le potentiel  $V(x)$  (à 1D) par le potentiel  $V[x - x_0(t)]$ , où  $x_0(t)$  est une fonction contrôlée du temps.

Dans ce chapitre, nous allons d'abord établir, via des transformations unitaires, l'équivalence entre plusieurs hamiltoniens permettant de décrire un réseau en mouvement. Nous étudierons ensuite le cas particulier d'une modulation périodique  $x_0(t)$  et nous discuterons le phénomène de localisation dynamique qui peut alors apparaître. Le chapitre suivant sera consacré aux oscillations de Bloch, qui se manifestent quand  $x_0(t)$  correspond à un mouvement uniformément accéléré. Cette situation est équivalente (par changement de référentiel) au cas où on ajoute à la force créée par le réseau une force uniforme dans l'espace et indépendante du temps .

Faute de temps, nous n'aborderons pas d'autres classes de phénomènes, également très intéressants, liés à la variation temporelle de certains paramètres du réseau. Citons la spectroscopie des atomes dans le réseau, que l'on peut effectuer en modulant dans le temps l'amplitude  $V_0$  du potentiel périodique [voir par exemple l'article de Kollath et al. (2006) et ses

références]. Un autre exemple est l'utilisation d'un réseau pulsé pour étudier des phénomènes de chaos ou de localisation d'Anderson [voir l'article récent de Lopez et al. (2012) et ses références].

## 1 Quelques hamiltoniens pertinents

Les études que nous allons mener dans ce chapitre et le suivant portent sur des hamiltoniens dépendant du temps, mais qui gardent leur structure spatialement périodique. Dans le cas 1D qui va d'abord nous intéresser, ces hamiltoniens sont de la forme

$$\hat{H}(t) = \frac{(\hat{p} - A(t))^2}{2m} + V(\hat{x}, t), \quad (4.1)$$

avec

$$V(x + a, t) = V(x, t). \quad (4.2)$$

Nous verrons un peu plus loin comment le théorème de Bloch permet de déduire des informations générales sur l'évolution de systèmes régis par ces hamiltoniens. Dans ce premier paragraphe, nous allons commencer notre étude par l'identification de certains hamiltoniens qui peuvent se ramener à la forme (4.1) via une transformation unitaire, même si le problème qu'ils décrivent n'est pas spatialement périodique.

### 1-1 Transformations unitaires

Commençons par rappeler le principe d'une transformation unitaire. On se donne un opérateur unitaire dépendant éventuellement du temps  $\hat{U}(t)$  et on considère un système décrit par un état  $|\psi(t)\rangle$  évoluant sous l'effet de l'hamiltonien  $\hat{H}(t)$  :

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle. \quad (4.3)$$

On effectue sur les états  $|\psi(t)\rangle$  la transformation

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(t)\rangle. \quad (4.4)$$

L'équation d'évolution de l'état transformé  $|\tilde{\psi}\rangle$  est encore hamiltonienne

$$i\hbar \frac{d|\tilde{\psi}\rangle}{dt} = \hat{\tilde{H}}(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle \quad (4.5)$$

et l'hamiltonien correspondant est

$$\hat{\tilde{H}}(t) = \hat{U}(t) \hat{H}(t) \hat{U}^\dagger(t) + i\hbar \frac{d\hat{U}(t)}{dt} \hat{U}^\dagger(t). \quad (4.6)$$

Si certains aspects techniques (recherches des états propres par exemple) sont plus simples pour  $\hat{\tilde{H}}$  que pour  $\hat{H}$ , on a intérêt à mener les calculs dans le point de vue *transformé* et revenir à la fin dans le point de vue initial via la transformation inverse de (4.4).

Nous allons envisager dans la suite deux classes de transformations unitaires :

$$\hat{U}_1(t) = e^{-i\hat{x} p_0(t)/\hbar}, \quad \hat{U}_2(t) = e^{-i x_0(t) \hat{p}/\hbar}, \quad (4.7)$$

où  $x_0(t)$  et  $p_0(t)$  sont des fonctions quelconques du temps, ayant respectivement la dimension d'une position et d'une impulsion. Les opérateurs position et impulsion<sup>1</sup> se transforment de la manière suivante :

$$\hat{U}_1 \hat{x} \hat{U}_1^\dagger = \hat{x}, \quad \hat{U}_1 \hat{p} \hat{U}_1^\dagger = \hat{p} + p_0, \quad (4.8)$$

et

$$\hat{U}_2 \hat{x} \hat{U}_2^\dagger = \hat{x} - x_0, \quad \hat{U}_2 \hat{p} \hat{U}_2^\dagger = \hat{p}. \quad (4.10)$$

Indiquons également la valeur du terme  $i\hbar(d\hat{U}/dt)\hat{U}^\dagger$  apparaissant dans l'hamiltonien transformé (4.6)

$$i\hbar \frac{d\hat{U}_1}{dt} \hat{U}_1^\dagger = \hat{x} \dot{p}_0, \quad i\hbar \frac{d\hat{U}_2}{dt} \hat{U}_2^\dagger = \dot{x}_0 \hat{p}. \quad (4.11)$$

1. Dans tout ce chapitre, les opérateurs position et impulsion sont définis par leur action sur une fonction  $\psi(x)$  de la manière habituelle :

$$\hat{x} \psi(x) = x \psi(x), \quad \hat{p} \psi(x) = -i\hbar \frac{d\psi}{dx}. \quad (4.8)$$

Le lien entre ces opérateurs et le résultat d'une mesure de position ou de vitesse dépend de la transformation unitaire effectuée.

### 1-2 Changement de référentiels

Partons d'un système décrit par l'hamiltonien

$$\hat{H}_0(t) = \frac{[\hat{p} - A(t)]^2}{2m} + V(\hat{x}), \quad V(x+a) = V(x), \quad (4.12)$$

avec un potentiel spatial périodique indépendant du temps  $V(x)$  et un potentiel vecteur  $A(t)$  spatialement uniforme. Nous allons regarder comment l'évolution de ce système se transforme sous l'effet de  $\hat{U}_1$  ou de  $\hat{U}_2$  pour des fonctions  $x_0$  et  $p_0$  bien choisies.

Commençons par  $\hat{U}_1$  en prenant

$$p_0(t) = A(t). \quad (4.13)$$

On obtient

$$\hat{H}_1(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) - F(t) \hat{x} \quad \text{avec} \quad F(t) = -\frac{dA(t)}{dt}. \quad (4.14)$$

L'hamiltonien (4.14) décrit le mouvement d'une particule dans la superposition du potentiel périodique  $V(x)$  et d'un potentiel correspondant à une force constante spatialement, mais dépendant éventuellement du temps  $F(t)$ . Ceci n'est pas une surprise : on sait qu'en électromagnétisme, un potentiel vecteur dépendant du temps est associé à un champ électrique  $\mathcal{E} = -\dot{A}$  : c'est ce qu'on retrouve ici pour une particule pour laquelle on a pris par convention une charge unité dans (4.12). La transformation unitaire qui fait passer de  $\hat{H}_0$  à  $\hat{H}_1$  est d'ailleurs exactement la même que celle utilisée en électrodynamique pour introduire l'hamiltonien dipolaire électrique dans l'approximation des grandes longueurs d'onde (voir le complément A<sub>IV</sub> de Cohen-Tannoudji et al. 1987). Notons qu'il est remarquable que le problème (4.14) **qui n'est pas périodique**, puisse se ramener au problème (4.12) **qui est périodique**.

Regardons maintenant l'action de  $\hat{U}_2$  sur l'hamiltonien de départ (4.12), en prenant<sup>2</sup>

$$x_0(t) = \frac{1}{m} \int_0^t A(t') dt'. \quad (4.15)$$

2. Cette transformation est connue sous le nom de Kramers-Henneberger en électrodynamique quantique, voir par exemple Cohen-Tannoudji et al. 1987, §IV.B.4.

On trouve

$$\hat{H}_2(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V[\hat{x} - x_0(t)] + \frac{A^2(t)}{2m}. \quad (4.16)$$

Le dernier terme est une énergie indépendante de  $x$  et  $p$  qui vient s'ajouter à l'hamiltonien. On peut l'éliminer en faisant une dernière transformation unitaire (très simple) générée par

$$\hat{U}_3 = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_0^t \frac{A^2(t')}{2m} dt'\right) \quad (4.17)$$

qui laisse  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  inchangés. Après cette opération, nous arrivons à

$$\hat{H}_2(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V[\hat{x} - x_0(t)]. \quad (4.18)$$

Cette forme indique comment réaliser en pratique les situations abordées dans ce chapitre : il faut contrôler les phases des ondes progressives composant l'onde stationnaire pour déplacer la position de ses noeuds et de ses ventres selon la loi donnée par  $x_0(t)$ .

En conclusion, les trois hamiltoniens (4.12)-(4.14)-(4.18), qui sont regroupés dans le tableau 4.1, permettent de décrire la même situation physique et on pourra choisir l'un ou l'autre selon les aspects que l'on souhaite privilégier. Notons qu'il y a une interprétation simple pour la suite de transformations générée par  $\hat{U} = \hat{U}_1 \hat{U}_2^\dagger \hat{U}_3^\dagger$ , qui fait passer de l'hamiltonien (4.18), décrivant un réseau en mouvement, à l'hamiltonien (4.14), décrivant un réseau fixe superposé à une force uniforme  $F(t)$ . Il s'agit d'un changement de référentiel, qui fait passer du référentiel du laboratoire au référentiel bougeant avec le réseau, dans lequel apparaît la force d'inertie  $F(t) = -m\ddot{x}_0(t) = -\dot{A}(t)$ .

## 2 Le réseau vibrant

La configuration que nous allons aborder dans la suite de ce chapitre est celle d'un réseau infini dont on module périodiquement la position en prenant par exemple :

$$\hat{H}_2(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V[\hat{x} - x_0(t)], \quad x_0(t) = \bar{x}_0 \cos(\omega t). \quad (4.19)$$

$\hat{H}_1$	$\hat{H}_0$	$\hat{H}_2$
$\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) - F(t) \hat{x}$	$\frac{[\hat{p} - A(t)]^2}{2m} + V(\hat{x})$	$\frac{\hat{p}^2}{2m} + V[\hat{x} - x_0(t)]$
$q(t) = q_{\text{in}} + \frac{1}{\hbar} \int_0^t F(t') dt'$	$q(t) = q_{\text{in}}$	$q(t) = q_{\text{in}}$
$-J \sum_j ( w_{j+1}\rangle\langle w_j  + \text{h.c.}) - a F(t) \sum_j j  w_j\rangle\langle w_j $	$-J \sum_j ( w_{j+1}\rangle\langle w_j  e^{i a A(t)/\hbar} + \text{h.c.})$	

$$\overleftarrow{U}_1 = \exp(-i\hat{x} p_0(t)/\hbar)$$

$$\overrightarrow{U}_2 = \exp(-ix_0(t) \hat{p}/\hbar)$$

**TABLE 4.1.** Les trois hamiltoniens utilisés dans ce chapitre, l'évolution temporelle du quasi-moment et la version « liaisons fortes » de cet hamiltonien. On passe de l'un à l'autre par les transformations unitaires indiquées en dernière ligne, avec  $p_0(t) = A(t) = m\dot{x}_0(t)$  et  $F(t) = -m\ddot{x}_0(t)$ .

Ce problème a été étudié théoriquement par Dunlap & Kenkre (1986) et Holthaus (1992), la question étant de comprendre le comportement d'électrons dans des cristaux quand ils sont soumis au champ électrique d'une onde électromagnétique. Le phénomène qui apparaît est appelé *localisation dynamique*. La conclusion principale est l'existence d'une valeur du champ oscillant pour laquelle le transport disparaît ; l'étalement d'un paquet d'ondes électronique qu'on observerait en absence de champ est complètement bloqué. Holthaus (1992) prédit en particulier un collapse des mini-bandes attendues dans un super-réseau de période d'une dizaine de nanomètres, quand il est éclairé avec une lumière dans l'infra-rouge lointain.

Cette question d'un réseau vibrant s'est donc posée bien avant les expériences d'atomes dans des réseaux optiques, mais la physique des atomes froids l'a remise en avant car la modulation du réseau permet de contrôler l'amplitude et le signe du coefficient tunnel  $J$ , et même de le rendre complexe. Le contrôle de l'amplitude du coefficient  $J$  permet de faire varier le rapport entre l'énergie cinétique et l'énergie d'interaction, dont nous avons expliqué dans un cours précédent qu'il était déterminant pour l'émergence de la physique à  $N$  corps. C'est ainsi que Eckardt et al. (2005) ont proposé d'utiliser la modulation d'un réseau pour induire la transition entre un superfluide et un isolant de Mott. La possibilité de rendre le coefficient  $J$  complexe est quant à elle intéressante quand on considère un réseau à deux ou trois dimensions. On peut alors réaliser une situation où l'atome accumule une phase non nulle lorsqu'il effectue une boucle fermée en sautant par effet tunnel d'un site à l'autre. C'est exactement ce dont on a besoin pour réaliser un champ de jauge artificiel. Nous ne traiterons pas ces champs de jauge artificiels dans le cours de cette année, mais nous donnons néanmoins ci-dessous quelques indications sur cette possible modification de  $J$ .

## 2-1 Hamiltonien à l'approximation des liaisons fortes

Sur le plan théorique, notre point de départ sera l'hamiltonien d'un atome dans un réseau optique « vibrant »

$$\hat{H}_2(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V[\hat{x} - x_0(t)], \quad (4.20)$$

où  $x_0(t)$  est une fonction périodique du temps, de pulsation  $\omega$ . Nous allons supposer que les atomes sont préparés dans une bande donnée du réseau, la bande fondamentale par exemple, et qu'ils y restent au cours de l'évolution. Nous allons donc restreindre la dynamique des atomes à cette bande et omettre dans la suite l'indice de bande. Les conditions nécessaires pour ce suivi adiabatique de la bande d'énergie initialement peuplée seront abordées en détail dans le prochain chapitre portant sur les oscillations de Bloch.

Nous allons de plus faire la plus grande partie de notre étude dans la limite des liaisons fortes, décrite par l'hamiltonien de Hubbard, où seuls les sauts entre proches voisins jouent un rôle significatif. Pour écrire l'hamiltonien correspondant à partir de (4.20), il est utile d'effectuer d'abord les transformations unitaires  $\hat{U}_1$  et  $\hat{U}_2$  pour passer à l'hamiltonien  $\hat{H}_1$

$$\hat{H}_1(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) - F(t) \hat{x}. \quad (4.21)$$

L'expression de cet hamiltonien dans le modèle des liaisons fortes est simple. Sa partie non modulée est l'hamiltonien de Hubbard que nous avons déjà rencontré :

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \longrightarrow -J \left( \hat{T}_1 + \hat{T}_1^\dagger \right) \quad (4.22)$$

où  $\hat{T}_j$  décale la particule de  $j$  sites vers la droite :

$$\hat{T}_j = \sum_{j' \in \mathbb{Z}} |w_{j+j'}\rangle \langle w_{j'}| \quad (4.23)$$

Le terme lié à la force d'inertie s'écrit quant à lui

$$-F(t) \hat{x} \longrightarrow -a F(t) \sum_j j |w_j\rangle \langle w_j| \quad (4.24)$$

où on a utilisé le fait que l'opérateur position est diagonal dans la base des fonctions de Wannier (voir par exemple Eckardt et al. (2009))

$$\langle w_j | \hat{x} | w_{j'} \rangle = ja \delta_{j,j'}. \quad (4.25)$$

L'hamiltonien de Hubbard d'un réseau vibrant est donc

$$\hat{H}_1 = -J \left( \hat{T}_1 + \hat{T}_1^\dagger \right) + \hbar\omega \xi(t) \sum_j j |w_j\rangle \langle w_j|, \quad (4.26)$$

où on a caractérisé l'amplitude de la modulation par le paramètre sans dimension  $\xi(t)$

$$\xi(t) = -\frac{aF(t)}{\hbar\omega} = \frac{ma}{\hbar\omega} \ddot{x}_0(t). \quad (4.27)$$

Ce coefficient est défini (au signe près) comme le rapport entre le travail  $aF$  de la force d'inertie  $F = -m\ddot{x}_0$  sur un période  $a$  du réseau, et le quantum de vibration  $\hbar\omega$  associé à cette force vibrante.

Pour une modulation sinusoïdale, on définit plus précisément

$$x_0(t) = \bar{x}_0 \cos(\omega t), \quad F(t) = -m\ddot{x}_0(t) = m\omega^2 \cos(\omega t), \quad (4.28)$$

soit

$$\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t), \quad \xi_0 = -ma\omega\bar{x}_0/\hbar. \quad (4.29)$$

À partir de l'expression (4.26) de  $\hat{H}_1$  en régime de Hubbard, on peut revenir à la version «  $\hat{H}_0$  » de ce problème. Il faut pour cela utiliser la version discrétisée de la transformation unitaire  $\hat{U}_1(t)$  :

$$\hat{U}_1(t) = e^{-i\hat{x} p_0(t)/\hbar} \quad \longrightarrow \quad \hat{U}_1(t)|w_j\rangle = e^{-ijap_0(t)/\hbar}|w_j\rangle \quad (4.30)$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \hat{H}_0(t) &= \hat{U}_1^\dagger(t)\hat{H}_1(t)\hat{U}_1(t) + i\hbar\frac{d\hat{U}_1^\dagger}{dt}\hat{U}_1 \\ &= -J\left(\hat{T}_1 e^{iap_0(t)/\hbar} + \hat{T}_1^\dagger e^{-iap_0(t)/\hbar}\right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

avec  $p_0(t) = m\dot{x}_0(t)$ . Dans ce point de vue, la vibration du réseau se décrit donc par une modulation périodique des coefficients tunnels, qui deviennent complexes.

Notons qu'on peut facilement, à partir de (4.31), prendre en compte des sauts entre voisins plus distants. En notant  $J(j)$  l'élément de matrice pour un saut de  $j$  sites (cf. chapitre 3), l'expression (4.31) se généralise immédiatement en

$$\hat{H}_0 = \sum_{j=1}^{+\infty} J(j) \left( \hat{T}_j e^{iap_0(t)/\hbar} + \hat{T}_j^\dagger e^{-iap_0(t)/\hbar} \right). \quad (4.32)$$

Rappelons qu'on a posé dans tout ce qui précède  $J(1) = -J$  pour disposer d'un coefficient  $J > 0$ . Rappelons également que les éléments de matrice

tunnel  $J(j)$  sont les coefficients de Fourier de l'énergie  $E(q)$  de la bande considérée :

$$E(q) = 2 \sum_{j=1}^{+\infty} J(j) \cos(jaq). \quad (4.33)$$

## 2-2 L'expérience de Pise (Lignier et al. 2007)

La première mise en évidence avec des atomes froids de l'effet de localisation dynamique a été faite dans le groupe de M. Raizen (Madison et al. 1998). Le réseau était mis en mouvement oscillant en modulant en phase un des faisceaux composant l'onde stationnaire. En faisant la spectroscopie d'une bande d'énergie dans le réseau, Raizen et son groupe ont pu voir un affinement spectaculaire de cette bande pour une valeur critique de l'amplitude de l'oscillation du réseau.

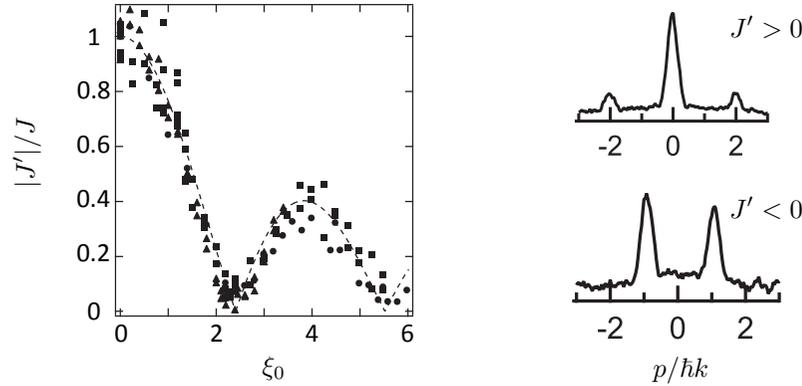
Nous montrons sur la figure 4.1 le résultat obtenu dans le groupe d'Arimondo (Lignier et al. 2007) avec un condensat de rubidium chargé dans un réseau optique 1D vibrant de manière sinusoïdale :

$$x_0(t) = \bar{x}_0 \cos(\omega t). \quad (4.34)$$

Les profondeurs de réseau étaient choisies entre 4 et 9 énergies de recul  $E_r$ , ce qui est un peu juste pour que l'approximation des liaisons fortes du paragraphe précédent soit très bonne, mais elle permet néanmoins de donner une bonne justification des résultats expérimentaux, comme nous le verrons dans la suite.

Les chercheurs de Pise ont mesuré l'étalement dans le temps de la distribution spatiale des atomes dans le réseau. Pour cela, ils ont d'abord confiné les particules au voisinage de  $x = 0$  grâce à un piège dipolaire additionnel, puis ils ont éteint ce piège en laissant le réseau allumé. Les résultats de cette expérience sont compatibles avec l'idée que le réseau vibrant est essentiellement équivalent à un réseau fixe, mais avec un coefficient tunnel  $J'$  modifié.

La mesure du coefficient tunnel  $J'$  a été faite pour plusieurs profondeurs de réseau  $V_0$ , plusieurs fréquences de modulation  $\omega$  et plusieurs amplitudes de modulation  $\bar{x}_0$ . Les résultats expérimentaux montrent un phénomène remarquable : le rapport  $J'/J$  des taux tunnel avec et sans



**FIGURE 4.1.** Suppression dynamique de l'effet tunnel dans un réseau 1D vibrant pour un condensat d'atomes de  $^{87}\text{Rb}$ . À gauche : La valeur absolue du coefficient tunnel (normalisé par la valeur en absence de vibration) est obtenue à partir de l'étalement d'un paquet d'ondes dans le réseau. Cette figure « universelle » regroupe des points obtenus pour différentes profondeurs de réseau (4 à  $9 E_r$ ) et différentes fréquence de vibration (0.5 et 1 kHz). L'amplitude de vibration  $\bar{x}_0$  est au maximum de l'ordre de  $0.5 a$  et le rapport  $\hbar\omega/J$  varie entre 0.3 et 30. À droite : distribution en impulsion des atomes dans le réseau vibrant pour  $\xi_0 < 2.4$  (en haut) et pour  $\xi_0$  légèrement supérieur à 2.4 (en bas). Dans le second cas, la présence de deux pics à  $p = \pm\hbar k$  indique que le bas de la bande est situé en bord de zone de Brillouin, correspondant à un coefficient tunnel effectif  $J' < 0$ . Ces figures sont extraites de Lignier et al. (2007).

modulation dépend seulement du paramètre  $\xi_0 = -m\omega\bar{x}_0/\hbar$  introduit plus haut (4.29). La ligne pointillée est la valeur absolue de la fonction de Bessel  $\mathcal{J}_0(\xi_0)$ , résultat que nous allons justifier plus loin. En particulier, on trouve une annulation du coefficient tunnel (pas de diffusion spatiale) pour  $\xi_0 \approx 2.4$  (le premier zéro de la fonction de Bessel est en 2.405).

L'étude de la diffusion spatiale ne fournit pas le signe de  $J'$ . Celui-ci est accessible dans une expérience de temps de vol, où l'on mesure la distribution en impulsion des atomes. Pour  $\xi_0 < 2.4$ , on trouve que cette distribution est centrée sur  $p = 0$ , indiquant que le bas de la bande d'énergie se situe en  $q = 0$ , soit  $J' > 0$ . En revanche pour  $\xi_0 > 2.4$ , on trouve une distri-

bution en impulsion avec deux pics de hauteurs comparables en  $p = \pm\hbar k$ , indiquant que le bas de la bande est passé à  $q = \pm k$ , conformément à ce qu'on attend pour un coefficient tunnel  $J' < 0$ . Nous allons dans la suite expliquer l'essentiel de ces résultats et nous renvoyons le lecteur intéressé par des analyses théoriques plus détaillées aux articles de Eckardt et al. (2009) et Creffield et al. (2010).

### 3 Une approche « naïve » au réseau vibrant

#### 3-1 Étude préliminaire : un système à deux sites

Pour commencer, nous allons nous intéresser à un système plus simple qu'un réseau infini, en nous limitant à un double puits de potentiel dans lequel nous identifions deux états  $|w_j\rangle$ ,  $j = \pm$ , correspondant à une particule localisée à droite ( $x = +a/2$ ) ou à gauche ( $x = -a/2$ ) du centre. Ce problème a été étudié théoriquement par Grossmann et al. (1991) et on pourra consulter l'article de Grifoni & Hänggi (1998) pour une revue des traitements théoriques possibles. Nous allons nous limiter ici à une approche mathématique très simple, qui nous permettra néanmoins de capturer l'essentiel du phénomène.

Pour un système à deux sites, l'hamiltonien (4.26) est remplacé par

$$\hat{H}(t) = -J(|w_+\rangle\langle w_-| + |w_-\rangle\langle w_+|) + \frac{1}{2}\hbar\omega \xi(t) (|w_+\rangle\langle w_+| - |w_-\rangle\langle w_-|) \quad (4.35)$$

ou encore

$$\hat{H} = -J \hat{\sigma}_x + \frac{1}{2}\hbar\omega \xi(t) \hat{\sigma}_z \quad (4.36)$$

où les  $\hat{\sigma}_i$  sont les matrices de Pauli dans la base  $\{|w_+\rangle, |w_-\rangle\}$ . Écrivons l'état de la particule sous la forme

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{j=\pm} \alpha_j(t) |w_j\rangle; \quad (4.37)$$

l'évolution des  $\alpha_j$  est alors donnée par :

$$i\dot{\alpha}_+ = \frac{\omega}{2} \xi(t) \alpha_+ - \frac{J}{\hbar} \alpha_-, \quad i\dot{\alpha}_- = -\frac{\omega}{2} \xi(t) \alpha_- - \frac{J}{\hbar} \alpha_+. \quad (4.38)$$

Ces deux équations se réécrivent

$$i\hbar \dot{\tilde{\alpha}}_+ = -J e^{i\eta} \tilde{\alpha}_-, \quad i\hbar \dot{\tilde{\alpha}}_- = -J e^{-i\eta} \tilde{\alpha}_+, \quad (4.39)$$

où on a posé

$$\tilde{\alpha}_\pm = \alpha_\pm \exp(\pm i\eta/2), \quad \eta(t) = \omega \int_0^t \xi(t') dt'. \quad (4.40)$$

Plaçons-nous dans la situation où l'évolution due à l'effet tunnel entre les deux puits, de constante de temps  $\hbar/J$ , est beaucoup plus lente que la modulation de pulsation  $\omega$  donnant l'évolution de la fonction  $\xi(t)$ . Prenons la moyenne temporelle<sup>3</sup> des équations (4.39) sur une période temporelle  $T = 2\pi/\omega$  de l'oscillation rapide et écrivons, à l'ordre le plus bas en  $J/\hbar\omega$  :

$$i\hbar \dot{\tilde{\alpha}}_+ = -J' \tilde{\alpha}_-, \quad i\hbar \dot{\tilde{\alpha}}_- = -J'^* \tilde{\alpha}_+, \quad (4.41)$$

où on a posé :

$$J' = J \langle e^{i\eta} \rangle. \quad (4.42)$$

Ces équations d'évolution pour  $\tilde{\alpha}_\pm$  sont les mêmes que celles pour un double puits sans modulation rapide, à part une « renormalisation » du coefficient tunnel  $J$  qui devient  $J'$ .

Prenons le cas d'une modulation sinusoïdale :

$$\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t), \quad \eta(t) = \xi_0 \sin(\omega t), \quad (4.43)$$

qui conduit à

$$J' = J \mathcal{J}_0(\xi_0), \quad (4.44)$$

où  $\mathcal{J}_0$  est la fonction de Bessel de première espèce définie par

$$\mathcal{J}_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos[x \sin(\tau)] d\tau. \quad (4.45)$$

Comme cette fonction prend des valeurs positives et négatives selon son argument, on voit que la modulation rapide en  $\xi(t)$  permet de réduire le coefficient tunnel, voire même de l'annuler et changer son signe.

3. On pourrait justifier cette procédure en utilisant un développement de Fourier pour la fonction connue  $\eta(t)$  et les fonction inconnues  $\tilde{\alpha}_\pm(t)$  et en résolvant perturbativement ces équations en puissance du petit paramètre  $J/\hbar\omega$ . Nous ne le ferons pas ici car cette procédure revient en fait à reconstruire l'approche de Floquet que nous présenterons plus loin.

### 3-2 Analogie avec un spin 1/2 dans un champ oscillant

Pour le cas d'atomes dans un potentiel optique créant un double puits de potentiel, la mise en évidence expérimentale de la modification du coefficient tunnel a été décrite par Kierig et al. (2008). La situation que nous avons étudiée ici est par ailleurs complètement équivalente sur le plan mathématique à la modification du facteur de Landé d'un atome de spin 1/2 dont le moment magnétique est couplé à un champ magnétique oscillant rapidement :

$$\mathbf{B}(t) = B_0 \mathbf{u}_x + B_1(t) \mathbf{u}_z, \quad B_1(t) = \bar{B}_1 \cos(\omega t). \quad (4.46)$$

Cette situation est en effet décrite par un hamiltonien formellement identique à (4.36) :

$$\hat{H}(t) = \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_x + \frac{\hbar\bar{\omega}_1}{2} \cos(\omega t) \hat{\sigma}_z. \quad (4.47)$$

On a noté ici  $\omega_0$  et  $\bar{\omega}_1$  les pulsations de Larmor dans les champs  $B_0$  et  $\bar{B}_1$ . Dans la limite  $\omega_0 \ll \bar{\omega}_1$ , l'équivalent de la modification du coefficient tunnel  $J$  est une modification de la pulsation de Larmor  $\omega_0$  qui devient

$$\omega'_0 = \omega_0 \mathcal{J}_0(\bar{\omega}_1/\omega). \quad (4.48)$$

Ce changement de  $\omega_0$ , qui peut s'interpréter comme une modification du facteur de Landé causée par le champ oscillant rapidement, a été observé par Haroche et al. (1970). Le résultat principal est montré sur la figure 4.2 : on observe notamment une annulation, puis un changement de signe du facteur de Landé selon une loi faisant intervenir la fonction de Bessel  $\mathcal{J}_0$ .

Notons que l'étude théorique de cette modification du facteur de Landé devient nettement plus simple à mener si on considère une modulation en créneau du champ  $B_1(t)$  plutôt qu'une modulation sinusoïdale. Pour un champ  $\mathbf{B}_1(t) = \bar{B}_1 \mathbf{u}_z$  pendant une demi-période  $\pi/\omega$  et  $\mathbf{B}_1(t) = -\bar{B}_1 \mathbf{u}_z$  pendant l'autre demi-période, on peut calculer explicitement l'évolution du spin 1/2 à l'ordre 1 en  $B_0/\bar{B}_1$ , en prenant en compte les points suivants :

- La fréquence de Larmor est indépendante du temps et elle vaut  $\omega_L = (\omega_0^2 + \bar{\omega}_1^2)^{1/2} \approx \bar{\omega}_1$ .
- La direction du champ magnétique oscille entre les deux directions  $\mathbf{n} = \pm \cos \theta \mathbf{u}_z + \sin \theta \mathbf{u}_x$ , avec  $\tan \theta = B_0/\bar{B}_1 \ll 1$ .

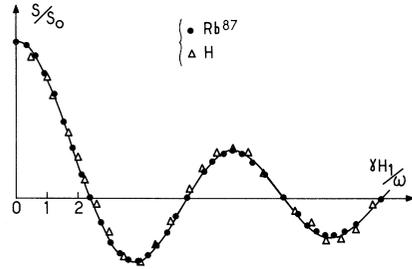


FIGURE 4.2. Modification du facteur de Landé d’atomes de rubidium et d’hydrogène, lorsqu’ils sont éclairés par un champ  $H_1$  radiofréquence, de fréquence  $\omega/2\pi$  de quelques kHz. Figure extraite de Haroche et al. (1970).

– L’opérateur d’évolution pendant une durée  $t$  où le champ magnétique garde une direction fixe  $\mathbf{n}$  vaut

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} = \hat{1} \cos(\bar{\omega}_1 t/2) - i(\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \sin(\bar{\omega}_1 t/2) \quad (4.49)$$

On peut alors calculer le produit des opérateurs d’évolution sur les deux segments<sup>4</sup> qui composent une période d’oscillation  $T = 2\pi/\omega$  et on arrive sans (trop de) difficulté à :

$$\hat{U}(T) \approx \hat{1} - i\hat{\sigma}_x \frac{\omega_0 T}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2} \frac{\bar{\omega}_1}{\omega}\right), \quad (4.50)$$

ce qui, pour  $\omega_0 T \ll 1$ , correspond à la modification de la fréquence de Larmor

$$\omega_0 \rightarrow \omega'_0 = \omega_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2} \frac{\bar{\omega}_1}{\omega}\right) \quad (4.51)$$

la fonction de Bessel de (4.48) étant remplacée par un sinus cardinal.

L’annulation du facteur de Landé est particulièrement simple dans ce point de vue : elle se produit pour  $\bar{\omega}_1 T/2 = 2\pi$ , ce qui signifie que le

4. Pour éviter des termes parasites, il convient de choisir convenablement l’origine des temps. On peut prendre par exemple  $B_1(t) = \bar{B}_1$  entre 0 et  $T/4$ , puis  $B_1(t) = -\bar{B}_1$  entre  $T/4$  et  $3T/4$ , et enfin  $B_1(t) = \bar{B}_1$  entre  $3T/4$  et  $T$ , pour calculer l’opérateur d’évolution entre 0 et  $T$ . Ce choix de phase, qui est l’équivalent pour un réseau carré de  $\bar{B}_1 \cos(\omega t)$  pour une modulation sinusoïdale, sera fait dans tout ce chapitre. On pourra consulter l’article de Eckardt et al. (2009) pour une discussion des effets « parasites » pouvant apparaître avec d’autres choix de phase.

spin fait un tour complet pendant chaque demi-période durant laquelle le champ  $B_1$  garde une direction constante. Il est clair que le spin n’évolue alors pas « en moyenne », ce qui correspond à un facteur de Landé nul vis à vis du champ  $B_0$ .

### 3-3 Le réseau vibrant : approche naïve

Notre approche naïve se déroule pour un réseau de manière presque identique à celle mise en place pour le double puits. En écrivant le vecteur d’état d’une particule sous la forme

$$|\phi(t)\rangle = \sum_j \alpha_j(t) |w_j\rangle, \quad (4.52)$$

on obtient l’évolution des coefficients  $\alpha_j$  pour l’hamiltonien  $H_1(t)$  en liaisons fortes (4.26)

$$i\dot{\alpha}_j = j\omega \xi(t)\alpha_j - \frac{J}{\hbar}(\alpha_{j-1} + \alpha_{j+1}). \quad (4.53)$$

On introduit les variables

$$\tilde{\alpha}_j = \alpha_j \exp(ij\eta) \quad (4.54)$$

où  $\eta$  est défini comme en (4.40) par  $\eta = \omega \int_0^t \xi(t') dt'$ , et on arrive à<sup>5</sup>

$$i\hbar\dot{\tilde{\alpha}}_j = -J(e^{i\eta}\tilde{\alpha}_{j-1} + e^{-i\eta}\tilde{\alpha}_{j+1}). \quad (4.55)$$

Après moyenne sur une période de l’oscillation rapide, cette équation du mouvement est identique à celle d’un réseau sans modulation et un coefficient tunnel renormalisé  $J\langle e^{\pm i\eta} \rangle$ , où le signe + (resp. –) correspond aux sauts vers la droite (resp. gauche). Pour une modulation sinusoïdale, la moyenne temporelle s’exprime en terme de la fonction de Bessel de première espèce

$$J' = J\mathcal{J}_0(\xi_0), \quad (4.56)$$

un résultat identique à celui du double puits. On retrouve en particulier le fait que l’on peut annuler l’effet tunnel en choisissant  $\xi_0$  égal au premier

5. Notons qu’on aurait pu écrire directement ce système d’équations en partant de l’hamiltonien  $\hat{H}_0$  (4.31) au lieu de  $\hat{H}_1$ , en utilisant  $a_{p0}(t)/\hbar = \eta(t)$ .

zéro de la fonction de Bessel ( $\approx 2.405$ ) et changer le signe de  $J$  en choisissant  $\xi_0$  légèrement supérieur à cette valeur. Cette approximation très simple permet donc de rendre compte des résultats expérimentaux obtenus par le groupe de Pise et décrits au paragraphe précédent.

## 4 L'approche de Bloch pour un réseau vibrant

Nous allons maintenant chercher à aller au delà de cette approche naïve pour étudier de manière plus rigoureuse l'évolution d'un paquet d'ondes dans un réseau vibrant. L'outil essentiel est une nouvelle fois le théorème de Bloch, qui vient mettre des contraintes fortes sur la forme des solutions de l'équation de Schrödinger. Ces contraintes sont en fait tellement fortes que la solution « exacte » du problème peut être écrite explicitement si on se limite la dynamique des atomes à une seule bande. Dans le cas où plusieurs bandes sont simultanément peuplées, il faut avoir recours à la méthode de Floquet, dont nous présenterons les grandes lignes.

### 4-1 Théorème de Bloch dans le cas dépendant du temps

Le théorème de Bloch que nous avons rencontré au cours 2 portait sur la recherche des états propres d'un hamiltonien indépendant du temps avec un potentiel  $V(x)$  spatialement périodique

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}), \quad V(x+a) = V(x). \quad (4.57)$$

Le théorème de Bloch indique qu'une base d'états propres de cet hamiltonien peut être recherchée sous la forme d'ondes de Bloch  $\psi_q(x) = e^{ixq}u_q(x)$ , où  $u_q(x)$  est également spatialement périodique et où  $q$  est le quasi-moment choisi par convention dans la première zone de Brillouin  $]-\pi/a, \pi/a]$ . Rappelons que la propriété définissant ces ondes de Bloch est le fait qu'elles sont états propres de l'opérateur de translation spatiale  $\hat{T}_a$  avec la valeur propre  $e^{-iaq}$ .

Nous avons également évoqué au chapitre 2 le cas d'hamiltoniens spatialement périodiques, mais dépendant du temps, et nous avons indiqué

que la forme d'onde de Bloch est alors préservée lors de l'évolution. Démontrons de nouveau brièvement sur ce point en considérant par exemple l'hamiltonien

$$\hat{H}(t) = \frac{(\hat{p} - A(t))^2}{2m} + V(\hat{x}, t), \quad (4.58)$$

avec

$$V(x+a, t) = V(x, t). \quad (4.59)$$

Cet hamiltonien commute à chaque instant avec l'opérateur de translation spatiale  $\hat{T}_a$ , et il en va de même pour l'opérateur d'évolution entre un instant initial  $t_0$  et un instant final  $t_1$ . On en déduit que si l'état initial  $\psi(x, t_0)$  est état propre de  $\hat{T}_a$  avec la valeur propre  $e^{-iaq}$  [i.e.  $\psi(x, t_0) = e^{ixq}u_q(x, t_0)$ ], il en sera de même pour l'état final  $\psi(x, t_1)$ , avec la même valeur propre [i.e.  $\psi(x, t_1) = e^{ixq}u_q(x, t_1)$ ].

### 4-2 Évolution du quasi-moment $q(t)$

Puisqu'un hamiltonien de la forme (4.58) préserve la forme des fonctions de Bloch, un état initial  $e^{ixq_{in}}u(x, 0)$  avec  $u(x, 0)$  spatialement périodique reste sous cette forme lors de l'évolution, avec le même quasi-moment  $q_{in}$ . Cette propriété s'applique aux deux hamiltoniens  $\hat{H}_0(t)$  et  $\hat{H}_2(t)$  qui sont bien de la forme (4.58), mais ne s'applique pas à l'hamiltonien  $\hat{H}_1(t)$

$$\hat{H}_1(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) - F(t) \hat{x} \quad (4.60)$$

décrivant le mouvement de la particule en présence de la force spatialement uniforme  $F(t)$ , en plus du potentiel périodique  $V(x)$ .

Toutefois, les solutions de l'équation de Schrödinger pour  $\hat{H}_1(t)$  sont également très simples. Si  $\phi_0(x, t) = e^{ixq_{in}}u(x, t)$  est la solution de l'équation de Schrödinger pour l'hamiltonien  $\hat{H}_0$ , alors la transformation unitaire  $\hat{U}_1$  donne la solution  $\phi(x, t)$  pour l'hamiltonien  $\hat{H}_1$  :

$$\phi(x, t) = \hat{U}_1\phi_0(x, t) = e^{ixq(t)/\hbar}u(x, t) \quad (4.61)$$

avec

$$q(t) = q_{in} - A(t)/\hbar = q_{in} + \frac{1}{\hbar} \int_0^t F(t') dt'. \quad (4.62)$$

L'hamiltonien  $\hat{H}_1(t)$  préserve donc la forme d'onde de Bloch, mais avec un quasi-moment qui dépend du temps en « intégrant » la force  $F(t)$ .

Il reste finalement à déterminer l'évolution de la partie périodique  $u(x, t)$ , que l'on choisisse de travailler avec  $\hat{H}_0(t)$ ,  $\hat{H}_1(t)$  ou  $\hat{H}_2(t)$ . Nous avons déjà rencontré ce type de question lorsque nous avons étudié le branchement ou le débranchement d'un réseau. Nous avons expliqué à ce moment-là que si les paramètres du réseau variaient suffisamment lentement, alors la particule initialement préparée dans une fonction de Bloch de la bande  $n$ , associée à l'état périodique  $|u_{n,q}\rangle$ , suivait adiabatiquement cet état  $|u_{n,q}\rangle$ . Dans ce qui suit, nous allons de nouveau faire cette hypothèse adiabatique. Comme nous l'avons déjà indiqué, nous reviendrons sur les conditions à satisfaire pour que cette approximation soit valable dans le cours suivant, lors de l'étude des oscillations de Bloch.

### 4-3 Localisation dans la bande fondamentale

Pour résoudre le problème de l'évolution d'une particule dans un réseau vibrant (évolution restreinte à la bande fondamentale), nous allons utiliser le point de vue de l'hamiltonien  $\hat{H}_0$ , pour lequel les calculs sont les plus simples. Nous partons donc de l'hamiltonien de Hubbard

$$\hat{H}_0(t) = -J \left( \hat{T}_1 e^{i a p_0(t)/\hbar} + \hat{T}_1^\dagger e^{-i a p_0(t)/\hbar} \right), \quad (4.63)$$

ou de sa version plus complète incluant les sauts entre voisins distants, mais toujours restreinte à la bande fondamentale [avec  $J(1) = -J$ ] :

$$\hat{H}_0(t) = \sum_{j'=1}^{+\infty} J(j') \left( \hat{T}_{j'} e^{i j' a p_0(t)/\hbar} + \hat{T}_{j'}^\dagger e^{-i j' a p_0(t)/\hbar} \right). \quad (4.64)$$

Supposons que le système est initialement préparé dans une fonction de Bloch  $\psi_q$  (on oublie l'indice de bande puisqu'on se restreint à  $n = 0$ ). Du fait de l'approximation à une bande, cette fonction de Bloch est unique et s'écrit à une phase globale près :

$$|\psi(0)\rangle \propto |\psi_q\rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{i j a q} |w_j\rangle. \quad (4.65)$$

La fonction périodique  $|u_q\rangle$  associée à  $|\psi_q\rangle$  est elle aussi unique dans cette approximation à une bande et est en fait indépendante de  $q$  :

$$|u\rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |w_j\rangle. \quad (4.66)$$

Cherchons l'évolution de  $|\psi(t)\rangle$  sous l'effet de l'hamiltonien  $\hat{H}_0(t)$ . Puisque cet hamiltonien est spatialement périodique, on sait que la forme de Bloch va être préservée et le quasi-moment  $q$  ne va pas changer au cours du temps. Puisqu'on suppose que le système reste dans la bande fondamentale, le vecteur d'état à l'instant  $t$  est forcément proportionnel à l'état  $|\psi_q\rangle$ , puisque c'est le seul état de Bloch disponible pour ce quasi-moment. L'état  $|\psi(t)\rangle$  ne peut différer de  $|\psi_q\rangle$  que par un facteur de phase et s'écrit donc

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i \Phi_q(t)} |\psi_q\rangle. \quad (4.67)$$

La détermination de la phase globale  $\Phi_q(t)$  est simple. Il suffit de reporter l'expression (4.67) pour  $|\psi(t)\rangle$  dans l'équation de Schrödinger dépendant du temps. Par construction, l'état  $|\psi_q\rangle$  est état propre des opérateurs translations  $T_{j'}$  avec les valeurs propres  $e^{-i j' a q}$ . Il est donc état propre de l'hamiltonien  $\hat{H}_0(t)$  à tout instant  $t$

$$\hat{H}_0(t) |\psi_q\rangle = E[q - p_0(t)/\hbar] |\psi_q\rangle, \quad (4.68)$$

où on a utilisé l'expression de l'énergie de la bande considérée :

$$E(q) = -2J \cos(aq) \quad (4.69)$$

dans la version (4.63) de l'hamiltonien où on ne garde que les sauts entre proches voisins et

$$E(q) = 2 \sum_{j'=1}^{+\infty} J(j') \cos(j' a q) \quad (4.70)$$

pour l'hamiltonien (4.64) incluant les sauts distants.

L'équation permettant de déterminer la phase globale  $\Phi_q(t)$  s'écrit donc

$$\hbar \dot{\Phi}_q = E[q - p_0(t)/\hbar], \quad (4.71)$$

qui s'intègre formellement pour donner

$$\Phi_q(t) = \Phi_q(0) + \frac{1}{\hbar} \int_0^t E[q - p_0(t')/\hbar] dt'. \quad (4.72)$$

Considérons les instants  $0, T, 2T, \dots, nT, \dots$ , où  $T = 2\pi/\omega$  est la période de vibration du réseau. Du fait de la périodicité temporelle de  $p_0(t')$ , il est immédiat de montrer à partir de (4.72) que

$$\Phi_q(nT) - \Phi_q(0) = n [\Phi_q(T) - \Phi_q(0)] \quad (4.73)$$

où  $n$  est un entier quelconque : la phase accumulée  $\Delta\Phi_q$  est proportionnelle à la durée écoulée  $nT$ . Cette évolution est très similaire à celle que l'on trouverait pour un problème indépendant du temps, tout du moins si on se limite à une observation « stroboscopique » de cet état en regardant sa valeur aux multiples entiers  $nT$  de la période d'oscillation  $T$ .

Pour formaliser cette analogie, introduisons la *quasi-énergie*

$$\epsilon(q) = \frac{\hbar}{T} [\Phi_q(T) - \Phi_q(0)] = \frac{1}{T} \int_0^T E[q - p_0(t)/\hbar] dt. \quad (4.74)$$

On peut alors réécrire le résultat précédent sous la forme

$$|\psi(nT)\rangle = e^{-i\epsilon(q) nT/\hbar} |\psi(0)\rangle, \quad (4.75)$$

ce qui est très similaire à l'évolution qu'on aurait dans un réseau indépendant du temps pour une onde de Bloch :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iE(q) t/\hbar} |\psi(0)\rangle. \quad (4.76)$$

En d'autres termes, si on se limite à une observation « stroboscopique » aux instants multiples de  $T$ , l'évolution d'une onde de Bloch (ou plus généralement d'un paquet d'ondes formé à partir d'ondes de Bloch de la bande considérée), est identique au cas d'un réseau non modulé pourvu que l'on fasse la substitution

$$E(q) \rightarrow \epsilon(q) = \frac{1}{T} \int_0^T E[q - p_0(t)/\hbar] dt. \quad (4.77)$$

Nous verrons dans le paragraphe suivant que cette conclusion est un cas particulier des conséquences de l'approche de Floquet, qui permet de traiter les hamiltoniens dépendant périodiquement du temps. La simplicité du traitement présenté ici provient du fait qu'on s'est limité à une seule bande. Dès que l'on souhaite prendre plusieurs bandes en compte, la méthode de Floquet passe par un traitement numérique. En effet, la modulation peut

induire des transitions interbandes (à  $q$  donné), ce qui rend le problème beaucoup plus complexe.

Puisque nous disposons de l'expression explicite de l'énergie  $E(q)$  en fonction des coefficients tunnel  $J(j')$ , nous pouvons évaluer précisément l'intégrale (4.74). Considérons le mouvement sinusoïdal

$$x_0(t) = \bar{x}_0 \cos(\omega t), \quad p_0(t) = -m\omega\bar{x}_0 \sin(\omega t), \quad (4.78)$$

pour lequel l'équation (4.74) donnant la quasi-énergie  $\epsilon_q$  devient :

$$\epsilon(q) = \frac{2}{T} \sum_{j'=1}^{\infty} J(j') \int_0^T \cos\{j'[aq + \xi_0 \sin(\omega t')]\} dt'. \quad (4.79)$$

où l'on a posé comme précédemment

$$\xi(t) = \frac{ma}{\hbar\omega} \ddot{x}_0(t) = \xi_0 \cos(\omega t), \quad \xi_0 = -ma\omega\bar{x}_0/\hbar. \quad (4.80)$$

Cette intégrale se calcule aisément :

$$\epsilon(q) = 2 \sum_{j'=1}^{\infty} J(j') \cos(j' a q) \mathcal{J}_0(j' \xi_0). \quad (4.81)$$

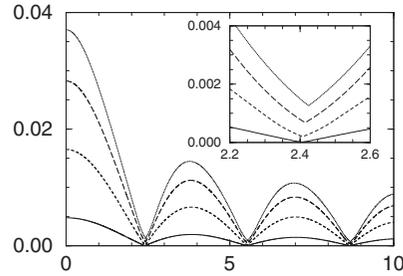
à comparer aux énergies en absence de modulation ( $\xi_0 = 0$ )

$$E(q) = 2 \sum_{j'=1}^{\infty} J(j') \cos(j' a q). \quad (4.82)$$

L'expression (4.81) pour les quasi-énergies permet de décrire de manière très simple le phénomène de localisation dynamique. Considérons la limite de Hubbard où seuls les sauts entre proches voisins, décrits par le paramètre  $J = -J(1)$ , sont significatifs. On a alors :

$$E(q) = -2J \cos(aq) \rightarrow \epsilon(q) \approx -2J \cos(aq) \mathcal{J}_0(\xi_0), \quad (4.83)$$

où l'on retrouve la renormalisation du coefficient tunnel  $J \rightarrow J'$  déterminée en (4.56) et observée dans l'expérience de Pise. Plus précisément, les quasi-énergies forment une bande de largeur réduite par rapport à la bande initiale, le coefficient de réduction étant  $\mathcal{J}_0(\xi_0) < 1$ . Quand l'argument de cette fonction de Bessel est choisi égal au premier zéro de cette



**FIGURE 4.3.** Largeur de la quasi-bande d'énergie fondamentale (en unité de  $E_r$ ) en fonction de l'indice de modulation  $\xi_0$  pour différentes profondeurs du réseau ; de haut en bas :  $V_0/E_r = 2, 3, 5, 10$ . La prise en compte des termes au delà de  $j = 1$  dans la somme (4.81) entraîne que la largeur de la bande ne s'annule pas exactement quand  $\xi_0$  est égal à un zéro de la fonction de Bessel  $J_0$ . Figure extraite de Eckardt et al. (2009).

fonction ( $\approx 2.405$ ), la bande est infiniment étroite : toutes les quasi-énergies  $\epsilon(q)$  sont égales entre elles (en l'occurrence nulles). Il est alors immédiat de montrer que l'état de la particule va rester le même à tous les instants  $0, T, 2T$ , etc. Il suffit de considérer le développement de cet état sur les états de Bloch

$$|\psi(0)\rangle = \int C(q)|\psi_q\rangle dq \quad \rightarrow \quad |\psi(nT)\rangle = \int C(q) e^{-i\epsilon(q) nT/\hbar} |\psi_q\rangle dq, \quad (4.84)$$

et d'utiliser le fait que toutes les quasi-énergies  $\epsilon(q)$  prennent la même valeur. Le vecteur d'état  $|\psi(nT)\rangle$  est alors égal à  $|\psi(0)\rangle$  et un paquet d'ondes initial ne s'étale pas sur des temps longs devant  $T$  ; plus précisément, son évolution entre  $nT$  et  $(n+1)T$  est identique à son évolution entre 0 et  $T$ .

Si les sauts entre proches voisins ne suffisent pas à décrire la dynamique dans la bande fondamentale, il faut considérer les termes suivants  $J(2), J(3)$  dans le développement (4.81). Il n'y a alors plus de valeur de l'amplitude de modulation pour laquelle la quasi-bande est infiniment étroite. Cette quasi-bande est néanmoins fortement rétrécie au voisinage du point  $\xi_0 = 2.405$ . Nous montrons sur la figure 4.3 un résultat extrait de Eckardt et al. (2009), qui montre la largeur de la quasi-bande pour différentes valeurs du potentiel  $V_0$ . Même pour une valeur relativement faible de  $V_0$

( $V_0 = 2 E_r$ ), la largeur de bande au voisinage de  $\xi_0 = 2.4$  est réduite par plus d'un facteur 20 par rapport à sa valeur sans modulation.

**Remarque.** Nous nous sommes intéressés ici à une modulation sinusoïdale de la position  $x_0(t)$  du réseau. Eckardt et al. (2009) montrent que si on choisit une modélisation telle que la force  $F(t)$  est un créneau (le réseau est accéléré uniformément vers la gauche, puis vers la droite), alors la quasi-bande peut avoir une largeur nulle même si on prend en compte les couplages  $J_2, J_3$ , etc. En effet, la fonction de Bessel de (4.81) est remplacée, comme pour le cas du spin 1/2 étudié en (4.51), par un sinus cardinal :

$$J_0(j\xi_0) \quad \rightarrow \quad \text{sinc}(\pi j\xi_0/2) \quad (4.85)$$

et ce coefficient s'annule pour  $\xi_0$  entier pair, quelle que soit la valeur de  $j$ .

#### 4-4 La méthode de Floquet

Dans le paragraphe précédent, nous avons pu résoudre « à la main » le problème du réseau vibrant grâce à l'approximation à une bande qui nous a permis de dégager très simplement la notion de quasi-énergie. Si on souhaite aller au delà de cette approximation, il est nécessaire de bien formaliser le problème de l'évolution d'un système sous l'effet d'un hamiltonien périodique en temps. La méthode théorique adaptée à ce problème a été développée par Floquet. Nous allons rappeler dans ce qui suit les éléments les plus utiles de cette approche pour le problème qui nous intéresse et nous ferons le lien avec les résultats du paragraphe précédent.

L'approche de Floquet est une méthode générale pour traiter l'évolution d'un système dynamique régie par

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \hat{M}(t) \mathbf{X}, \quad (4.86)$$

où  $\mathbf{X}$  est un vecteur colonne à  $d$  composantes (réelles ou complexes) et  $\hat{M}(t)$  une matrice carrée  $d \times d$ , dépendant explicitement du temps et périodique de période  $T$  :

$$\hat{M}(t+T) = \hat{M}(t). \quad (4.87)$$

Cette méthode est une transposition au domaine temporel de la méthode des fonctions de Bloch, qui exploite l'invariance par translation dans le domaine spatial.

Avant de présenter la méthode de Floquet, rappelons d'abord les résultats connus pour un hamiltonien  $\hat{H}$  indépendant du temps. Notons  $|\phi_\alpha\rangle$  les vecteurs propres de  $\hat{H}$  et  $E_\alpha$  les énergies associées. L'opérateur d'évolution de l'instant 0 à l'instant  $T$ , noté  $\hat{U}(T)$ , est égal à  $\exp(-i\hat{H}T/\hbar)$ . Cet opérateur unitaire admet donc également les  $|\phi_\alpha\rangle$  comme états propres :

$$\hat{U}(T) = e^{-i\hat{H}T/\hbar}, \quad \hat{U}(T) |\phi_\alpha\rangle = e^{-iE_\alpha T/\hbar} |\phi_\alpha\rangle. \quad (4.88)$$

Passons maintenant au cas d'un hamiltonien périodique en temps et à la méthode de Floquet. Nous n'allons pas utiliser cette méthode dans tous ses détails, mais certains de ses résultats généraux vont nous servir de guide. Précisons-les ici :

- L'équation de Schrödinger est du type (4.86) et l'opérateur d'évolution depuis l'instant 0 à l'instant  $nT$ , où  $n$  est un entier, vérifie

$$\hat{U}(nT) = [\hat{U}(T)]^n. \quad (4.89)$$

- L'opérateur  $\hat{U}(T)$  est unitaire et peut être diagonalisé, ses valeurs propres étant de module 1. Notons ces valeurs propres  $e^{-i\epsilon_\alpha T/\hbar}$ , où les  $\epsilon_\alpha$  sont réels et ont la dimension d'une énergie. Les  $\epsilon_\alpha$  sont appelées *quasi-énergies*, par analogie au quasi-moment  $q$ , et sont définies à  $2\pi\hbar/T$  près, tout comme le quasi-moment  $q$  est défini à  $2\pi/a$  près. Notons  $|\phi_\alpha\rangle$  les vecteurs propres associés

$$\hat{U}(T)|\phi_\alpha\rangle = e^{-i\epsilon_\alpha T/\hbar}|\phi_\alpha\rangle. \quad (4.90)$$

Ces vecteurs forment une base orthogonale de l'espace de Hilbert et nous trouvons pour un état initial quelconque  $|\psi(0)\rangle$  :

$$|\psi(nT)\rangle = \sum_\alpha C_\alpha e^{-in\epsilon_\alpha T/\hbar} |\phi_\alpha\rangle \quad (4.91)$$

où les coefficients  $C_\alpha$  sont donnés par  $C_\alpha = \langle \phi_\alpha | \psi(0) \rangle$ .

- Considérons l'état  $|\psi_\alpha(t)\rangle$  obtenu en partant de  $|\phi_\alpha\rangle$  à l'instant  $t = 0$  lors d'une évolution sous l'effet de  $\hat{H}(t)$  :

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = \hat{U}(t) |\phi_\alpha\rangle. \quad (4.92)$$

Puisque  $|\phi_\alpha\rangle$  est état propre de  $\hat{U}(T)$ , il est clair que

$$|\psi_\alpha(T)\rangle = e^{-i\epsilon_\alpha T/\hbar} |\psi_\alpha(0)\rangle. \quad (4.93)$$

Même si l'évolution de  $|\psi_\alpha(t)\rangle$  peut être arbitrairement compliquée entre 0 et  $T$ , on voit que ce vecteur redevient égal à sa valeur de départ au bout d'une période  $T$ , à la phase  $\epsilon_\alpha T/\hbar$  près.

- Pour éliminer cette phase restante  $\epsilon_\alpha T/\hbar$  dans l'évolution des  $|\psi_\alpha(t)\rangle$ , introduisons le vecteur d'état  $|u_\alpha(t)\rangle$  tel que

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\epsilon_\alpha t/\hbar} |u_\alpha(t)\rangle. \quad (4.94)$$

Il est immédiat que  $|u_\alpha(t)\rangle$  est périodique en temps de période  $T$ , ce qui permet de le décomposer en série de Fourier :

$$|u_\alpha(t)\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\omega t} |\chi_{\alpha,n}\rangle, \quad (4.95)$$

où les vecteurs indépendants du temps  $|\chi_{\alpha,n}\rangle$  sont à ce stade inconnus.

- Pour simplifier les notations, nous supposons que  $\hat{H}(t)$  peut s'écrire sous la forme<sup>6</sup>

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + e^{i\omega t} \hat{V}_+ + e^{-i\omega t} \hat{V}_-, \quad (4.96)$$

avec  $\hat{V}_- = \hat{V}_+^\dagger$ . L'équation de Schrödinger  $i\hbar|\dot{\psi}_\alpha\rangle = \hat{H}(t)|\psi_\alpha\rangle$ , devient quand on remplace  $|\psi_\alpha\rangle$  par son expression en terme de  $|u_\alpha\rangle$  et qu'on y injecte le développement de Fourier de ce vecteur

$$(\epsilon_\alpha - n\hbar\omega)|\chi_{\alpha,n}\rangle = \hat{H}_0|\chi_{\alpha,n}\rangle + \hat{V}_+|\chi_{\alpha,n-1}\rangle + \hat{V}_-|\chi_{\alpha,n+1}\rangle. \quad (4.97)$$

- Le problème de l'évolution sous l'effet de l'hamiltonien périodique  $\hat{H}(t)$  sera complètement résolu une fois qu'on aura déterminé explicitement les états  $|\chi_{\alpha,n}\rangle$  et les quasi-énergies  $\epsilon_\alpha$ . Pour cela, faisons l'hypothèse que l'on peut restreindre la partie pertinente de l'espace de Hilbert à un sous-espace de dimension  $d$ . Les opérateurs  $\hat{H}_0$ ,  $V_+$ ,  $V_-$  sont alors des matrices carrées  $d \times d$  et les kets  $|\chi_{\alpha,n}\rangle$  sont des vecteurs à  $d$  composantes. Formons alors le vecteur de dimension infinie

$$|\Xi\rangle = {}^t(\dots, |\chi_{\alpha,n-1}\rangle, |\chi_{\alpha,n}\rangle, |\chi_{\alpha,n+1}\rangle, \dots) \quad (4.98)$$

6. Il n'est pas difficile d'introduire plus d'harmoniques dans l'hamiltonien  $\hat{H}(t)$ , mais cela complique un peu l'écriture, en ajoutant un indice supplémentaire.

obtenu en mettant tous les  $|\chi_{\alpha,n}\rangle$  les uns en dessous des autres. Le système (4.97) peut se réécrire comme une équation aux valeurs propres

$$\epsilon_{\alpha} |\Xi\rangle = \hat{\mathcal{H}} |\Xi\rangle \quad (4.99)$$

pour l'opérateur  $\hat{\mathcal{H}}$  également de dimension infinie, obtenu comme une matrice de bande définie par blocs  $d \times d$  :

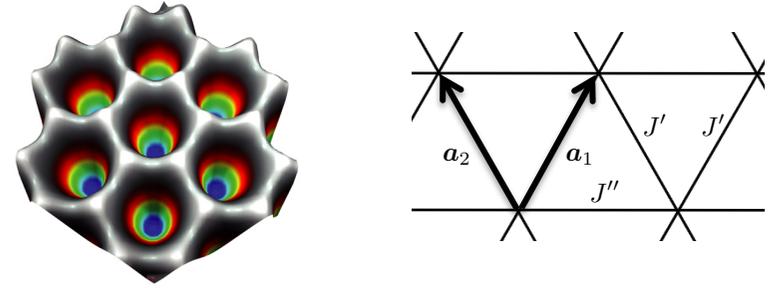
$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & 0 & \hat{V}_+ & \hat{H}_0 + (n-1)\hbar\omega & \hat{V}_- & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \hat{V}_+ & \hat{H}_0 + n\hbar\omega & \hat{V}_- & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \hat{V}_+ & \hat{H}_0 + (n+1)\hbar\omega & \hat{V}_- & 0 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (4.100)$$

Du fait de la présence du terme  $n\hbar\omega$  sur la diagonale, on obtient un spectre qui s'étend de manière périodique depuis  $-\infty$  à  $+\infty$ . Dans une « zone de Brillouin » de largeur  $\hbar\omega$ , on trouve  $d$  valeurs propres. En pratique, on tronque cette matrice infinie à  $|n| < n_{\max}$  et on diagonalise numériquement la matrice carrée résultante.

**Lien avec les résultats du paragraphe précédent.** Dans l'approximation à une bande, la conservation du quasi-moment implique que les ondes de Bloch sont états propres de l'opérateur d'évolution  $\hat{U}(T)$ . L'étape la plus délicate de la méthode de Floquet, à savoir la recherche de ces états propres, est donc immédiatement franchie ( $|\psi_{\alpha}\rangle = |\psi_{n,q}\rangle$ ), et les quasi-énergies  $\epsilon_{\alpha} = \epsilon(q)$  sont également connues. On pourrait prolonger l'approche de Floquet pour déterminer les fonctions périodiques  $|u_{\alpha}(t)\rangle$  à un instant  $t$  quelconque, ce qui permettrait de préciser l'évolution de n'importe quel état initial entre 0 et  $T$ . On pourrait ainsi évaluer la « respiration » d'un paquet d'ondes entre 0 et  $T$  dans le cas sans diffusion obtenu pour  $\mathcal{J}_0(\xi_0) = 0$ .

## 5 Réseau vibrant à 2D : l'expérience d'Hambourg

La manipulation du coefficient tunnel par modulation de la position d'un réseau optique a été mise en œuvre à deux dimensions dans une expérience menée à Hamburg dans le groupe de K. Sengstock (Struck et al.



**FIGURE 4.4.** (a) Profil d'intensité pour un réseau désaccordé sur le rouge, formé par trois ondes planes se propageant à 120 degrés l'une de l'autre dans le plan  $xy$ . Les trois ondes ont la même intensité et sont polarisées linéairement selon  $Oz$  [Figure extraite de Becker et al. 2010]. (b) Réseau triangulaire avec les vecteurs de base  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$ , et les coefficients tunnels  $J'$  et  $J''$  qu'on peut contrôler indépendamment en modulant les phases  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  de deux des ondes formant le réseau.

2011). Le réseau est formé par trois ondes quasi-planes se propageant dans le plan  $xy$  à 120 degrés l'une de l'autre, de vecteurs d'onde

$$\mathbf{k}_1 = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_3 = -\frac{k}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (4.101)$$

Les trois ondes ont la même intensité  $I_0$  et sont toutes les trois polarisées selon l'axe  $Oz$ , de sorte que l'intensité en un point  $xy$  s'écrit

$$\begin{aligned} I(x, y) &= I_0 \left| e^{ikx} + e^{-ik(x-\sqrt{3}y)/2} + e^{-ik(x+\sqrt{3}y)/2} \right|^2 \\ &= I_0 \left| e^{3ikx/2} + 2 \cos(\sqrt{3}ky/2) \right|^2. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Nous avons choisi par convention que les trois faisceaux sont en phase au point  $x = y = 0$ . Le désaccord est choisi négatif (sur le rouge) de sorte que les minima de potentiel sont localisés aux maxima d'intensité. Ces maxima pour lesquels  $I = 9I_0$  se répartissent sur un réseau triangulaire, aux points du réseau de Bravais formé par la réunion des deux ensembles

$$\begin{aligned} (i) \quad & 3kx/2 = 0 \pmod{2\pi}, \quad \sqrt{3}ky/2 = 0 \pmod{2\pi}, \\ (ii) \quad & 3kx/2 = \pi \pmod{2\pi}, \quad \sqrt{3}ky/2 = \pi \pmod{2\pi}. \end{aligned} \quad (4.103)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{B} = \{j_1 \mathbf{a}_1 + j_2 \mathbf{a}_2, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}\} \quad (4.104)$$

avec

$$\mathbf{a}_1 = \frac{2\pi}{3k} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{2\pi}{3k} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (4.105)$$

Le profil d'intensité est représenté sur la figure 4.4a. Dans l'expérience de Struck et al. (2011), l'intensité  $I_0$  est suffisamment grande pour que la dynamique dans la bande fondamentale du réseau soit en bonne approximation dans la limite des liaisons fortes, avec une profondeur de  $5.6 E_r$  et un coefficient tunnel entre sites  $J = 0.002 E_r$ . Le confinement selon la direction  $z$  est beaucoup plus mou, et on réalise en fait un réseau triangulaire de tubes, contenant chacun quelques centaines d'atomes. Le gaz est suffisamment froid pour que chaque tube puisse être considéré comme un micro-condensat, avec une phase bien déterminée.

Si on change les phases  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  des deux ondes de vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_2$  et  $\mathbf{k}_3$ , il est facile de montrer que le profil d'intensité  $I(x, y)$  est simplement translaté dans le plan  $xy$  par la quantité

$$\Delta x = \frac{1}{3k}(\varphi_2 + \varphi_3), \quad \Delta y = \frac{1}{\sqrt{3}k}(\varphi_2 - \varphi_3). \quad (4.106)$$

Une modulation temporelle sinusoïdale de  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  induit donc une vibration du réseau.

Struck et al. (2011) ont choisi des variations temporelles de  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  telles que  $\Delta x = x_0 \cos(\omega t)$ ,  $\Delta y = y_0 \sin(\omega t)$ , ce qui permet de modifier de manière différente les deux coefficients tunnels  $J'$  et  $J''$  indiqués sur la figure 4.4;  $J'$  correspond aux transitions selon  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$ ,  $J''$  aux transitions selon  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ , parallèle à l'axe  $Ox$ . Avec des arguments similaires à ceux de l'approche naïve développée plus haut pour le cas d'un réseau 1D, les coefficients tunnels  $J'$  et  $J''$  s'écrivent

$$J' = J\mathcal{J}(\xi'_0), \quad J'' = J\mathcal{J}(\xi''_0), \quad (4.107)$$

avec

$$\xi'_0 = \frac{m\omega^2 a}{2\hbar} \sqrt{x_0^2 + 3y_0^2}, \quad \xi''_0 = \frac{m\omega^2 a}{\hbar} x_0. \quad (4.108)$$

En contrôlant séparément les valeurs de  $x_0$  et  $y_0$ , on peut donc ajuster indépendamment les amplitudes et les signes des coefficients  $J'$  et  $J''$ . En

particulier, on peut choisir des modulations telles que  $J' > 0$ ,  $J'' < 0$  (et vice versa), alors qu'en absence de modulation,  $J' = J'' > 0$ .

Comme dans l'expérience 1D de Pise, le changement de signe d'un des coefficients tunnel se traduit par un déplacement des minima de la bande fondamentale dans l'espace des quasi-moments  $\mathbf{q}$ . Ces minima sont observés directement par temps de vol, puisqu'ils correspondent aux états macroscopiquement occupés quand on place un condensat dans le réseau. On a représenté sur la figure 4.5 deux figures de temps de vol clairement différentes, celle de gauche étant obtenue pour  $J', J'' > 0$  et celle de droite pour  $J' < 0, J'' > 0$ .

Pour rendre compte de ce changement de la structure de bande, écrivons l'hamiltonien à une particule sous la forme

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -J' \sum_{j_1, j_2} (|w_{j_1+1, j_2}\rangle \langle w_{j_1, j_2}| + |w_{j_1, j_2+1}\rangle \langle w_{j_1, j_2}| + \text{h.c.}) \\ & -J'' \sum_{j_1, j_2} (|w_{j_1+1, j_2-1}\rangle \langle w_{j_1, j_2}| + \text{h.c.}) \end{aligned} \quad (4.109)$$

où la première ligne correspond aux sauts le long des directions  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$ , et la seconde ligne aux sauts parallèlement à l'axe  $Ox$ , selon le vecteur  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ . Un état de Bloch

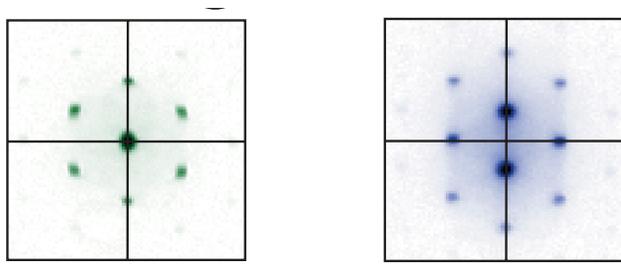
$$|\psi_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_j e^{i\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{q}} |w_j\rangle \quad (4.110)$$

est état propre de  $\hat{H}$  avec la valeur propre

$$E(\mathbf{q}) = -2[J' \cos(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{q}) + J' \cos(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{q}) + J'' \cos((\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{q})]. \quad (4.111)$$

Prenons d'abord  $J', J'' > 0$ . Dans ce cas, l'état fondamental est obtenu pour  $\mathbf{q} = 0$ , l'énergie correspondante étant  $E = -4J' - 2J''$ . C'est effectivement l'état le plus peuplé sur l'image de gauche de la figure 4.5. Choisissons maintenant  $J' < 0, J'' > 0$ . Le minimum est obtenu en prenant par exemple  $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{q} = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{q} = \pi$ , ce qui correspond à  $\mathbf{q} = \mathbf{u}_y \sqrt{3}k/2$ , l'énergie correspondante étant  $E = -4|J'| - 2J''$ . Cette prédiction<sup>7</sup> correspond au résultat visible sur l'image de droite de la figure 4.5.

7. On peut également prendre  $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{q} = \pi$  et  $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{q} = -\pi$ , ce qui correspond à  $\mathbf{q} = \mathbf{u}_x(3k/2)$  également visible sur l'image de droite de la figure 4.5.



**FIGURE 4.5.** Figures de temps de vol extraites de l'article de Struck et al. (2011). Gauche : figure obtenue pour  $J', J'' > 0$ . Droite : figure obtenue pour  $J' < 0, J'' > 0$ .

Un point de vue original sur la physique des atomes dans ce réseau triangulaire est mis en avant par Struck et al. (2011); il porte sur l'utilisation du réseau pour simuler le magnétisme classique d'un réseau triangulaire. En assignant une phase  $\theta_i$  à chaque condensat piégé sur un site  $|w_i\rangle$  du réseau, on peut écrire l'énergie d'une configuration donnée  $\{\theta_i\}$  sous la forme

$$E(\{\theta_i\}) = -N \sum_{\langle i,j \rangle} J_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j). \quad (4.112)$$

La somme porte sur toutes les paires de proches voisins  $\langle i, j \rangle$ , et on a fait la substitution

$$|w_i\rangle\langle w_j| \longrightarrow e^{i(\theta_i - \theta_j)}. \quad (4.113)$$

Cette substitution est valable si l'on peut décrire l'état de chaque micro-condensat par un champ classique  $\sqrt{N_j} e^{i\theta_j}$  et supposer que les nombres d'atomes dans tous ces micro-condensats sont voisins et  $\approx N$ .

La fonctionnelle d'énergie (4.112) est formellement identique à celle d'une assemblée de spins  $\mathbf{S}_i = [\cos(\theta_i), \sin(\theta_i)]$  disposés sur les nœuds du réseau  $\mathcal{B}$ , avec des interactions entre proches voisins :

$$E(\{\theta_i\}) = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{i,j} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j. \quad (4.114)$$

Les différentes structures qui apparaissent en temps de vol quand on varie l'amplitude et le signe de  $J'$  et  $J''$  permettent donc de retrouver les phases magnétiques de ce réseau de spins en interaction. Les deux images

montrées sur la figure 4.5 correspondent ainsi à la phase ferromagnétique (tous les spins alignés, tous les  $\theta_j$  égaux, minimum en  $\mathbf{q} = 0$ ) et à la phase rhombique (des lignes selon l'axe  $x$  de spins pointant dans une direction donnée, alternant avec des lignes de spins opposés).

Terminons ce paragraphe en mentionnant qu'il est également possible de moduler dans le temps le réseau d'une manière qui confère une partie imaginaire non nulle au coefficient tunnel (Struck et al. 2012). Il suffit pour cela de choisir une fonction  $\eta(t)$  telle que  $\langle e^{i\eta} \rangle$  ait une partie imaginaire non nulle. Ceci permet de faire en sorte qu'une particule parcourant les bords de la cellule unité du réseau accumule une phase non nulle, ce qui est à la base de la génération de champs magnétiques artificiels. Nous reviendrons sur ce point dans un cours ultérieur.

## 6 Références

- Becker, C, P Soltan-Panahi, J Kronjäger, S Dörscher, K Bongs & K Sengstock (2010), « Ultracold quantum gases in triangular optical lattices », in *New Journal of Physics* 12.6, p. 065025.
- Cohen-Tannoudji, C., J. Dupont-Roc & G. Grynberg (1987), *Photons et Atomes—Introduction à l'électrodynamique quantique*, Paris: InterEditions/Editions du CNRS.
- Creffield, C. E., F. Sols, D. Ciampini, O. Morsch & E. Arimondo (2010), « Expansion of matter waves in static and driven periodic potentials », in *Phys. Rev. A* 82 (3), p. 035601.
- Dunlap, D. H. & V. M. Kenkre (1986), « Dynamic localization of a charged particle moving under the influence of an electric field », in *Phys. Rev. B* 34 (6), pp. 3625–3633.
- Eckardt, André, Christoph Weiss & Martin Holthaus (2005), « Superfluid-Insulator Transition in a Periodically Driven Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 95 (26), p. 260404.
- Eckardt, André, Martin Holthaus, Hans Lignier, Alessandro Zenesini, Donatella Ciampini, Oliver Morsch & Ennio Arimondo (2009), « Exploring dynamic localization with a Bose-Einstein condensate », in *Phys. Rev. A* 79 (1), p. 013611.
- Grifoni, Milena & Peter Hänggi (1998), « Driven quantum tunneling », in *Physics Reports* 304.5–6, pp. 229–354.

- Grossmann, F., T. Dittrich, P. Jung & P. Hänggi (1991), « Coherent destruction of tunneling », in *Phys. Rev. Lett.* 67 (4), pp. 516–519.
- Haroche, S., C. Cohen-Tannoudji, C. Audoin & J. P. Schermann (1970), « Modified Zeeman Hyperfine Spectra Observed in  $H^1$  and  $Rb^{87}$  Ground States Interacting with a Nonresonant rf Field », in *Phys. Rev. Lett.* 24 (16), pp. 861–864.
- Holthaus, Martin (1992), « Collapse of minibands in far-infrared irradiated superlattices », in *Phys. Rev. Lett.* 69 (2), pp. 351–354.
- Kierig, E., U. Schnorrberger, A. Schietinger, J. Tomkovic & M. K. Oberthaler (2008), « Single-Particle Tunneling in Strongly Driven Double-Well Potentials », in *Phys. Rev. Lett.* 100 (19), p. 190405.
- Kollath, C., A. Iucci, T. Giamarchi, W. Hofstetter & U. Schollwöck (2006), « Spectroscopy of Ultracold Atoms by Periodic Lattice Modulations », in *Phys. Rev. Lett.* 97 (5), p. 050402.
- Lignier, H., C. Sias, D. Ciampini, Y. Singh, A. Zenesini, O. Morsch & E. Arimondo (2007), « Dynamical Control of Matter-Wave Tunneling in Periodic Potentials », in *Phys. Rev. Lett.* 99 (22), p. 220403.
- Lopez, Matthias, Jean-François Clément, Pascal Szriftgiser, Jean Claude Garreau & Dominique Delande (2012), « Experimental Test of Universality of the Anderson Transition », in *Phys. Rev. Lett.* 108 (9), p. 095701.
- Madison, K. W., M. C. Fischer, R. B. Diener, Qian Niu & M. G. Raizen (1998), « Dynamical Bloch Band Suppression in an Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 81 (23), pp. 5093–5096.
- Struck, J., C. Oelschlaeger, R. Le Targat, P. Soltan-Panahi, A. Eckardt, M. Lewenstein, P. Windpassinger & K. Sengstock (2011), « Quantum Simulation of Frustrated Classical Magnetism in Triangular Optical Lattices », in *SCIENCE* 333.6045, 996–999.
- Struck, J., C. Ölschläger, M. Weinberg, P. Hauke, J. Simonet, A. Eckardt, M. Lewenstein, K. Sengstock & P. Windpassinger (2012), « Tunable Gauge Potential for Neutral and Spinless Particles in Driven Optical Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* 108 (22), p. 225304.