

Chapitre 5

Les oscillations de Bloch dans un réseau optique

Sommaire

1	Le principe des oscillations de Bloch	2
1-1	Le défilement du quasi-moment	2
1-2	L'approximation adiabatique	3
2	Observations expérimentales	5
2-1	Premières expériences avec des atomes froids	5
2-2	Remarque : bilan d'impulsion dans un réseau accéléré	6
2-3	Oscillations dues à la gravité	7
3	L'approximation adiabatique et au delà	8
3-1	Validité de l'approximation adiabatique	8
3-2	Transitions de Landau-Zener	10
3-3	Au delà de Landau-Zener	11
3-4	Un séparateur de faisceau	11
4	Oscillations de Bloch en liaisons fortes	12
4-1	La fonction d'onde « oscillante »	12
4-2	Opérateur d'évolution et oscillations dans l'espace réel	13
5	Les échelles de Wannier-Stark	14
6	Perspectives et applications	15
7	Références	17

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la dynamique d'atomes placés dans un réseau optique dont le potentiel périodique $\mathcal{V}(x, t)$ dépend du temps. Dans le cas où cette dépendance se ramène à un déplacement du réseau

$$\mathcal{V}(x, t) = V(x - x_0(t)), \quad (5.1)$$

nous avons montré que l'on peut, grâce à une transformation unitaire, analyser le problème dans le référentiel en mouvement avec le réseau. On se ramène alors au problème du réseau immobile $V(x)$ auquel on superpose la force d'inertie $F(t) = -m\ddot{x}_0(t)$.

Il est donc naturel à ce stade d'approfondir la question de la dynamique d'une particule soumise simultanément à un potentiel périodique indépendant du temps et une force uniforme dans l'espace. Le cas le plus simple est celui d'une force F indépendante du temps, et c'est ce cas qui va nous occuper dans la plus grande partie du cours. Notre hamiltonien de départ sera donc

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) - F \hat{x}. \quad (5.2)$$

Ce problème a initialement été abordé par Zener pour modéliser le comportement d'un électron dans un réseau cristallin, soumis à un champ électrique extérieur. L'hamiltonien (5.2) décrit alors le mouvement de la particule dans le référentiel du laboratoire. On rencontre ce même problème avec des atomes froids dans un réseau stationnaire auquel on superpose la gravité ou la force de type Stern et Gerlach créée par un gradient de champ

magnétique.

Par ailleurs, en revenant à l'équivalence entre un réseau mobile (sans force additionnelle) et un réseau fixe superposé à $F(t)$, on voit que l'on peut créer ce potentiel en partant d'un réseau périodique en mouvement uniformément accéléré dans le référentiel du laboratoire : si on prend $x_0(t) = -Ft^2/(2m)$ dans l'hamiltonien

$$\hat{H}_2(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x} - x_0(t)), \quad (5.3)$$

on se ramène à l'hamiltonien (5.2) en passant dans le référentiel uniformément accéléré dans lequel le réseau est immobile, après la transformation unitaire donnée au cours précédent.

Les oscillations de Bloch d'atomes froids dans des réseaux optiques sont devenues ces dernières années un outil puissant qu'on rencontre dans de nombreuses applications : mesure de la gravité, étude de champs de force au voisinage des surfaces, séparateur de faisceaux pour l'interférométrie atomique. Même si les atomes froids ne sont pas le premier système physique sur lequel les oscillations ont été observées (voir par exemple l'article de revue de Mendez & Bastard (1993) pour des études menés sur des super-réseaux solides), la richesse des applications pour les gaz atomiques pour les gaz froids en fait un objet d'étude très riche et très varié.

1 Le principe des oscillations de Bloch

1-1 Le défilement du quasi-moment

Dans le cours précédent, nous avons étudié l'évolution d'une particule sous l'effet d'un hamiltonien de type

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) - F(t) \hat{x}. \quad (5.4)$$

où $V(x)$ est périodique de période a . Nous avons montré en particulier que la forme de Bloch est préservée lors de l'évolution. Un état initial

$$\psi(x, 0) = e^{ixq_{in}} u(x, 0) \quad (5.5)$$

va garder cette forme et s'écrire à l'instant t

$$\psi(x, t) = e^{ixq(t)} u(x, t). \quad (5.6)$$

Le quasi-moment $q(t)$ est donné par

$$q(t) = q_{in} + \frac{1}{\hbar} \int_0^t F(t') dt'. \quad (5.7)$$

Pour le cas qui nous intéresse ici, la force F est indépendante du temps et $q(t)$ évolue linéairement en temps

$$q(t) = q_{in} + Ft/\hbar. \quad (5.8)$$

Une échelle de temps et une échelle d'énergie s'introduisent donc naturellement : le temps

$$\tau_B = 2\hbar k/F \quad (5.9)$$

représente la durée nécessaire pour que $q(t)$ balaye la zone de Brillouin, d'extension $2k = 2\pi/a$. À ce temps est associée la pulsation $\omega_B = 2\pi/\tau_B$ et l'énergie

$$\hbar\omega_B = \pi F/k = Fa. \quad (5.10)$$

Cette énergie représente le travail de la force F sur une période du potentiel $V(x)$; c'est donc la chute en énergie entre deux minima locaux successifs du potentiel $V(x) - Fx$ (cf. figure 5.1).

À ce stade, nous ne pouvons encore rien dire sur la fonction spatialement périodique $u(x, t)$ qui vient multiplier $e^{iq(t)x}$ dans (5.6), si ce n'est qu'elle est solution de

$$i\hbar \frac{d}{dt} |u(t)\rangle = \hat{H}_{per.}[q(t)] |u(t)\rangle, \quad (5.11)$$

où $\hat{H}_{per.}[q]$ est l'hamiltonien pour la partie périodique des fonctions de Bloch :

$$\hat{H}_{per.}[q] = \frac{(\hat{p} + \hbar q)^2}{2m} + V(\hat{x}). \quad (5.12)$$

C'est l'approximation adiabatique qui, comme au chapitre précédent dans le cas d'une force sinusoidale, va nous permettre de progresser.

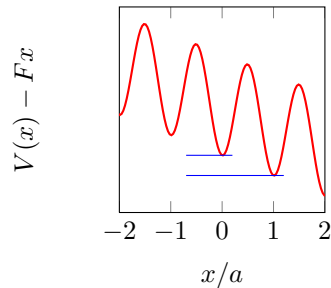


FIGURE 5.1. Potentiel $V(x) - Fx$ donnant naissance aux oscillations de Bloch, avec ici $V(x) = V_0 \sin^2(\pi x/a)$ et $\hbar\omega_B \equiv Fa = V_0/5$. La différence d'énergie entre les deux traits horizontaux est égale à $\hbar\omega_B$.

1-2 L'approximation adiabatique

À partir de maintenant, nous supposons que l'état initial $e^{iq_{in}x} u(x, 0)$ est une fonction de Bloch, c'est-à-dire un état propre $\psi_{n,q_{in}}(x)$ de la $n^{\text{ième}}$ bande d'énergie de l'hamiltonien

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \tag{5.13}$$

correspondant au cas $F = 0$. En d'autres termes, la fonction $u(x, 0) = \langle x|u(t=0)\rangle$ coïncide (à une phase près) avec l'état propre $u_{n,q_{in}}(x)$ de l'hamiltonien $\hat{H}_{\text{per.}[q_{in}]}$ pour la partie périodique (5.12).

L'approximation adiabatique consiste à poser que l'état $|u(t)\rangle$ solution de (5.11) reste (à une phase globale près) égal à $|u_{n,q(t)}\rangle$, soit

$$\psi(x, t) \propto e^{ixq(t)} u_{n,q(t)}(x). \tag{5.14}$$

Puisque le quasi-moment $q(t)$ défile à vitesse uniforme et parcourt la zone de Brillouin en un temps τ_B , l'évolution dans le temps de $\psi(x, t)$ est périodique (à une phase globale près¹), avec cette même période τ_B . Ce défilement est représenté sur la figure 5.2 dans la représentation dite de *zone répétée*.

1. Nous ne nous préoccupons pas de la phase (Zak 1989) accumulée au cours d'une oscillation dans ce chapitre, ce sujet faisant l'objet d'un cours ultérieur.

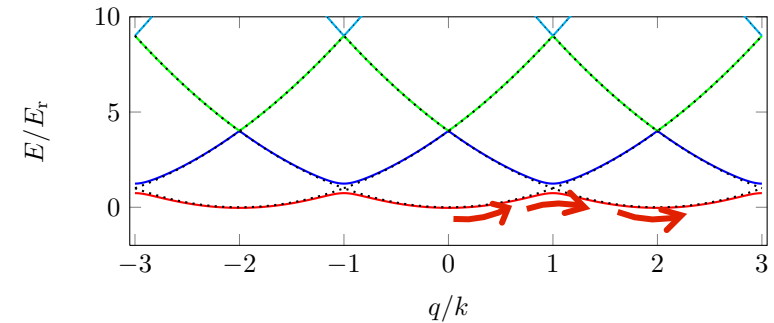


FIGURE 5.2. Le défilement du quasi-moment dans le schéma de bande étendue. Le régime des oscillations de Bloch correspond à la situation où la particule suit adiabatiquement le niveau d'énergie initial (ici la courbe rouge) et ne bascule pas vers un autre niveau d'énergie (ici la courbe bleue). La zone « dangereuse » est située aux points où q/k est un entier impair, là où les bandes rouge et bleue sont les plus proches. Cette figure est tracée pour $V_0 = E_r$.

Cette évolution périodique de l'état de la particule soumise à une force uniforme (en plus du potentiel $V(x)$) est un phénomène remarquable, qui trouve son origine dans la structure en bandes d'énergies du spectre de l'hamiltonien non perturbé. L'appellation *Oscillations de Bloch* pour ce phénomène est assez paradoxale. En effet, ce effet n'est pas décrit dans le papier séminal de Bloch (1929) sur la physique quantique des électrons dans les cristaux. Sa première apparition publique semble dater de l'article de Zener (1934). Un autre paradoxe est que l'oscillation n'est pas ce qui intéressait Zener. Il recherchait l'effet qu'un champ électrique pouvait avoir sur un isolant et c'était donc les transition interbandes que nous allons voir un peu plus tard dans ce cours qui motivaient son étude : le but était de trouver une force F assez grande pour que le suivi adiabatique n'ait pas lieu, l'oscillation elle-même étant probablement considérée comme « triviale » par Zener...

Il est d'ailleurs intéressant de jeter un œil sur la première figure de l'article de Zener de 1934, avec laquelle il interprète le phénomène d'oscillation (voir Figure 5.3). Il y fait une « approximation locale » des bandes d'énergie, en traçant ces bandes en fonction de la position après leur avoir ajouté l'énergie potentielle $-Fx$. Les bandes interdites sont représentées

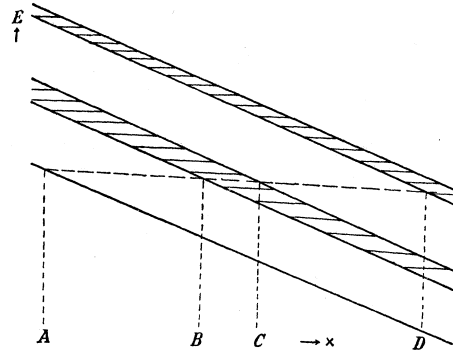


FIG. 1.—“Potential barrier” diagram. The shaded regions represent zones of forbidden energy in the presence of an electric field.

FIGURE 5.3. Figure tirée de l'article original de Zener (1934), représentant des bandes d'énergies « tiltées » sous l'effet du potentiel $-Fx$.

par les zones hachurées. Le trait horizontal représente une énergie possible pour un électron. Cet électron part du point A , est accéléré par la force F jusqu'à arriver au point B , et il peut alors (i) faire demi-tour et c' est le phénomène d'oscillation ou (ii) passer par effet tunnel au point C , bas de la bande d'énergie suivante, et contribuer ainsi à la conduction électrique. On déduit de cette image l'amplitude des oscillations dans l'espace réel, $x_B - x_A = \Delta E/F$, où ΔE est la largeur de la bande permise initialement occupée.

Ce résultat concernant l'amplitude des oscillations dans l'espace réel peut se retrouver en considérant un paquet d'ondes de centre $\bar{q}(t)$ dans l'espace des moments, et dont la dispersion en q reste à chaque instant petite devant k . Dans l'espace réel, notons $\bar{x}(t)$ le centre de ce paquet d'ondes ; la vitesse moyenne de déplacement du paquet d'ondes est donnée par la vitesse de groupe

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = v_g(t) = \frac{1}{\hbar} \left. \frac{dE_{n,q}}{dq} \right|_{q=\bar{q}(t)}, \quad (5.15)$$

qui évolue périodiquement dans le temps. Cette équation d'évolution s'in-

tègre pour donner

$$\bar{x}(t) - \bar{x}(0) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t \frac{dE_{n,q}}{dq} dt = \frac{1}{F} \int_{q_{in}}^{q(t)} \frac{dE_{n,q}}{dq} dq, \quad (5.16)$$

où on a utilisé la relation $q = Ft/\hbar$. On arrive finalement à

$$\bar{x}(t) - \bar{x}(0) = \frac{1}{F} (E_{n,\bar{q}(t)} - E_{n,q_{in}}), \quad (5.17)$$

qui correspond à la relation pressentie à partir de la figure 5.3.

Il existe plusieurs manières de représenter le phénomène d'oscillations de Bloch. Nous avons jusqu'ici privilégié celle tirant parti de la structure de bande du diagramme d'énergie (en absence de force). Un autre point de vue très utile, directement inspiré par l'optique quantique, est représenté sur la figure 5.4ab. Ce point de vue, valable pour les faibles profondeurs de réseau, consiste à traiter perturbativement l'effet du réseau sous forme de transitions multi-photoniques pouvant se produire quand une condition de résonance est satisfaite. On trace d'abord la relation de dispersion $E = p^2/2m$ en absence de réseau ; la présence de la force F va forcer l'atome à parcourir l'espace des impulsions selon la loi $\dot{p} = F$. Quand un atome, parti par exemple de $p = 0$ arrive en $p = \hbar k$, une transition à deux photons résonnante peut le faire basculer vers $p = -\hbar k$ (5.4a). Cette bascule peut aussi être vue comme une réflexion de Bragg totale de l'onde atomique de longueur d'onde $2\pi/k$ sur le réseau de pas π/k . L'accélération reprend à partir de ce point $p = -\hbar k$ et on assiste alors à l'oscillation périodique, de fréquence $F/(2\hbar k) = \omega_B/2\pi$, prévue plus haut. Cette image se généralise sans difficulté aux oscillations de Bloch dans les bandes supérieures. La figure 5.4b représente par exemple l'oscillation de Bloch dans la première zone excitée, $n = 1$, en terme de deux transitions multi-photoniques, l'une à deux photons, et l'autre à quatre photons.

Le dernier point de vue sur ces oscillations de Bloch que nous mentionnerons ici est basé sur le développement en ondes planes des fonctions de Bloch, qui s'exprime en fonction de la transformée de Fourier des fonctions de Wannier (cf. cours 3) :

$$\psi_{n,q}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{w}_n(q + 2\pi j/a) e^{ix(q+2\pi j/a)}. \quad (5.18)$$

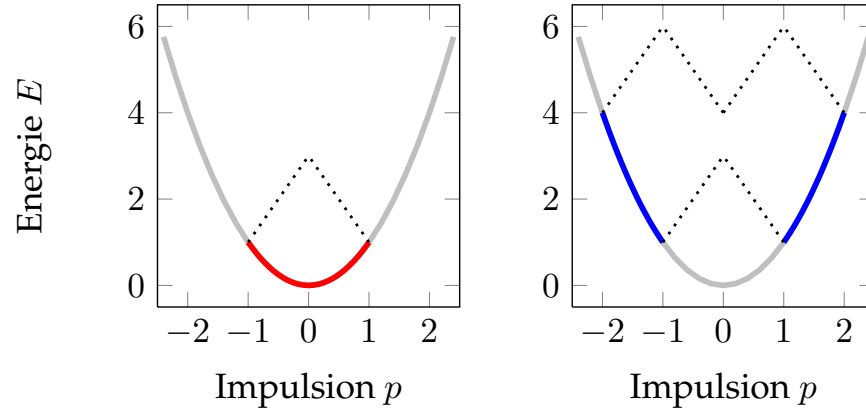


FIGURE 5.4. Représentation des oscillations de Bloch dans la bande fondamentale ($n = 0$) à gauche et dans la première bande excitée ($n = 1$) à droite, en termes de transitions multi-photoniques. Sous l'effet de la force constante F , l'impulsion augmente linéairement avec le temps ($\dot{p} = F$). Quand l'impulsion de l'atome est telle qu'une transition multi-photonique résonante, représentée par les lignes pointillées noires, peut se produire ($p/\hbar k$ entier non nul), une réflexion de Bragg se produit et l'impulsion de l'atome bascule de p à $-p$. La fréquence de l'oscillation, indépendante de la bande, est $F/(2\hbar k) = \omega_B/2\pi$.

Lors de l'oscillation, ce peigne d'impulsions défile à vitesse constante et l'amplitude des différentes composantes suit l'enveloppe donnée par la fonction $\tilde{w}_n(\kappa)$, transformée de Fourier de la fonction de Wannier $w_{n,0}(x)$.

2 Observations expérimentales

2-1 Premières expériences avec des atomes froids

En optique quantique, les premières oscillations de Bloch ont été observées dans les groupes de Christophe Salomon à Paris et Mark Raizen à Austin (Wilkinson et al. 1996; Niu et al. 1996; Ben Dahan et al. 1996; Peik et al. 1997; Raizen et al. 1997). Ces observations faisaient suite à une mise en évidence dans des échantillons solides, en particulier dans des super-

réseaux (Mendez & Bastard 1993). Aussi bien à Paris qu'à Austin, la force F était une force d'inertie, $F = -m\ddot{x}_0$, obtenue grâce à un réseau accéléré

$$V(x, t) = V_0 \sin^2 [k(x - x_0(t))] \quad (5.19)$$

avec $x_0(t) = \gamma t^2/2$. Rappelons qu'une telle accélération est réalisée en faisant varier dans le temps les phases ϕ_1 et ϕ_2 des deux ondes progressives $e^{i(kx - \omega t - \phi_1)}$ et $e^{-i(kx + \omega t + \phi_2)}$ composant le réseau. Cette accélération a peut par exemple être obtenue en choisissant

$$\phi_1(t) = k\gamma t^2/2, \quad \phi_2(t) = -k\gamma t^2/2, \quad (5.20)$$

ce qui correspond aux « fréquences instantanées »

$$\omega_1 = \omega + \frac{d\phi_1}{dt} = \omega + k\gamma t, \quad \omega_2 = \omega + \frac{d\phi_2}{dt} = \omega - k\gamma t. \quad (5.21)$$

L'expérience de Paris était menée avec des atomes de césium ($m = 133$) alors que l'expérience d'Austin utilisait des atomes de sodium ($m = 23$). Ce facteur significatif sur les masses, associé à un facteur également significatif sur les longueurs d'onde des réseaux utilisés, entraîne des différences qualitatives importantes sur les accélérations compatibles avec un suivi adiabatique (voir par exemple le tableau 5.1). En pratique, l'accélération typique des expériences de Paris se situait entre 1 et quelques dizaines de ms^{-2} , alors que celles utilisées à Austin allaient jusqu'à plusieurs milliers de ms^{-2} . Dans les deux cas, la profondeur du réseau V_0 mesurée en unité de E_r était de l'ordre de quelques unités.

On a représenté sur la figure 5.5 quelques résultats illustrant ces oscillations mesurées dans le référentiel du réseau (données extraites de Ben Dahan et al. (1996); Peik et al. (1997)). On voit dans la colonne de gauche l'évolution périodique de la distribution en impulsion. Dans la colonne de droite, on a représenté l'évolution de la vitesse moyenne du paquet d'ondes, en bon accord avec la loi (5.15). On notera en particulier la déformation de cette courbe quand on va des petits V_0/E_r (liaisons faibles, en haut) vers les grands V_0/E_r (liaisons fortes, en bas) :

- Dans le cas des liaisons faibles, on a $E_{0,q} \approx \hbar^2 q^2/2m$ sauf en bord de zone, et la vitesse de groupe est donc presque partout égale à $\hbar q/m$, c'est-à-dire une fonction linéaire du temps puisque $q(t) = q_0 + Ft/\hbar$. La réflexion de Bragg en bord de zone correspond à une variation rapide de v , d'où cette évolution en dents de scie.

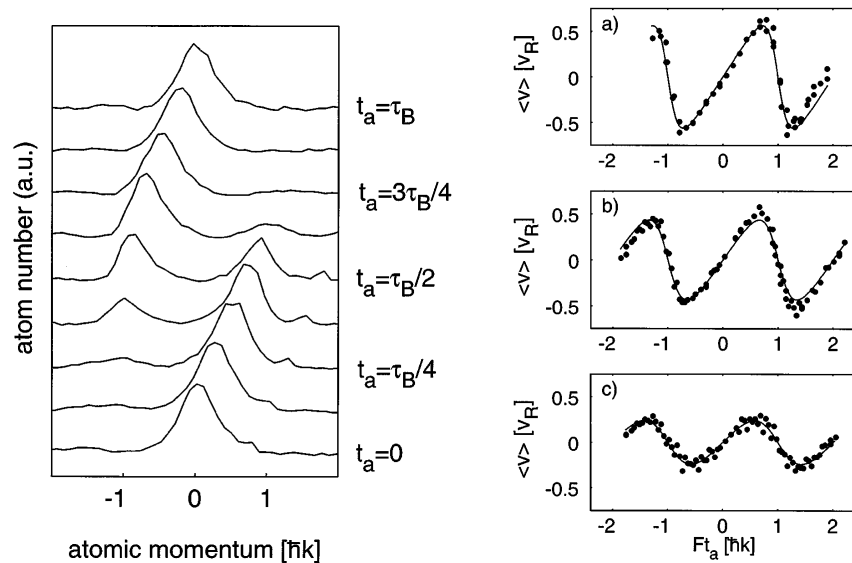


FIGURE 5.5. Oscillations de Bloch observées dans le groupe de C. Salomon en 1996-97 dans un réseau optique accéléré (Ben Dahan et al. 1996; Peik et al. 1997). Les vitesses atomiques sont mesurées dans le référentiel dans lequel le réseau optique est immobile. Les atomes sont préparés initialement dans la bande fondamentale $n = 0$. Gauche : évolution de la distribution en vitesse pour $V_0 = 2.3 E_r$ et $\gamma = 0.85 \text{ ms}^{-2}$. Droite : évolution de la vitesse moyenne du paquet d'ondes pour différentes profondeurs de réseau : $V_0/E_r = 1.4, 2.3, 4.4$.

- Dans la limite des liaisons fortes, on a vu au cours 3 que la bande fondamentale est sinusoïdale, $E_{0,q} \approx -2J \cos(aq)$, et la vitesse varie donc sinusoïdalement avec le temps : $v(t) \propto \sin[aq(t)]$.

Les distributions de la figure 5.5 représentent des mesures des vitesses dans le référentiel accéléré du réseau. Il est également intéressant de représenter ces vitesses dans le référentiel du laboratoire, ce qui est fait sur la figure 5.6. On y voit que pour ces paramètres qui correspondent à une limite de liaisons faibles, les atomes gardent une vitesse constante la plupart du temps, mais subissent périodiquement une accélération forte qui augmente leur vitesse de $2\hbar k/m$. Cette dynamique s'interprète simplement en terme de transitions à deux photons (cf. figure 5.7). Ces transitions sont

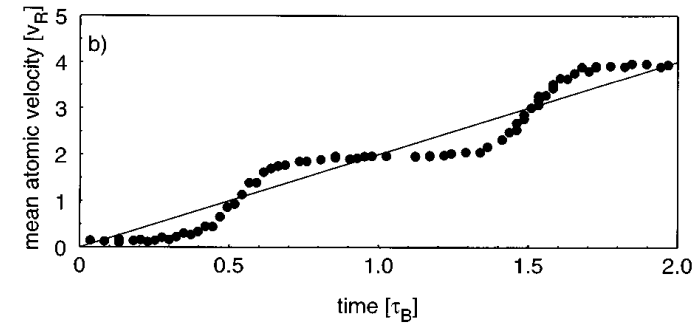


FIGURE 5.6. Évolution de la vitesse moyenne des atomes dans le référentiel du laboratoire pour les paramètres de la figure 5.5 (gauche). Figure extraite de Peik et al. (1997).

successivement résonnantes aux instants t_j tels que les fréquences instantanées des ondes lasers composant le réseau vérifient

$$\hbar[\omega_1(t_j) - \omega_2(t_j)] = [(2j+2)^2 - (2j)^2]E_r = (8j+4)E_r, \quad (5.22)$$

pour la transition $p = 2j\hbar k \rightarrow p = (2j+2)\hbar k$ (j est un entier quelconque). En prenant l'expression (5.21) de $\omega_{1,2}(t)$, on constate bien que ces accélérations se produisent pour

$$t_j = \left(j + \frac{1}{2}\right) \tau_B. \quad (5.23)$$

Ce dispositif de réseau accéléré constitue donc un moyen efficace pour communiquer une impulsion déterminée à des atomes, cette impulsion pouvant en pratique atteindre plusieurs centaines de $\hbar k$.

2-2 Remarque : bilan d'impulsion dans un réseau accéléré

Quand on considère l'image des transitions multi-photoniques de la figure 5.7, il est clair que le gain d'impulsion de l'atome au cours de l'accélération d'un réseau est un multiple de $2\hbar k$. Ce même résultat est un peu moins évident quand on raisonne dans le référentiel accéléré; nous nous proposons de le montrer explicitement dans les lignes qui suivent (voir aussi Browaeys et al. (2005)).

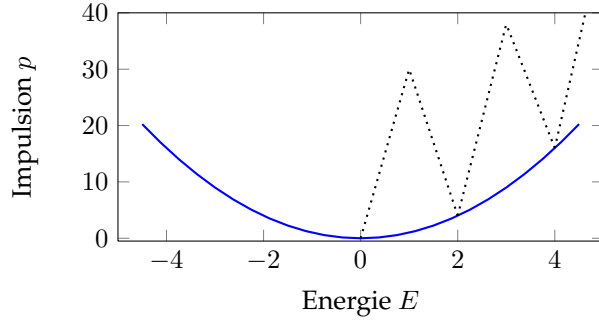


FIGURE 5.7. Principe de l'accélération des atomes en termes de transitions multi-photoniques successivement résonantes.

Partons d'un atome d'impulsion p_{in} bien déterminée. Prenons $|p_{\text{in}}| < \hbar k$, de sorte que cette impulsion soit dans la première zone de Brillouin². Branchons d'abord adiabatiquement le réseau immobile. L'état de l'atome suit la fonction de Bloch $\psi_{n=0, q_{\text{in}}}$ avec $q_{\text{in}} = p_{\text{in}}/\hbar$. Une fois que le réseau a atteint sa pleine puissance, mettons-le en mouvement avec une accélération $\ddot{x}_0(t)$. Dans le référentiel du réseau, la force d'inertie $F(t) = -m\ddot{x}_0(t)$ crée le défilement de la quasi-impulsion

$$q(t) = q_{\text{in}} + \frac{1}{\hbar} \int_0^t F(t') dt' = q_{\text{in}} - \frac{m}{\hbar} \dot{x}_0(t), \quad (5.24)$$

l'atome restant dans la bande fondamentale $n = 0$.

Arrêtons alors l'accélération du réseau à l'instant T , puis diminuons sa profondeur adiabatiquement jusqu'à l'éteindre complètement. Dans le référentiel du réseau, cette méthode de déploiement de bande (*band mapping*) va amener l'atome dans un état d'impulsion bien déterminée $p_{\text{fin}}^{(\text{réseau})}$, associée à la bande fondamentale, donc comprise entre $-\hbar k$ et $\hbar k$. Plus précisément $p_{\text{fin}}^{(\text{réseau})}$ est égale à $\hbar q(T)$, modulo un vecteur du réseau réciproque :

$$p_{\text{fin}}^{(\text{réseau})} = \hbar q(T) + 2N\hbar k \quad (5.25)$$

où N est l'entier le plus proche de $-q(T)/(2k)$.

2. Le raisonnement qui suit est valable même si la distribution d'impulsion n'est pas un pic delta, l'important étant qu'elle soit entièrement dans la zone de Brillouin.

Si on revient dans le référentiel du laboratoire à cet instant, l'impulsion de l'atome est

$$\begin{aligned} p_{\text{fin}}^{(\text{labo})} &= p_{\text{fin}}^{(\text{réseau})} + mv^{(\text{réseau})}(T) \\ &= p_{\text{fin}}^{(\text{réseau})} + m\dot{x}_0(T) \\ &= \hbar q(T) + 2N\hbar k + m\dot{x}_0(T) \\ &= p_{\text{in}} + 2N\hbar k, \end{aligned} \quad (5.26)$$

ce qui correspond bien au résultat recherché. Le seul cas où cette démonstration n'est pas valable est quand $p_{\text{fin}}^{(\text{réseau})}$ est au voisinage immédiat du bord de bande, c'est-à-dire $q(T) = k$ modulo $2k$, car le débranchement adiabatique du réseau n'est alors pas possible : l'atome se retrouve dans une superposition linéaire de $q_{\text{in}} + 2N\hbar k$ et $q_{\text{in}} + (2N + 2)\hbar k$; ce cas correspond à une interruption de l'accélération au moment précis où une transition à deux photons de la figure 5.7 est en train de se produire.

2-3 Oscillations dues à la gravité

Une des difficultés principales pour observer les oscillations de Bloch réside dans la nécessité de préparer une assemblée d'atomes avec une dispersion en impulsion initiale petite devant $\hbar k$. Cette difficulté est presque automatiquement levée si l'on dispose de condensats de Bose-Einstein ou de gaz de Fermi dégénérés. Nous ne pouvons pas décrire, ni même citer toutes les expériences d'oscillations de Bloch qui ont suivi l'arrivée de ces gaz dégénérés dans les laboratoires. Mentionnons simplement une classe d'expériences sensiblement différentes de celles de Paris et d'Austin, dans

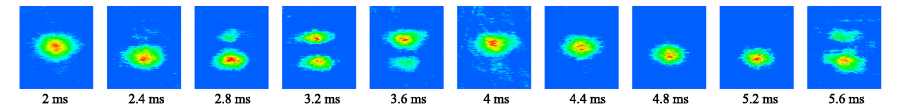


FIGURE 5.8. Oscillations de Bloch d'atomes de ^{40}K (fermions) sous l'effet de la gravité, observées avec un potentiel $V_0 = 2 E_r$, $\lambda = 873 \text{ nm}$ [figure extraite de Roati et al. (2004)]. L'absence d'interaction entre les fermions polarisés permet d'observer ces oscillations avec un bon contraste pendant une longue durée (plus de $100 \tau_B$).

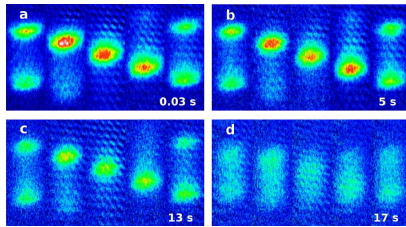


FIGURE 5.9. Oscillations de Bloch d'atomes de ^{88}Sr (bosons) sous l'effet de la gravité dans un réseau de période $a = 266 \text{ nm}$ et de profondeur $V_0 \approx 3 E_r$ [figure extraite de Poli et al. (2011)]. La période de Bloch est $\omega_B/2\pi = 574 \text{ Hz}$ et les oscillations de Bloch peuvent être observées pendant près de 20 secondes. Les images correspondent à l'oscillation $n^\circ 1, 2900, 7500$ et 9800 . La valeur extrêmement basse de la longueur de diffusion pour les atomes de ^{88}Sr permet de minimiser le déphasage des oscillations dû aux interactions. On peut déduire de ces oscillations la valeur de g à 6×10^{-6} près. La précision de cette mesure de g est notablement améliorée si on utilise plutôt – sur le même montage expérimental – la spectroscopie des états de Wannier–Stark (voir § 5).

lesquelles la force F n'est pas une force d'inertie, mais existe dans le référentiel du laboratoire. Le plus simple est de choisir la gravité, en disposant le réseau optique selon l'axe vertical. On a reproduit sur les figures 5.8 et 5.9 des résultats obtenus dans les groupes de M. Inguscio (Roati et al. 2004) et G. Tino (Poli et al. 2011) où l'on voit des atomes « suspendus » dans un réseau optique. La mesure de la fréquence d'oscillation donne en principe directement accès à la valeur de la gravité au point où se trouvent les atomes. En fait, pour optimiser la détermination de g avec des atomes confinés dans un réseau, il semble préférable d'utiliser la spectroscopie des états de Wannier–Stark, que nous verrons un peu plus loin (Poli et al. 2011; Pelle et al. 2013). Poli et al. (2011) indiquent en effet des fluctuations nettement plus importantes quand on observe directement les oscillations de Bloch, dues à l'instabilité résiduelle de la position initiale des atomes et à une plus grande sensibilité au « timing » de l'expérience.

	Li	Na	K	Rb	Cs
masse (uma)	7	23	39	87	133
λ_0 (nm)	671	589	770	780	852
$E_r/(2\pi\hbar)$ (kHz)	63.0	25.9	8.59	3.75	2.06
$\omega_B/2\pi$ (kHz)	0.058	0.17	0.37	0.84	1.4
$\hbar\omega_B/E_r$	0.0009	0.0067	0.043	0.22	0.68
F_c/m pour $V_0 = E_r$ (ms^{-2})	3300	450	70	13.5	4.4

TABLE 5.1. Energie de recul et fréquence des oscillations de Bloch pour les atomes alcalins soumis à la gravité ($F/m = 9.81 \text{ ms}^{-2}$). Le réseau optique est supposé être à la fréquence de résonance de l'atome $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$ et son pas est $a = \lambda_0/2$. Le rapport $\hbar\omega_B/E_r$ est déterminant pour évaluer l'adiabaticité du mouvement dans la bande $n = 0$ (cf figure 5.10). La dernière ligne donne l'accélération critique apparaissant dans la formule de Landau–Zener (5.38), pour une profondeur de réseau choisie égale à l'énergie de recul.

3 L'approximation adiabatique et au delà

3-1 Validité de l'approximation adiabatique

Nous allons maintenant discuter la validité de l'approximation adiabatique à la base du phénomène d'oscillation. Nous avons déjà donné dans un cours précédent le critère général caractérisant cette approximation (Messiah 2003). Rappelons-le ici pour mémoire. On considère un hamiltonien $\hat{H}(\lambda)$ dépendant d'un paramètre λ , pour lequel on a su résoudre le problème aux valeurs propres. On suppose pour simplifier que les énergies $\epsilon_n(\lambda)$ sont non-dégénérées et forment un ensemble discret. Les vecteurs propres associés sont notés $|\phi_n(\lambda)\rangle$. On s'intéresse à un problème où le paramètre λ dépend du temps. On suppose que le système est préparé à l'instant $t = 0$ dans un état propre $|\phi_n[\lambda(0)]\rangle$ et on cherche à quelle condition le système sera à l'instant t dans l'état $|\phi_n[\lambda(t)]\rangle$ avec probabilité voisine de 1. On peut montrer que ceci sera le cas si l'inégalité

$$\hbar \left| \langle \phi_{n'} | \frac{d}{dt} | \phi_n \rangle \right| \ll |E_{n'} - E_n|, \quad \forall n' \neq n, \quad (5.27)$$

est satisfaite à chaque instant (le paramètre $\lambda(t)$ est sous-entendu).

Dans le cas qui nous intéresse ici, le quasi-moment q joue le rôle du paramètre λ et le nombre quantique n est l'indice de bande. L'hamiltonien est $\hat{H}_{\text{per.}}[q]$ donné en (5.12), qui détermine la partie périodique des fonctions de Bloch, et les états $|\phi_n(\lambda)\rangle$ sont les parties périodiques $|u_{n,q}\rangle$. En utilisant le fait que $\dot{q} = F/\hbar$, le critère d'adiabaticité est donc

$$F |\langle u_{n',q} | \partial_q u_{n,q} \rangle| \ll |E_{n'}(q) - E_n(q)|, \quad (5.28)$$

où on a noté

$$|\partial_q u_{n,q}\rangle \equiv \frac{d}{dq} |u_{n,q}\rangle. \quad (5.29)$$

Le produit scalaire $\langle u_{n',q} | \partial_q u_{n,q} \rangle$ peut être réécrit sous une forme commode, faisant intervenir l'élément de matrice de l'opérateur impulsion \hat{p} . On établit cette relation en dérivant par rapport à q l'équation aux valeurs propres pour l'hamiltonien $\hat{H}_{\text{per.}}$, et en projetant l'équation obtenue sur $|u_{n',q}\rangle$ (Ashcroft & Mermin 1976). On trouve

$$[E_n(q) - E_{n'}(q)] \langle u_{n',q} | \partial_q u_{n,q} \rangle = \frac{\hbar}{m} \langle u_{n',q} | \hat{p} | u_{n,q} \rangle, \quad (5.30)$$

ce qui permet de réécrire la condition d'adiabaticité sous la forme

$$\frac{F\hbar}{m} |\langle u_{n',q} | \hat{p} | u_{n,q} \rangle| \ll [E_n(q) - E_{n'}(q)]^2. \quad (5.31)$$

Plaçons-nous dans le régime des liaisons faibles et appliquons ce résultat au point le plus critique pour le suivi adiabatique, $q \approx k$, là où la bande fondamentale $n = 0$ est la plus proche de la première bande excitée $n' = 1$. L'écart entre les niveaux vaut $V_0/2$ et les fonctions $u_{n,q}(x)$ sont égales à $1 \pm e^{\pm 2ikx}$ (cf. cours 2). L'élément de matrice de \hat{p} est donc $\sim \hbar k$ et la condition (5.31) devient

$$\frac{F\hbar}{m} \hbar k \ll \frac{V_0^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad F \ll \frac{V_0^2}{8E_r} k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\hbar\omega_B}{E_r} \ll \frac{\pi}{8} \left(\frac{V_0}{E_r} \right)^2. \quad (5.32)$$

On trouvera dans la thèse de M.Dahan (1997) une condition d'adiabaticité (relativement peu contraignante) pour le régime des liaisons fortes déduite de (5.31). Nous en donnons ici une autre qui consiste à imposer que le décalage en énergie $aF = \hbar\omega_B$ entre deux puits successifs (cf. fig. 5.1) reste inférieur à la différence d'énergie $\hbar\omega \approx 2\sqrt{V_0 E_r}$ entre les deux

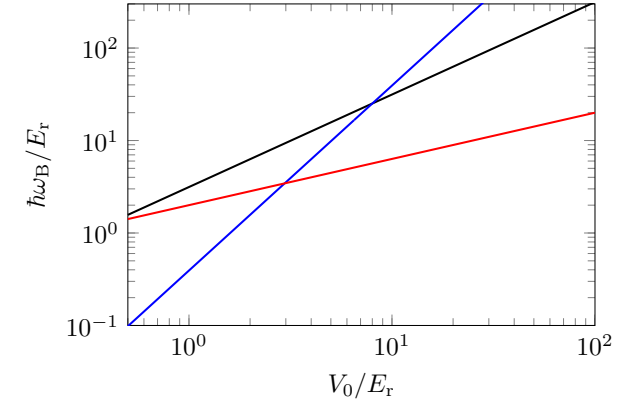


FIGURE 5.10. Zones de validité de l'approximation adiabatique (il faut se situer sous les droites correspondantes pour que l'approximation soit valable). Bleu : cas des liaisons faibles (5.32); rouge : cas des liaisons fortes (5.33). La droite noire donne la limite (5.34) pour la force F , au dessus de laquelle le potentiel $V(x) - Fx$ n'a plus de minimum local.

bandes les plus basses. Ceci permet d'éviter un effet tunnel résonnant de l'état de vibration $n = 0$ du puits situé en ja vers l'état de vibration $n = 1$ du puits situé en $(j + 1)a$. Cette condition s'écrit dans la limite $V_0 \gg E_r$:

$$\frac{\hbar\omega_B}{E_r} < 2 \left(\frac{V_0}{E_r} \right)^{1/2}. \quad (5.33)$$

Nous avons tracé en figure 5.10 les différentes zones d'intérêt dans le plan $(V_0, \hbar\omega_B)$. Nous avons ajouté la zone délimitée par la condition

$$F < kV_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\hbar\omega_B}{E_r} < \pi \frac{V_0}{E_r}, \quad (5.34)$$

qui correspond à imposer que le potentiel tilté de la figure 5.1 possède des minima locaux. Les conditions d'adiabaticité données en (5.32-5.33) se situent bien à l'intérieur de ce domaine.

3-2 Transitions de Landau–Zener

On peut évaluer plus quantitativement la validité de l'approximation adiabatique dans le cas des liaisons faibles, en modélisant le croisement évité entre les deux bandes les plus basses par une approche de type Landau–Zener.

Rappelons d'abord les résultats principaux de cette approche. On considère un système à deux niveaux modélisé par un spin 1/2 et on suppose que ce spin évolue sous l'effet de l'hamiltonien dépendant explicitement du temps

$$\hat{H}(t) = \alpha t \hat{\sigma}_z + \beta \hat{\sigma}_x, \quad (5.35)$$

où les $\hat{\sigma}_i$ sont les matrices de Pauli. Les valeurs propres instantanées sont $\pm (\alpha^2 t^2 + \beta^2)^{1/2}$. Considérons un spin préparé dans l'état $|+\rangle$ à un instant t_i négatif tel que $|t_i| \gg \beta/\alpha$. À un instant t_f positif et $\gg \beta/\alpha$, le spin aura suivi adiabatiquement le niveau d'énergie correspondant avec une probabilité

$$\mathcal{P} = 1 - e^{-\pi\beta^2/(\hbar\alpha)}. \quad (5.36)$$

Dans le cas qui nous intéresse, les niveaux d'énergie qui se croisent sont $E = \hbar^2 q^2/2m$ et $E = \hbar^2(q - 2k)^2/2m$ au point $q = k$. Comme $\dot{q} = F/\hbar$, le coefficient α vaut $\alpha = \hbar k F/m$. Le coefficient β , qui caractérise le couplage entre les deux niveaux, vaut $\beta = V_0/4$. La probabilité de suivi adiabatique peut donc s'écrire

$$\mathcal{P} = 1 - e^{-F_c/F}, \quad (5.37)$$

où on a introduit la force critique

$$F_c = \frac{\pi}{32} \frac{V_0^2}{E_r} k. \quad (5.38)$$

La condition de suivi adiabatique, $\mathcal{P} \approx 1$ et donc $F \ll F_c$, redonne bien le résultat trouvé en (5.32).

La vérification de cette loi pour un atome dans un réseau optique a été faite dès les premières expériences de Paris et d'Austin dans les années 1996-97. Nous montrons sur la figure 5.11 un résultat plus récent obtenu à Pise (Zenesini et al. 2009) où l'on voit les décroissances successives de l'occupation de la bande $n = 0$ à chaque fois que le moment de l'atome passe au bord de la zone de Brillouin.

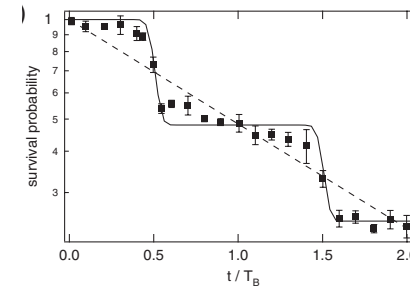


FIGURE 5.11. Résultat tiré de Zenesini et al. (2009), montrant la décroissance de la probabilité d'occupation de la bande $n = 0$ dans une expérience d'oscillations de Bloch menée avec des atomes de rubidium. Le réseau a une profondeur $V_0 = E_r$. Le réseau, de pas $a = 421$ nm, est accéléré uniformément de manière à produire une force d'inertie telle que $\hbar\omega_B \approx 0.4E_r$. La courbe en trait continu correspond à l'intégration numérique de l'équation de Schrödinger dépendant du temps, ce qui redonne essentiellement la prédiction de Landau–Zener. La courbe tiretée correspond à une approximation exponentielle.

Comme nous l'avons écrit plus haut, cette question des transitions interbandes était centrale dans le papier original de Zener de 1934. Après avoir dérivé la probabilité de transition à chaque passage en bord de zone de Brillouin, Zener termine son analyse par une raisonement similaire à celui de Gamow pour déterminer la durée de vie d'un noyau dans un processus de radioactivité α . L'atome (ou l'électron pour Zener) "tente sa chance" $\omega_B/2\pi$ fois par unité de temps, et il a à chaque fois la probabilité \mathcal{P} de rester dans la bande $n = 0$. Si on multiplie ces probabilités pour les $j = t/\tau_B$ essais qui ont lieu pendant une durée t , on en déduit la probabilité $\Pi(t)$ pour la particule d'être encore dans la bande $n = 0$ à l'instant t

$$\Pi(t) \approx \mathcal{P}^j = \exp \left[j \ln \left(1 - e^{-F_c/F} \right) \right] \approx \exp(-t/\tau) \quad (5.39)$$

où le temps de décroissance τ est donné par

$$\tau = \tau_B e^{F_c/F}. \quad (5.40)$$

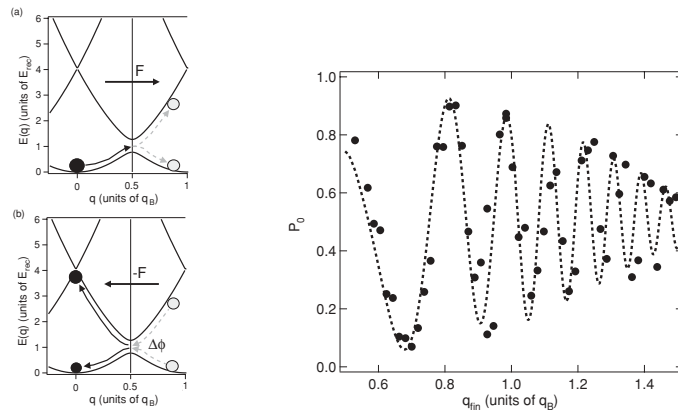


FIGURE 5.12. Observation d'oscillations de Stückelberg, avec un réseau optique pour atomes de rubidium, $V_0 = 1.4 E_r$ and $\hbar\omega_B = 1.2 E_r$ ($a = 421 \text{ nm}$). Les atomes sont placés dans la bande fondamentale $n = 0$ à $q = 0$. Ils sont accélérés pour franchir le bord de la première zone de Brillouin et atteindre un moment q_{fin} tel que $0.5 < q_{\text{fin}}/k < 1.5$. La force est alors inversée pour ramener les atomes à $q = 0$. On mesure finalement la population de la bande fondamentale. La ligne tiretée est une prédiction faite en supposant une largeur en impulsion initiale $\Delta q/k = 0.03$ (figures extraites de Zenesini et al. (2010)).

3-3 Au delà de Landau–Zener

Dans le traitement qui conduit à la loi exponentielle de taux (5.40), on additionne de manière incohérente les différentes amplitudes de probabilité correspondant aux transitions diabatiques successives quand l'atome passe sur un bord de zone de Brillouin. En réalité, ces transitions sont des processus cohérents et il est possible d'observer des déviations notables par rapport à la loi simple de Landau–Zener du fait des interférences entre ces processus. Une première analyse, théorique et expérimentale, de ces déviations a été faite à Austin à la fin des années 1990 (Wilkinson et al. 1997; Niu & Raizen 1998). Un traitement théorique détaillé est présenté par Holthaus (2000). Récemment, une expérience menée à Pise dans le groupe de E. Arimondo a mis en évidence de manière très convaincante les *interférences de Stückelberg* entre deux processus de Landau-Zener successifs (Zenesini et al. 2010). Le principe de l'expérience et son résultat sont représentés sur

la figure 5.12. Des résultats similaires ont été obtenus à Bonn dans le groupe de M. Weitz (Kling et al. 2010).

3-4 Un séparateur de faisceau

Grâce aux oscillations de Bloch, on a la possibilité de transférer de manière cohérente une impulsion contrôlée (et importante) à des atomes en les plaçant dans un réseau accéléré. Le fait que la probabilité de transférer ou non cette impulsion dépende de manière forte de la bande n occupée par les atomes permet de réaliser des séparateurs cohérents de faisceaux. Le principe, mis en œuvre par Denschlag et al. (2002), puis repris notamment par Cladé et al. (2009) et Müller et al. (2009) est simple :

- Partant d'atomes d'impulsion p_0 telle que $|p_0| < \hbar k$, on applique à ces atomes une impulsion de Bragg qui place chaque atome dans une superposition de p_0 et de $p_0 + 2\hbar k$, voire p_0 et de $p_0 + 4\hbar k$ dans le cas de Denschlag et al. (2002).
- On branche adiabatiquement un réseau optique jusqu'à une profondeur V_0 de sorte que les atomes soient placés dans une superposition cohérente de l'état $|n = 0, q_0\rangle$ et de l'état $|n = 2, q_0\rangle$, où $q = p_0/\hbar$. Notons qu'il vaut mieux choisir $p_0 \neq 0$ pour éviter d'être gêné par la quasi-dégénérescence des bandes $n = 1$ et $n = 2$ quand le réseau est encore de très faible intensité, qui empêche une bonne adiabaticité .
- On accélère le réseau optique. Le couple *accélération–profondeur* est choisi de manière (i) à avoir un excellent suivi adiabatique pour la bande $n = 0$, (ii) ne quasiment pas avoir de suivi adiabatique pour la bande $n = 2$. Grâce à ce choix, la composante $|n = 0, q\rangle$ est accélérée avec le réseau et acquiert une impulsion importante dans le référentiel du laboratoire. Au contraire, la composante $|n = 2, q\rangle$ subit des transitions diabatiques, l'atome est transféré vers les bandes supérieures $n = 2 \rightarrow n = 3 \rightarrow \dots$ dans le référentiel accéléré. Plus simplement, ceci revient à dire que pour cette partie du vecteur d'état, l'atome reste immobile dans le référentiel du laboratoire. On pourra vérifier sur la figure 5.13, extraite de l'article de Cladé et al. (2009), qu'il existe effectivement une plage appréciable de valeurs de V_0 pour lesquelles ces deux conditions « antagonistes » sont simultanément satisfaites.
- A l'issue de cette accélération de durée t , $N = t/\tau_B$ oscillations de

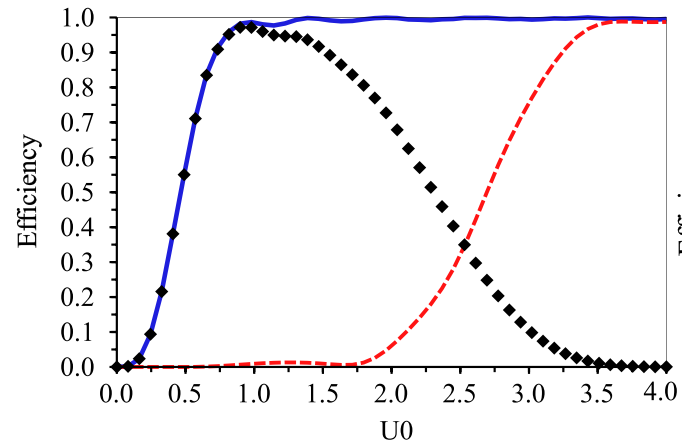


FIGURE 5.13. Probabilité \mathcal{P}_n de suivi adiabatique de la bande n pour des atomes de ^{87}Rb placés dans un réseau optique accéléré à $\sim 100 \text{ ms}^{-2}$, en fonction de la profondeur du réseau $U_0 = V_0/(8 E_r)$. La courbe bleue (resp. rouge) correspond à $n = 0$ (resp. $n = 2$). Le séparateur de faisceau sera efficace si $\mathcal{P}_0 \approx 1$ et $\mathcal{P}_2 \approx 0$. La courbe noire $\mathcal{P}_0(1 - \mathcal{P}_2)$ est une mesure de l'efficacité globale, qui est optimale pour $U_0 \approx 1$, donc $V_0 \approx 8 E_r$ (Figure extraite de Cladé et al. (2009)).

Bloch se sont produites et l'atome est vis-à-vis du référentiel du laboratoire dans l'état

$$|n = 0, p_0 + 2N\hbar k\rangle + e^{i\phi}|n = 2, p_0 + 2\hbar k\rangle. \quad (5.41)$$

On peut tester la cohérence de cette superposition en construisant un interféromètre de type Mach-Zender, où les deux bras subissent cette accélération à des instants différents (Denschlag et al. 2002).

Si on veut utiliser ce séparateur de faisceau à des fins d'interférométrie atomique et de mesures de précision, une difficulté importante provient des déplacements lumineux différentiels entre les deux bras. La partie de la fonction d'onde correspondant à un atome accéléré (dans la bande $n = 0$) n'a pas la même localisation spatiale dans le réseau que la partie de la fonction d'onde d'un atome non accéléré (dans la bande $n = 2$). Par exemple,

si le réseau est désaccordé sur le bleu de la résonance atomique, les atomes dans la bande $n = 0$ resteront localisés au voisinage des nœuds de l'onde stationnaire, alors que les atomes dans la bande $n = 2$ exploreront successivement les nœuds et les ventres de cette onde stationnaire. Le déplacement lumineux n'est donc pas le même dans les deux cas, ce qui conduit à un déphasage difficile à contrôler entre les deux bras. Il faut avoir recours à des schémas interférométriques plus compliqués pour rétablir une symétrie suffisante entre ces bras [Cladé et al. (2009), Müller et al. (2009)].

4 Oscillations de Bloch en liaisons fortes

Compte tenu de l'importance pratique du phénomène des oscillations de Bloch, il est utile de le voir sous plusieurs angles, en particulier dans le cas des liaisons fortes. Dans cette limite, on dispose en effet d'expressions analytiques simples pour les différentes grandeurs en jeu, utiles pour se forger une intuition du problème.

4-1 La fonction d'onde « oscillante »

Dans la limite des liaisons fortes, on restreint par hypothèse la dynamique de la particule à la bande fondamentale. On omettra donc dans cette section l'indice de bande $n = 0$. En ne prenant en compte que les sauts entre proches voisins, l'hamiltonien de départ (5.2) s'écrit :

$$\hat{H} = -J \left(\hat{T} + \hat{T}^\dagger \right) - Fa \sum_j j |w_j\rangle \langle w_j|, \quad (5.42)$$

où $|w_j\rangle$ représente l'état où la particule est localisée sur le site j et \hat{T} est l'opérateur translation d'un site vers la droite :

$$\hat{T} = \sum_j |w_{j+1}\rangle \langle w_j|. \quad (5.43)$$

Rappelons que les fonctions de Bloch $|\psi_q\rangle$, leur partie périodique $|u_q\rangle$ et l'énergie associée $E(q)$ s'écrivent

$$|\psi_q\rangle = \sum_j e^{ijaq} |w_j\rangle, \quad |u_q\rangle = \sum_j |w_j\rangle, \quad E(q) = -2J \cos(aq), \quad (5.44)$$

avec $|u_q\rangle$ indépendante de q dans ce cas particulier.

On peut d'ores et déjà introduire un nombre sans dimension qui sera utile pour caractériser l'influence de la force F sur la particule placée dans le réseau. Reprenons pour cela la figure initiale de Zener (Figure 5.3), qui fait apparaître une longueur caractéristique pour l'oscillation, $L = \Delta E/F$, où ΔE est la largeur de bande. Dans le cas des liaisons fortes, on a simplement $\Delta E = 4J$. Intéressons-nous au nombre de sites, noté ν , compris dans cette longueur L

$$\nu = \frac{4J}{Fa} = \frac{\Delta E}{\hbar\omega_B}. \quad (5.45)$$

On s'attend à ce que ce nombre sans dimension ν intervienne dans la caractérisation de l'amplitude des oscillations.

Partons d'une particule préparée dans la fonction de Bloch $|\psi_{q_{\text{in}}}\rangle$. Les résultats généraux obtenus au chapitre précédent s'écrivent dans cette limite

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\Phi(t)} \sum_j e^{ijaq(t)} |w_j\rangle, \quad (5.46)$$

où $q(t) = q_{\text{in}} + Ft/\hbar$ comme en (5.8) et où la phase Φ correspond à la phase dynamique :

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \frac{1}{\hbar} \int_0^t E[q(t')] dt' = \frac{\nu}{2} \{\sin[aq(t)] - \sin[aq_{\text{in}}]\}. \quad (5.47)$$

Il est bien clair que dans cette limite des liaisons fortes, on a négligé *de facto* toutes les transitions interbandes étudiées plus haut. L'hypothèse de suivi adiabatique est donc implicite dans toute cette section.

4-2 Opérateur d'évolution et oscillations dans l'espace réel

Dans l'approximation des liaisons fortes, l'écriture de l'opérateur d'évolution est remarquablement simple, aussi bien dans la base des fonctions de Bloch que dans la base des fonctions de Wannier. Les calculs sont détaillés dans l'article de Hartmann et al. (2004), et nous donnons ici simplement les résultats essentiels.

Dans la base des fonctions de Bloch, l'opérateur d'évolution se déduit immédiatement de (5.46) :

$$\langle \psi_{q'} | \hat{U}(t) | \psi_q \rangle = \delta(q' - q - Ft/\hbar) e^{-i\nu[\sin(aq') - \sin(aq)]/2}. \quad (5.48)$$

Dans la base des fonctions de Wannier, le calcul est un peu plus long mais ne présente pas de difficulté de principe. En reportant l'expression des fonctions de Wannier en fonction des ondes de Bloch, on arrive à

$$\langle w_{j'} | \hat{U}(t) | w_j \rangle = e^{i(j+j')\omega_B t/2} \mathcal{J}_{j'-j}[\nu \sin(\omega_B t/2)]. \quad (5.49)$$

La périodicité des oscillations de Bloch est manifeste sur chacune de ces deux expressions.

Nous pouvons profiter de l'expression explicite (5.49) pour étudier le mouvement dans l'espace réel d'un paquet d'ondes. Nous allons passer en revue les deux cas limites d'un paquet d'ondes initial très localisé ou au contraire s'étalant sur de nombreux sites.

Dans le cas d'un état initial n'occupant qu'un seul site, par exemple l'état $|w_0\rangle$, le mouvement correspond à une « respiration » du paquet d'ondes, se faisant symétriquement par rapport au point de départ. La probabilité $P(j)$ de trouver la particule sur le site $|w_j\rangle$ à l'instant t est obtenue directement à partir de (5.49) :

$$P(j) = |\mathcal{J}_j[\nu \sin(\omega_B t/2)]|^2 \quad (5.50)$$

L'extension du paquet d'ondes est maximale après une demi-oscillation ($\sin(\omega_B t/2) = \pm 1$) et elle est typiquement de l'ordre de $\Delta j \sim \nu$ sites.

Prenons maintenant le cas d'un paquet d'ondes initial de grande extension, et choisissons une distribution gaussienne pour l'amplitude de probabilité d'occupation du site $|w_j\rangle$:

$$\langle w_j | \Psi(0) \rangle \propto e^{-j^2/4\sigma^2}, \quad \sigma \gg 1. \quad (5.51)$$

On peut alors montrer que l'extension du paquet d'ondes reste à peu près constante dans le temps, et que son centre $j_c(t)$ évolue périodiquement

$$|\langle w_j | \Psi(t) \rangle|^2 \propto e^{-[j-j_c(t)]^2/2\sigma^2}, \quad j_c(t) = \nu \sin^2(\omega_B t/2). \quad (5.52)$$

L'amplitude totale (pic à pic) de l'oscillation est donc de ν sites, comme nous l'avions pressenti lors de la définition de ν , à partir de l'argument de Zener. Nous montrons sur la figure 5.14 deux résultats numériques obtenus par Hartmann et al. (2004) dans ces deux cas limites.

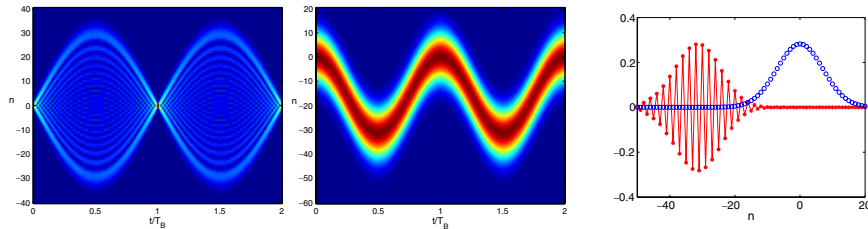


FIGURE 5.14. Oscillations de Bloch dans la limite des liaisons fortes. Gauche et milieu : évolution dans l'espace réel d'un paquet d'ondes pendant deux périodes de Bloch pour $\nu = -31.6$ (force négative). Pour la figure de gauche, l'état initial est la fonction de Wannier $j = 0$. Le mouvement est alors un mouvement de « respiration » symétrique par rapport à $j = 0$. Sur la figure centrale, l'état initial est un paquet gaussien de largeur $\sigma = 5$ et l'évolution ultérieure est essentiellement une oscillation du centre du paquet d'ondes, sans déformation notable. La figure de droite montre la partie réelle de $\langle w_n | \Psi(t) \rangle$, en $t = 0$ (point bleus) et en $t = \pi/\omega_B$ en rouge [figures extraites de Hartmann et al. (2004)].

5 Les échelles de Wannier–Stark

Dans la mesure où l'hamiltonien considéré dans ce chapitre est indépendant du temps, au moins dans la version (5.2) que nous redonnons ici :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) - F \hat{x}, \quad (5.53)$$

une approche naturelle au problème des oscillations de Bloch consiste à chercher les états propres de cet hamiltonien, pour en déduire ensuite les différents aspects de la dynamique (Wannier 1960). On note immédiatement que si $\psi(x)$ est état propre pour l'énergie E , alors $\psi(x + a)$ est état propre pour l'énergie $E + Fa = E + \hbar\omega_B$. A chaque état propre est donc associée une échelle d'énergie appelée *échelle de Wannier–Stark*, les barreaux de cette échelle étant espacés de $\hbar\omega_B$.

Cette recherche d'états propres comporte des aspects mathématiques non triviaux : (i) Le spectre de l'hamiltonien est *a priori* un continuum s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$, puisque pour toute énergie E , on peut trouver un état asymptotiquement libre pour $x \rightarrow \infty$. Les échelles de Wannier–Stark sont dans ce contexte des résonances, qui apparaissent comme pôles d'une

matrice de diffusion (Gluck et al. 2002). (ii) Cependant le fait de restreindre l'espace de recherche des états propres à une bande (ou un nombre fini de bandes) change radicalement la nature de ce spectre, qui devient complètement discret (Avron et al. 1977; Nenciu 1991).

C'est ce deuxième point de vue que nous allons adopter dans ce qui suit. En toute rigueur, les états de Wannier–Stark que nous allons trouver seront donc des états de durée de vie finie, cette durée de vie étant reliée à la largeur des résonances du problème exact. Cette durée de vie finie est elle-même la signature des transitions Landau-Zener, causant une fuite de l'oscillation de Bloch du fait des transitions vers des bandes supérieures. Mais on peut la négliger si les critères dégagés plus haut pour assurer la validité de l'approximation adiabatique sont vérifiés.

Limitons nous pour simplifier au modèle de liaisons fortes à une bande, avec l'hamiltonien donné en (5.42). Il est immédiat de vérifier³ que l'état

$$|\Phi_j\rangle = \sum_{j' \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_{j'-j}(\nu/2) |w_{j'}\rangle \quad (5.55)$$

est état propre de \hat{H} avec la valeur propre $-jFa$ (Gluck et al. 2002; Hartmann et al. 2004). Cet état $|\Psi_j\rangle$ est centré sur le site j et il s'étend de part et d'autre sur un nombre de sites $\sim \nu/2$. En effet, si $|n| \gg x$, la fonction de Bessel $\mathcal{J}_n(x)$ décroît comme $(x/2)^n/n!$. L'extension de l'état de Wannier–Stark détermine donc *grosso modo* le domaine de l'oscillation de Bloch. On voit bien sur cet exemple simple le caractère mathématique particulier de ce problème : une force F même infinitésimale change radicalement le spectre de l'hamiltonien : il passe d'un continuum borné entre $-2J$ et $2J$ à un ensemble entièrement discret, s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$.

La spectroscopie des états de Wannier–Stark est faite soumettant les atomes à une perturbation dépendant du temps à la pulsation ω : $\hat{W}(x, t) = \hat{W}^{(+)}(x) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$. Cette sonde induit une transition de $|\Phi_j\rangle$ vers $|\Phi_{j'}\rangle$, une résonance se produisant à chaque fois que $\omega = (j' - j)\omega_B$, pourvu évidemment que l'élément de matrice $\langle \Phi_{j'} | \hat{W}^{(\pm)}(x) | \Phi_j \rangle$ soit non nul. On obtient *a priori* un spectre symétrique, puisque les échelle de Wannier–Stark

3. Rappelons que les fonctions de Bessel vérifient la relation

$$x(\mathcal{J}_{n+1}(x) + \mathcal{J}_{n-1}(x)) = 2n\mathcal{J}_n(x). \quad (5.54)$$

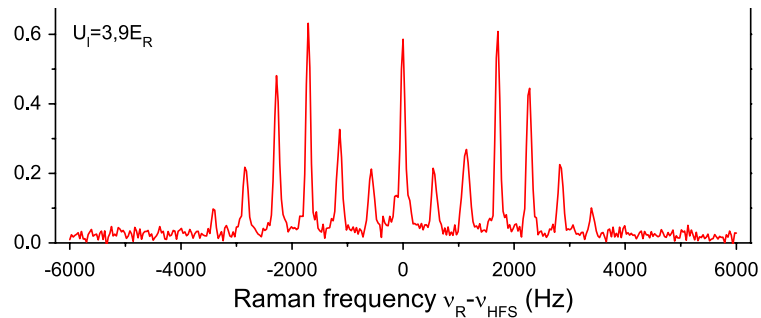


FIGURE 5.15. Spectroscopie Raman des états de Wannier–Stark d’atomes de rubidium dans un réseau optique en présence de gravité. On observe des transitions $|\Phi_j\rangle \rightarrow |\Phi_{j'}\rangle$ allant jusqu’à $|j' - j| = 6$ pour cette valeur de la profondeur du réseau. La fréquence des oscillations de Bloch est $\omega_B/(2\pi) = 569$ Hz pour la longueur d’onde de la lumière choisie pour le réseau (532 nm) [figure extraite de Beaufils et al. (2011)].

s’étendent aussi bien vers les énergies positives que négatives. On pourra consulter l’article de Mendez & Bastard (1993) pour trouver des exemples de spectroscopie des échelles de Wannier–Stark pour des électrons dans des super-réseaux.

Cette méthode spectroscopique est un autre moyen de regarder un même phénomène physique : les oscillations de Bloch comme celles de la figure 5.5 constituent la réponse percussionnelle du système placé hors d’équilibre, alors que cette spectroscopie de Wannier–Stark étudie la réponse du système à l’équilibre quand on le pilote par une sonde de faible amplitude. Lors des premières mises en évidence des oscillations de Bloch avec des atomes froids, le groupe de Christophe Salomon à l’ENS a privilégié la méthode percussionnelle alors que celui de Mark Raizen à Austin a plutôt mis en avant cette méthode spectroscopique (Niu et al. 1996; Wilkinson et al. 1996).

Nous avons reporté sur la figure 5.15 un résultat obtenu récemment dans l’équipe de Franck Pereira dos Santos (Beaufils et al. 2011) [voir aussi Tackmann et al. (2011), Pelle et al. (2013)]. Ce résultat est obtenu pour des atomes de rubidium 87 dans un réseau vertical, la force F étant donc la gravité. Le réseau est formé par une onde stationnaire à la longueur d’onde

de 532 nm, correspondant à une fréquence de Bloch $\omega_B/(2\pi) = 569$ Hz. La profondeur du réseau est d’environ $4 E_r$, ce qui correspond à une largeur de bande de $0.5 E_r \approx 4$ kHz. Le paramètre ν caractérisant le nombre de sites visités lors d’une oscillation ainsi que l’extension de chaque état de Wannier–Stark est $\nu \approx 7$. L’échelle de Wannier–Stark est mesurée en induisant une transition Raman entre deux états internes de l’atome de rubidium $|g_1, \Phi_j\rangle \rightarrow |g_2, \Phi_{j'}\rangle$, avec $|g_F\rangle = |F, m_F = 0\rangle$, séparés de l’écart hyperfin ≈ 6.8 GHz.

Récemment le groupe du Syrte a utilisé ce type de transitions pour construire un interféromètre de type Ramsey et obtenir une mesure précise de ω_B , donc de g . La précision relative obtenue est de 0.9×10^{-5} en une seconde (Pelle et al. 2013), une valeur comparable à celle obtenue à Florence (1.5×10^{-7} en une heure), également par spectroscopie des échelles de Wannier–Stark (Poli et al. 2011). Pour comparaison, la combinaison d’oscillations de Bloch et d’un interféromètre de Ramsey–Bordé a permis à une équipe de l’ONERA d’obtenir une précision meilleure (2×10^{-7} en 300 s seulement) (Charrière et al. 2012), et un pur interféromètre de Ramsey–Bordé au SYRTE a fourni une sensibilité de $0.6 \times 10^{-9} g$ en 3000 s (Louchet-Chauvet et al. 2011), mais au prix d’une chute des atomes de 0.8 mm dans le premier cas et d’une dizaine de cm dans le second. Dans la méthode de la spectroscopie de Wannier–Stark, les atomes restent piégés et la distance qu’ils explorent est de l’ordre de quelques microns seulement : cette méthode est donc bien adaptée à la mesure de forces locales, comme celles de type Casimir–Polder.

6 Perspectives et applications

Les oscillations de Bloch sont devenues un outil important de l’optique quantique et de la physique atomique, utilisé dans de multiples applications allant de la métrologie à l’étude de phénomènes collectifs. Pour terminer ce chapitre, nous allons en discuter brièvement deux.

Mesure de h/m . La première application discutée ici porte sur la mesure de la constante h/m , où m est la masse d’un atome d’une espèce donnée. Cette constante est le « maillon faible » dans la détermination de

la constante de structure fine α par une méthode ne faisant pas appel à l'électrodynamique quantique (indépendante du $g - 2$ de l'électron par exemple) :

$$\alpha^2 = \frac{2R_\infty}{c} \frac{m}{m_e} \frac{h}{m}, \quad (5.56)$$

où R_∞ est la constante de Rydberg et m_e la masse de l'électron, la précision sur les autres termes (R_∞/c et m/m_e) étant notablement meilleure que 10^{-9} .

La méthode utilisée par le groupe de François Biraben au LKB pour mesurer h/m tire parti des oscillations de Bloch pour transférer à des atomes une impulsion $2N\hbar k$, où N est un nombre entier très grand (entre 500 et 1000). L'impulsion initiale des atomes est quasi-nulle, et définie avec une précision bien meilleure que $\hbar k$. La vitesse des atomes est mesurée par une transition Raman qui transfère les atomes d'un état hyperfin g_1 vers un autre état hyperfin g_2 , par un processus "absorption d'un photon de nombre d'onde k_1 - émission d'un photon de nombre d'onde k_2 ". Si les atomes ont une impulsion p avant le transfert Raman, la transition se fera de manière résonante si l'écart en énergie $\hbar\omega$ entre les deux faisceaux créant la transition Raman vérifie :

$$\hbar\omega(p) = \Delta E_{\text{hf}} + \frac{[p + \hbar(k_1 + k_2)]^2}{2m} - \frac{p^2}{2m}, \quad (5.57)$$

toutes les impulsions étant supposées colinéaires et $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ de sens opposés. La différence entre $\hbar\omega(p_{\text{in}})$ et $\hbar\omega(p_{\text{fi}})$, avec $p_{\text{fi}} = p_{\text{in}} + 2N\hbar k$ conduit à :

$$\omega(p_{\text{fi}}) - \omega(p_{\text{in}}) = 2N \frac{\hbar k(k_1 + k_2)}{m}, \quad (5.58)$$

soit en inversant cette relation

$$\frac{\hbar}{m} = \frac{\omega(p_{\text{fi}}) - \omega(p_{\text{in}})}{2Nk(k_1 + k_2)}. \quad (5.59)$$

Dans la première version de cette expérience, l'impulsion transférée était horizontale et $N \sim 50$ (Battesti et al. 2004). Le groupe du LKB est ensuite passé à une géométrie verticale qui autorise des valeurs plus grandes de N , l'effet de la gravité étant éliminé en comparant l'accélération vers le haut et vers le bas (Cladé et al. 2006). Par ailleurs, pour une meilleure précision sur la détermination des impulsions initiale et finale, l'oscillation de Bloch

a été placée entre deux paires de pulses $\pi/2$ reliant g_1 et g_2 , réalisant ainsi un interféromètre de Ramsey-Bordé (Cadoret et al. 2008; Bouchendira et al. 2011). La précision obtenue sur h/m est désormais $\sim 10^{-9}$ (systématique + statistique), à un niveau comparable à celui des autres facteurs entrant dans l'expression (5.56) pour α .

Notons que ces mesures sont effectuées avec des réseaux extrêmement profonds, $V_0 \sim 100 E_r$, pour lesquels l'efficacité mesurée de l'oscillation de Bloch atteint 99.97% par période. A cette profondeur de réseau, l'effet tunnel entre sites adjacents est complètement négligeable : la formule asymptotique vue en cours 3 donne une largeur de bande de $10^{-6} E_r$, soit un temps tunnel de plusieurs centaines de secondes. Pour l'accélération utilisée dans l'expérience, de l'ordre de 2000 ms^{-2} , le paramètre $\nu = 4J/Fa$ est de l'ordre de 10^{-8} . Les états de Wannier-Stark sont alors quasiment confondus avec les fonctions de Wannier dans chaque puits. Les atomes sont piégés au fond des puits de potentiel créés par l'onde stationnaire et ils suivent adiabatiquement ces puits quand le réseau est mis en mouvement.

Mesure de forces faibles La possibilité de relier directement la force ressentie par les atomes à une fréquence via l'oscillation de Bloch a conduit plusieurs auteurs à proposer d'utiliser ce phénomène pour mesurer des forces faibles, la force de Casimir-Polder au voisinage d'une surface par exemple, voire même rechercher des forces plus exotiques correspondant à une modification de la gravité aux courtes distances. Une première expérience dans cette direction est présentée par Sorrentino et al. (2009). Par ailleurs, l'étude des oscillations de Bloch dans une cavité Fabry-Perot a également fait l'objet d'une étude approfondie (Prasanna Venkatesh et al. 2009).

Nous discutons ici brièvement les résultats obtenus par Carusotto et al. (2005), qui ont étudié la valeur de ω_B au voisinage d'une surface, et l'ont comparé à la valeur qu'elle prendrait pour un réseau vertical dans l'espace libre. Carusotto et al. (2005) proposent d'utiliser un gaz de fermions polarisés, donc sans interaction, pour n'observer que des effets « à une particule ». Par une étude analytique simple, ils montrent que le déplacement

relatif de la pulsation de Bloch vaut

$$\frac{\Delta\omega_B}{\omega_B} = -\frac{0.17}{D^4} (\mu\text{m})^4, \quad (5.60)$$

où D est la distance entre l'atome et la surface. Pour $D = 10$ microns, la force de Casimir (incluant les effets thermiques à 300 K) est environ 10^5 fois plus faible que la gravité, ce qui devrait être détectable puisqu'on a vu que la précision sur la mesure de g avec les oscillations de Bloch pouvait atteindre 10^{-7} après une heure d'intégration. Dans l'article de Carusotto et al. (2005), une étude numérique plus approfondie prend en compte le moyennage du potentiel du fait de l'extension initiale du nuage et de la région explorée pendant l'oscillation (de l'ordre du micron), mais les corrections sont mineures. Par ailleurs le brouillage des oscillations du fait de l'inhomogénéité de ω_B est faible et ne devrait pas compromettre cette approche.

Wolf et al. (2007) ont proposé une approche légèrement différente de celle de Carusotto et al. (2005), en imaginant un interféromètre à partir des états de Wannier–Stark, situés à $j, j \pm 1, \dots$ sites de la paroi, dans deux états internes g_1 et g_2 différents. La sensibilité attendue pour ce type d'expérience est un décalage de 10^{-4} Hz entre deux sites adjacents, la gravité créant quand à elle un décalage typique du kHz pour des atomes de strontium et une longueur d'onde de réseau autour de 700 nm. On trouvera dans l'article de Wolf et al. (2007) une discussion des possibilités de ce dispositif pour la recherche de forces correspondant à une déviation par rapport à la loi de Newton, à la fois en terme d'intensité et de portée de la force pour un potentiel de Yukawa. La conclusion des auteurs est qu'il existe un domaine de paramètres assez étendu que ce type d'expérience pourrait aborder de manière plus précise que les dispositifs existants.

7 Références

- Ashcroft, N. W. & N. D. Mermin (1976), *Solid State Physics*, New York: Holt, Rinehardt and Winston.
- Avron, JE, J Zak, A Grossman & L Gunther (1977), « Instability of continuous spectrum – N -band Stark Ladder », in *Journal of Mathematical Physics* 18.5, 918–921.
- Battesti, R., P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, B. Grémaud, F. Nez, L. Julien & F. Biraben (2004), « Bloch Oscillations of Ultracold Atoms : A Tool for a Metrological Determination of h/m_{Rb} », in *Phys. Rev. Lett.* 92 (25), p. 253001.
- Beaufils, Q., G. Tackmann, X. Wang, B. Pelle, S. Pelisson, P. Wolf & F. Pereira dos Santos (2011), « Laser Controlled Tunneling in a Vertical Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 106 (21), p. 213002.
- Ben Dahan, Maxime, Ekkehard Peik, Jakob Reichel, Yvan Castin & Christophe Salomon (1996), « Bloch Oscillations of Atoms in an Optical Potential », in *Phys. Rev. Lett.* 76 (24), pp. 4508–4511.
- Bloch, F. (July 1929), « Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern », in *Zeitschrift für Physik* 52, pp. 555–600.
- Bouchendira, R., P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, F. Nez & F. Biraben (2011), « New Determination of the Fine Structure Constant and Test of the Quantum Electrodynamics », in *Phys. Rev. Lett.* 106 (8), p. 080801.
- Browaeys, A., H. Häffner, C. McKenzie, S. L. Rolston, K. Helmerson & W. D. Phillips (2005), « Transport of atoms in a quantum conveyor belt », in *Phys. Rev. A* 72 (5), p. 053605.
- Cadoret, M., E. de Mirandes, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien & F. Biraben (2008), « Combination of Bloch Oscillations with a Ramsey-Bordé Interferometer : New Determination of the Fine Structure Constant », in *Phys. Rev. Lett.* 101 (23), p. 230801.
- Carusotto, I., L. Pitaevskii, S. Stringari, G. Modugno & M. Inguscio (2005), « Sensitive Measurement of Forces at the Micron Scale Using Bloch Oscillations of Ultracold Atoms », in *Phys. Rev. Lett.* 95 (9), p. 093202.
- Charrière, Renée, Malo Cadoret, Nassim Zahzam, Yannick Bidel & Alexandre Bresson (2012), « Local gravity measurement with the combination of atom interferometry and Bloch oscillations », in *Phys. Rev. A* 85 (1), p. 013639.
- Cladé, P., E. de Mirandes, M. Cadoret, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien & F. Biraben (2006), « Determination of the Fine Structure Constant Based on Bloch Oscillations of Ultracold Atoms in a Vertical Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 96 (3), p. 033001.
- Cladé, P., S. Guellati-Khélifa, F. Nez & F. Biraben (2009), « Large Momentum Beam Splitter Using Bloch Oscillations », in *Phys. Rev. Lett.* 102 (24), p. 240402.

- Dahan, Maxime (1997), « Transport et relaxation d'atomes de césium : oscillations de Bloch et résonance de diffusion », PhD thesis, Université Paris 6.
- Denschlag, J Hecker, J E Simsarian, H Häffner, C McKenzie, A Browaeys, D Cho, K Helmerson, S L Rolston & W D Phillips (2002), « A Bose-Einstein condensate in an optical lattice », in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* 35.14, p. 3095.
- Gluck, M, AR Kolovsky & HJ Korsch (2002), « Wannier-Stark resonances in optical and semiconductor superlattices », in *PHYSICS REPORTS-REVIEW SECTION OF PHYSICS LETTERS* 366.3, 103–182.
- Hartmann, T, F Keck, H J Korsch & S Mossmann (2004), « Dynamics of Bloch oscillations », in *New Journal of Physics* 6.1, p. 2.
- Holthaus, Martin (2000), « Bloch oscillations and Zener breakdown in an optical lattice », in *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics* 2.5, p. 589.
- Kling, Sebastian, Tobias Salger, Christopher Grossert & Martin Weitz (2010), « Atomic Bloch-Zener Oscillations and Stückelberg Interferometry in Optical Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* 105 (21), p. 215301.
- Louchet-Chauvet, Anne, Tristan Farah, Quentin Bodart, André Clairon, Arnaud Landragin, Sébastien Merlet & Franck Pereira Dos Santos (2011), « The influence of transverse motion within an atomic gravimeter », in *New Journal of Physics* 13.6, p. 065025.
- Mendez, Emilio E. & Gérald Bastard (1993), « Wannier-Stark Ladders and Bloch Oscillations in Superlattices », in *Physics Today* 46.6, pp. 34–42.
- Messiah, A. (2003), *Mécanique quantique*, vol. II, Paris: Dunod.
- Müller, Holger, Sheng-wei Chiow, Sven Herrmann & Steven Chu (2009), « Atom Interferometers with Scalable Enclosed Area », in *Phys. Rev. Lett.* 102 (24), p. 240403.
- Nenciu, G. (1991), « Dynamics of band electrons in electric and magnetic fields : rigorous justification of the effective Hamiltonians », in *Rev. Mod. Phys.* 63 (1), pp. 91–127.
- Niu, Qian & M. G. Raizen (1998), « How Landau-Zener Tunneling Takes Time », in *Phys. Rev. Lett.* 80 (16), pp. 3491–3494.
- Niu, Qian, Xian-Geng Zhao, G. A. Georgakis & M. G. Raizen (1996), « Atomic Landau-Zener Tunneling and Wannier-Stark Ladders in Optical Potentials », in *Phys. Rev. Lett.* 76 (24), pp. 4504–4507.
- Peik, Ekkehard, Maxime Ben Dahan, Isabelle Bouchoule, Yvan Castin & Christophe Salomon (1997), « Bloch oscillations of atoms, adiabatic rapid passage, and monokinetic atomic beams », in *Phys. Rev. A* 55 (4), pp. 2989–3001.
- Pelle, B., A. Hilico, G. Tackmann, Q. Beaufils & F. Pereira dos Santos (2013), « State-labeling Wannier-Stark atomic interferometers », in *Phys. Rev. A* 87 (2), p. 023601.
- Poli, N., F.-Y. Wang, M. G. Tarallo, A. Alberti, M. Prevedelli & G. M. Tino (2011), « Precision Measurement of Gravity with Cold Atoms in an Optical Lattice and Comparison with a Classical Gravimeter », in *Phys. Rev. Lett.* 106 (3), p. 038501.
- Prasanna Venkatesh, B., M. Trupke, E. A. Hinds & D. H. J. O'Dell (2009), « Atomic Bloch-Zener oscillations for sensitive force measurements in a cavity », in *Phys. Rev. A* 80 (6), p. 063834.
- Raizen, Mark, Christophe Salomon & Qian Niu (1997), « New Light on Quantum Transport », in *Physics Today* 50.7, pp. 30–34.
- Roati, G., E. de Mirandes, F. Ferlaino, H. Ott, G. Modugno & M. Inguscio (2004), « Atom Interferometry with Trapped Fermi Gases », in *Phys. Rev. Lett.* 92 (23), p. 230402.
- Sorrentino, F., A. Alberti, G. Ferrari, V. V. Ivanov, N. Poli, M. Schioppo & G. M. Tino (2009), « Quantum sensor for atom-surface interactions below 10 μm », in *Phys. Rev. A* 79 (1), p. 013409.
- Tackmann, G., B. Pelle, A. Hilico, Q. Beaufils & F. Pereira dos Santos (2011), « Raman-laser spectroscopy of Wannier-Stark states », in *Phys. Rev. A* 84 (6), p. 063422.
- Wannier, Gregory H. (1960), « Wave Functions and Effective Hamiltonian for Bloch Electrons in an Electric Field », in *Phys. Rev.* 117 (2), pp. 432–439.
- Wilkinson, S. R., C. F. Bharucha, K. W. Madison, Qian Niu & M. G. Raizen (1996), « Observation of Atomic Wannier-Stark Ladders in an Accelerating Optical Potential », in *Phys. Rev. Lett.* 76 (24), pp. 4512–4515.
- Wilkinson, SR, CF Bharucha, MC Fischer, KW Madison, PR Morrow, Q Niu, B Sundaram & MG Raizen (1997), « Experimental evidence for non-exponential decay in quantum tunnelling », in *NATURE* 387.6633, 575–577.
- Wolf, Peter, Pierre Lemonde, Astrid Lambrecht, Sébastien Bize, Arnaud Landragin & André Clairon (2007), « From optical lattice clocks to the measurement of forces in the Casimir regime », in *Phys. Rev. A* 75 (6), p. 063608.

- Zak, J. (1989), « Berry's phase for energy bands in solids », in *Phys. Rev. Lett.* 62 (23), pp. 2747–2750.
- Zener, C (1934), « A Theory of the Electrical Breakdown of Solid Dielectrics », in *Proc. R. Soc. Lond. A* 145, 523.
- Zenesini, A., H. Lignier, G. Tayebirad, J. Radogostowicz, D. Ciampini, R. Mannella, S. Wimberger, O. Morsch & E. Arimondo (2009), « Time-Resolved Measurement of Landau-Zener Tunneling in Periodic Potentials », in *Phys. Rev. Lett.* 103 (9), p. 090403.
- Zenesini, A., D. Ciampini, O. Morsch & E. Arimondo (2010), « Observation of Stückelberg oscillations in accelerated optical lattices », in *Phys. Rev. A* 82 (6), p. 065601.