

# Chapitre 3

## Gaz en interaction et critère de Landau

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Quels rôles pour les interactions ?</b> . . . . .	<b>2</b>
1-1	Interactions et fragmentation . . . . .	2
1-2	Interactions et hybridation . . . . .	4
1-3	Interactions et intrication . . . . .	6
<b>2</b>	<b>L'équation de Gross–Pitaevskii</b> . . . . .	<b>7</b>
2-1	Structure de l'équation . . . . .	7
2-2	L'équation de GP pour un gaz dilué . . . . .	7
2-3	Comment analyser les solutions de GP . . . . .	8
2-4	Métastabilité et critère de Landau . . . . .	9
<b>3</b>	<b>L'approche de Bogoliubov (champ classique)</b> . . . . .	<b>10</b>
3-1	Linéarisation des équations du mouvement . . . . .	10
3-2	Le spectre de Bogoliubov . . . . .	11
3-3	Au delà du critère de Landau : les vortex . . . . .	14
3-4	L'approche « amplitude – phase » . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Quasi-particules à l'équilibre thermique</b> . . . . .	<b>17</b>
4-1	Populations des modes à l'équilibre . . . . .	17
4-2	Quasi-particules et densité normale . . . . .	17
4-3	Fluctuations de phase à 3D . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Appendice 1 : méthode variationnelle</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>Appendice 2 : approche de Bogoliubov quantique</b> . . . . .	<b>20</b>

---

Dans les deux premiers chapitres de ce cours, nous avons examiné tout à tour les manifestations de la condensation de Bose–Einstein et de la superfluidité pour un gaz atomique. Nous avons décrit le phénomène de condensation pour un gaz parfait, comme proposé par Einstein dès 1924. La superfluidité quant à elle est un phénomène qui requiert des interactions entre particules. En effet, un des critères de superfluidité – l'existence de courants permanents – n'est pas satisfait dans un gaz parfait : ce sont les interactions répulsives entre particules qui assurent qu'un courant peut exister dans un état métastable, en étant protégé par une barrière d'énergie de la relaxation vers l'état fondamental.

Le but de ce chapitre est d'explorer de manière plus détaillée le rôle essentiel des interactions. Nous allons commencer par décrire de manière qualitative différentes facettes de leur impact, en termes de fragmentation, d'hybridation ou encore d'intrication de l'état quantique du fluide. Nous étudierons ensuite la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevski, puis le formalisme de Bogoliubov qui lui est associé. Cela nous permettra de déterminer quantitativement le spectre en énergie du gaz en interaction. Nous établirons en particulier le critère de Landau, qui exprime à quelle condition un écoulement superfluide peut être stable vis-à-vis d'une perturbation. Nous examinerons également comment aller au-delà de ce critère en étudiant comment la nucléation de paires de vortex peut freiner un écoulement superfluide.

## 1 Quels rôles pour les interactions ?

Le rôle des interactions entre particules dans l'émergence d'un condensat de Bose–Einstein est complexe et comporte de nombreuses facettes dont nous n'aborderons qu'une fraction dans le cours de cette année.

La première question concerne le déplacement du seuil de condensation du fait des interactions. La réponse, que nous ne traiterons pas ici, dépend de la nature du confinement. Pour un gaz homogène, on pourra consulter les travaux de Baym, Blaizot, et al. (1999), Holzmänn & Krauth (1999), Holzmänn, Baym, et al. (2001), Kashurnikov, Prokof'ev, et al. (2001) et la revue de Andersen (2004). Les effets apportés par un piège harmonique sont discutés par Dalfovo, Giorgini, et al. (1999) et des mesures précises du déplacement du point critique sont décrites par Gerbier, Thywissen, et al. (2004) et Smith, Campbell, et al. (2011). Une question reliée concerne la classe d'universalité et les exposants critiques associés à la transition. Les mesures de certains exposants sont décrites dans Donner, Ritter, et al. (2007), Navon, Gaunt, et al. (2015) et Chomaz, Corman, et al. (2015).

On peut également s'interroger sur l'influence des interactions sur le condensat lui-même, en cherchant par exemple la structure des excitations du système. Cette question, essentielle pour aborder le problème de la superfluidité, sera traitée ici pour un gaz homogène. On peut également rechercher, à température nulle ou finie, la répartition spatiale des atomes dans le cas où le gaz est confiné dans un potentiel non uniforme; nous ne détaillerons pas ici la résolution de cette question et nous renvoyons le lecteur intéressé aux ouvrages « classiques » du domaine (Pethick & Smith 2002; Pitaevskii & Stringari 2016; Leggett 2006), qui l'abordent généralement dans le cadre de l'approximation de Thomas–Fermi.

Dans ce premier paragraphe, nous allons nous restreindre au cas du gaz à température nulle et examiner de manière qualitative trois effets distincts des interactions sur l'état d'énergie minimale du gaz. Pour commencer, nous allons montrer que les interactions peuvent préserver un condensat de la fragmentation. Nous expliquerons ensuite comment les interactions modifient la fonction d'onde du condensat en hybridant les états à un corps. Nous terminerons par un précurseur de la transformation de Bogoliubov, indiquant comment les interactions peuvent également favoriser l'apparition d'états intriqués à  $N$  corps, via une déplétion du condensat.

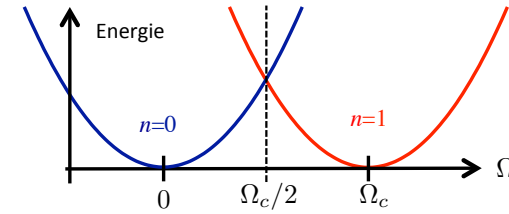


FIGURE 1. Variation de l'énergie des états  $e^{in\varphi}$  pour un anneau de rayon  $r_0$  en rotation à la fréquence  $\Omega$ . Pour  $\Omega = \Omega_c/2$ , avec  $\Omega_c = \hbar/mr_0^2$ , les états  $n = 0$  et  $n = 1$  sont dégénérés.

### 1-1 Interactions et fragmentation

Considérons pour commencer un gaz parfait confiné dans une boîte avec des conditions aux limites périodiques; nous avons déjà indiqué que dans ce cas, la condensation ne se produit que dans l'état d'impulsion nulle  $\mathbf{p} = 0$ . Bien que les premiers états excités ne soient qu'à une énergie infinitésimale  $\propto L^{-2}$  au dessus du fondamental, leur population ne devient jamais macroscopique.

Dans la mesure où les interactions couplent les différents états à une particule, on pourrait craindre que ce couplage ne vienne fragmenter le condensat, en partageant la population condensée en une multitude de micro-condensats. Nous allons voir que ceci ne se produit pas, bien au contraire : sous certaines hypothèses simples, les interactions assurent qu'un seul état est macroscopiquement peuplé (Nozières 1995).

Pour fixer les idées, revenons au cas de l'anneau en rotation discuté au chapitre 2 (figure 1). Notons  $r_0$  le rayon de l'anneau et  $\Omega$  la fréquence de rotation. En limitant le mouvement des particules au degré de liberté azimutal  $\varphi$ , nous avons montré que les niveaux d'énergie à une particule sont du type

$$E_n(\Omega) = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \left( n - \frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \Omega_c = \frac{\hbar}{mr_0^2}, \quad (1)$$

la fonction d'onde associée à l'indice entier  $n$  étant  $e^{in\varphi}/\sqrt{2\pi}$ .

Plaçons-nous à la fréquence de rotation  $\Omega = \Omega_c/2$  de sorte que les états

à une particule

$$\psi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ associé à } n = 0, \quad \psi_b(x) = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \text{ associé à } n = 1, \quad (2)$$

ont exactement la même énergie. En absence d'interactions, on a donc une multitude d'états dégénérés pour le système à  $N$  atomes :

$$|N_a, N_b\rangle \equiv |N_a : \psi_a ; N_b : \psi_b\rangle \quad \text{avec} \quad N_a + N_b = N. \quad (3)$$

Si le gaz se trouve dans l'état  $|N_a, N_b\rangle$ , la matrice densité à un corps  $\hat{\rho}_1$  s'écrit dans la base  $\psi_a, \psi_b$

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} N_a & 0 \\ 0 & N_b \end{pmatrix}, \quad (4)$$

ce qui correspond à un condensat fragmenté.

Prenons maintenant en compte les interactions entre particules, interactions que nous supposerons binaires. Pour évaluer leur effet à l'ordre le plus bas, il suffit de connaître les éléments de matrice

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle 1 : \psi_\alpha ; 2 : \psi_\beta | \hat{V} | 1 : \psi_\gamma ; 2 : \psi_\delta \rangle \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{a, b\}. \quad (5)$$

Compte non tenu des symétries, cela correspond à 16 nombres à préciser, ce qui est beaucoup trop pour notre analyse élémentaire. Nous allons donc simplifier le problème avec deux hypothèses supplémentaires qui sont vérifiées dans le cas de l'anneau en rotation :

— Les interactions ne changent pas le nombre d'atomes dans les états  $\psi_a$  et  $\psi_b$ . Ainsi nous prenons en compte les processus

$$a + a \rightarrow a + a \quad b + b \rightarrow b + b \quad a + b \rightarrow a + b \quad (6)$$

mais nous supposons qu'il n'y a pas d'élément de matrice non nul pour des processus du type

$$a + a \rightarrow b + b \quad a + b \rightarrow b + b \quad \text{etc.} \quad (7)$$

Dans le cas de l'anneau, ces processus sont interdits car ils ne conservent pas le moment cinétique. Cette première hypothèse nous

laisse, compte tenu des symétries du problème, avec 4 coefficients  $V_{\alpha\beta\gamma\delta}$  a priori différents :

$$V_{aaaa}, V_{bbbb}, V_{abab}, V_{abba} \quad (8)$$

puisqu'on trouve en échangeant les rôles des particules 1 et 2 :

$$V_{abab} = V_{baba} \quad \text{et} \quad V_{abba} = V_{baab}. \quad (9)$$

— Les interactions ne favorisent pas de manière « triviale » un des deux états  $\psi_a$  ou  $\psi_b$ , ce qui revient à poser

$$V_{aaaa} = V_{bbbb} = V_{abab} = V_{baba} \equiv V_0. \quad (10)$$

Cette hypothèse est également bien vérifiée dans le cas de l'anneau car les deux états  $\psi_a$  et  $\psi_b$  correspondent à la même répartition spatiale.

On se ramène donc à deux coefficients : l'élément de matrice direct  $V_0$  défini ci-dessus, et l'élément de matrice « d'échange », correspondant à une collision où les atomes 1 et 2 permutent leur état durant la collision :

$$V_{\text{ech}} \equiv V_{abba} = V_{baab} = \langle 1 : \psi_a ; 2 : \psi_b | \hat{V} | 1 : \psi_b ; 2 : \psi_a \rangle. \quad (11)$$

Nous supposerons que les interactions sont répulsives, de sorte que  $V_0$  et  $V_{\text{ech}}$  sont tous deux positifs.

Dans le cas de l'anneau avec une interaction de contact  $g \delta(x_1 - x_2)$ , les deux coefficients sont égaux entre eux car :

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta} = g \int \psi_\alpha^* \psi_\beta^* \psi_\gamma \psi_\delta dx \quad \Rightarrow \quad V_{\text{ech}} = \frac{g}{2\pi r_0} \equiv V_0. \quad (12)$$

On peut alors évaluer simplement l'effet des interactions sur la multiplicité d'états dégénérés  $|N_a, N_b\rangle$ . Plaçons-nous dans le formalisme de la seconde quantification pour simplifier l'écriture et introduisons les opérateurs annihilation et création  $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$  et  $\hat{b}, \hat{b}^\dagger$  d'une particule dans les états  $\psi_a$  et  $\psi_b$ . L'hamiltonien correspondant aux interactions s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \frac{V_0}{2} \left[ (\hat{a}^\dagger)^2 (\hat{a})^2 + (\hat{b}^\dagger)^2 (\hat{b})^2 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{b} \right] + V_{\text{ech}} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{b} \\ &= \frac{V_0}{2} \left[ \hat{N}_a (\hat{N}_a - 1) + \hat{N}_b (\hat{N}_b - 1) + 2\hat{N}_a \hat{N}_b \right] + V_{\text{ech}} \hat{N}_a \hat{N}_b \\ &= \frac{V_0}{2} \hat{N} (\hat{N} - 1) + V_{\text{ech}} \hat{N}_a \hat{N}_b, \end{aligned} \quad (13)$$

où l'on a introduit les opérateurs *nombre de particules* :  $\hat{N}_a = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ,  $\hat{N}_b = \hat{b}^\dagger \hat{b}$ ,  $\hat{N} = \hat{N}_a + \hat{N}_b$ . On constate immédiatement que chaque état  $|N_a, N_b\rangle$  reste état propre de  $\hat{V}$ , mais que la dégénérescence entre eux est levée. L'énergie d'interaction s'écrit en effet

$$E(N_a, N_b) = \frac{V_0}{2} N(N-1) + V_{\text{ech}} N_a N_b. \quad (14)$$

Le terme d'échange vient donc augmenter l'énergie de tout état fragmenté, c'est-à-dire tout état pour lequel  $N_a$  et  $N_b$  sont tous les deux comparables à  $N$ . Cette augmentation est « macroscopique » : en effet, on voit sur (12) que  $V_{\text{ech}}$  varie comme l'inverse de la longueur de la boîte à une dimension, ou l'inverse du volume à trois dimensions, ce qui signifie que le terme  $V_{\text{ech}} N_a N_b$  est un terme en  $N\rho$ , où  $\rho$  est la densité totale de particules.

On constate donc sur cet exemple simple que les interactions répulsives entre particules s'opposent à la fragmentation d'un éventuel condensat et favorisent l'un ou l'autre des états à une composante  $|N, 0\rangle$  et  $|0, N\rangle$ . En particulier, cela vient assurer la métastabilité du courant permanent  $|0, N\rangle$  discutée au chapitre 2, même si la fréquence de rotation  $\Omega$  est choisie inférieure au seuil de stabilité  $\Omega_c/2$ .

## 1-2 Interactions et hybridation

Dans l'exemple qui précède, nous avons considéré un anneau unidimensionnel ou plus généralement une boîte avec des conditions aux limites périodiques (CLP), de sorte que les états propres de l'opérateur densité réduit  $\hat{\rho}_1$  étaient les mêmes que les états propres de l'hamiltonien à une particule, à savoir les ondes planes.

Dès que l'on quitte le cas des CLP, les interactions viennent modifier ce point. On rencontre souvent des situations où les interactions entre particules peuvent induire des transitions du type

$$a + a \rightarrow a + b. \quad (15)$$

Considérons comme précédemment le cas d'interactions de contact  $g \delta(x_1 - x_2)$ , de sorte que la transition (15) est décrite par l'élément de matrice :

$$V_{aabb} = g \int |\psi_a(x)|^2 \psi_a^*(x) \psi_b(x) dx. \quad (16)$$

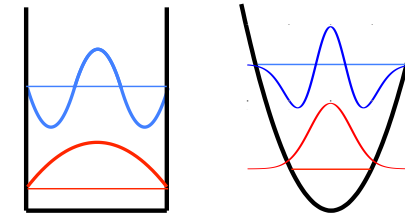


FIGURE 2. Hybridation entre deux états de même parité sous l'effet des interactions. Gauche : puits carré avec conditions aux limites de Dirichlet. Droite : puits harmonique.

Prenons par exemple (figure 2) pour  $a$  l'état fondamental dans une boîte avec des conditions aux limites de Dirichlet<sup>1</sup> :

$$\psi_a(x) \propto \sin(\pi x/L) \quad (17)$$

et pour  $b$  le deuxième état excité<sup>2</sup>

$$\psi_b(x) \propto \sin(3\pi x/L). \quad (18)$$

On peut également s'intéresser à un piège harmonique d'état fondamental  $\psi_a(x) \propto \exp(-x^2/2a_{\text{oh}}^2)$  et de deuxième état excité  $\psi_b(x) \propto (x^2 - a_{\text{oh}}^2/2) \exp(-x^2/2a_{\text{oh}}^2)$ .

Utilisons alors une méthode variationnelle pour chercher l'état fondamental du gaz. On prend des fonctions d'essai qui correspondent toujours à un condensat de Bose-Einstein pur, c'est-à-dire tous les atomes placés dans la même fonction d'onde  $\psi(x)$  :

$$|\Psi\rangle = |1 : \psi\rangle \otimes |2 : \psi\rangle \otimes \dots \otimes |N : \psi\rangle. \quad (19)$$

Toutefois, on n'impose pas à  $\psi(x)$  de coïncider avec l'état fondamental  $\psi_a(x)$ . On l'écrit sous la forme

$$\psi(x) = \cos \theta \psi_a(x) + \sin \theta e^{i\varphi} \psi_b(x) \quad (20)$$

1. On vérifiera que (16) est toujours nul dans le cas de la boîte avec des CLP.

2. Le premier état excité ne ferait pas l'affaire car il est impair alors que l'état fondamental est pair, ce qui entraîne la nullité de  $V_{aabb}$ .

et on utilise les angles  $\theta$  et  $\varphi$  comme paramètres variationnels pour minimiser l'énergie totale

$$E(\theta, \varphi) = N(\cos^2 \theta E_a + \sin^2 \theta E_b) + \frac{V_0}{2} N(N-1) \cos^4 \theta + 2V_{aaab} N(N-1) \cos^3 \theta \sin \theta \cos \varphi + \dots \quad (21)$$

La première ligne correspond à l'énergie à une particule. La deuxième ligne représente l'énergie d'interaction, dans laquelle nous nous sommes limités aux termes dominants pour une interaction faible, telle que le couplage  $V_{aaab}$  est petit devant l'écart d'énergie  $E_b - E_a$ . Nous avons noté comme précédemment  $V_0 \equiv V_{aaaa}$ . Dans cette hypothèse, on peut se limiter aux termes d'ordre le plus bas en  $\theta$  et on trouve l'énergie par particule :

$$\frac{1}{N} E(\theta, \varphi) \approx \left[ E_a + \frac{V_0 N}{2} \right] + (E_b - E_a) \theta^2 + 2N\theta V_{aaab} \cos \varphi \quad (22)$$

où on a pris  $N-1 \approx N$ .

On voit que l'hybridation de la fonction d'onde permet d'abaisser l'énergie par un terme linéaire en  $\theta$ , pourvu que l'on choisisse  $\varphi$  tel que  $V_{aaab} \cos \varphi$  soit négatif. Le prix à payer est de promouvoir une fraction des particules dans l'état  $b$ , mais ce prix varie comme  $\theta^2$ . On est donc certain de pouvoir abaisser l'énergie totale pour  $\theta$  assez petit.

Pour  $V_{aaab} > 0$ , le minimum est obtenu en prenant  $\varphi = 0$  et

$$\theta = -\frac{V_{aaab} N}{E_b - E_a}. \quad (23)$$

L'énergie minimale par particule vaut

$$\frac{1}{N} E_{\min} \approx E_a + \frac{V_0 N}{2} - \frac{(V_{aaab} N)^2}{E_b - E_a}. \quad (24)$$

Le dernier terme représente l'abaissement d'énergie dû à l'hybridation de la fonction d'onde du condensat. Cet abaissement résulte du compromis annoncé plus haut :

- On augmente l'énergie à une particule en promouvant une fraction  $\theta^2$  des atomes de l'état fondamental  $\psi_a$  vers l'état excité  $\psi_b$ .
- On diminue l'énergie d'interaction répulsive car on obtient une fonction d'onde  $\psi$  qui occupe une plus grande zone spatiale.

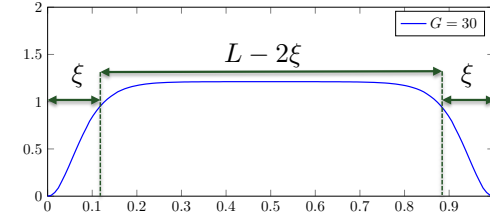


FIGURE 3. Distribution spatiale d'un gaz de Bose 1D confiné sur un segment de longueur  $L = 1$  (conditions aux limites de Dirichlet), obtenu en minimisant la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevskii (46) avec  $G = Ng = 30$  et  $\hbar = m = 1$ .

Notre traitement est limité à un effet faible des interactions, puisque le nombre de particules  $N$  doit être choisi de sorte que  $\theta \ll 1$  dans (23). Toutefois ce processus d'hybridation reste valable à plus grande valeur de  $N$ , l'hybridation conduisant alors à peupler de manière significative de nombreux états à une particule. L'hybridation optimale est obtenue en minimisant la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevskii, donnée ci-dessous en (46) (Pethick & Smith 2002; Pitaevskii & Stringari 2016).

**La longueur de cicatrisation (healing length).** Pour un gaz dans une boîte à fond plat avec des conditions aux limites de Dirichlet, l'hybridation (20) est significative pour tous les états  $b$  tels que l'angle de mélange  $\theta$  est significatif, c'est-à-dire  $|E_b - E_a| \lesssim |V_{aaab} N| \sim \rho g$ . Si l'énergie d'interaction par particule  $\rho g$  est grande devant l'écart entre les premiers niveaux d'énergie,  $\sim \hbar^2/mL^2$ , de nombreux états à une particule vont être mis en jeu et on aboutit au profil de la figure 3, avec une fonction d'onde uniforme sur presque toute l'étendue de la boîte, cette fonction d'onde tombant à zéro au voisinage de la paroi, sur une zone d'épaisseur  $\xi$ .

La valeur de  $\xi$  peut être trouvée simplement en minimisant l'énergie totale, c'est-à-dire la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie d'interaction. L'énergie cinétique provient essentiellement du gradient de la fonction d'onde sur les deux bords de la boîte, qui représentent une fraction  $2\xi/L$  de la longueur totale, soit

$$E_{\text{cin}} \sim N \frac{\hbar^2}{2m\xi^2} \times \frac{2\xi}{L} \sim N \frac{\hbar^2}{m\xi L}. \quad (25)$$

L'énergie d'interaction correspond est obtenue en posant que les  $N$  particules occupent une longueur effective  $L - 2\xi$ , soit

$$E_{\text{int}} \sim \frac{N(N-1)}{2} \frac{g}{L-2\xi} \approx \frac{N^2 g}{2L} + \frac{N^2 g}{L^2} \xi. \quad (26)$$

La somme de ces deux termes est minimisée en prenant (à un facteur numérique près)

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2mg\rho}}, \quad \rho = \frac{N}{L}, \quad (27)$$

définition valable en dimensions 1, 2 et 3, pourvu que le coefficient  $g$  et la densité spatiale  $\rho$  soient choisis de manière adaptée.

### 1-3 Interactions et intrication

Revenons au cas d'une boîte avec des conditions aux limites périodiques. Un autre cas intéressant concerne des collisions du type

$$a + a \longleftrightarrow b + c. \quad (28)$$

$\psi_a$  peut représenter l'état fondamental de la boîte

$$\psi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \quad (29)$$

alors que  $\psi_{b,c}$  représentent les deux premiers états excités de vecteur d'onde  $k = \pm 2\pi/L$  :

$$\psi_b(x) = \frac{e^{i 2\pi x/L}}{\sqrt{L}} \quad \psi_c(x) = \frac{e^{-i 2\pi x/L}}{\sqrt{L}}. \quad (30)$$

Pour l'interaction de contact  $g \delta(x_1 - x_2)$ , l'élément de matrice correspondant à (28) est non nul :

$$V_{abc} = \frac{g}{L} \equiv V_0, \quad (31)$$

de même que  $V_{acb} = V_{bca} = V_{cba}$ . Nous nous intéressons au cas où les interactions sont faibles, et où la population reste majoritairement concentrée dans l'état  $\psi_a$ . L'hamiltonien (13) se généralise en

$$\hat{V} \approx V_0 \left[ \frac{1}{2} \hat{N}_a (\hat{N}_a - 1) + 2 \hat{N}_a (\hat{N}_b + \hat{N}_c) + (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{b} \hat{c} + \hat{b}^\dagger \hat{c}^\dagger (\hat{a})^2 \right], \quad (32)$$

où l'on a négligé les termes en  $N_{b,c}^2$  devant les termes en  $N_a^2$  et en  $N_a N_{b,c}$ . Contrairement à l'hamiltonien (13) qui conservait séparément les nombres de particules dans les états  $a$  et  $b$ , ce potentiel couple les secteurs correspondant à des occupations différentes :

$$|N_a, N_b, N_c\rangle \longleftrightarrow |N_a - 2, N_b + 1, N_c + 1\rangle. \quad (33)$$

Prenant la limite d'interactions très faibles, on peut là aussi utiliser une méthode variationnelle et chercher des fonctions d'essai sous la forme

$$|\Psi\rangle = \cos \theta |N, 0, 0\rangle + \sin \theta e^{i\varphi} |N - 2, 1, 1\rangle. \quad (34)$$

L'énergie cinétique à une particule est nulle pour l'état  $\psi_a$  et est égale à  $\epsilon_1 = 2\pi^2 \hbar^2 / mL^2$  pour les deux états  $b$  et  $c$ . L'énergie cinétique moyenne pour l'état  $|\Psi\rangle$  vaut dans la limite  $\theta \ll 1$  :

$$E_{\text{cin}} = 2\theta^2 \epsilon_1 \quad (35)$$

Pour évaluer l'énergie d'interaction provenant de (32), il suffit de se limiter au terme d'ordre 1 en  $\theta$  ce qui donne pour l'énergie moyenne totale

$$E(\Psi) \approx \frac{1}{2} N^2 V_0 + 2\theta^2 \epsilon_1 + 2N\theta \cos \varphi V_0 \quad (36)$$

ce qui est minimum pour  $\varphi = 0$  et  $\theta \approx -NV_0/2\epsilon_1$ . Cette intrication de l'état  $|\Psi\rangle$  entre deux états à nombre de particules différents dans  $\psi_a$  conduit à l'abaissement d'énergie [voir par exemple Pines & Nozières (1990), § 9.2] :

$$\frac{1}{2} N^2 V_0 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} N^2 V_0 - \frac{(NV_0)^2}{2\epsilon_1} \quad (37)$$

L'intrication que nous voyons apparaître ici est un précurseur de la transformation de Bogoliubov, dans laquelle le condensat d'impulsion nulle est « habillé » par des paires de particules dans des états  $\mathbf{k}, -\mathbf{k}$ . Il y a néanmoins plusieurs niveaux de complexité pour arriver au résultat final de Bogoliubov, avec l'énergie de l'état fondamental habillé :

- La prise en compte des termes  $\hat{b}^\dagger \hat{c}^\dagger (\hat{a})^2$  à un ordre plus élevé, car l'habillage peut impliquer la création de nombreuses paires  $\mathbf{k}, -\mathbf{k}$ , au moins pour les énergies  $\epsilon_k$  plus petites que l'énergie d'interaction  $g\rho$ .
- la sommation sur tous les modes  $\mathbf{k}$  et pas seulement les vecteurs d'onde les plus bas ( $\pm 2\pi/L$ ) comme nous l'avons fait ici.

— La prise en compte des difficultés mathématiques liées à l'utilisation du potentiel de contact, qui induit des divergences des quantités « brutes ». Ces difficultés peuvent se résoudre de plusieurs manières : en utilisant le *pseudo-potential* plutôt qu'une interaction de contact (Lee, Huang, et al. 1957), en éliminant les doubles comptages implicites de diagrammes (Pines & Nozières 1990) ou encore en considérant un gaz sur réseau (Mora & Castin 2003).

## 2 L'équation de Gross–Pitaevskii

Nous abordons dans ce paragraphe l'équation de Gross–Pitaevskii (GP), ou encore *équation de Schrödinger non-linéaire*, qui décrit l'évolution temporelle du paramètre d'ordre  $\phi(\mathbf{r}, t)$  pour un fluide en interaction (Gross 1961; Pitaevskii 1961). Le statut de l'équation de GP dépend fortement du contexte dans laquelle on souhaite l'utiliser. Pour l'hélium liquide, il s'agit essentiellement d'une équation phénoménologique, portant sur le paramètre d'ordre mais sans relation directe avec la fonction d'onde à  $N$  corps microscopique  $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ . Pour un gaz atomique dilué, nous verrons qu'on peut la déduire d'une approche variationnelle, à partir d'un *ansatz* simple pour la fonction d'onde  $\Psi$ . En optique, on peut obtenir cette équation en étudiant la propagation d'une onde lumineuse dans un milieu non-linéaire, à partir d'une approximation de type eikonale. L'onde se propageant le long de la direction  $z$ , l'équation de GP porte alors sur l'amplitude  $\phi(x, y, t)$  dans le plan perpendiculaire à  $z$ .

### 2-1 Structure de l'équation

Pour un gaz uniforme, l'équation de GP s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi + G |\phi|^2 \phi \quad (38)$$

dont on peut écrire les solutions stationnaires sous la forme  $\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) e^{-i\Omega t}$  où  $\phi(\mathbf{r})$  satisfait l'équation indépendante du temps

$$\hbar\Omega \phi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi + G |\phi|^2 \phi. \quad (39)$$

Dans tout ce qui suit, nous supposons la fonction  $\phi$  normalisée sur le volume  $L^3$  accessible aux particules

$$\int_{L^3} |\phi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r = 1. \quad (40)$$

Le paramètre réel  $G$  décrit la force des interactions. Pour des interactions en onde  $s$ , nous verrons ci-dessous qu'il est relié au nombre d'atomes  $N$  dans l'échantillon et à la longueur de diffusion  $a_s$  :

$$G = Ng \quad \text{avec} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}. \quad (41)$$

La nature des solutions de l'équation de GP dépend de manière cruciale du signe du paramètre  $G$ . Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur le cas  $G > 0$  ce qui correspond à des interactions effective répulsives ( $a_s > 0$ ), pour lequel nous allons voir que le condensat au repos est toujours stable.

### 2-2 L'équation de GP pour un gaz dilué

Pour un gaz dilué, un moyen simple pour arriver à l'équation de GP passe par la méthode variationnelle, soit dans le cas stationnaire, soit dans le cas dépendant du temps. Commençons par le cas stationnaire ; on se donne un hamiltonien à  $N$  particules, que nous écrivons ici en première quantification :

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\hat{\mathbf{r}}_j) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U(\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{r}}_j) \quad (42)$$

où  $U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$  représente l'énergie d'interaction entre deux atomes placés respectivement en  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{r}_j$ , et où  $V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$  représente un éventuel potentiel de piégeage [absent de (38-39)].

**Ansatz de Hartree.** La recherche exacte des états propres  $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  de  $\hat{H}$  et de leur énergie associée est une tâche compliquée, car la taille de l'espace de Hilbert pertinent croît exponentiellement avec le nombre de particules. La méthode variationnelle consiste à se donner des fonctions d'essai  $\Phi$  normées, évoluant dans un espace beaucoup plus restreint, et à

chercher les extrema de  $E(\Phi) = \langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle$ . Nous utiliserons ici des *fonctions de Hartree* :

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \phi(\mathbf{r}_1) \dots \phi(\mathbf{r}_N), \quad (43)$$

ce qui remplace le problème à  $N$  corps initial par un problème à 1 corps, avec la fonctionnelle d'énergie

$$\begin{aligned} \epsilon(\phi) \equiv \frac{1}{N} E(\phi) &= \int \left( \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi|^2 + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 \right) d^3r \\ &+ \frac{N-1}{2} \iint U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\phi(\mathbf{r})|^2 |\phi(\mathbf{r}')|^2 d^3r d^3r' \end{aligned} \quad (44)$$

à minimiser sur  $\phi(\mathbf{r})$ .

Pour arriver à l'équation de GP, une deuxième étape est nécessaire. Elle consiste à modéliser l'interaction entre deux atomes par le potentiel de contact :

$$U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{avec} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}, \quad (45)$$

de sorte qu'on arrive à la fonctionnelle d'énergie :

$$\epsilon_{\text{GP}}(\phi) = \int \left( \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi|^2 + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{Ng}{2} |\phi(\mathbf{r})|^4 \right) d^3r. \quad (46)$$

où l'on a pris  $N-1 \approx N$ .

L'utilisation du potentiel de contact (45) pour décrire l'interaction entre atomes est facile à justifier si ce potentiel est faible en tout point  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  et de portée beaucoup plus courte que les autres dimensions caractéristiques du problème. La longueur de diffusion  $a_s$  est alors simplement proportionnelle à l'intégrale du potentiel  $U(\mathbf{r})$  sur tout l'espace. Quand le potentiel  $U(\mathbf{r})$  ne peut pas être traité perturbativement, en particulier quand ce potentiel admet des états liés, la justification de (46) est plus compliquée et nous l'admettrons ici.

**Équation de GP dépendant du temps** La méthode variationnelle peut se généraliser aux problèmes dépendant du temps, le principe général étant présenté dans l'appendice 1 de ce chapitre. On commence par déterminer la partie dynamique du lagrangien, adapté à l'ansatz variationnel (43)

$$\frac{1}{N} \int \mathcal{L}_{\text{dyn}}(\Phi) d^3r = \int \frac{i\hbar}{2} (\phi^* \dot{\phi} - \dot{\phi}^* \phi) d^3r, \quad (47)$$

de sorte que l'équation du mouvement de  $\phi$  se déduit du lagrangien

$$L(\phi) = \int \frac{i\hbar}{2} (\phi^* \dot{\phi} - \dot{\phi}^* \phi) d^3r - \epsilon_{\text{GP}}(\phi). \quad (48)$$

Les équations de Lagrange conduisent alors à :

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) \phi + Ng |\phi|^2 \phi, \quad (49)$$

ce qui correspond bien à l'équation que nous avons écrite en (38) dans le cas d'une particule libre ( $V_{\text{trap}} = 0$ ) et  $G = Ng$ .

### 2-3 Comment analyser les solutions de GP

Nous allons considérer dans ce qui suit un fluide homogène. L'équation de GP admet alors les solutions en ondes planes :

$$\phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \mu t / \hbar)} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + \frac{Ng}{L^3} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + g\rho \quad (50)$$

avec  $\rho = N/L^3$  (densité volumique du fluide). Dans ce qui suit, nous utiliserons la vitesse  $c_s$  définie par

$$mc_s^2 = g\rho. \quad (51)$$

Nous verrons au paragraphe suivant que  $c_s$  peut s'interpréter comme la vitesse du son dans le gaz condensé.

La valeur de la fonctionnelle d'énergie pour ces solutions est

$$\epsilon_{\text{GP}}(\phi_{\mathbf{K}}) = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + \frac{1}{2} g\rho. \quad (52)$$

Remarquons que  $\epsilon_{\text{GP}}$  et  $\mu$  sont différents, du fait de la non-linéarité du problème. Plus précisément, l'énergie du système à  $N$  particules est

$$E = N\epsilon_{\text{GP}} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} N + \frac{N^2 g}{2L^3} \quad (53)$$

et on a donc

$$\mu = \left. \frac{\partial E}{\partial N} \right|_L, \quad (54)$$



ce qui correspond bien à la définition du potentiel chimique.

Ces solutions correspondent à un fluide en mouvement à la vitesse  $\mathbf{V} = \hbar\mathbf{K}/m$ . Dans le cadre de l'étude de la superfluidité, on va s'intéresser au problème suivant : est-ce qu'une petite perturbation, conduisant à un changement mineur de la fonction d'onde du système, peut abaisser l'énergie totale du fluide ou au contraire toujours la faire croître ? Une autre formulation du problème est de déterminer, partant d'un fluide au repos dans le référentiel du laboratoire, si ce fluide peut être mis en mouvement par une impureté mobile. En d'autres termes, nous nous intéressons

- à la métastabilité de l'ensemble des solutions  $\phi_{\mathbf{K}}$  données ci-dessus,
- aux excitations possibles de la solution d'énergie la plus basse  $\phi_{\mathbf{K}=0}$ .

Nous allons voir que ces deux facettes du problème amènent la même réponse, à savoir une robustesse du fluide vis-à-vis de ces petites perturbations, pourvu que la vitesse relative fluide-perturbation soit inférieure à  $c_s$ . Nous traitons la première question portant sur le caractère métastable de  $\phi_{\mathbf{K}}$  dans le paragraphe suivant, et nous aborderons le problème des excitations dans la section § 3 à l'aide du formalisme de Bogoliubov.

## 2-4 Métastabilité et critère de Landau

Pour étudier la métastabilité éventuelle de  $\phi_{\mathbf{K}}$ , nous allons lui ajouter une petite perturbation

$$\phi_{\mathbf{K}} \longrightarrow \phi_{\mathbf{K}} + \delta\phi \quad (55)$$

et regarder si cela augmente son énergie moyenne. Si c'est le cas pour tout  $\delta\phi$ , alors  $\phi_{\mathbf{K}}$  correspond à un minimum local de  $\epsilon_{\text{GP}}$  vis-à-vis des fonctions de Hartree, en accord avec l'idée d'un courant métastable<sup>3</sup>.

3. Cette question n'est pertinente que pour un problème non-linéaire comme l'équation de GP. Dans le cas linéaire décrit par un hamiltonien  $\hat{H}$ , d'états propres  $\psi_n$  avec  $E_0 < E_1 < \dots$ , un état  $\psi_n$  avec  $n \neq 0$  n'est pas métastable. En effet, l'état

$$|\psi\rangle = \sqrt{1-|u|^2} |\psi_n\rangle + u |\psi_0\rangle, \quad (56)$$

où  $u$  est un nombre complexe tel que  $|u| \ll 1$ , a pour énergie moyenne

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = (1-|u|^2)E_n + |u|^2E_0 = E_n - |u|^2(E_n - E_0), \quad (57)$$

ce qui est toujours plus petit que  $E_n$  pour  $u \neq 0$ . Il est donc toujours possible d'abaisser l'énergie de  $\psi_n$  en le contaminant par des états d'énergies inférieures.

Du fait de l'uniformité du gaz, il est tentant de décomposer cette petite perturbation en série de Fourier et de regarder l'effet séparé de chaque composante de Fourier  $e^{i(\mathbf{K}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}}$ . Il faut néanmoins prendre en compte le fait que le terme non-linéaire cubique de l'équation de GP,  $\psi\psi\psi^*$ , va générer à l'ordre dominant du calcul un terme en  $e^{i(\mathbf{K}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}}$  en mélangeant le carré du terme principal  $e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$  avec le complexe conjugué  $(e^{i(\mathbf{K}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}})^*$  de la perturbation. Nous allons donc écrire notre état perturbé, voisin de  $\phi_{\mathbf{K}}$ , sous la forme :

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}}{L^{3/2}} (\phi_0 + u e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + v^* e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}) \quad (58)$$

avec

$$\phi_0 = \sqrt{1-|u|^2-|v|^2} \quad \text{et} \quad |u|, |v| \ll 1. \quad (59)$$

La raison pour laquelle on introduit  $v^*$  et non  $v$  dans cette fonction apparaîtra plus loin [cf. (62)] : l'énergie fera intervenir les produits  $u^*v$  et  $v^*u$  ainsi que  $|u|^2$  et  $|v|^2$ , mais pas  $uv$  ou  $u^*v^*$  : elle pourra donc s'écrire comme une forme quadratique simple entre les deux vecteurs  $(u, v)$  et  $(u^*, v^*)$ .

Esquissons brièvement le calcul de  $\epsilon_{\text{GP}}(\phi)$ , qui ne pose aucune difficulté de principe. Le calcul de la densité  $N|\phi(\mathbf{r})|^2$  fait apparaître un terme constant et des termes modulés en  $\cos(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})$ ,  $\sin(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})$ ,  $\cos(2\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})$  et  $\sin(2\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})$ . Une fois cette densité élevée au carré et l'intégrale  $\int |\phi|^4$  calculée, il reste à l'ordre deux inclus en  $u$  et  $v$  :

$$\begin{aligned} \frac{Ng}{2} \int |\phi|^4 &= \frac{g\rho}{2} [1 + 2|u + v|^2] \\ &= \frac{g\rho}{2} + g\rho [|u|^2 + |v|^2 + u^*v + uv^*]. \end{aligned} \quad (60)$$

La contribution de l'énergie cinétique à la fonctionnelle d'énergie  $\epsilon_{\text{GP}}$  est :

$$\begin{aligned} &(1-|u|^2-|v|^2) \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + |u|^2 \frac{\hbar^2 (\mathbf{K} + \mathbf{q})^2}{2m} + |v|^2 \frac{\hbar^2 (\mathbf{K} - \mathbf{q})^2}{2m} \\ &= \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + |u|^2 \frac{\hbar^2}{2m} (q^2 + 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) + |v|^2 \frac{\hbar^2}{2m} (q^2 - 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (61)$$

Cette fonctionnelle est donc, à l'ordre le plus bas non nul, une forme quadratique en  $u$  et  $v$  :

$$\Delta\epsilon = \epsilon_{\text{GP}}(u, v) - \epsilon_{\text{GP}}(0) = (u^*, v^*) \hat{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (62)$$

où

$$\epsilon_{\text{GP}}(0) = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + \frac{g\rho}{2} \quad (63)$$

et où  $\hat{\mathcal{H}}$  est la matrice symétrique réelle :

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{2m} (q^2 + 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) + g\rho & g\rho \\ g\rho & \frac{\hbar^2}{2m} (q^2 - 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) + g\rho \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Pour que l'état de départ  $\phi_{\mathbf{K}}$  soit un minimum local de la fonctionnelle d'énergie, il faut que la matrice  $\hat{\mathcal{H}}$  soit positive, c'est-à-dire que ses deux valeurs propres (dont on sait qu'elles sont réelles) soient également positives ou nulles. Ceci se transcrit simplement en écrivant que la trace et le déterminant de  $\hat{\mathcal{H}}$  doivent tous deux être positifs quel que soit  $\mathbf{q}$  :

$$\text{Tr}(\hat{\mathcal{H}}) \geq 0 \quad : \quad \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + g\rho \geq 0 \quad (65)$$

$$\text{Det}(\hat{\mathcal{H}}) \geq 0 \quad : \quad \frac{\hbar^2}{m} \left( \mathbf{K} \cdot \frac{\mathbf{q}}{q} \right)^2 \leq g\rho + \frac{\hbar^2 q^2}{4m} \quad (66)$$

La première inégalité est satisfaite pourvu que le gaz soit en interaction répulsive ( $g > 0$ ), ce que nous avons supposé ici. La contrainte provenant de la deuxième inégalité est la plus forte quand on prend  $\mathbf{q} \parallel \mathbf{K}$  et de longueur tendant vers 0, et elle s'écrit alors

$$V = \frac{\hbar K}{m} < c_s = \sqrt{g\rho/m}. \quad (67)$$

Il faut que la vitesse  $V = \hbar K/m$  associée à la fonction d'onde  $\phi_{\mathbf{K}}$  soit inférieure à la vitesse du son si l'on veut que  $\phi_{\mathbf{K}}$  soit un minimum local de la fonctionnelle d'énergie de GP. Quand cette condition est vérifiée, l'état superfluide de vitesse  $V$  est « robuste » vis-à-vis de perturbations statiques (par exemple la rugosité des parois), correspondant à une faible modification de la fonctionnelle de GP. C'est le *critère de Landau*, que nous allons retrouver dans la section suivante par l'approche de Bogoliubov et l'analyse des modes propres ( $u, v$ ) décrivant la dynamique autour de  $\phi_{\mathbf{K}}$ .

### 3 L'approche de Bogoliubov (champ classique)

Le paragraphe précédent nous a permis de vérifier que les solutions stationnaires de type onde plane étaient bien des minima locaux de la fonctionnelle d'énergie  $\epsilon_{\text{GP}}$ , pourvu que la vitesse  $V = \hbar K/m$  correspondante soit inférieure à la vitesse du son  $c_s$ . Pour aller plus loin, il nous faut maintenant déterminer le mouvement de la fonction d'onde du condensat au voisinage de ces minima. En dynamique hamiltonienne usuelle, les petites oscillations au fond d'un puits de potentiel sont caractérisées par la courbure de l'énergie au point d'équilibre. Pour notre problème non-linéaire, nous allons voir que la situation est un peu plus compliquée [Pour une discussion détaillée, voir par exemple Blaizot & Ripka (1986) et Castin (2001)].

#### 3-1 Linéarisation des équations du mouvement

Pour analyser la dynamique des petites perturbations à la solution  $\phi_{\mathbf{K}}$ , nous prenons comme ci-dessus l'*ansatz*

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \mu t/\hbar)}}{L^{3/2}} [\phi_0(t) + u(t) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} + v^*(t) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}] \quad (68)$$

avec

$$|\phi_0(t)|^2 + |u(t)|^2 + |v(t)|^2 = 1, \quad \mu = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + g\rho, \quad \rho = \frac{N}{L^3}. \quad (69)$$

L'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps (49) projetée sur les états  $e^{i(\mathbf{K} \pm \mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}}$  détermine les équations du mouvement pour les fonctions  $u$  et  $v^*$ . En choisissant la convention de phase  $\phi_0$  réel positif ( $\phi_0 \approx 1$ ), on trouve au premier ordre en ces fonctions :

$$i\hbar \frac{du}{dt} = \left[ \frac{\hbar^2}{2m} (q^2 + 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) + g\rho \right] u + g\rho v \quad (70)$$

et

$$i\hbar \frac{dv^*}{dt} = g\rho u^* + \left[ \frac{\hbar^2}{2m} (q^2 - 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) + g\rho \right] v^*. \quad (71)$$

On reconnaît dans les coefficients qui interviennent dans la première équation les mêmes termes que ceux de la première ligne de la matrice  $\hat{\mathcal{H}}$

de (64). De même, la deuxième équation fait intervenir les mêmes coefficients que ceux intervenant dans la seconde ligne de  $\hat{\mathcal{H}}$ . Toutefois, on ne peut pas en déduire que la dynamique est régie par  $\hat{\mathcal{H}}$  car les deux équations (70) et (71) ne portent pas sur les mêmes quantités : la première porte sur le couple  $(u, v)$ , la seconde sur le couple  $(u^*, v^*)$ .

Pour obtenir un système fermé de deux équations différentielles, il faut prendre le complexe conjugué d'une des deux équations précédentes, par exemple (71), ce qui donne

$$i\hbar \frac{dv}{dt} = -g\rho u - \left[ \frac{\hbar^2}{2m} (q^2 - 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) + g\rho \right] v. \quad (72)$$

On peut alors écrire l'évolution du couple  $(u, v)$  de manière compacte :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (73)$$

où l'opérateur  $\hat{\mathcal{L}}$  se déduit de  $\hat{\mathcal{H}}$  en changeant les signes de la 2<sup>ème</sup> ligne :

$$\hat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{2m} (q^2 + 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) + g\rho & g\rho \\ -g\rho & -\frac{\hbar^2}{2m} (q^2 - 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) - g\rho \end{pmatrix}. \quad (74)$$

Intéressons-nous aux solutions du système différentiel (73). Si l'opérateur est diagonalisable, la recherche de ces solutions est simple. À partir des vecteurs propres  $X_j$ ,  $j = 1, 2$  de  $\hat{\mathcal{L}}$  :

$$\hat{\mathcal{L}}X_j = \epsilon_j X_j, \quad X_j = \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} \quad (75)$$

on construit deux solutions indépendantes  $X_j e^{-i\epsilon_j t/\hbar}$ . Toutefois, le fait que l'opérateur  $\hat{\mathcal{L}}$  soit diagonalisable n'est pas acquis. En effet, contrairement à l'opérateur  $\hat{\mathcal{H}}$ , cet opérateur ne présente pas de symétrie particulière : il n'est ni symétrique, ni hermitien.

En fait, si l'on exclut le cas particulier  $\mathbf{q} = 0$  qui est sans importance pour notre étude, l'opérateur  $\hat{\mathcal{L}}$  est effectivement diagonalisable. Pour le montrer, écrivons-le sous la forme

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}}{m} \hat{\mathbf{1}} + \hbar\omega_q \begin{pmatrix} \cosh(2\alpha_q) & -\sinh(2\alpha_q) \\ \sinh(2\alpha_q) & -\cosh(2\alpha_q) \end{pmatrix} \quad (76)$$

où on a posé

$$\omega_q = \left[ \frac{g\rho}{m} q^2 + \left( \frac{\hbar q^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (77)$$

qui correspond à la fameuse relation de dispersion de Bogoliubov que nous commenterons un peu plus loin, et

$$\tanh(2\alpha_q) = \frac{-g\rho}{\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + g\rho}. \quad (78)$$

On trouve alors les valeurs propres et les vecteurs propres associés :

$$\hbar\omega_q \leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha_q \\ \sinh \alpha_q \end{pmatrix} \quad - \hbar\omega_q \leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh \alpha_q \\ \cosh \alpha_q \end{pmatrix}. \quad (79)$$

On remarque d'abord que ces valeurs propres sont toujours réelles : il n'y a aucune instabilité dynamique, c'est-à-dire aucune croissance exponentielle de  $u$  et de  $v$ . Par ailleurs, en reportant le résultat pour les valeurs de  $u$  et  $v$  trouvées en (79) pour  $-\hbar\omega_q$  dans la fonction d'onde (68), on constate que ce mode est identique au mode correspondant à la valeur propre  $+\hbar\omega_q$  pour le vecteur d'onde  $-\mathbf{q}$ . Pour éviter un double comptage des modes, on considérera pour chaque vecteur d'onde  $\mathbf{q}$  uniquement le mode (79) correspondant à  $+\hbar\omega_q$ .

### 3-2 Le spectre de Bogoliubov

Nous allons maintenant analyser les modes propres que nous venons de trouver, en nous restreignant au cas d'un état initial au repos,  $\mathbf{K} = 0$ , pour simplifier les notations. En injectant (79) dans l'ansatz initial (68), nous pouvons écrire la solution perturbée sous la forme :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{-i\mu t/\hbar}}{L^{3/2}} \left\{ \phi_0(t) + \gamma \left[ \cosh \alpha_q e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega_q t)} + \sinh \alpha_q e^{-i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega_q t)} \right] \right\} \quad (80)$$

où  $\gamma \ll 1$  repère le degré d'excitation de la perturbation et

$$|\phi_0|^2 + \gamma^2 \cosh(2\alpha_q) = 1. \quad (81)$$

**Énergie et impulsion des modes propres.** Calculons l'impulsion moyenne par particule associée à cet état. Nous l'obtenons à partir de l'opérateur  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$  :

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = -i\hbar \int \phi^*(\mathbf{r}, t) [\nabla \phi(\mathbf{r}, t)] d^3r = \gamma^2 \hbar \mathbf{q}. \quad (82)$$

L'énergie moyenne par particule se calcule directement à partir de l'opérateur  $\hat{\mathcal{H}}$  défini en (62-64) :

$$\epsilon_{\text{GP}}(\mathbf{q}) = \frac{g\rho}{2} + \gamma^2 (\cosh \alpha_q, \sinh \alpha_q) \hat{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} \cosh \alpha_q \\ \sinh \alpha_q \end{pmatrix} = \frac{g\rho}{2} + \gamma^2 \hbar \omega_q. \quad (83)$$

**La relation de dispersion de Bogoliubov.** Créer l'excitation de fonction d'onde (80) revient donc à ajouter à chaque particule l'énergie  $\gamma^2 \hbar \omega_q$  et l'impulsion  $\gamma^2 \hbar \mathbf{q}$  par rapport à l'état non perturbé  $e^{-i\mu t/\hbar}/L^{3/2}$ . Ce résultat rend légitime le fait de considérer (77) comme une relation de dispersion.

La relation

$$\omega_q = \left[ \frac{g\rho}{m} q^2 + \left( \frac{\hbar q^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (84)$$

présente deux régimes asymptotiques intéressants, selon que le terme dominant est la première ou la seconde contribution à la racine carrée :

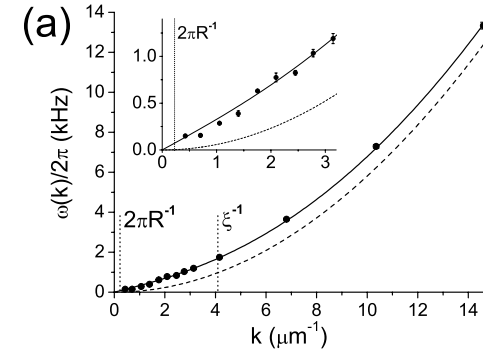
— Pour  $q$  petit,  $\omega_q$  se simplifie pour donner

$$\frac{\hbar^2 q^2}{2m} \ll g\rho \Leftrightarrow \frac{\hbar q}{m} \ll c_s : \quad \omega_q \approx c_s q \quad (85)$$

où on a utilisé la définition  $c_s^2 = g\rho/m$ . On trouve une relation de dispersion linéaire pour la perturbation de vecteur d'onde  $\pm \mathbf{q}$ , avec une vitesse de propagation donnée par  $c_s$  : cette quantité peut donc bien s'interpréter comme la vitesse du son dans le gaz. Notons que dans ce régime, le coefficient  $\alpha_q$  est grand et négatif [cf. (78)], de sorte que les poids  $u$  et  $v$  sont comparables.

— Pour  $q$  grand, un développement limité de (84) donne

$$\frac{\hbar^2 q^2}{2m} \gg g\rho \Leftrightarrow \frac{\hbar q}{m} \gg c_s : \quad \hbar \omega_q \approx \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + g\rho. \quad (86)$$



**FIGURE 4.** Mesure expérimentale du spectre de Bogoliubov par spectroscopie de Bragg extraite de Steinhauer, Ozeri, et al. (2002). La ligne verticale de gauche, à  $k = 2\pi/R$ , correspond au nombre d'onde le plus petit compatible avec l'extension spatiale du condensat (voir figure 5). La courbe tiretée correspond à la relation de dispersion du gaz parfait. La vitesse du son (pente à l'origine) vaut  $c_s = 2.0$  (1) mm/s.

Le premier terme n'est pas une surprise : c'est l'énergie cinétique d'une particule libre. Le second terme est à première vue plus étonnant ; pourquoi faut-il payer l'énergie  $g\rho$  pour promouvoir des particules de l'état fondamental à l'état  $\mathbf{q}$  alors que ces particules se trouvaient déjà en interaction avec le reste du gaz ? La réponse se trouve dans l'argument vu en § 1-1 : en passant de l'état  $|N, 0\rangle$  où toutes les particules sont dans l'état fondamental à l'état  $|N - n, n\rangle$  où  $n$  particules sont devenues quasi-libres en gagnant l'impulsion  $q$ , on doit payer l'énergie d'échange  $V_{\text{ech}}(N - n)n \approx V_{\text{ech}}Nn$  avec  $V_{\text{ech}} = g/L^3$ , soit  $g\rho$  par particule ainsi promue. Par ailleurs, on trouve en utilisant (78) que  $u_q \gg v_q$  dans ce régime, ce qui confirme l'interprétation de l'excitation en terme de particule libre.

— La frontière entre les deux régimes est  $q \sim mc_s/\hbar \sim 1/\xi$ , où la longueur de cicatrisation  $\xi$ , qui représente l'échelle de longueur caractéristique associée aux interactions, a été définie en (27).

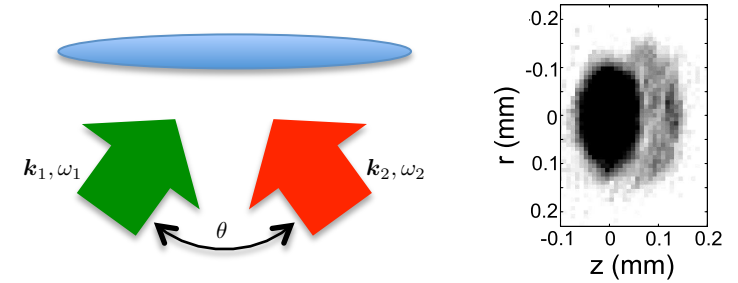
**Théorème de Goldstone.** Le spectre de Bogoliubov possède cette propriété remarquable que  $\omega_q \rightarrow 0$  quand  $q \rightarrow 0$ . À la limite thermodynamique, il n'y a donc pas de gap entre l'énergie de l'état fondamental et celle du premier état excité, ce qui constitue une illustration du théorème général de Goldstone (Hugenholtz & Pines 1959; Gavoret & Nozières 1964). Les modes de basse fréquence décrivent essentiellement des fluctuations de phase. En effet, en utilisant le fait que  $u \approx -v$  pour ces modes, on peut écrire la fonction d'onde comme

$$\phi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{L^{3/2}} [1 + u e^{iqx} + v^* e^{iqx}] \sim \frac{1}{L^{3/2}} [1 + 2iu \sin(qx)], \quad u \ll 1. \quad (87)$$

Cela correspond à l'ordre le plus bas à une amplitude constante et une phase oscillant entre  $\pm 2u$ . Or il est simple de comprendre pourquoi ces fluctuations de phase à grande échelle coûtent une énergie très faible : le choix de l'état fondamental se fait en lui attribuant une phase particulière, c'est-à-dire en brisant la symétrie  $U(1)$  du problème ; nous avons pris cette phase nulle en posant  $\phi_0 = 1$ , mais n'importe quel autre choix ( $\phi_0 = e^{i\theta_0}$ ) aurait été tout aussi légitime et aurait conduit à la même énergie. Par conséquent, un mode correspondant à une variation spatiale très lente de la phase, se produisant sur une échelle de distance arbitrairement grande, doit être associé à un accroissement d'énergie arbitrairement faible.

**Mesure du spectre de Bogoliubov.** Les mesures sur les nuages d'atomes froids permettent de vérifier précisément la validité de la relation de dispersion (77). Nous avons représenté sur la figure 4 le résultat obtenu par Steinhauer, Ozeri, et al. (2002) [voir aussi Ozeri, Katz, et al. (2005)]. Cette mesure est faite par spectroscopie de Bragg, technique que nous avons déjà décrite au chapitre 2 et rappelée sur la figure 5. L'accord théorie-expérience, obtenu sans paramètre ajustable, est remarquable. Il concerne aussi bien le régime linéaire, correspondant aux excitations collectives de type phonon se propageant à la vitesse  $c_s$  que le régime quadratique correspondant aux excitations individuelles, avec le décalage en énergie  $g\rho$ .

**Le critère de Landau retrouvé.** Il existe de multiples façons pour retrouver, à partir de la relation de dispersion de Bogoliubov, le critère de Landau ; rappelons que ce critère exprime la stabilité de l'état superfluide vis-à-vis d'une faible perturbation de vitesse relative inférieure à  $c_s$ . Prenons



**FIGURE 5.** Principe de l'expérience de Steinhauer, Ozeri, et al. (2002) permettant de mesurer le spectre de Bogoliubov. Gauche : un condensat en forme de cigare (longueur  $56 \mu\text{m}$ , diamètre  $6 \mu\text{m}$ ) est éclairé par une impulsion lumineuse constituée de deux faisceaux faisant un angle  $\theta$  ajustable entre 3 et 130 degrés, de sorte que le transfert d'impulsion  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$  dans un processus absorption-émission stimulée est dirigé le long de l'axe du condensat. Droite : après l'impulsion, on procède à une expérience de temps de vol (38 ms) et on mesure le nombre d'atomes ayant gagné l'impulsion  $\hbar\mathbf{q}$ . Pour chaque valeur de  $\hbar\mathbf{q}$  (ici  $q = 2.8 \mu\text{m}^{-1}$ ), on mesure l'énergie  $\hbar(\omega_1 - \omega_2)$  qui maximise le nombre d'atomes excités. On obtient ainsi la relation de dispersion de la figure 4.

cette fois-ci notre superfluide au repos et supposons qu'un objet ponctuel de masse  $M$  et de vitesse  $\mathbf{V}$  se propage à l'intérieur. Pour que cet objet excite le superfluide, il faut qu'il existe un vecteur d'onde  $\mathbf{q}$ , une amplitude  $\gamma$  et une vitesse finale  $\mathbf{V}'$  de l'objet tels que l'énergie et l'impulsion soient conservées lors de l'excitation :

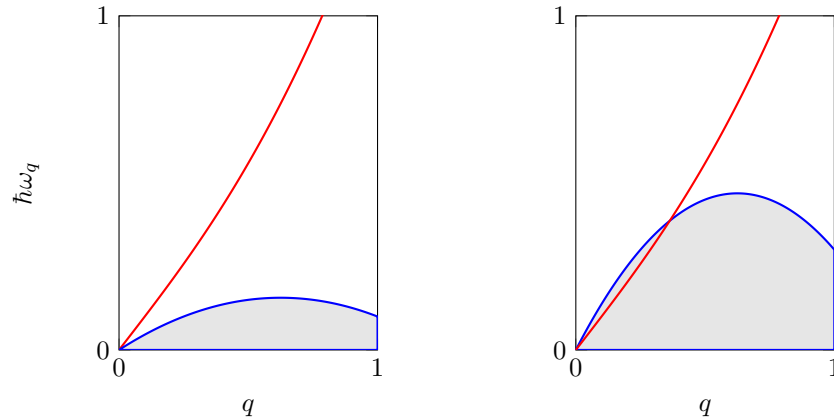
$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV'^2 + N\gamma^2\hbar\omega_q \quad (88)$$

$$M\mathbf{V} = M\mathbf{V}' + N\gamma^2\hbar\mathbf{q}. \quad (89)$$

Extrayons  $\mathbf{V}'$  de la seconde équation pour la reporter dans la première. On arrive alors à :

$$\omega_q = \mathbf{q} \cdot \mathbf{V} - N\gamma^2 \frac{\hbar q^2}{2M}. \quad (90)$$

Une résolution graphique (cf. figure 6) permet de vérifier que cette équation n'a pas de solution si le module de la vitesse  $\mathbf{V}$  est strictement inférieur à la vitesse du son  $c_s$ .

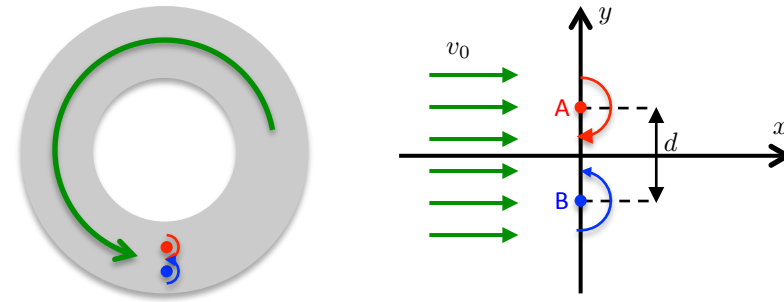


**FIGURE 6.** Résolution graphique de l'équation (90) : on cherche l'intersection entre le spectre de Bogoliubov (en rouge) et la fonction  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{V} - N\gamma^2 \frac{\hbar q^2}{2M}$  (en bleu), tracée en prenant ici  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{V}$  colinéaires. Si  $V$  est plus petit que la pente à l'origine de  $\omega_q$ , c'est-à-dire  $c_s$ , il n'y a pas de solution (gauche). Sinon, il y a un domaine fini de valeurs de  $\mathbf{q}$  correspondant aux excitations qui peuvent être créées (droite); les unités pour  $q$  et  $\omega_q$  sont arbitraires.

### 3-3 Au delà du critère de Landau : les vortex

Pour évaluer la métastabilité de l'onde plane  $e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}$ , nous avons considéré jusqu'ici une perturbation également de type onde plane en  $e^{i(\mathbf{K} \pm \mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}}$ . On peut également envisager des perturbations plus localisées, liées en particulier à l'apparition de vortex ou de paires de vortex (Langer & Fisher 1967; Frisch, Pomeau, et al. 1992; Winiecki, McCann, et al. 1999)

Plaçons-nous à deux dimensions pour simplifier l'analyse [cf. Ma (1985), chapitre 30] et considérons un anneau de rayon moyen  $r_0$  (figure 7). Supposons que cet anneau est parcouru par un courant permanent correspondant à un seul quantum de circulation, soit la fonction d'onde  $e^{i\varphi}$ . Un moyen pour faire disparaître ce courant permanent est de nucléer au sein du superfluide une paire vortex-antivortex, de séparer les membres de cette paire de sorte que le vortex de charge négative aille à l'intérieur de l'anneau et le vortex de charge positive parte à l'infini. À l'issue de ce pro-



**FIGURE 7.** Gauche : anneau parcouru par un courant superfluide, avec une paire de vortex s'opposant à la circulation du courant. Droite : géométrie utilisée pour estimer l'énergie cinétique du fluide en fonction de la distance  $d$  entre les vortex.

cessus, la circulation dans l'anneau aura décré d'une unité : le superfluide sera au repos.

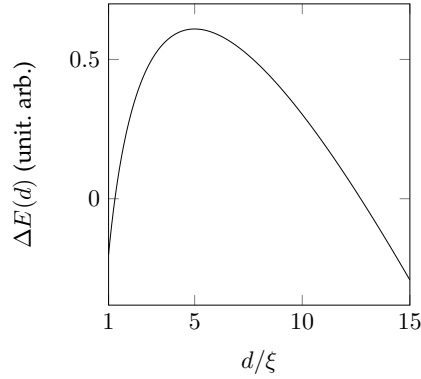
Pour évaluer la probabilité qu'un tel processus se produise, il faut déterminer l'énergie à payer pour séparer les membres de la paire de vortex par une distance  $d$  et comparer cette énergie à l'énergie d'activation thermique. Considérons donc la configuration représentée sur la figure 7 (droite) où le superfluide se propage à vitesse  $v_0$  le long de l'axe  $x$  et où deux vortex  $A$  et  $B$  de charges opposées sont placés en  $y = \pm d/2$ . Chaque vortex crée un champ de vitesse orthoradial, variant comme l'inverse de la distance au centre  $r_0$  de ce vortex <sup>4</sup> :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \mathbf{e}_\varphi, \tag{91}$$

de sorte que la somme des champs de vitesse des deux vortex s'oppose au flot du superfluide au voisinage de l'origine. À une distance de l'origine grande devant  $d$ , les champs de vitesses créés par les deux vortex sont opposés et se compensent pratiquement.

La variation d'énergie entre les situations avec et sans paire de vortex

<sup>4</sup>. Ce champ de vitesse est formellement identique au champ magnétique créé par une ligne de courant rectiligne, perpendiculaire au plan de la figure.



**FIGURE 8.** Variation de l'énergie d'une paire de vortex dans un superfluide 2D de vitesse  $v_0$  en fonction de la distance  $d$  entre les vortex. Courbe tracée pour  $mv_0\xi/\hbar = 0.2$ .

concerne essentiellement l'énergie cinétique et elle s'écrit

$$\begin{aligned}\Delta E(d) &= \frac{1}{2}m\rho \int (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B)^2 d^2r - \frac{1}{2}m\rho \int \mathbf{v}_0^2 d^2r \\ &= \frac{1}{2}m\rho \int (\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B)^2 d^2r + m\rho \mathbf{v}_0 \cdot \int (\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B) d^2r.\end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme, à savoir l'énergie de la paire de vortex, est toujours positif et est une fonction croissante de leur distance. On ne dispose pas d'un résultat analytique pour cette intégrale, mais on obtient à des termes correctifs au logarithme près (Nozières & Pines 1990):

$$\frac{1}{2}m\rho \int (\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B)^2 d^2r \approx 2\pi \frac{\hbar^2\rho}{m} \log \frac{d}{\xi} \quad (92)$$

où l'on a mis une coupure à courte distance de l'ordre de  $\xi$ , qui représente la taille d'un cœur de vortex. Le second terme donne

$$m\rho \mathbf{v}_0 \cdot \int (\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B) d^2r = -2\pi \hbar\rho v_0 d. \quad (93)$$

La variation d'énergie liée à la présence de la paire de vortex vaut donc :

$$\Delta E(d) = 2\pi \hbar\rho \left[ \frac{\hbar}{m} \log \left( \frac{d}{\xi} \right) - v_0 d \right] \quad (94)$$

Cette fonction est tracée sur la figure 8; partant de  $d \sim \xi$ , elle commence par croître pour passer par un maximum en  $d_{\max} = \hbar/mv_0$ , et décroît ensuite linéairement avec  $d$  (dans le cas de l'anneau, cette décroissance s'arrête quand  $d$  devient de l'ordre de la largeur de l'anneau). La hauteur de la barrière à franchir, partant de  $d = \xi$ , est

$$\Delta E_{\max} \approx 2\pi \frac{\hbar^2\rho}{m} \log \frac{c_s}{v_0}, \quad (95)$$

où l'on doit choisir de toute façon  $v_0 < c_s$  si l'on souhaite que le superfluide soit stable vis-à-vis du critère de Landau.

Il est intéressant de comparer cette hauteur de barrière à  $k_B T$ , pour déterminer si elle peut être thermiquement activée. On trouve

$$\frac{\Delta E_{\max}}{k_B T} \approx \rho\lambda_T^2 \log \frac{c_s}{v_0}. \quad (96)$$

Si le superfluide 2D est profondément dans le régime de dégénérescence quantique,  $\rho\lambda_T^2 \gg 1$ , l'activation thermique est peu probable. En revanche, proche du point de dégénérescence, ce processus joue un rôle important.

**Obstacles étendus.** Si on place dans le flot du superfluide un obstacle de taille  $\ell$ , il est possible de nucléer une paire de vortex telle que chaque membre parte d'une extrémité de l'obstacle. Ceci réduit la barrière à franchir, puisqu'il suffit que la paire de vortex acquiert par une fluctuation thermique l'énergie

$$\Delta E_{\max} - \Delta E(\ell) \quad (97)$$

pour pouvoir se séparer complètement. En particulier si la vitesse du flot superfluide est telle que

$$d_{\max} = \frac{\hbar}{mv_0} \leq \ell \quad \text{soit} \quad v_0 \geq v_{\text{crit}} \equiv \frac{\hbar}{m\ell}, \quad (98)$$

alors on s'attend à ce que des paires de vortex soient générées de manière continue et que le flot superfluide soit rapidement freiné (Stiessberger & Zwerger 2000; Crescimanno, Koay, et al. 2000). Ce scénario est pertinent en particulier quand la taille  $\ell$  de l'objet est notablement supérieure à la longueur de cicatrisation  $\xi$ , puisque la vitesse critique ainsi obtenue est notablement inférieure à la vitesse du son. Une expérience mettant en évidence le caractère superfluide d'un gaz de Bose à 2D quand il est traversé par un objet de taille  $\gtrsim \xi$  est décrite par Desbuquois, Chomaz, et al. (2012).

### 3-4 L'approche « amplitude – phase »

Dans ce qui précède, nous avons analysé les perturbations à la solution  $e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$  en lui ajoutant des termes en ondes planes  $e^{i(\mathbf{K}\pm\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}}$ , avec des amplitudes  $u(t)$  et  $v(t)$  évoluant de façon couplée. Une approche équivalente consiste à paramétrer la perturbation plutôt en terme de modulation d'amplitude et de phase de l'onde  $e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$ .

Écrivons l'onde perturbée sous la forme :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = |\phi(\mathbf{r}, t)| e^{i\theta(\mathbf{r}, t)} \quad (99)$$

où nous allons supposer que la phase  $\theta$  varie lentement dans l'espace, sans point de singularité (cette hypothèse exclut notamment les vortex). Nous supposons également que les fluctuations d'amplitude sont faibles de sorte que la densité de probabilité associée à  $\phi(\mathbf{r}, t)$  peut s'écrire

$$|\phi(\mathbf{r}, t)|^2 = \frac{1}{L^3} (1 + 2\eta(\mathbf{r}, t)) \quad \text{avec} \quad \eta \ll 1 \quad \text{et} \quad \int \eta d^3r = 0. \quad (100)$$

La fonctionnelle d'énergie s'écrit avec ce paramétrage :

$$E = \frac{g\rho}{2}N + \frac{\hbar^2\rho}{2m} \int [\nabla\theta(\mathbf{r})]^2 d^3r + \int \left\{ \frac{\hbar^2\rho}{2m} [\nabla\eta(\mathbf{r})]^2 + 2g\rho^2 [\eta(\mathbf{r})]^2 \right\} d^3r \quad (101)$$

et l'équation de GP conduit aux deux équations couplées

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\hbar}{2m} \nabla^2\eta - \frac{g\rho}{\hbar} (1 + 2\eta), \quad (102)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \nabla^2\theta, \quad (103)$$

qui sont, dans ce point de vue « amplitude–phase », l'équivalent des équations vérifiées par les coefficients  $u$  et  $v$ .

Si la phase et l'amplitude varient de façon régulière dans l'espace, on peut les décomposer en série de Fourier :

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad \eta(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}. \quad (104)$$

Les fonctions  $\theta$  et  $\eta$  sont réelles, ce qui entraîne  $c_{\mathbf{q}}^* = c_{-\mathbf{q}}$  et  $d_{\mathbf{q}}^* = d_{-\mathbf{q}}$ . De plus, la conservation de la norme entraîne  $\int \eta d^3r = 0$ , soit  $d_0 = 0$ . L'évolution des coefficients  $c_{\mathbf{q}}$  et  $d_{\mathbf{q}}$  déduite de (102–103) s'écrit pour  $\mathbf{q} \neq 0$  :

$$\hbar \dot{c}_{\mathbf{q}} = -\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + 2g\rho\right) d_{\mathbf{q}}, \quad (105)$$

$$\hbar \dot{d}_{\mathbf{q}} = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} c_{\mathbf{q}}. \quad (106)$$

Pour  $\mathbf{q} = 0$ , on obtient  $\dot{c}_0 = -g\rho/\hbar$ , donnant l'évolution dans le temps de la phase globale du gaz.

En éliminant une des deux variables ( $c_{\mathbf{q}}$  ou  $d_{\mathbf{q}}$ ) au profit de l'autre, on obtient l'évolution

$$\ddot{c}_{\mathbf{q}} + \omega_q^2 c_{\mathbf{q}} = 0, \quad \ddot{d}_{\mathbf{q}} + \omega_q^2 d_{\mathbf{q}} = 0, \quad (107)$$

avec la fréquence  $\omega_q$  donnée par

$$\hbar\omega_q = \left[ \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \left( \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + 2g\rho \right) \right]^{1/2}, \quad (108)$$

ce qui n'est autre que le spectre de Bogoliubov donné en (77).

En notant  $\bar{c}_q$  et  $\bar{d}_q$  les amplitudes de ces coefficients, nous obtenons par ailleurs :

$$\frac{\bar{d}_q}{\bar{c}_q} = \frac{\hbar\omega_q}{\hbar^2 q^2/2m + 2g\rho} = \left[ \frac{\hbar^2 q^2/2m}{\hbar^2 q^2/2m + 2g\rho} \right]^{1/2}. \quad (109)$$

Pour  $q$  petit,  $\bar{d}_q \ll \bar{c}_q$  : on retrouve le fait mentionné plus haut [cf. (87)] que les modes correspondent essentiellement à des fluctuations de phase.

Comme nous le verrons en § 4, un intérêt de cette approche est de permettre d'évaluer simplement les fluctuations de phase et de densité du gaz à l'équilibre thermique.



## 4 Quasi-particules à l'équilibre thermique

### 4-1 Populations des modes à l'équilibre

Nous supposons dans ce paragraphe que le gaz est en équilibre à la température  $T$ . Les différents modes de Bogoliubov que nous avons déterminés au paragraphe précédent sont donc peuplés thermiquement et nous souhaitons évaluer la moyenne de certaines quantités physiques à cette température. Ceci requiert de connaître le degré d'excitation de chaque mode en fonction de  $T$ .

Dans la cadre de la théorie de champ classique que nous avons développée ici, on sait que cette moyenne thermique va donner lieu à des divergences à haute fréquence, au moins à trois dimensions : c'est le problème bien connu du rayonnement du corps noir, qui ne trouve sa solution qu'en passant à une théorie quantique de ces modes, c'est-à-dire en posant que les énergies et les impulsions contenues dans un mode de Bogoliubov sont quantifiées, le quantum étant  $(\hbar\omega_q, \hbar\mathbf{q})$ . Ceci revient à poser que l'excitation élémentaire dans le formalisme du paragraphe précédent [cf. (115)-(116)] est  $|\gamma|^2 = 1/N$ , où  $N$  est le nombre d'atomes. Comme le nombre d'excitations n'est pas conservé, la population d'un mode  $\mathbf{q}$  est donnée par la loi de Bose-Einstein de potentiel chimique nul :

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}) = \frac{1}{e^{\hbar\omega_q/k_B T} - 1}. \quad (110)$$

Il est utile d'évaluer également l'amplitude moyenne de l'excitation de chaque mode, c'est-à-dire  $\langle |u_q|^2 \rangle$  et  $\langle |v_q|^2 \rangle$ , ou alors  $\langle |c_q|^2 \rangle$  et  $\langle |d_q|^2 \rangle$  pour le point de vue amplitude-phase. Considérons par exemple ce deuxième cas et remarquons que la fonctionnelle d'énergie GP s'écrit en fonction de ces coefficients :

$$N\epsilon_{\text{GP}} = \frac{gN^2}{2L^3} + \rho L^3 \sum_{\mathbf{q}} \left[ \frac{\hbar^2 q^2}{2m} |c_q|^2 + \left( \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + 2g\rho \right) |d_q|^2 \right]. \quad (111)$$

Comme pour un oscillateur harmonique mécanique, l'énergie moyenne  $\mathcal{N}(\mathbf{q}) \epsilon_q$  du mode  $\mathbf{q}$  se partage en parts égales entre le terme provenant

de  $\langle |c_q|^2 \rangle$  et celui provenant de  $\langle |d_q|^2 \rangle$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{N}(\mathbf{q}) \epsilon_q &= \rho L^3 \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \langle |c_q|^2 \rangle \\ \frac{1}{2} \mathcal{N}(\mathbf{q}) \epsilon_q &= \rho L^3 \left( \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + 2g\rho \right) \langle |d_q|^2 \rangle \end{aligned} \quad (112)$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\langle |c_q|^2 \rangle = \frac{1}{2\rho L^3} \mathcal{N}(\mathbf{q}) \left( \frac{\hbar^2 q^2/2m + 2g\rho}{\hbar^2 q^2/2m} \right)^{1/2} \quad (113)$$

$$\langle |d_q|^2 \rangle = \frac{1}{2\rho L^3} \mathcal{N}(\mathbf{q}) \left( \frac{\hbar^2 q^2/2m}{\hbar^2 q^2/2m + 2g\rho} \right)^{1/2}. \quad (114)$$

**Remarque.** Dans le cadre de la théorie quantique du gaz de Bose en interaction, la quantification des modes de Bogoliubov apparaît naturellement (cf. appendice 2) : le fait que les atomes soient traités comme des particules quantiques et décrits par des opérateurs création  $\hat{a}_p^\dagger$  et annihilation  $\hat{a}_p$  avec  $[\hat{a}_p, \hat{a}_p^\dagger] = 1$  pour un état d'impulsion  $\mathbf{p}$  amène automatiquement une règle de commutation similaire pour les quasi-particules de Bogoliubov.

### 4-2 Quasi-particules et densité normale

Le traitement que nous avons suivi au paragraphe § 3-2 pour trouver les modes propres de l'opérateur de Bogoliubov  $\hat{\mathcal{L}}$  peut être mené sans modification pour l'état de départ  $\phi_{\mathbf{K}} = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$ , correspondant à un superfluide en mouvement à vitesse  $\mathbf{V} = \hbar\mathbf{K}/m$ . On trouve alors pour l'impulsion et l'énergie par particule :

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \hbar\mathbf{K} + \gamma^2 \hbar\mathbf{q}, \quad (115)$$

$$\epsilon_{\text{GP}}(\mathbf{q}) = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + \frac{g\rho}{2} + \gamma^2 \hbar \left( \omega_q + \frac{\hbar}{m} \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} \right). \quad (116)$$

Ce résultat est bien en accord avec la formule générale de changement de repère galiléen pour l'impulsion et l'énergie vue au chapitre précédent : si une particule possède dans un référentiel  $\mathcal{R}_0$  l'impulsion  $\mathbf{p}_0$  et l'énergie

$E_0$ , alors son impulsion et son énergie dans le référentiel  $\mathcal{R}$  bougeant à la vitesse  $-\mathbf{V}$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  sont :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{V} + \mathbf{p}_0, \quad E = \frac{1}{2}mV^2 + E_0 + \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{V}. \quad (117)$$

Les résultats (115-116) permettent de calculer simplement les densités normale et superfluide dans le cadre de la théorie de Bogoliubov. Plaçons-nous dans le référentiel du récipient, dans lequel la vitesse normale est par définition nulle,  $\mathbf{v}_n = 0$ . Supposons que le superfluide a la vitesse  $\mathbf{v}_s = \hbar\mathbf{K}/m$  par rapport à ce récipient. L'impulsion par unité de volume s'écrit dans ce cas (chapitre 2) :

$$\frac{\mathbf{P}}{L^3} = m\rho_n\mathbf{v}_n + m\rho_s\mathbf{v}_s = \rho_s \hbar\mathbf{K} \quad (118)$$

Par ailleurs, on peut calculer cette impulsion en sommant (115) sur les  $N$  atomes du gaz et sur tous les modes de Bogoliubov. Le degré d'excitation  $N\gamma^2$  de chaque mode de Bogoliubov est donné par sa population thermique moyenne  $\mathcal{N}(\mathbf{q})$  :

$$\frac{\mathbf{P}}{L^3} = \frac{N}{L^3} \hbar\mathbf{K} + \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{q}} \mathcal{N}(\mathbf{q}) \hbar\mathbf{q}. \quad (119)$$

avec pour ce superfluide en mouvement :

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}) = \mathcal{N}[\epsilon(\mathbf{q})], \quad (120)$$

où  $\mathcal{N}(\epsilon)$  correspond à la loi de Bose-Einstein et  $\epsilon(\mathbf{q})$  se déduit de (116)

$$\epsilon(\mathbf{q}) = \hbar\omega_{\mathbf{q}} + \frac{\hbar^2}{m} \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}. \quad (121)$$

L'impulsion totale (119) s'écrit alors

$$\frac{\mathbf{P}}{L^3} = \rho \hbar\mathbf{K} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathcal{N}(\mathbf{q}) \hbar\mathbf{q} \, d^3q. \quad (122)$$

Plaçons-nous dans la limite des faibles  $\mathbf{K}$ , nécessaire pour la validité du modèle à deux fluides. On peut faire un développement limité de  $\mathcal{N}(\mathbf{q})$  au premier ordre en  $K$ ,

$$\mathcal{N}[\epsilon(\mathbf{q})] = \mathcal{N}[\hbar\omega_{\mathbf{q}}] + \frac{\hbar^2}{m} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) \frac{d\mathcal{N}}{d\epsilon}. \quad (123)$$

La contribution du premier terme à l'intégrale (122) sur  $\mathbf{q}$  s'annule du fait de l'isotropie de  $\omega_{\mathbf{q}}$  et il reste

$$\frac{\mathbf{P}}{L^3} = \rho \hbar\mathbf{K} + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^3}{m} \int \frac{d\mathcal{N}}{d\epsilon} \mathbf{q} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) \, d^3q. \quad (124)$$

ce qui peut encore s'écrire du fait de l'isotropie de  $\omega_{\mathbf{q}}$  :

$$\frac{\mathbf{P}}{L^3} = \hbar\mathbf{K} \left[ \rho + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2}{3m} \int \frac{d\mathcal{N}}{d\epsilon} q^2 \, d^3q \right]. \quad (125)$$

La comparaison de (118) et (125) donne immédiatement (Landau 1941)

$$\rho_n = \rho - \rho_s = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2}{3m} \int \frac{d\mathcal{N}}{d\epsilon} q^2 \, d^3q \quad (126)$$

ce qui est bien positif puisque  $\mathcal{N}(\epsilon)$  est une fonction décroissante de  $\epsilon$ .

Pitaevskii & Stringari (2016) proposent une discussion détaillée de cette formule de Landau et de sa validité. Indiquons simplement ici quelques éléments :

— Dans le cas de basses températures,  $k_B T \ll mc_s^2 = g\rho$ , les  $\mathbf{q}$  qui contribuent à l'intégrale sont les phonons correspondant à la partie linéaire  $\omega_{\mathbf{q}} = c_s q$  de la relation de dispersion. On trouve alors

$$\rho_n = \frac{2\pi^2}{45} \frac{k_B T}{mc_s^2} \left( \frac{k_B T}{\hbar c_s} \right)^3 \quad (127)$$

Cette quantité est plus petite que la densité non condensée

$$\rho_{\text{non cond.}} = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{q}} \langle \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}} \rangle \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int \cosh(2\alpha_{\mathbf{q}}) \mathcal{N}(\mathbf{q}) \, d^3q \quad (128)$$

par le facteur  $\sim (k_B T / mc_s^2)^2$ . À basse température, la densité normale est donc beaucoup plus faible que la densité non condensée, le phénomène de déplétion quantique venant encore renforcer cet écart.

— Pour une température telle que  $k_B T \gg mc_s^2$ , c'est le régime de particule libre  $\omega_{\mathbf{q}} \approx \hbar q^2 / 2m$ ,  $\cosh(2\alpha_{\mathbf{q}}) \approx 1$  qui contribue essentiellement à l'intégrale et il est simple de montrer que  $\rho_n$  et  $\rho_{\text{non cond.}}$  coïncident, en utilisant une intégration par parties de (126).

Signalons enfin qu'il n'est pas possible d'étendre la validité de (126) jusqu'au point de condensation lui-même. En effet, le nombre de quasi-particules devient tellement grand dans la région critique qu'il n'est plus possible de les traiter comme un gaz parfait de potentiel chimique nul.

### 4-3 Fluctuations de phase à 3D

Intéressons-nous maintenant aux fluctuations de phase entre deux points  $\pm \mathbf{r}/2$  pour voir si la rigidité de phase requise pour un état superfluide est bien présente, au moins à trois dimensions. On a

$$\theta(\mathbf{r}/2) - \theta(-\mathbf{r}/2) = 2i \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}} \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/2) \quad (129)$$

soit en moyenne quadratique

$$\Delta^2 \theta(\mathbf{r}) \equiv \langle [\theta(\mathbf{r}/2) - \theta(-\mathbf{r}/2)]^2 \rangle = 4 \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int \langle |c_{\mathbf{q}}|^2 \rangle \sin^2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/2) d^3 q \quad (130)$$

En remplaçant  $\langle |c_{\mathbf{q}}|^2 \rangle$  par sa valeur (113), on arrive à :

$$\Delta^2 \theta(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^3 \rho} \int \mathcal{N}(\mathbf{q}) \left( \frac{\hbar^2 q^2/2m + 2g\rho}{\hbar^2 q^2/2m} \right)^{1/2} \sin^2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/2) d^3 q. \quad (131)$$

Cette intégrale converge-t-elle ? Quand  $q \rightarrow \infty$ , la population  $\mathcal{N}(\mathbf{q})$  tend vers 0 exponentiellement vite, ce qui assure la convergence. Quand  $q \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{N}(\mathbf{q}) \sim k_B T / \hbar \omega_{\mathbf{q}}$  diverge comme  $1/q$ . Cette divergence ainsi que celle du dénominateur  $(\hbar^2 q^2/2m)^{1/2}$  sont compensées par le jacobien tridimensionnel :  $d^3 q = 4\pi q^2 dq$ , de sorte que l'on peut majorer  $\sin^2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/2)$  par 1 et obtenir :

$$\Delta^2 \theta(\mathbf{r}) < \frac{1}{\pi^2 \rho} \int_0^{+\infty} \mathcal{N}(q) \left( \frac{\hbar^2 q^2/2m + 2g\rho}{\hbar^2 q^2/2m} \right)^{1/2} q^2 dq. \quad (132)$$

Dans le régime  $k_B T \gg mc_s^2 = g\rho$  qui est celui le plus souvent rencontré en pratique, les  $q$  contribuant de manière significative à l'intégrale correspondent à  $q \lesssim 1/\lambda_T$  et on trouve

$$\Delta^2 \theta(\mathbf{r}) \lesssim \frac{1}{\rho \lambda_T^3} \ll 1 \quad \text{dans le régime dégénéré.} \quad (133)$$

Les fluctuations de phase sont donc faibles, ce qui assure la légitimité du développement de la fonction  $\phi(\mathbf{r}, t)$  autour d'une solution de phase uniforme.

On pourra constater qu'à deux dimensions (et *a fortiori* à une dimension), l'argument qui précède ne s'applique plus. Si on se contente de majorer le  $\sin^2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/2)$  par 1 dans (131), on obtient un résultat divergent en  $q = 0$  : les modes de faible vecteur d'onde créent des fluctuations de phases importantes. Une estimation plus soignée de  $\Delta\theta$  indique un comportement en  $\log(r)$  à 2D [voir par exemple Hadzibabic & Dalibard (2011) pour une revue] et linéaire en  $r$  à 1D, correspondant à un comportement algébrique (2D) ou exponentiel<sup>5</sup> (1D) pour la fonction  $G_1$  :

$$G_1(r) = N \langle \phi^*(-\mathbf{r}/2) \phi(\mathbf{r}/2) \rangle. \quad (134)$$

On retrouve ici le résultat bien connu du théorème de Mermin & Wagner (1966) et Hohenberg (1967).

## 5 Appendice 1 : méthode variationnelle

La méthode variationnelle, bien connue pour le cas indépendant du temps, peut également être utilisée dans le cas dépendant du temps pour obtenir une évolution approchée de l'état d'un système, de ses modes propres, et de ses éventuelles instabilités.

**Lagrangien conduisant à l'équation de Schrödinger.** Rappelons pour commencer que l'équation de Schrödinger dépendant du temps

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad (135)$$

s'obtient en écrivant que la fonction  $\Psi(t)$  suivie par le système au cours de son évolution d'un instant  $t_1$  à un instant  $t_2$  est celle qui rend l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\Psi) dt \quad (136)$$

5. La notion de superfluidité à 1D déduite de l'approche de Bogoliubov est subtile, voir par exemple la discussion de Carusotto & Castin (2004).

extrémale, avec le lagrangien

$$L(\Psi) = \int \mathcal{L}(\Psi) d^3r_1 \dots d^3r_N \quad (137)$$

La densité de lagrangien  $\mathcal{L}(\Psi)$  est donnée par

$$\mathcal{L}(\Psi) = \mathcal{L}_{\text{dyn}}(\Psi) - \Psi^* \hat{H} \Psi \quad (138)$$

où la partie dynamique du lagrangien vaut

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}}(\Psi) = \frac{i\hbar}{2} (\Psi^* \dot{\Psi} - \dot{\Psi}^* \Psi). \quad (139)$$

Les deux équations de Lagrange obtenues par extrémisation de l'action

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \Psi} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}^*} \right) = \frac{\partial L}{\partial \Psi^*} \quad (140)$$

redonnent alors chacune l'équation de Schrödinger<sup>6</sup>. Notons que la dérivée partielle doit être comprise ici comme une dérivation fonctionnelle, où l'on traite les quatre quantités  $\Psi, \Psi^*, \dot{\Psi}, \dot{\Psi}^*$  comme des variables indépendantes.

**Lagrangien pour une fonction d'essai variationnelle.** Supposons maintenant que l'on se donne une famille de fonctions d'essai normées  $\Phi_{\lambda}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  caractérisées par des paramètres réels dépendant du temps  $\lambda(t) = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_p(t)]$ . Pour chaque valeur de  $\lambda$ , on calcule l'énergie moyenne

$$E(\lambda) = \langle \Phi_{\lambda} | \hat{H} | \Phi_{\lambda} \rangle. \quad (141)$$

Par ailleurs, en injectant ces fonctions d'essai dans le lagrangien initial (137), on arrive au lagrangien pour les paramètres  $\lambda$  :

$$L(\lambda) = \dot{\lambda} \cdot P(\lambda) - E(\lambda) \quad (142)$$

avec les  $p$  fonctions réelles

$$P_j(\lambda) = \frac{i\hbar}{2} \int \left( \Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_j} - \frac{\partial \Phi^*}{\partial \lambda_j} \Phi \right) d^3r_1 \dots d^3r_N. \quad (143)$$

6. Le fait que les deux équations de Lagrange conduisent à un résultat identique est une conséquence de la structure très simple du terme dépendant du temps dans la densité de lagrangien (138).

Une fois le lagrangien simplifié (142) obtenu, on écrit les équations de Lagrange pour les paramètres  $\lambda$ , ce qui donne l'évolution approchée recherchée. Elle se met sous la forme d'un système différentiel du premier ordre en temps :

$$[M] \dot{\lambda} = \nabla E(\lambda) \quad \text{avec} \quad M_{j,k} = \frac{\partial P_k}{\partial \lambda_j} - \frac{\partial P_j}{\partial \lambda_k}. \quad (144)$$

On retrouve bien que le système sera stationnaire ( $\dot{\lambda} = 0$ ) si les  $\lambda$  sont tels que l'énergie  $E(\lambda)$  est extrémale.

## 6 App. 2 : approche de Bogoliubov quantique

Nous nous sommes placés dans ce chapitre dans le cadre d'une théorie de champ classique, de sorte que les « quanta » d'énergie ou d'impulsion pour les excitations de Bogoliubov n'apparaissent pas explicitement. Dans la théorie de Bogoliubov quantique, légèrement plus longue à développer [voir par exemple Pitaevskii & Stringari (2016)], on trouve que chaque excitation élémentaire est caractérisée par le couple énergie-impulsion  $(\hbar\omega_q, \hbar\mathbf{q})$ . On arrive alors à l'hamiltonien de quasi-particules et à l'opérateur impulsion

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{\mathbf{q}} \hbar\omega_q \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}} \quad (145)$$

$$\hat{P} = \sum_{\mathbf{q}} \hbar\mathbf{q} \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}} \quad (146)$$

où  $\omega_q$  est défini comme précédemment et où on a pris  $\mathbf{K} = 0$ . Le lien avec la théorie classique que nous avons développé se fait en prenant  $\gamma^2 = 1/N$ , ce qui assure que l'énergie totale  $N\epsilon_{\text{GP}}$  dans le fluide est augmentée de  $\hbar\omega_q$  quand une excitation élémentaire est présente.

Rappelons très brièvement la démarche généralement suivie pour développer cette théorie de Bogoliubov quantique (Pitaevskii & Stringari 2016). On écrit la fonctionnelle d'énergie de GP en seconde quantification qui fait intervenir des produits de deux ou quatre opérateurs de création  $\hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger}$  ou de destruction  $\hat{a}_{\mathbf{q}}$  d'une particule dans l'état d'impulsion  $\hbar\mathbf{q}$ . On suppose que l'essentiel de la population est portée par le mode d'impulsion

nulle  $\mathbf{q} = 0$ ; on ne garde donc dans cette fonctionnelle d'énergie que les termes contenant au plus un produit de deux  $\hat{a}_q^\dagger$  ou  $\hat{a}_q$  avec  $\mathbf{q} \neq 0$ . Par ailleurs, compte tenu de la forte population de  $\mathbf{q} = 0$ , on traite  $\hat{a}_0^\dagger$  ou  $\hat{a}_0$  comme des nombres classiques. On arrive alors à l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{N}{2}g\rho + \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \hat{a}_q^\dagger \hat{a}_q + \frac{1}{2}g\rho \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \left( 2\hat{a}_q^\dagger \hat{a}_q + \hat{a}_q^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{q}}^\dagger + \hat{a}_q \hat{a}_{-\mathbf{q}} \right). \quad (147)$$

On peut vérifier, avec une démarche similaire à celle évoquée au début de ce chapitre en § 1-3, que l'hamiltonien se met sous la forme diagonale (145) si l'on définit les opérateurs de création ( $\hat{b}_q^\dagger$ ) et de destruction ( $\hat{b}_q$ ) d'une quasi-particule dans le mode  $\mathbf{q}$  par :

$$\hat{a}_q^\dagger = \cosh \alpha_q \hat{b}_q^\dagger + \sinh \alpha_q \hat{b}_{-\mathbf{q}} \quad \hat{a}_q = \cosh \alpha_q \hat{b}_q + \sinh \alpha_q \hat{b}_{-\mathbf{q}}^\dagger \quad (148)$$

où les coefficients  $\alpha_q$  sont identiques à ceux intervenant dans l'approche classique [eq. (78)].

L'intérêt de cette approche de Bogoliubov quantique, en plus de fournir le quantum élémentaire  $\gamma^2 = 1/N$ , est la détermination de l'état fondamental atteint une fois que les interactions ont apparié les particules comme en § 1-3. Cet état est déterminé par

$$\hat{b}_q |\Psi_{\text{fond}}\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{q} \quad (149)$$

et permet de calculer la déplétion quantique, que l'on trouve proportionnelle à  $\sqrt{na^3}$ . On a également accès en principe à l'énergie de ce fondamental, mais il est important de noter que l'expression (147) n'est pas adaptée à ce calcul. Comme nous l'avons déjà mentionné en § 1-3, il faut aller au delà du simple potentiel de contact pour obtenir un résultat raisonnable.

## Références

Andersen, Jens O. (2004), « Theory of the weakly interacting Bose gas », in *Rev. Mod. Phys.* 76 (2), pp. 599–639.  
 Baym, Gordon, Jean-Paul Blaizot, Markus Holzmann, Franck Laloë & Dominique Vautherin (1999), « The Transition Temperature of the Dilute Interacting Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 83 (9), pp. 1703–1706.

Blaizot, Jean-Paul & Georges Ripka (1986), *Quantum theory of finite systems*, vol. 3, 9, MIT press Cambridge.  
 Carusotto, Iacopo & Yvan Castin (2004), « Superfluidity of the 1D Bose gas », in *Comptes Rendus Physique* 5.1, pp. 107–127.  
 Castin, Y (2001), « Bose-Einstein condensates in atomic gases : simple theoretical results », in *Coherent atomic matter waves (Les Houches Summer School 1999)*, ed. by Kaiser R., Westbrook C. & David F., EDP Sciences and Springer-Verlag.  
 Chomaz, Lauriane, Laura Corman, Tom Bienaimé, Rémi Desbuquois, Christof Weitenberg, Sylvain Nascimbène, Jérôme Beugnon & Jean Dalibard (2015), « Emergence of coherence via transverse condensation in a uniform quasi-two-dimensional Bose gas », in *Nature communications* 6.  
 Crescimanno, M., C. G. Koay, R. Peterson & R. Walsworth (2000), « Analytical Estimate of the Critical Velocity for Vortex Pair Creation in Trapped Bose Condensates », in *Phys. Rev. A* 62, p. 063612.  
 Dalfovo, Franco, Stefano Giorgini, Lev P. Pitaevskii & Sandro Stringari (1999), « Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases », in *Rev. Mod. Phys.* 71 (3), pp. 463–512.  
 Desbuquois, Rémi, Lauriane Chomaz, Tarik Yefsah, Julian Léonard, Jérôme Beugnon, Christof Weitenberg & Jean Dalibard (2012), « Superfluid behaviour of a two-dimensional Bose gas », in *Nature Physics* 8.9, pp. 645–648.  
 Donner, T., S. Ritter, T. Bourdel, A. Ottl, M. Köhl & T. Esslinger (2007), « Critical Behavior of a Trapped Interacting Bose Gas », in *Science* 315.5818, pp. 1556–1558.  
 Frisch, T., Y. Pomeau & S. Rica (1992), « Transition to Dissipation in a Model of Superflow », in *Phys. Rev. Lett.* 69, p. 1644.  
 Gavoret, J & P Nozières (1964), « Structure of the perturbation expansion for the Bose liquid at zero temperature », in *Annals of Physics (N. Y.)* 28, pp. 349–399.  
 Gerbier, F., J. H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer & A. Aspect (2004), « Critical Temperature of a Trapped, Weakly Interacting Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 92.3, 030405, p. 030405.  
 Gross, E. P. (1961), « Structure of Quantized Vortex », in *Il Nuovo Cimento* 20, p. 454.  
 Hadzibabic, Z. & J. Dalibard (2011), « Two-dimensional Bose fluids : An atomic physics perspective », in *Rivista del Nuovo Cimento* 34.6, pp. 389–434.

- Hohenberg, P. C. (1967), « Existence of Long-Range Order in One and Two Dimensions », in *Phys. Rev.* 158, p. 383.
- Holzmann, Markus, Gordon Baym, Jean-Paul Blaizot & Franck Lalœ (2001), « Nonanalytic Dependence of the Transition Temperature of the Homogeneous Dilute Bose Gas on Scattering Length », in *Phys. Rev. Lett.* 87 (12), p. 120403.
- Holzmann, Markus & Werner Krauth (1999), « Transition Temperature of the Homogeneous, Weakly Interacting Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 83, p. 2687.
- Hughenoltz, N. M. & D. Pines (1959), « Ground-State Energy and Excitation Spectrum of a System of Interacting Bosons », in *Phys. Rev.* 116 (3), pp. 489–506.
- Kashurnikov, V. A., N. V. Prokof'ev & B. V. Svistunov (2001), « Critical Temperature Shift in Weakly Interacting Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 87.12, p. 120402.
- Landau, L. D. (1941), « The theory of superfluidity of helium II », in *J. Phys. (USSR)* 5, p. 71.
- Langer, J. S. & Michael E. Fisher (1967), « Intrinsic Critical Velocity of a Superfluid », in *Phys. Rev. Lett.* 19 (10), pp. 560–563.
- Lee, T. D., K. Huang & C. N. Yang (1957), « Eigenvalues and Eigenfunctions of a Bose System of Hard Spheres and Its Low-Temperature Properties », in *Phys. Rev.* 106, p. 1135.
- Leggett, A. J. (2006), *Quantum Liquids*, Oxford University Press.
- Ma, Shang-Keng (1985), *Statistical Mechanics*, World Scientific.
- Mermin, N. D. & H. Wagner (1966), « Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Models », in *Phys. Rev. Lett.* 17, p. 1133.
- Mora, C. & Y. Castin (2003), « Extension of Bogoliubov theory to quasicondensates », in *Phys. Rev. A* 67, p. 053615.
- Navon, Nir, Alexander L Gaunt, Robert P Smith & Zoran Hadzibabic (2015), « Critical dynamics of spontaneous symmetry breaking in a homogeneous Bose gas », in *Science* 347.6218, pp. 167–170.
- Nozières, P. (1995), « Some comments on Bose–Einstein Condensation », in *Bose–Einstein Condensation*, ed. by A. Griffin, D. W. Snoke & S. Stringari, Cambridge: Cambridge University Press.
- Nozières, P. & D. Pines (1990), *The Theory of Quantum Liquids, Superfluid Bose Liquids*, Addison-Wesley.
- Ozeri, R., N. Katz, J. Steinhauer & N. Davidson (2005), « Colloquium : Bulk Bogoliubov excitations in a Bose-Einstein condensate », in *Rev. Mod. Phys.* 77 (1), pp. 187–205.
- Pethick, C.J. & H. Smith (2002), *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press.
- Pines, David & Philippe Nozières (1990), *The theory of quantum liquids*, Addison-Wesley.
- Pitaevskii, L. & S. Stringari (2016), *Bose–Einstein Condensation and Superfluidity*, Oxford: Oxford University Press.
- Pitaevskii, L. P. (1961), « Vortex lines in an imperfect Bose gas », in *Sov. Phys. JETP* 13, p. 451.
- Smith, Robert P., Robert L. D. Campbell, Naaman Tammuz & Zoran Hadzibabic (2011), « Effects of Interactions on the Critical Temperature of a Trapped Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 106 (25), p. 250403.
- Steinhauer, J., R. Ozeri, N. Katz & N. Davidson (2002), « Excitation spectrum of a Bose–Einstein condensate », in *Phys. Phys. Lett.* 88.12, p. 120407.
- Stiessberger, J. S. & W. Zwerger (2000), « Critical Velocity of Superfluid Flow past Large Obstacles in Bose-Condensates », in *Phys. Rev. A* 62, 061601(R).
- Winiecki, T., J. F. McCann & C. S. Adams (1999), « Pressure Drag in Linear and Nonlinear Quantum Fluids », in *Phys. Rev. Lett.* 82, p. 5186.