

Chapitre 6

Invariance d'échelle classique, anomalies quantiques

Sommaire

1	Invariance d'échelle à l'équilibre thermodynamique	2
1-1	Variables et potentiels thermodynamiques	2
1-2	Changements d'échelle de longueur et de temps	3
1-3	Conséquences d'une loi d'échelle pour l'énergie .	5
1-4	Fluides invariants d'échelle	6
2	Mesures de l'équation d'état d'un gaz 2D	7
2-1	Approximation de densité locale	7
2-2	Liens entre quantités thermodynamiques	9
2-3	Les méthodes "sans ajustement"	10
2-4	Comportement universel autour de T_c	10
3	Le potentiel delta à 2D	11
3-1	État stationnaire de diffusion	11
3-2	Nécessité d'une coupure	12
3-3	Equation d'état à température nulle	13
3-4	Le cas pratique d'une expérience d'atomes froids	14
4	Le mode de respiration d'un gaz piégé	15
4-1	Point de vue ondulatoire	15
4-2	Point de vue algébrique	16
4-3	Brisure de l'invariance d'échelle	17
4-4	Études expérimentales	17

L'invariance d'échelle est un concept que l'on rencontre dans de nombreuses branches de la physique, depuis le comportement d'un système au voisinage d'une transition de phase jusqu'à la physique des hautes énergies. Nous l'aborderons dans ce chapitre sous l'angle de la théorie de champ classique utilisée jusqu'ici pour décrire un gaz de Bose à deux dimensions. L'invariance d'échelle consiste à tirer parti du fait que les différentes contributions à l'énergie du fluide se comportent de manière très simple quand on multiplie une ou plusieurs variables thermodynamiques par un facteur d'échelle λ . L'invariance d'échelle permet alors de simplifier considérablement l'équation d'état qui ne dépend plus que du seul paramètre $\mu/k_B T$, au lieu de faire intervenir de manière indépendante le potentiel chimique μ et la température T comme c'est le cas pour un fluide « ordinaire », à 3D par exemple.

Cette invariance d'échelle a également des conséquences sur les propriétés dynamiques du système. Nous en donnerons un exemple à propos du *mode de respiration*, ou *mode monopolaire* d'un gaz confiné dans un piège harmonique isotrope (PITAEVSKII & ROSCH 1997). On trouve que ce mode oscille toujours à la fréquence double de celle du piège, quelle que soit la force des interactions et quel que soit le degré d'excitation du mouvement de respiration.

Les résultats que nous venons de mentionner portent sur un fluide décrit par un champ classique, dans lequel les interactions sont prises en compte par le paramètre sans dimension \tilde{g} . Décrire les interactions de cette façon revient à supposer que le potentiel entre atomes est proportionnel à

une distribution de Dirac à deux dimensions, $U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$. Le caractère sans dimension de \tilde{g} joue ici un rôle essentiel : c'est parce qu'il n'y a aucune échelle de longueur, ni d'énergie associée aux interactions que température et potentiel chimique ne peuvent intervenir que sous la forme du rapport $\mu/k_B T$. Toutefois, l'interaction de contact est singulière sur le plan quantique, ne serait-ce que si l'on souhaite étudier la collision entre deux particules. Pour traiter correctement le problème quantique, il est nécessaire de régulariser la distribution de Dirac.

On se retrouve alors face à un phénomène connu sous le nom « d'anomalie quantique » (HOLSTEIN 1993; CABO, LUCIO et al. 1998) : on part d'un problème qui présente une symétrie exacte au niveau classique, en l'occurrence l'invariance d'échelle. Mais la quantification du problème nécessite une régularisation pour éliminer certaines divergences. L'anomalie réside alors dans le fait que la version régularisée amène obligatoirement une brisure de la symétrie initiale. Dans le cas du gaz 2D, la régularisation du potentiel de contact introduit nécessairement une échelle d'énergie ε , de sorte que température et potentiel chimique peuvent reprendre comme à 3D des rôles indépendants, les quantités sans dimension du problème s'exprimant désormais en fonction des deux variables μ/ε et $k_B T/\varepsilon$. Après avoir décrit en détail cette procédure de régularisation, nous terminerons ce chapitre en examinant les conséquences de la brisure de l'invariance d'échelle sur le mode monopolaire.

1 Invariance d'échelle à l'équilibre thermodynamique

Nous commençons ce chapitre par un bref rappel de quelques choix possibles pour paramétrer et caractériser un fluide à l'équilibre thermodynamique. Nous nous placerons ensuite dans le cadre de l'ensemble grand-canonique avec les variables naturelles T, μ, V , qui sont les plus appropriées pour caractériser l'invariance d'échelle recherchée.

1-1 Variables et potentiels thermodynamiques

Un fluide homogène de particules de masse m sans spin (ou polarisées) est caractérisé par trois variables thermodynamiques. Selon le point de vue choisi, c'est-à-dire l'ensemble statistique adopté pour le calcul, ces variables diffèrent mais les conséquences physiques sont bien entendues les mêmes. On peut considérer entre autres :

- *l'ensemble microcanonique* décrivant un système complètement isolé, les variables choisies pertinentes étant le nombre de particules, l'énergie et le volume (ou la surface à 2D) :

$$\text{micro-canonique : } E, N, V \quad (1)$$

et toutes les autres quantités, entropie et pression par exemple, dépendront de ces variables.

- *l'ensemble canonique*, où le système peut échanger de l'énergie avec un réservoir qui impose sa température T , mais où on maintient fixés le nombre de particules N et le volume V ,

$$\text{canonique : } T, N, V. \quad (2)$$

- *l'ensemble grand-canonique*, où le système peut échanger de l'énergie et des particules avec un réservoir qui impose sa température T et son potentiel chimique μ , les variables étant alors :

$$\text{grand-canonique : } T, \mu, V. \quad (3)$$

Une fois ces variables thermodynamiques identifiées, on caractérise l'état du fluide par son *potentiel thermodynamique*. Pour l'ensemble microcanonique, un choix naturel est l'entropie $S(E, N, V)$, dont une variation infinitésimale s'écrit :

$$dS = \frac{1}{T} dE - \frac{\mu}{T} dN + \frac{P}{T} dV. \quad (4)$$

On définit ainsi la version micro-canonique de la température T , du potentiel chimique μ et de la pression P , avec par exemple :

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{N, V}. \quad (5)$$

Pour l'ensemble canonique, le potentiel thermodynamique naturel est l'énergie libre de Helmholtz $F(T, N, V)$ qui se déduit de l'entropie par une transformation de Legendre :

$$F = E - TS \quad (6)$$

dont la différentielle s'écrit

$$dF = -S dT + \mu dN - P dV, \quad (7)$$

avec par exemple la définition de la pression :

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T, N}. \quad (8)$$

Dans le cadre de l'ensemble grand-canonique, on utilise le grand potentiel, encore appelé énergie libre de Landau et noté $\Omega(T, \mu, V)$. Il se déduit lui aussi de l'entropie $S(E, N, V)$ par une transformation de Legendre :

$$\Omega = E - TS - \mu N \quad (9)$$

dont la différentielle s'écrit :

$$d\Omega = -S dT - N d\mu - P dV, \quad (10)$$

avec la définition de la pression pour ces variables :

$$P = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T, \mu}. \quad (11)$$

On caractérise le fluide par une équation d'état qui exprime une grandeur thermodynamique, la pression par exemple, en fonction des variables choisies. Ainsi, dans le cadre de l'ensemble grand-canonique, la connaissance de $P(T, \mu, V)$ permet ensuite de calculer – à une constante d'intégration près – les autres quantités physiques en utilisant les dérivées croisées (relations de Maxwell) :

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial V \partial T} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\mu, V} = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{T, \mu} \quad (12)$$

Exemple : le gaz parfait classique. Son équation d'état est traditionnellement écrite sous la forme

$$P = \frac{Nk_B T}{V}, \quad (13)$$

ce qui correspond aux choix de variables (T, N, V) de l'ensemble canonique.

Loi d'échelle "homogène". Une première invariance d'échelle apparaît pour tout fluide homogène avec des interactions à relativement courte portée¹. Dans ce cas, si on multiplie la taille du système par un facteur λ tout en gardant constantes les deux variables intensives T et μ , alors les quantités physiques extensives comme l'énergie interne E , le nombre de particules N ou encore le grand potentiel Ω sont elles aussi multipliées par le facteur d'échelle λ :

$$\Omega(T, \mu, \lambda V) = \lambda \Omega(T, \mu, V). \quad (14)$$

En d'autres termes, une fois connue la variation du grand potentiel Ω par rapport aux deux variables intensives T et μ , sa variation vis à vis de la troisième variable (extensive) V est une simple loi linéaire avec le coefficient de proportionnalité $\frac{\partial \Omega}{\partial V} = -P$. On en déduit la relation :

$$\Omega(T, \mu, V) = -V P(T, \mu). \quad (15)$$

Pour un fluide avec des interactions à suffisamment courte portée, l'équation d'état est donc une fonction à deux variables intensives seulement, T et μ par exemple, ou encore T et $\rho = N/V$ pour l'équation d'état du gaz parfait (13) en point de vue canonique : $P = k_B T \rho$.

1-2 Changements d'échelle de longueur et de temps

L'invariance d'échelle que nous venons de rencontrer est très simple et porte uniquement sur "l'additivité" de deux sous-systèmes caractérisés par les mêmes variables intensives. Une invariance d'échelle plus subtile que

¹. Ce qui suit ne serait pas vrai pour un potentiel d'interaction en $1/|r_i - r_j|$, que l'on trouve dans un plasma chargé ou pour un ensemble de masses en interaction gravitationnelle.

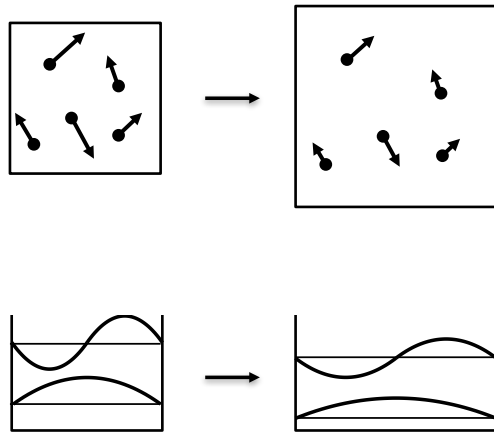


FIGURE 1. Dilatation des longueurs par un facteur λ dans le cas classique (en haut) et quantique (en bas).

la précédente apparaît quand l'énergie du système possède un comportement particulier lors d'une dilatation de toutes les longueurs du système (figure 1). Plus précisément, l'invariance d'échelle se produit si

$$\left. \begin{array}{l} \text{Longueurs : } \ell \rightarrow \lambda\ell \\ \text{Temps : } t \rightarrow \lambda^2 t \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Énergie : } E \rightarrow \frac{1}{\lambda^2} E. \quad (16)$$

Quand cette propriété est vérifiée, on peut écrire une équation d'état pour le fluide qui est une fonction de la seule variable μ/T et non plus de T et μ séparément. Il s'agit donc d'une simplification importante, puisqu'il suffit de connaître une fonction à une variable pour caractériser entièrement le comportement de ce fluide.

Dans ce paragraphe, nous allons expliquer comment prendre en compte cette dilatation des temps et des longueurs dans les deux formalismes classiques et quantiques. Nous allons en particulier montrer pourquoi le facteur d'échelle sur l'énergie doit être $1/\lambda^2$.

L'énergie du fluide homogène est la somme de l'énergie cinétique et de

l'énergie d'interaction, qui s'écrivent en termes classiques

$$E = \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (17)$$

ou quantiques

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hbar^2}{2m} \int \nabla \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \cdot \nabla \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^d r \\ &+ \frac{1}{2} \iint V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^d r d^d r'. \end{aligned} \quad (18)$$

Dans cette dernière expression, la variable d représente la dimension d'espace et $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ est l'opérateur destruction d'une particule au point \mathbf{r} :

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \hat{a}_{\alpha}, \quad (19)$$

avec $\psi_{\alpha}(\mathbf{r})$ une base orthonormée et \hat{a}_{α} l'opérateur destruction d'une particule dans l'état ψ_{α} . Par exemple, pour un mouvement quantique 1D dans une boîte entre $x = 0$ et $x = L$ (figure 1), l'indice α est un entier $n > 0$ et

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (20)$$

Pour le terme d'énergie cinétique E_{cin} , on vérifie immédiatement que le facteur d'échelle $1/\lambda^2$ est bien présent. En point de vue classique, on a en effet

$$\left. \begin{array}{l} \text{Longueurs : } \ell \rightarrow \lambda\ell \\ \text{Temps : } t \rightarrow \lambda^2 t \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{v} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \mathbf{v} \quad E_{\text{cin}} \rightarrow \frac{1}{\lambda^2} E_{\text{cin}} \quad (21)$$

En point de vue quantique, la dilatation des longueurs $\ell \rightarrow \lambda\ell$ conduit au changement de base orthonormée de l'espace de Hilbert²

$$\psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \rightarrow \tilde{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda^{d/2}} \psi_{\alpha}\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda}\right). \quad (23)$$

2. Pour les fonctions de base du puits carré 1D données en (20) et représentées en figure 1, on a ainsi :

$$L \rightarrow \lambda L : \quad \tilde{\psi}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{\lambda L}\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi_n(x/\lambda). \quad (22)$$

On vérifie alors que l'opérateur énergie cinétique

$$\hat{H}_{\text{cin}} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\alpha, \beta} \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta \int \nabla \psi_\alpha^*(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi_\beta(\mathbf{r}) d^d r \quad (24)$$

est bien modifié comme

$$\hat{H}_{\text{cin}} \rightarrow \frac{1}{\lambda^2} \hat{H}_{\text{cin}}. \quad (25)$$

L'invariance d'échelle recherchée en (16) se produira donc si l'énergie d'interaction vérifie elle aussi

$$\text{classique :} \quad E_{\text{inter.}} \rightarrow \frac{1}{\lambda^2} E_{\text{inter.}} \quad (26)$$

$$\text{quantique :} \quad \hat{H}_{\text{inter.}} \rightarrow \frac{1}{\lambda^2} \hat{H}_{\text{inter.}} \quad (27)$$

1-3 Conséquences d'une loi d'échelle pour l'énergie

À la section suivante (§ 1-4), nous passerons en revue quelques exemples de fluides vérifiant la loi d'échelle sur l'énergie donnée en (16). Auparavant, nous allons examiner les conséquences sur l'équation d'état du fluide de cette loi d'échelle, quand elle existe.

Supposons donc que la relation (16) est vérifiée et plaçons-nous pour commencer dans le cadre de la physique classique. Le poids d'une configuration donnée de positions et de vitesses avec N particules fait intervenir

$$\mathcal{P}(N; \{\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j\}) \propto \exp \left[-\frac{E(N; \{\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j\}) - \mu N}{k_B T} \right]. \quad (28)$$

Les quantités physiques à l'équilibre thermodynamique sont évaluées en calculant leur valeur moyenne avec cette distribution de probabilité.

Considérons une quantité physique $\mathcal{F}(N; \{\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j\})$ intervenant dans l'équation d'état du fluide. Ce peut être par exemple l'énergie ou la densité. Calculons la moyenne $\bar{\mathcal{F}}(T, \mu)$ à l'équilibre thermodynamique :

$$\bar{\mathcal{F}}(T, \mu) = \sum_N \int \mathcal{P}(N; \{\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j\}) \mathcal{F}(N; \{\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j\}) \prod_{j=1}^N d^d r_j d^d p_j. \quad (29)$$

Supposons de plus que la quantité physique $\mathcal{F}(N; \{\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j\})$ possède elle-même une loi d'échelle caractérisée par l'exposant ν dans l'opération de dilatation des longueurs et des temps :

$$\mathcal{F}(N; \{\lambda \mathbf{r}_j, \frac{1}{\lambda} \mathbf{p}_j\}) = \frac{1}{\lambda^{2\nu}} \mathcal{F}(N; \{\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j\}). \quad (30)$$

Par exemple, on a $\nu = d/2$ si on prend pour \mathcal{F} la densité spatiale à d dimensions

$$\rho^{(d)}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j). \quad (31)$$

puisque $\delta(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \delta(x)$ pour chaque dimension d'espace.

Si on fait sur T et μ la transformation d'échelle

$$T \rightarrow \frac{1}{\lambda^2} T, \quad \mu \rightarrow \frac{1}{\lambda^2} \mu, \quad (32)$$

on peut alors vérifier qu'une loi d'échelle s'applique également à $\bar{\mathcal{F}}(T, \mu)$. Il suffit pour cela de faire le changement de variables

$$\mathbf{r}'_j = \frac{1}{\lambda} \mathbf{r}_j, \quad \mathbf{p}'_j = \lambda \mathbf{p}_j \quad (33)$$

dans l'intégrale (29) définissant $\mathcal{F}(T, \mu)$ et d'utiliser

$$E(N; \{\lambda \mathbf{r}'_j, \frac{1}{\lambda} \mathbf{p}'_j\}) = \frac{1}{\lambda^2} E(N; \{\mathbf{r}'_j, \mathbf{p}'_j\}). \quad (34)$$

Le poids de Boltzmann \mathcal{P} défini en (28) reste alors inchangé et on obtient pour la quantité thermodynamique $\bar{\mathcal{F}}$

$$\bar{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\lambda^2} T, \frac{1}{\lambda^2} \mu \right) = \frac{1}{\lambda^{2\nu}} \bar{\mathcal{F}}(T, \mu). \quad (35)$$

En choisissant $\lambda^2 = T$, on en déduit immédiatement que $\bar{\mathcal{F}}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{\mathcal{F}}(T, \mu) = (k_B T)^\nu f \left(\frac{\mu}{k_B T} \right). \quad (36)$$

Cette preuve s'étend au niveau quantique, une démonstration possible – calquée sur la démonstration classique – consistant à passer par le formalisme de l'intégrale de chemin avec l'action $\mathcal{S} = \int_t \int_r \mathcal{L}$ et la densité de lagrangien $\mathcal{L} = i\hbar \psi^* \partial_t \psi + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + \mathcal{L}_{\text{inter.}}$.

Exemple : densité dans l'espace des phases. Cette quantité sans dimension est définie comme

$$\mathcal{D} = \rho^{(d)} \lambda_T^d \quad \text{avec} \quad \lambda_T \propto T^{-1/2}. \quad (37)$$

Nous avons vu en (31) que l'exposant ν est égal à $d/2$ pour la densité spatiale $\rho^{(d)}$; on en déduit que

$$\mathcal{D} = \mathcal{G} \left(\frac{\mu}{k_B T} \right), \quad (38)$$

ce qui est l'invariance d'échelle recherchée pour cette équation d'état.

1-4 Fluides invariants d'échelle

Le gaz parfait. Parmi les fluides invariants d'échelle, c'est-à-dire présentant la loi d'échelle (16), le plus simple est sans doute le gaz parfait. Puisque l'énergie d'interaction est nulle dans ce cas et que l'énergie cinétique vérifie (21-25), on est certain que l'équation d'état de ce gaz donnant la densité dans l'espace des phases ne sera une fonction que de la seule variable $\mu/k_B T$. Cette invariance d'échelle était bien présente dans les résultats que nous avons trouvés au chapitre 2, puisque nous avons obtenu la relation

$$\mathcal{D} = \text{Li}_{d/2} \left(e^{\mu/k_B T} \right). \quad (39)$$

Fluide avec des interactions en $1/r^2$. Il est immédiat de vérifier que si le potentiel $V(\mathbf{r})$ décrivant les interactions binaires s'écrit [LANDAU & LIFSHITZ (1987), § 35] :

$$V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{V_0}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}, \quad (40)$$

alors la contrainte (26) sur l'énergie d'interaction est satisfaite. Nous n'étudierons pas ici ce type d'interactions, signalons simplement qu'elles sont à la base de nombreuses études de physique mathématique et de théorie statistique des champs, avec les modèles de Calogero–Sutherland – Moser.

Le gaz de Fermi unitaire à trois dimensions. Considérons un gaz de Fermi à deux composantes \uparrow et \downarrow , à température suffisamment basse pour que les interactions entre particules de même spin $\uparrow\uparrow$ ou $\downarrow\downarrow$, qui ne se produisent que pour des ondes partielles de moment cinétique supérieur à 1, soient négligeables. Les seules interactions présentes se produisent dans l'onde s (moment cinétique nul) entre les deux composantes $\uparrow\downarrow$. Elles se décrivent par l'amplitude de diffusion dépendant du moment relatif k entre les deux atomes entrant en collision,

$$f(k) = \frac{-a}{1 + ika}, \quad (41)$$

où a est la longueur de diffusion associée à cette interaction.

Dans la situation « normale » où a prend une valeur finie et non nulle, les interactions dans un gaz ultra-froid sont bien décrites par la limite $k \rightarrow 0$ de (41), c'est-à-dire $f(k) \approx -a$. La longueur de diffusion introduit alors une échelle d'énergie naturelle dans le problème,

$$\epsilon = \frac{\hbar^2}{ma^2}, \quad (42)$$

de sorte que l'équation d'état peut s'écrire, en absence d'autre échelle de longueur pertinente

$$\mathcal{D} = \mathcal{F} \left(\frac{k_B T}{\epsilon}, \frac{\mu}{\epsilon} \right). \quad (43)$$

Dans cette écriture, on a tiré parti du fait que \mathcal{D} étant sans dimension, on doit pouvoir l'écrire en terme de deux combinaisons possibles également sans dimension, obtenues à partir des trois énergies intervenant dans le problème $k_B T$, μ et ϵ .

Grâce à des résonances de diffusion (résonances de Fano–Feshbach), on peut faire varier la longueur de diffusion a et la rendre infinie, auquel cas l'amplitude de diffusion prend sa valeur maximale :

$$f(k) = \frac{i}{k} \quad (44)$$

correspondant au régime unitaire [pour une revue, voir par exemple INGUSCIO, KETTERLE et al. (2008) et ZWERGER (2011)]. Dans ce régime, il n'y a plus d'échelle de longueur a associée aux interactions, donc plus

d'échelle d'énergie ϵ . Le seul moyen d'exprimer la grandeur sans dimension \mathcal{D} en fonction des deux énergies $k_B T$ et μ est donc de ne faire intervenir que le rapport de ces deux quantités, ce qui conduit de nouveau à une équation d'état invariante d'échelle du type écrit en (38).

Notons que le caractère fermionique des particules est essentiel pour ce raisonnement. Pour des bosons, l'étude du problème à trois corps montre que des états liés du type de ceux prédits par EFIMOV (1971) apparaissent. L'émergence de ces états vient introduire une nouvelle échelle de longueur et d'énergie dans le problème, ce qui empêche l'obtention de l'invariance d'échelle. Cette brisure de l'invariance d'échelle peut d'ailleurs être vue comme une « anomalie quantique », semblable à celle que nous allons rencontrer un peu plus loin quand nous aurons à régulariser le potentiel de contact. Pour les fermions en revanche, WERNER & CASTIN (2006b) ont montré rigoureusement que le processus d'Efimov est absent, au moins si ces fermions sont de masse égale.

Le gaz de Bose à 2D en interaction faible ($\tilde{g} \lesssim 1$). Dans ce cours, nous avons traité les interactions entre particules par une interaction de contact

$$V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g} \delta^{(2)}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (45)$$

C'est ce qui nous a permis, dans le cadre de la description de l'état du gaz par un champ classique $\psi(\mathbf{r})$, de simplifier le terme d'interaction :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iint V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi^*(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}) d^2r d^2r' \\ \rightarrow & \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{g} \int |\psi(\mathbf{r})|^4 d^2r. \end{aligned} \quad (46)$$

Or la relation déjà mentionnée $\delta(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \delta(x)$ pour chaque dimension d'espace entraîne qu'à deux dimensions, le potentiel de contact vérifie la loi d'échelle recherchée :

$$E_{\text{inter.}} \rightarrow \frac{1}{\lambda^2} E_{\text{inter.}} \quad (47)$$

On s'attend donc là aussi à ce que la densité dans l'espace des phases soit une fonction de la seule variable sans dimension $\mu/k_B T$, comme indiqué en (38). Dans la section qui suit, nous allons montrer que cette invariance

d'échelle est effectivement bien vérifiée expérimentalement dans la zone de validité de l'approche "champ classique". Nous étudierons ensuite dans les sections 3 et 4 la brisure possible de cette invariance, liée au fait que le potentiel de contact à deux dimensions (45) est singulier et qu'il faut le régulariser pour décrire correctement l'interaction quantique entre atomes.

2 Mesures de l'équation d'état d'un gaz 2D

2-1 Approximation de densité locale

Les premières mesures précises de l'équation d'état d'un gaz atomique à deux dimensions ont été faites en 2011 par les groupes de Chicago et de l'ENS (HUNG, ZHANG et al. 2011 ; HA, HUNG et al. 2013 ; YEFSAH, DESBUQUOIS et al. 2011). Ces expériences ont été menées dans un piège harmonique dans le plan xy créant le potentiel isotrope

$$V_{\text{trap}}(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2, \quad \mathbf{r} = (x, y). \quad (48)$$

On varie le nombre d'atomes N et la température T du nuage, et on mesure la densité spatiale $\rho(\mathbf{r})$ par une technique standard d'absorption d'un faisceau sonde résonant.

Le lien avec l'équation d'état d'un gaz uniforme repose sur l'approximation de densité locale, que nous avons déjà eu l'occasion de présenter. Pourvu que la densité $\rho(\mathbf{r})$ varie lentement à l'échelle des paramètres microscopiques du gaz (longueur d'onde thermique, libre parcours moyen, longueur de cicatrization), l'état du gaz au voisinage d'un point \mathbf{r} est le même que celui d'un gaz uniforme de même température et de potentiel chimique

$$\mu_{\text{loc}}(r) = \mu - V(r), \quad (49)$$

où μ est le potentiel chimique du nuage piégé.

Pour déterminer la température T et le potentiel chimique μ du nuage, on fait un ajustement de la distribution de densité dans les ailes du nuage par la loi connue pour un gaz très dilué. Si on néglige complètement les interactions, cette loi est celle du gaz de Bose idéal à deux dimensions (cf.

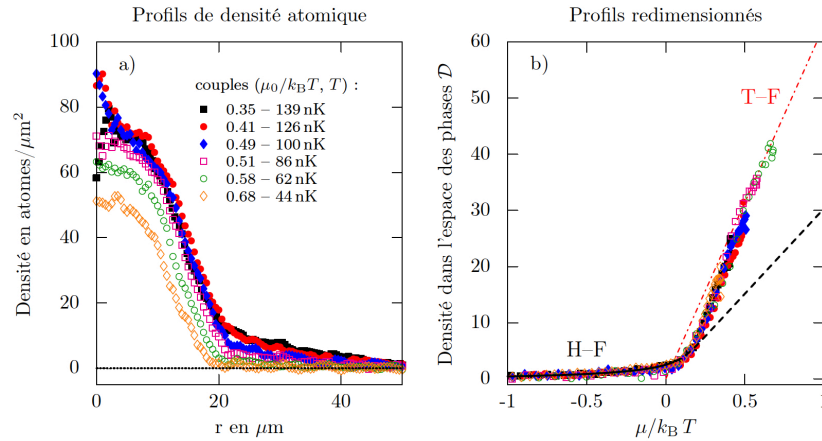


FIGURE 2. Vérification de l'invariance d'échelle pour un gaz 2D de ^{87}Rb en interaction relativement faible, $\tilde{g} = 0.1$. Les profils de densité $\rho(r)$ mesurés dans un potentiel $V(r)$ se regroupent sur une courbe unique si on trace la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D}(r) = \rho(r)\lambda_T^2$ en fonction de $\mu_{\text{loc}}(r)/k_B T$. Les deux régimes Hartree–Fock (HF) et Thomas–Fermi (TF) correspondent respectivement au cas faiblement et fortement dégénérés. Figure extraite de la thèse de Tarik YEFSAH (2011).

chapitre 2) :

$$\rho(\mathbf{r}) = -\lambda_T^{-2} \ln\left(1 - e^{-\mu_{\text{loc}}(\mathbf{r})/k_B T}\right) \quad \text{avec} \quad \lambda_T^{-2} \propto T, \quad (50)$$

l'ajustement se faisant simultanément sur les deux paramètres T et μ . On peut raffiner cet ajustement en incluant les interactions entre atomes décrites à l'approximation de Hartree–Fock [chapitre 5, § 2.2 et HADZIBABIC & DALIBARD (2011)].

Une fois T et μ déterminés, la vérification de l'invariance d'échelle et l'équation d'état du fluide sont obtenues en reportant sur une même figure tous les profils de densité dans l'espace des phases $\mathcal{D}(r) = \rho(r)\lambda_T^2$. Plus précisément, on trace les courbes $\mathcal{D}(r)$ obtenues pour différents couples (μ, T) en fonction du même paramètre $\mu_{\text{loc}}(r)/k_B T$. Si l'invariance d'échelle est vérifiée, on s'attend à ce que tous ces profils se regroupent sur une seule courbe, correspondant à un paramètre d'interaction \tilde{g} donné.

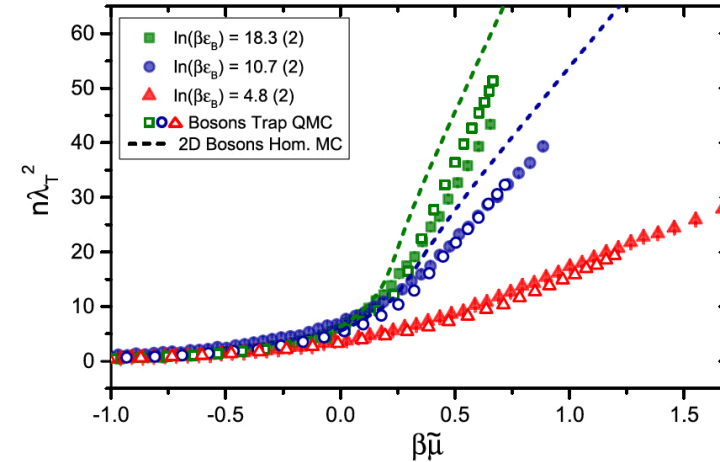


FIGURE 3. Symboles fermés : équations d'état mesurées pour un gaz de molécules $^6\text{Li}_2$ avec un paramètre d'interaction $\tilde{g} = 0.60$ (carrés), 1.07 (cercles), 2.75 (triangles). Les lignes pointillées donnent la prédiction obtenue par simulation de champ classique (PROKOF'EV & SVISTUNOV 2002). Les symboles ouverts donnent le résultat d'une simulation de Monte Carlo quantique. Figure extraite de BOETTCHEER, BAYHA et al. (2016).

C'est ce que l'on vérifie sur la figure 2, obtenue avec un gaz 2D d'atomes de rubidium. On a tracé également la prédiction obtenue à partir de simulations de champs classiques faite par PROKOF'EV & SVISTUNOV (2002). On constate un excellent accord sur toute la gamme des valeurs $\mu/k_B T$, s'étendant depuis la région non-dégénérée, quasi-classique (régime Hartree-Fock), jusqu'au régime fortement dégénéré (Thomas–Fermi) où les excitations thermiques sont très faibles et où l'équation d'état s'écrit simplement³

$$\mu = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g} \rho \quad \rightarrow \quad \mathcal{D} = \frac{2\pi}{\tilde{g}} \frac{\mu}{k_B T}. \quad (51)$$

3. La réduction des fluctuations de densité est implicitement prise en compte dans cette expression. Si ces fluctuations de densité étaient présentes et telles que $\langle \rho^2 \rangle = 2(\langle \rho \rangle)^2$ (chapitre 3, § 3.1), on aurait $\mu = 2\frac{\hbar^2}{m}\tilde{g}\rho$ ou encore $\mathcal{D} = \frac{\pi}{\tilde{g}}\frac{\mu}{k_B T}$, ce qui correspond à la courbe tirée (régime Hartree–Fock) de la figure 2.

Ce type d'expérience a été repris récemment par le groupe d'Heidelberg pour un gaz de molécules ${}^6\text{Li}_2$ au voisinage d'une résonance de Feshbach (BOETTCHER, BAYHA et al. 2016) [voir aussi des résultats de même nature par le groupe de Chicago (HA, HUNG et al. 2013) et par le groupe de Melbourne (FENECH, DYKE et al. 2016)]. Cela permet d'atteindre des paramètres d'interaction \tilde{g} nettement supérieurs et de rechercher des déviations par rapport à la prédiction obtenue avec des champs classiques. Les résultats de BOETTCHER, BAYHA et al. (2016) sont reportés sur la figure 3. L'accord avec les prédictions de champ classique est relativement satisfaisant pour $\tilde{g} = 0.60$ et il se dégrade (en valeur relative) pour $\tilde{g} = 1.07$. Le paramètre en abscisse de cette figure est $\mu/k_B T$, mais ces courbes ont été obtenues pour une seule température, de l'ordre de 60 nK. L'invariance d'échelle n'est donc pas testée de manière directe dans cette expérience.

2-2 Liens entre quantités thermodynamiques

L'invariance d'échelle d'un fluide amène avec elle toute une série de relations entre quantités thermodynamiques qui auraient autrement été indépendantes. Ce point a été exploré initialement par HO (2004) dans le cadre du gaz de Fermi unitaire à trois dimensions. Dans ce paragraphe, nous allons nous concentrer plutôt sur le gaz de Bose bi-dimensionnel.

Notre point de départ sera deux relations de Maxwell déduites de la différentielle du grand potentiel $d\Omega = -S dT - N d\mu - P dV$:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_{T,\mu} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\mu,V} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,\mu}. \quad (52)$$

Notons que nous continuons à utiliser la notation V pour désigner la taille du système, alors qu'il ne s'agit pas à proprement parler d'un volume mais d'une aire. De même, nous utilisons la dénomination "pression" pour la variable P , qui en toute rigueur a la dimension d'une tension superficielle.

Considérons d'abord la première de ces relations et utilisons la loi d'échelle homogène vue en § 1-1, valable pour des interactions à courte portée :

$$\left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_{T,\mu} = \frac{N}{V} = \rho. \quad (53)$$

Du fait de l'invariance d'échelle, nous savons que la densité dans l'espace des phases $\rho \lambda_T^2$ est une fonction de $\mu/k_B T$, et donc que la densité spatiale ρ peut s'écrire comme $k_B T$ fois une fonction de μ/T :

$$\rho(\mu, T) = k_B T g' \left(\frac{\mu}{k_B T} \right). \quad (54)$$

Ici, g' représente la dérivée d'une fonction g , la raison d'être de cette écriture apparaîtra dans la ligne qui suit.

L'intégration de

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \rho(\mu, T) \quad (55)$$

nous indique que la pression s'écrit

$$P(\mu, T) = (k_B T)^2 g \left(\frac{\mu}{k_B T} \right). \quad (56)$$

Passons maintenant à la seconde relation de Maxwell écrite en (52). Comme nous l'avons fait pour le nombre de particules en (53), nous pouvons simplifier le membre de droite pour un système avec des interactions à courte portée en introduisant l'entropie par unité de surface S/V :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,\mu} = \frac{S}{V}. \quad (57)$$

En injectant l'expression (56) pour la pression, nous en déduisons

$$\frac{S}{V} = \frac{2P - \mu\rho}{T}. \quad (58)$$

Cette relation a été utilisée par YEFSAH, DESBUQUOIS et al. (2011) pour déterminer l'entropie du gaz sur une grande plage de valeurs de $\mu/k_B T$, avec des valeurs aussi basses que $0.06 k_B$ par particule pour les échantillons les plus froids.

Une dernière relation utile consiste à relier pression et énergie par unité de surface E/V . En utilisant le fait que le grand potentiel

$$\Omega = E - TS - \mu N \quad (59)$$

est égal (toujours pour des interactions à suffisamment courte portée) à $-PV$, on trouve en injectant le résultat (58) :

$$E = PV. \quad (60)$$

Un résultat similaire (avec un coefficient numérique différent du fait du changement de dimensionnalité) avait été obtenu par HO (2004) pour un fluide 3D.

2-3 Les méthodes "sans ajustement"

L'existence de l'invariance d'échelle offre une voie alternative à l'analyse des profils de densité dans un piège et l'obtention de l'équation d'état du fluide. Cette méthode a été mise au point par le groupe du MIT pour un gaz tri-dimensionnel de fermions à la limite unitaire KU, SOMMER et al. (2012). Elle a ensuite été adaptée au cas bi-dimensionnel par le groupe de l'ENS (DESBUQUOIS, YEFSAH et al. 2014).

Nous ne rentrerons pas dans les détails de cette méthode qui tire parti de l'approximation de densité locale et nous renvoyons le lecteur à la thèse de DESBUQUOIS (2013) dans laquelle elle est détaillée. Elle permet d'éviter la détermination de la température et du potentiel chimique de chaque réalisation de l'expérience, ce qui élimine une source importante d'erreurs systématiques. Cette méthode repose sur le choix judicieux de deux variables thermodynamiques sans dimension, qui ne nécessitent pas d'assigner une température et un potentiel chimique à chaque image, ni de connaître la détectivité du système expérimental. Ces données sont déterminées *a posteriori*, en utilisant un point de référence pour lequel l'état du gaz est bien connu.

Comme expliqué par DESBUQUOIS, YEFSAH et al. (2014), il y en principe une infinité de couples de variables sans dimension qui peuvent être choisies. En pratique, comme ces variables passent la prise de dérivée de grandeurs expérimentales, le choix est restreint; KU, SOMMER et al. (2012) et DESBUQUOIS, YEFSAH et al. (2014) introduisent une compressibilité réduite et une pression réduite :

$$\tilde{\kappa} = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{d\rho}{dV_{\text{trap}}} \quad \tilde{P} = \frac{m}{\hbar^2 \rho^2} \int_{V_{\text{trap}}}^{+\infty} \rho(V_{\text{trap}}) dV_{\text{trap}}. \quad (61)$$

qui se calculent pour chaque image du gaz donnant $\rho(\mathbf{r})$, connaissant le potentiel de piégeage $V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$. En reprenant les notations de la section précédente, on constate que $\tilde{\kappa}$ et \tilde{P} sont proportionnels respectivement aux fonctions g'' et $g/(g')^2$.

L'intérêt de paramétrer la densité spatiale par le potentiel du piège V_{trap} réside dans l'approximation de densité locale : cela revient à paramétrer par le potentiel chimique μ_{loc} en utilisant $\mu_{\text{loc}}(\mathbf{r}) = \mu - V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$. On obtient ainsi une courbe paramétrée dans le plan $(\tilde{\kappa}, \tilde{P})$

$$\tilde{\kappa}(V_{\text{trap}}), \tilde{P}(V_{\text{trap}}) \quad (62)$$

sur laquelle tous les points de mesure doivent s'accumuler et qui constitue en elle-même une version de l'équation d'état. Le retour vers une équation d'état plus "traditionnelle", par exemple la densité dans l'espace des phases \mathcal{D} en fonction de $\mu/k_B T$, se fait en manipulant les relations thermodynamiques vues au paragraphe précédent.

2-4 Comportement universel autour de T_c

L'invariance d'échelle (approchée) que nous avons étudiée jusqu'ici portait sur l'ensemble du régime du fluide dimensionnel, depuis la région faiblement dégénérée où $\mu/k_B T$ est grand en valeur absolue et négatif jusqu'à la région fortement dégénérée où $\mu/k_B T$ est positif et grand devant 1, en passant par la zone critique. Pour chaque valeur du paramètre d'interaction \tilde{g} , nous obtenons une fonction $G(\mu/k_B T)$ qui permet de déterminer l'ensemble des grandeurs thermodynamiques du fluide.

En revanche, nous n'avons pas cherché à connecter deux fonctions G différentes obtenues pour deux valeurs de \tilde{g} . Une telle connexion n'est d'ailleurs *a priori* pas possible, sauf si on se limite au voisinage du point critique. Dans cette région, une universalité supplémentaire apparaît (PROKOF'EV & SVISTUNOV 2002). Elle indique que l'écart d'une quantité physique à sa valeur critique, par exemple $\mathcal{D} - \mathcal{D}_c$ pour la densité dans l'espace des phases, doit s'exprimer comme une fonction de la seule variable

$$\frac{1}{\tilde{g}} \left[\frac{\mu}{k_B T} - \left(\frac{\mu}{k_B T} \right)_c \right]. \quad (63)$$

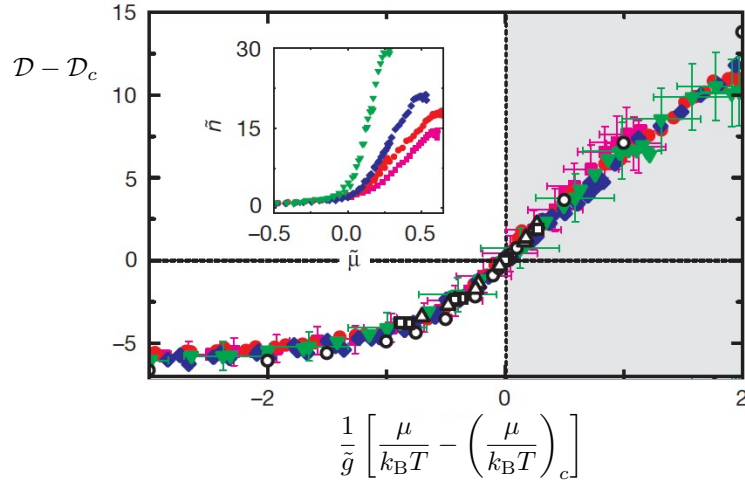


FIGURE 4. *Ecart entre la densité dans l'espace des phases \mathcal{D} et sa valeur critique \mathcal{D}_c , en fonction du paramètre "universel" défini en (63). Le paramètre \tilde{g} vaut 0.05 (triangles verts), 0.13 (losanges bleus), 0.19 (cercles rouges) and 0.26 (carrés magenta). L'insert représente la variation de \mathcal{D} en fonction de $\mu/k_B T$. Ces mesures sont faites sur un gaz de césium au voisinage d'une résonance de Feshbach. Figure extraite de HUNG, ZHANG et al. (2011).*

Cette prédiction a été testée avec succès par le groupe de Chicago. HUNG, ZHANG et al. (2011) ont étudié le voisinage du point critique pour des paramètres d'interaction variant de 0.05 à 0.26 (figure 4). Ils ont montré que les variations de la quantité $\mathcal{D} - \mathcal{D}_c$ peuvent effectivement se superposer quand on les trace en fonction de la variable (63).

3 Le potentiel delta à 2D

L'invariance d'échelle que nous venons d'étudier est une propriété remarquable des gaz 2D; elle est directement liée à la possibilité de modéliser le potentiel d'interaction entre deux atomes $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ par une distribution de Dirac, avec $\delta^{(2D)}(\lambda \mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda^2} \delta^{(2D)}(\mathbf{r})$. Cette modélisation ne pose pas

de problème particulier au niveau de la description en champ classique. En revanche, elle n'est pas tenable si on veut prendre en compte le caractère quantique du mouvement des atomes. Nous avons vu au chapitre 2 que le traitement quantique de la collision entre deux particules introduit une échelle de longueur, la longueur de diffusion à deux dimensions a_2 . Or l'existence de cette longueur a pour effet immédiat de briser l'invariance d'échelle. Dans cette partie, nous allons brièvement revenir sur le problème de collision à deux dimensions, pour expliciter le problème lié à une interaction de contact. Nous allons adopter ici la procédure détaillée par HOLSTEIN (1993), qui consiste à partir d'une distribution de Dirac et à la régulariser⁴ en mettant une coupure dans l'espace des impulsions à une valeur maximale Q .

3-1 État stationnaire de diffusion

Nous considérons ici une collision entre deux particules identiques de masse m en nous plaçant dans le référentiel de leur centre de masse. Comme expliqué au chapitre 2, cela revient à étudier le problème de la diffusion d'une particule de masse réduite $m_r = m/2$ par le potentiel $U(\mathbf{r})$. Considérons un état de diffusion $\psi(\mathbf{r})$ d'énergie positive

$$E \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} \quad (64)$$

et écrivons $U(\mathbf{r})$ comme une distribution de Dirac d'amplitude $\hbar^2 \tilde{g}/m$ comme nous l'avons fait dans les chapitres précédents :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g} \delta^{(2D)}(\mathbf{r}). \quad (65)$$

L'équation de Schrödinger indépendante du temps permet de déterminer la forme des états stationnaires de diffusion d'énergie E . Cette équation

4. La discussion d'autres méthodes de régularisation est présentée par exemple dans MEAD & GODINES (1991), CABO, LUCIO et al. (1998) et NYEO (2000). Il est par ailleurs possible d'implémenter une version spatialement discrétisée du problème qui permet d'éviter toute divergence, comme montré par MORA & CASTIN (2003) et CASTIN (2004). On peut enfin utiliser une famille de potentiels plus élaborés, les Λ potentiels, comme expliqué dans OLSHANII & PRICOUPEENKO (2002), PRICOUPEENKO (2004) et PRICOUPEENKO & OLSHANII (2007) (voir aussi TAN (2005)).

s'écrit

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\mathbf{r}) = \tilde{g} \delta(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}). \quad (66)$$

Nous souhaitons déterminer la forme des états stationnaires de diffusion $\psi(\mathbf{r})$ et montrer pourquoi l'amplitude de diffusion contient un terme susceptible de briser l'invariance d'échelle.

Passons cette équation en point de vue de Fourier en introduisant la transformée $\phi(\mathbf{q})$ de $\psi(\mathbf{r})$:

$$\phi(\mathbf{q}) = \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}) d^2r \quad \psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \phi(\mathbf{q}) d^2q \quad (67)$$

ce qui donne

$$(q^2 - k^2) \phi(\mathbf{q}) = -\tilde{g} \psi(0). \quad (68)$$

Puisqu'on s'intéresse à un problème de diffusion, la solution de cette équation s'obtient en ajoutant l'onde plane incidente $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ à la solution particulière proportionnelle à \tilde{g} :

$$\phi(\mathbf{q}) = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{k}) - \frac{\tilde{g} \psi(0)}{q^2 - k^2 - i\epsilon}. \quad (69)$$

Notons que nous avons ajouté le facteur de convergence $i\epsilon$ à l'énergie $\propto k^2$ de l'état recherché, car nous recherchons l'état stationnaire de diffusion avec une onde cylindrique sortante.

Supposons pour l'instant connue la valeur de $\tilde{g}\psi(0)$. La transformée de Fourier 2D inverse de la fonction $1/(q^2 - k^2 - i\epsilon)$ est proportionnelle à la fonction de Hankel de première espèce :

$$H_0^{(1)}(kr) = -\frac{i}{\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{q^2 - k^2 - i\epsilon} d^2q, \quad (70)$$

cette fonction étant elle-même directement reliée aux fonctions de Bessel de première et deuxième espèce, J_0 et H_0 , rencontrées au chapitre 2 :

$$H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + iY_0(x). \quad (71)$$

Le comportement asymptotique de $H_0^{(1)}(kr)$ aux grands r est

$$H_0^{(1)}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \pi/4)} \quad (72)$$

qui est bien celui d'une onde cylindrique sortante. L'état stationnaire de diffusion (69) s'écrit donc dans l'espace des positions

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{i}{4} \tilde{g} \psi(0) H_0^{(1)}(kr). \quad (73)$$

On retrouve donc un problème de diffusion similaire à celui traité au chapitre 2 avec l'amplitude de diffusion

$$f(k) = \tilde{g} \psi(0). \quad (74)$$

3-2 Nécessité d'une coupure

Pour caractériser entièrement la diffusion par le potentiel $\tilde{g}\delta(\mathbf{r})$, il nous reste à évaluer $\tilde{g}\psi(0)$. Pour cela, repartons de (69) et remarquons que l'auto-cohérence du modèle nécessite d'imposer

$$\psi(0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \phi(\mathbf{q}) d^2q = 1 - \frac{\tilde{g} \psi(0)}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{q^2 - k^2 - i\epsilon} d^2q. \quad (75)$$

La nécessité d'imposer une coupure dans l'espace des impulsions apparaît alors immédiatement, puisque l'intégrale qui précède diverge à 2D (alors qu'elle ne pose pas de problème à 1D). Avec la coupure, l'intégrale se calcule en utilisant⁵ :

$$\int_0^Q \frac{2q}{q^2 - k^2 - i\epsilon} dq = 2 \ln(Q/k) + i\pi \quad (77)$$

où nous avons négligé une contribution en $1/Q^2$. Nous obtenons donc

$$\tilde{g} \psi(0) = f(k) = \frac{1}{\frac{1}{\tilde{g}} + \frac{1}{2\pi} \ln(Q/k) + \frac{i}{4}}, \quad (78)$$

5. On rappelle que

$$\frac{1}{x - x_0 - i\epsilon} = \mathcal{P}\mathcal{P} \left(\frac{1}{x - x_0} \right) + i\pi \delta(x - x_0). \quad (76)$$

ce qui correspond à la structure trouvée au chapitre 2 pour l'amplitude de diffusion⁶

$$f(k) = \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \ln(1/ka_2) + \frac{i}{4}}, \quad (79)$$

avec la longueur de diffusion

$$a_2 = \frac{e^{-2\pi/\tilde{g}}}{Q}, \quad (80)$$

qui dépend à la fois du paramètre sans dimension \tilde{g} et de la coupure Q .

Dans le problème du gaz 2D traité par champ classique, nous avons utilisé le fait qu'un potentiel de contact $\tilde{g}\delta(\mathbf{r})$ pouvait se décrire par une amplitude de diffusion $f(k)$ constante

$$\text{champ classique : } \frac{1}{f(k)} \approx \frac{1}{\tilde{g}}. \quad (81)$$

Quand on prend en compte le caractère quantique du mouvement des particules, on voit qu'au niveau du problème à deux corps, cette approximation n'est pas possible *stricto sensu*. En particulier, contrairement à ce qui se produit pour le cas 3D [cf. eq. (41)], l'amplitude $f(k)$ n'admet pas de limite finie quand $k \rightarrow 0$ dans le cas bi-dimensionnel.

En résumé, nous trouvons pour le potentiel de contact $\frac{\hbar^2}{m}\tilde{g}\delta(\mathbf{r})$:

- qu'il est nécessaire d'introduire une coupure Q dans l'espace des impulsions ;
- que cette coupure modifie l'amplitude de diffusion $f(k)$:

$$\frac{1}{f(k)} \approx \frac{1}{\tilde{g}} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{f(k)} \approx \frac{1}{\tilde{g}} + \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{Q}{k}\right) \quad (82)$$

où l'on a gardé ici uniquement les termes réels (dominants) dans $1/f(k)$;

6. Pour simplifier l'écriture, nous négligeons ici certaines corrections logarithmiques d'ordre unité, comme le coefficient $\eta = 0.89$ qui apparaissait dans l'équation (106) du chapitre 2.

- que cette coupure fait émerger une longueur de diffusion à deux dimensions a_2 , la modification de l'amplitude de diffusion s'écrivant alors :

$$\frac{1}{f(k)} \approx \frac{1}{\tilde{g}} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{f(k)} \approx \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{ka_2}\right), \quad (83)$$

où $a_2 = \frac{1}{Q}e^{-2\pi/\tilde{g}}$.

Comme nous l'avons indiqué plus haut, la présence de cette échelle de longueur vient briser l'invariance d'échelle que nous avons trouvé dans le formalisme du champ classique : les interactions quantiques à deux dimensions ne peuvent pas se décrire avec un nombre sans dimension \tilde{g} indépendant des échelles d'énergie en jeu. En particulier, l'équation d'état du gaz prend désormais la forme générique suivante (RANÇON & DUPUIS 2012) :

$$\rho\lambda_T^2 = \mathcal{F}\left[\frac{\mu}{k_B T}, \tilde{g}(\mu)\right]. \quad (84)$$

Nous allons maintenant examiner sur le cas simple $T = 0$ la structure de cette équation d'état.

3-3 Equation d'état à température nulle

Dans ce paragraphe, nous discutons brièvement une première manifestation de la brisure de l'invariance d'échelle, qui se manifeste sur l'équation d'état du gaz de Bose 2D à $T = 0$. L'écriture de cette équation d'état a fait l'objet de nombreuses publications depuis les travaux initiaux de SCHICK (1971) et POPOV (1972). Notons que dans ce cas, le théorème de Mermin-Wagner ne s'applique plus et le gaz peut présenter un véritable ordre à longue portée avec une fraction condensée importante.

Dans le cadre de la théorie de champ classique, l'équation d'état du gaz 2D à $T = 0$ est simplement (cf. chapitre 5, équation 12) :

$$\mu = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g} \rho \quad \longleftrightarrow \quad \rho = \frac{m\mu}{\hbar^2} \frac{1}{\tilde{g}}. \quad (85)$$

Cette relation linéaire entre densité spatiale ρ et potentiel chimique μ est inévitable dans le cadre d'une équation d'état invariante d'échelle, dans la limite $T \rightarrow 0$. En effet, nous avons vu que l'invariance d'échelle entraîne

que la densité dans l'espace des phases est de manière générale une fonction de $\mu/k_B T$ seulement, dont on déduit :

$$\mathcal{D} = \mathcal{G} \left(\frac{\mu}{k_B T} \right) \quad \longrightarrow \quad \rho \propto T \mathcal{G} \left(\frac{\mu}{k_B T} \right). \quad (86)$$

Pour qu'une limite $T \rightarrow 0$ existe pour la densité spatiale ρ dans cette dernière relation, il faut que le terme dominant de $\mathcal{G}(x)$ quand $x \rightarrow \infty$ soit linéaire en x et on en déduit alors immédiatement $\rho \propto \mu$.

La brisure de l'invariance d'échelle par les effets quantiques vus plus haut va venir modifier ce résultat très simple. On peut montrer de manière générale que la relation entre ρ et μ fait intervenir l'amplitude de diffusion $f(k)$ pour des collisions de très bas vecteur d'onde, qui sont les seules pertinentes dans ce régime (POPOV 1972). La substitution de l'amplitude de diffusion "classique" \tilde{g} par l'amplitude de diffusion "quantique" (83) conduit alors à une expression du type

$$\rho = \frac{m\mu}{2\pi\hbar^2} \ln \left(\frac{1}{k_* a_2} \right), \quad (87)$$

où nous avons introduit une échelle "naturelle" de vecteur d'onde k_* qu'il s'agit maintenant d'explicitier. Nous allons pour cela nous appuyer sur la synthèse faite par MORA & CASTIN (2009), dont nous allons énoncer les principaux résultats [voir aussi ASTRAKHARCHIK, BORONAT et al. (2009)]. On pourra consulter également les articles plus récents de MASHAYEKHI, BERNIER et al. (2013) et SALASNICH (2017) où des corrections supplémentaires sont prises en compte.

Partant d'interactions caractérisées par la longueur de diffusion a_2 , on cherche à faire un développement de l'expression des différentes quantités physiques du gaz à température nulle en puissances du paramètre

$$\epsilon = \frac{1}{\ln(E_2/\mu)} \quad \text{avec} \quad E_2 = \frac{\hbar^2}{ma_2^2}. \quad (88)$$

Ce paramètre est effectivement petit devant 1 si on prend une limite basse densité pour laquelle $0 < \mu \ll E_2$. MORA & CASTIN (2009) calculent en particulier le grand potentiel qu'ils écrivent sous la forme :

$$\frac{\Omega(\mu)}{L^2} = -\frac{m\mu^2}{8\pi\hbar^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \alpha_0 + \alpha_1\epsilon + \dots \right]. \quad (89)$$

et pour lequel ils calculent explicitement les premiers coefficients du développement α_0 et α_1 .

On déduit de cette expression la densité spatiale :

$$\rho = \frac{N}{L^2} = -\frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T, L^2} \quad (90)$$

ce qui donne à l'ordre le plus bas en ϵ

$$\rho = \frac{m\mu}{4\pi\hbar^2} \ln \left(\frac{E_2}{\mu} \right). \quad (91)$$

Il s'agit bien de la forme annoncée en (87), en posant

$$\frac{\hbar^2 k_*^2}{m} = \mu. \quad (92)$$

C'est donc la valeur du potentiel chimique qui vient donner l'échelle pertinente de vecteur d'onde k_* à insérer dans l'amplitude de diffusion et dans l'équation d'état.

3-4 Le cas pratique d'une expérience d'atomes froids

Considérons maintenant le cas pratique d'un gaz bi-dimensionnel obtenu en appliquant un fort potentiel de confinement dans la direction z . Nous supposons comme d'habitude que ce potentiel est harmonique de pulsation ω_z . Nous avons donné au chapitre 2 l'expression de la longueur de diffusion à 2D⁷ :

$$a_2 \approx a_{\text{oh}} e^{-2\pi/\tilde{g}}. \quad (93)$$

Dans cette expression, $a_{\text{oh}} = (\hbar/m\omega_z)^{1/2}$ représente l'extension de l'état fondamental du mouvement selon la direction z . On trouve alors en utilisant (91)

$$\rho \approx \frac{m\mu}{\hbar^2} \left[\frac{1}{\tilde{g}} + \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{\mu}{\hbar\omega_z} \right) \right]. \quad (94)$$

7. Comme plus haut dans ce chapitre et pour simplifier la discussion, nous négligeons ici un coefficient multiplicatif d'ordre unité, présent dans l'équation (110) du chapitre 2 mais sans importance pour la discussion présente.

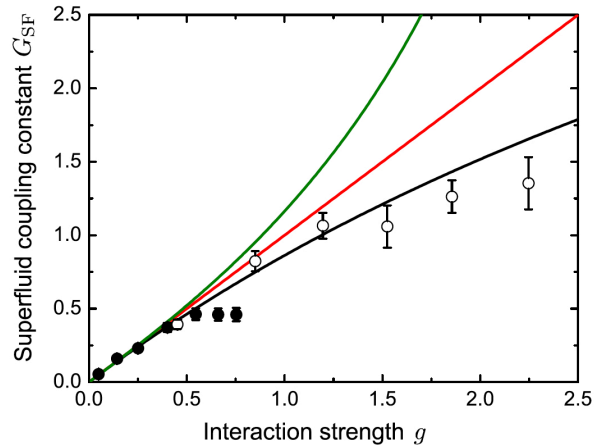


FIGURE 5. Paramètre $G = m/(\hbar^2\kappa)$, caractérisant le lien entre densité ρ et potentiel chimique μ à très basse température pour un gaz 2D d'atomes de césium. La théorie de champ classique prédit $G = \tilde{g}$ (ligne droite rouge). La ligne noire continue représente une prédiction basée sur la théorie de Ginzburg–Landau (SACHDEV & DEMLER 2004). Les symboles ouverts ont été obtenus pour un gaz évoluant dans un réseau optique opérant dans un régime où son effet est essentiellement une renormalisation de la masse et de la force des interactions. Figure extraite de HA, HUNG *et al.* (2013).

Dans la plupart des expériences d'atomes froids, potentiel chimique μ et énergie de confinement $\hbar\omega_z$ ne diffèrent pas par plusieurs ordres de grandeurs, de sorte que le deuxième terme du crochet figurant ci-dessus est généralement notablement plus petit que 1. Si le paramètre d'interaction \tilde{g} est lui-même plus petit que 1, le terme dominant dans (94) est $1/\tilde{g}$, et la théorie de champ classique s'applique.

L'expérience menée à Chicago par HA, HUNG *et al.* (2013) sur des atomes de césium dans un réseau optique a toutefois permis de sonder le régime $T \approx 0$ en présence de fortes interactions, avec le paramètre \tilde{g} dépassant 2. À partir de la compressibilité $\kappa = \frac{\partial \rho}{\partial \mu}$ du gaz superfluide à température très basse, HA, HUNG *et al.* (2013) définisse le paramètre $G = m/(\hbar^2\kappa)$. Les valeurs mesurées pour ce paramètre sont représentées sur la figure 5. Elles montrent une déviation notable par rapport à la pré-

dition de la théorie de champ classique $G = \tilde{g}$ pour les grandes valeurs de \tilde{g} .

4 Le mode de respiration d'un gaz piégé

Pour mettre en évidence l'éventuelle invariance d'échelle d'un gaz bi-dimensionnel, PITAEVSKII & ROSCH (1997) ont proposé d'étudier le mode de respiration de ce gaz quand on le confine dans un piège harmonique isotrope, $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ avec $r^2 = x^2 + y^2$. Ce mode de respiration, encore appelé mode monopolaire, consiste en une dilatation puis une contraction isotrope du gaz. En présence de l'invariance d'échelle, il doit présenter les propriétés suivantes :

- Il se fait à la fréquence 2ω , sans aucune modification liée aux interactions.
- Il ne présente pas d'amortissement.
- Ces propriétés sont valables quelle que soit l'amplitude d'excitation du mode (pas nécessairement faible).

Un ensemble de propriétés aussi simples en font évidemment un candidat de choix pour étudier précisément l'invariance d'échelle et son éventuelle brisure du fait de la régularisation du potentiel en $\delta(r)$. Signalons par ailleurs que ces propriétés ont été étendues à un autre fluide invariant d'échelle, le gaz de Fermi unitaire 3D, par WERNER & CASTIN (2006a).

Dans cette section, nous allons d'abord expliquer l'origine des propriétés que nous venons de mentionner en prenant successivement deux points de vue. Le premier, très concret, consistera à étudier l'évolution dans le temps du champ classique $\psi(\mathbf{r}, t)$. Le second, plus formel, sera basé sur une algèbre d'opérateurs. Nous aborderons ensuite l'anomalie quantique concernant ce mode, c'est-à-dire la perte de la symétrie qui lui est associée lors du passage vers une description quantique de l'oscillation.

4-1 Point de vue ondulatoire

Considérons un champ classique $\psi(\mathbf{r}, t)$ décrivant un fluide 2D évoluant dans un piège harmonique isotrope, avec l'interaction de contact dé-

crité par le paramètre \tilde{g} . L'équation d'évolution déduite de la fonctionnelle d'énergie de Gross–Pitaevskii s'écrit⁸

$$i\hbar\dot{\psi}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \psi(\mathbf{r}, t) + \frac{\hbar^2}{m}\tilde{g}|\psi(\mathbf{r}, t)|^2\psi(\mathbf{r}, t). \quad (95)$$

Partons d'une solution stationnaire $\psi_0(\mathbf{r})$ associée au potentiel chimique μ :

$$\mu\psi_0(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \psi_0(\mathbf{r}) + \frac{\hbar^2}{m}\tilde{g}|\psi_0(\mathbf{r})|^2\psi_0(\mathbf{r}). \quad (96)$$

On peut alors vérifier explicitement que l'on peut fabriquer toute une classe de fonctions solutions de l'équation dépendant du temps (95) en posant :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{i\alpha(t)}}{\lambda(t)} e^{i\beta(t)r^2} \psi_0\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda(t)}\right) \quad (97)$$

où les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ s'expriment en fonction de la troisième fonction $\lambda(t)$

$$\alpha(t) = -\frac{\mu}{\hbar} \int_0^t \frac{dt'}{\lambda^2(t')}, \quad \beta(t) = \frac{m}{2\hbar} \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}, \quad (98)$$

et où cette troisième fonction $\lambda(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{\lambda}(t) = \omega^2 \left[\frac{1}{\lambda^3(t)} - \lambda(t) \right]. \quad (99)$$

Les solutions de cette dernière équation sont

$$\lambda(t) = [\sinh(\eta) \cos(2\omega t + \varphi) + \cosh(\eta)]^{1/2} \quad (100)$$

où l'amplitude η et la phase φ sont arbitraires. Ces fonctions $\lambda(t)$ sont périodiques en temps de période π/ω ; chacune correspond à un mode de respiration avec le facteur d'échelle $\lambda(t)$ puisque la densité spatiale déduite de (97) vérifie

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\lambda^2(t)} \rho_0\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda(t)}\right). \quad (101)$$

8. Le $\dot{}$ signifie ici et dans ce qui suit une dérivée par rapport au temps.

Comparaison avec le cas 3D. L'existence d'une loi d'échelle dans l'évolution d'un gaz quantique a également été montrée dans le cas 3D par CASTIN & DUM (1996) et KAGAN, SURKOV et al. (1996). Les relations que l'on déduit dans ce cas sont notamment très commodes pour déterminer le comportement d'un condensat de Bose–Einstein quand on coupe le piège qui le confine. Toutefois, il s'agit dans le cas 3D de relations approchées, obtenues en supposant que l'énergie cinétique est petite devant les autres énergies en jeu, interaction et piégeage. Dans le cas 2D au contraire, le fait que la loi d'échelle soit la même pour l'énergie cinétique et pour l'énergie d'interaction entraîne que la fonction $\psi(\mathbf{r}, t)$ écrite en (97) est une solution exacte de l'équation de Gross–Pitaevskii, quelle que soit l'importance relative des différentes contributions à l'énergie du système.

4-2 Point de vue algébrique

La méthode ondulatoire décrite plus haut permet de déterminer explicitement la classe de fonctions correspondant au mode de respiration 2D, mais elle ne révèle pas la symétrie cachée derrière la dégénérescence correspondant à toutes ces fonctions oscillant à la même fréquence 2ω . Pour mettre en évidence cette symétrie, PITAEVSKII & ROSCH (1997) ont introduit trois opérateurs appropriés au problème et ils ont montré que ces opérateurs formaient une algèbre fermée. La dégénérescence recherchée s'en déduit alors simplement.

Partant des trois contributions à l'hamiltonien du système

$$\hat{H}_{\text{cin}} = \sum_j \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} \quad \hat{H}_{\text{int}} = \sum_{i<j} U(\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{r}}_j) \quad \hat{H}_{\text{trap}} = \sum_j \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{\mathbf{r}}_j^2 \quad (102)$$

les trois opérateurs utiles sont :

$$\hat{L}_1 = \frac{1}{2\omega} (\hat{H}_{\text{cin}} + \hat{H}_{\text{int}} - \hat{H}_{\text{trap}}), \quad (103)$$

$$\hat{L}_2 = \frac{1}{4} \sum_j (\hat{\mathbf{r}}_j \cdot \hat{\mathbf{p}}_j + \hat{\mathbf{p}}_j \cdot \hat{\mathbf{r}}_j), \quad (104)$$

$$\hat{L}_3 = \frac{1}{2\omega} (\hat{H}_{\text{cin}} + \hat{H}_{\text{int}} + \hat{H}_{\text{trap}}). \quad (105)$$

On remarquera que \hat{L}_3 n'est autre que l'hamiltonien total \hat{H} du système, au facteur $1/2\omega$ près.

Si le potentiel d'interaction $U(\mathbf{r})$ satisfait la loi d'échelle $U(\lambda\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda^2}U(\mathbf{r})$, alors on peut vérifier⁹ que l'on a les trois relations de commutation

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = -i\hbar\hat{L}_3, \quad [\hat{L}_2, \hat{L}_3] = i\hbar\hat{L}_1, \quad [\hat{L}_3, \hat{L}_1] = i\hbar\hat{L}_2. \quad (106)$$

S'il n'y avait pas le signe $-$ dans la première relation, on reconnaîtrait les équations caractérisant l'opérateur moment cinétique dans l'espace à trois dimensions et on serait donc en présence de l'algèbre de Lie du groupe des rotation SO(3). Avec ce signe $-$, l'algèbre de Lie décrite ici est celle du groupe de Lorentz en 2+1 dimensions, correspondant au groupe SO(2,1).

Cette algèbre fermée à trois opérateurs permet de déduire une série de propriétés importantes concernant les états propres du fluide. Comme pour l'algèbre du moment cinétique, introduisons les deux opérateurs

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_1 \pm i\hat{L}_2. \quad (107)$$

On vérifie immédiatement les relations de commutation

$$[\hat{L}_3, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar \hat{L}_\pm \quad (108)$$

dont on déduit que si l'on se donne un état propre $|\psi\rangle$ de \hat{L}_3 (donc de \hat{H}), on peut engendrer une série d'autres états propres en faisant agir \hat{L}_\pm sur $|\psi\rangle$. En particulier, si E est la valeur propre associée à $|\psi\rangle$ pour \hat{H} , alors $E + 2\hbar\omega$ sera associée à $\hat{L}_+|\psi\rangle$. La "tour" d'états d'énergie $E + n 2\hbar\omega$ avec $n \in \mathbb{N}$ correspond au mode monopolaire d'amplitude (liée au nombre de quanta n) quelconque que nous avons trouvé au paragraphe précédent.

4-3 Brisure de l'invariance d'échelle

Le raisonnement algébrique qui précède utilise de manière explicite la loi d'échelle du potentiel d'interaction $U(\lambda\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda^2}U(\mathbf{r})$. Dans la mesure où cette loi d'échelle cesse d'être vérifiée quand on régularise le potentiel de contact à 2D, on s'attend à ce que les propriétés trouvées par PITAEVSKII &

9. On utilise notamment la propriété $(\mathbf{r} \cdot \nabla)U = -2U$.

ROSCH (1997) soient également invalidées par cette procédure de régularisation.

Les conséquences de la brisure d'invariance d'échelle ont été étudiées en détail par OLSHANII, PERRIN et al. (2010) et HU & LIANG (2011) pour des bosons et par HOFMANN (2012) pour des fermions. Nous n'allons pas reprendre ici le détail de ces articles et nous indiquons simplement les résultats principaux. Le point essentiel est que l'algèbre des trois opérateurs cesse d'être fermée et les commutateurs (106) font maintenant intervenir le terme supplémentaire proportionnel à

$$a_2 \frac{\partial \hat{H}}{\partial a_2} \quad (109)$$

qui ne s'exprime pas en termes des trois opérateurs \hat{L}_j . Pour le cas d'un gaz de Bose 2D fortement confiné dans la troisième direction par un potentiel harmonique, OLSHANII, PERRIN et al. (2010) ont montré qu'un traitement perturbatif du terme "anormal" (109) conduisait pour un mouvement de faible amplitude à un déplacement en fréquence du mode monopolaire

$$\frac{\delta\omega_{\text{monop.}}}{2\omega} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{a}{a_{\text{oh}}}. \quad (110)$$

Comme le rapport entre la longueur de diffusion à trois dimensions a et l'extension de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique a_{oh} est en général petit devant 1, ce déplacement est très faible et n'a –à notre connaissance– pas encore été mesuré. L'utilisation d'une résonance de Feshbach pourrait permettre d'augmenter a , donc l'importance de cette correction. Pour un gaz de fermions dans le régime du *cross-over* BEC–BCS, un résultat similaire a été obtenu par HOFMANN (2012), qui relie par ailleurs son résultat aux propriétés du contact de Tan.

4-4 Études expérimentales

Sur des bosons (^{87}Rb), la première étude en relation avec le mode monopolaire de PITAEVSKII & ROSCH (1997) a été faite CHEVY, BRETIN et al. (2001) à Paris. Il ne s'agissait pas à strictement parler d'un gaz 2D, mais plutôt d'un gaz en forme de cigare très allongé. Cette étude est néanmoins

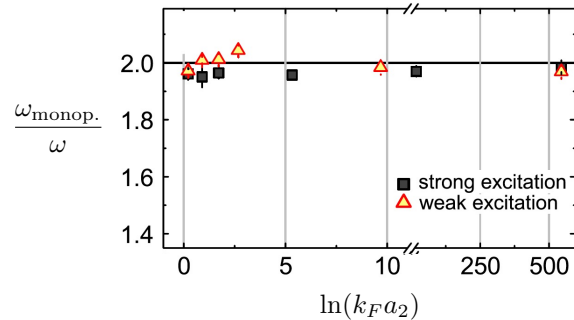


FIGURE 6. Fréquence du mode monopolaire d'un gaz 2D de fermions (^{40}K) au voisinage d'une résonance de Feshbach. La longueur de diffusion a_2 est mesurée ici en unités du vecteur d'onde de Fermi k_F ($E_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m \approx 5$ à $8 \text{ kHz} \times h$). On trouve que la fréquence du mode monopolaire reste très proche de la valeur prédite dans le cadre de l'invariance d'échelle, même quand la longueur de diffusion a_2 devient grande. Figure extraite de VOGT, FELD et al. (2012).

pertinente du fait du découplage effectif entre les degrés de liberté transverses du cigare (ceux affectés par le mode monopolaire) et le degré de liberté longitudinal. CHEVY, BRETIN et al. (2001) ont effectivement observé un mode monopolaire de très longue durée de vie, de fréquence égale à 2ω à la précision de mesure près ($3 \cdot 10^{-3}$ en valeur relative).

Une expérience plus récente a été menée à Cambridge sur des fermions (^{40}K) dans une géométrie 2D par VOGT, FELD et al. (2012). Là aussi, le mode monopolaire a été observé avec une fréquence compatible avec la prédiction 2ω de champ classique (figure 6) et avec un très faible amortissement ($\Gamma/\omega \sim 0.05$). Ce résultat est plus surprenant que celui de Paris, car les chercheurs de Cambridge s'étaient placés au voisinage d'une résonance de Feshbach. On aurait donc pu s'attendre à ce que la régularisation du potentiel $\delta(r)$ joue un rôle important. Ce résultat « négatif » a été expliqué par TAYLOR & RANDEIRA (2012) par le fait que le déplacement de la fréquence du mode monopolaire fait intervenir la quantité $2P - \rho \frac{\partial P}{\partial \rho}$, quantité qui se trouve être presque nulle du fait de la compensation entre ses deux termes. L'approche de TAYLOR & RANDEIRA (2012) permet d'expliquer également le très faible amortissement observé à Cambridge.

Signalons pour finir que les corrections logarithmiques liées à la régularisation du potentiel de contact ont été vues dans des gaz de Fermi à 2D sur d'autres quantités, comme la mesure par spectroscopie radiofréquence de la position des états liés. Ces mesures faites au MIT par SOMMER, CHEUK et al. (2012) ont été analysées en termes d'anomalie quantique par LANGMACK, BARTH et al. (2012) et ZWERGER (2016).

Références

- ASTRAKHARCHIK, G. E., J. BORONAT, J. CASULLERAS, I. L. KURBAKOV & Yu. E. LOZOVIK (2009), « Equation of state of a weakly interacting two-dimensional Bose gas studied at zero temperature by means of quantum Monte Carlo methods », in *Phys. Rev. A* **79**, p. 051602.
- BOETTCHER, I., L. BAYHA, D. KEDAR, P. A. MURTHY, M. NEIDIG, M. G. RIES, A. N. WENZ, G. ZÜRN, S. JOCHIM & T. ENSS (2016), « Equation of State of Ultracold Fermions in the 2D BEC-BCS Crossover Region », in *Phys. Rev. Lett.* **116** (4), p. 045303.
- CABO, A, JL LUCIO & H MERCADO (1998), « On scale invariance and anomalies in quantum mechanics », in *American Journal of Physics* **66**, p. 240–246.
- CASTIN, Y. (2004), « Simple theoretical tools for low dimension Bose gases », in *Journal de Physique IV, France* **116**, p. 87.
- CASTIN, Y. & R. DUM (1996), « Bose–Einstein condensation in time dependent traps », in *Phys. Rev. Lett.* **77**, p. 5315.
- CHEVY, F., V. BRETIN, P. ROSENBUSCH, K. W. MADISON & J. DALIBARD (2001), « Transverse Breathing Mode of an Elongated Bose–Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* **88**, p. 250402.
- DESBUQUOIS, Rémi (2013), « Thermal and superfluid properties of the two-dimensional Bose gas », thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- DESBUQUOIS, Rémi, Tarik YEFSAH, Lauriane CHOMAZ, Christof WEITENBERG, Laura CORMAN, Sylvain NASCIBÈNE & Jean DALIBARD (2014), « Determination of Scale-Invariant Equations of State without Fitting Parameters : Application to the Two-Dimensional Bose Gas Across the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless Transition », in *Phys. Rev. Lett.* **113**, p. 020404.

- EFIMOV, V (1971), « Weakly-bound states of three resonantly-interacting particles », in *Sov. J. Nucl. Phys* **12**, p. 101.
- FENECH, K., P. DYKE, T. PEPPLER, M. G. LINGHAM, S. HOINKA, H. HU & C. J. VALE (2016), « Thermodynamics of an Attractive 2D Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **116** (4), p. 045302.
- HA, Li-Chung, Chen-Lung HUNG, Xibo ZHANG, Ulrich EISMANN, Shih-Kuang TUNG & Cheng CHIN (2013), « Strongly Interacting Two-Dimensional Bose Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **110** (14), p. 145302.
- HADZIBABIC, Z. & J. DALIBARD (2011), « Two-dimensional Bose fluids : An atomic physics perspective », in *Rivista del Nuovo Cimento* **34**, p. 389.
- HO, T. L. (2004), « Universal Thermodynamics of Degenerate Quantum Gases in the Unitarity Limit », in *Phys. Rev. Lett.* **92**, p. 090402.
- HOFMANN, Johannes (2012), « Quantum Anomaly, Universal Relations, and Breathing Mode of a Two-Dimensional Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **108** (18), p. 185303.
- HOLSTEIN, Barry R (1993), « Anomalies for pedestrians », in *American journal of physics* **61**, p. 142–147.
- HU, Ying & Zhaoxin LIANG (2011), « Visualization of Dimensional Effects in Collective Excitations of Optically Trapped Quasi-Two-Dimensional Bose Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **107** (11), p. 110401.
- HUNG, Chen-Lung, Xibo ZHANG, Nathan GEMELKE & Cheng CHIN (2011), « Observation of scale invariance and universality in two-dimensional Bose gases », in *Nature* **470**, p. 236.
- INGUSCIO, M, W KETTERLE & C SALOMON, éd. (2008), *Ultra-cold Fermi Gases*, Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Course CLXIV, Varenna 2006, IOS Press.
- KAGAN, Y., E. L. SURKOV & G. V. SHLYAPNIKOV (1996), « Evolution of a Bose gas under variations of the confining potential », in *Phys. Rev. A* **54**, R1753.
- KU, Mark JH, Ariel T SOMMER, Lawrence W CHEUK & Martin W ZWIERLEIN (2012), « Revealing the superfluid lambda transition in the universal thermodynamics of a unitary Fermi gas », in *Science* **335**, p. 563–567.
- LANDAU, L. D. & E. M. LIFSHITZ (1987), *Quantum mechanics*, New York : Pergamon Press.
- LANGMACK, Christian, Marcus BARTH, Wilhelm ZWERGER & Eric BRAATEN (2012), « Clock Shift in a Strongly Interacting Two-Dimensional Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **108** (6), p. 060402.
- MASHAYEKHI, Mohammad S., Jean-Sébastien BERNIER, Dmitry BORZOV, Jun-Liang SONG & Fei ZHOU (2013), « Two-Dimensional Bose Gases near Resonance : Competing Two-Body and Three-Body Effects », in *Phys. Rev. Lett.* **110** (14), p. 145301.
- MEAD, Lawrence R & John GODINES (1991), « An analytical example of renormalization in two-dimensional quantum mechanics », in *American Journal of Physics* **59**, p. 935–937.
- MORA, C. & Y. CASTIN (2003), « Extension of Bogoliubov theory to quasi-condensates », in *Phys. Rev. A* **67**, p. 053615.
- MORA, Christophe & Yvan CASTIN (2009), « Ground State Energy of the Two-Dimensional Weakly Interacting Bose Gas : First Correction Beyond Bogoliubov Theory », in *Phys. Rev. Lett.* **102**, p. 180404.
- NYEO, Su-Long (2000), « Regularization methods for delta-function potential in two-dimensional quantum mechanics », in *American Journal of Physics* **68**, p. 571–575.
- OLSHANII, M. & L. PRICOUPENKO (2002), « Rigorous Approach to the Problem of Ultraviolet Divergencies in Dilute Bose Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **88**, p. 010402.
- OLSHANII, Maxim, Hélène PERRIN & Vincent LORENT (2010), « Example of a Quantum Anomaly in the Physics of Ultracold Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **105**, p. 095302.
- PITAEVSKII, L. P. & A. ROSCH (1997), « Breathing mode and hidden symmetry of trapped atoms in two dimensions », in *Phys. Rev. A* **55**, R853.
- POPOV, V. N. (1972), « On the theory of the superfluidity of two- and one-dimensional bose systems », in *Theoretical and Mathematical Physics* **11**, p. 565–573.
- PRICOUPENKO, L. (2004), « Variational approach for the two-dimensional trapped Bose–Einstein condensate », in *Phys. Rev. A* **70**, p. 013601.
- PRICOUPENKO, Ludovic & Maxim OLSHANII (2007), « Stability of two-dimensional Bose gases in the resonant regime », in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **40**, p. 2065.
- PROKOF'EV, N. V. & B. V. SVISTUNOV (2002), « Two-dimensional weakly interacting Bose gas in the fluctuation region », in *Phys. Rev. A* **66**, p. 043608.
- RANÇON, A & N DUPUIS (2012), « Universal thermodynamics of a two-dimensional Bose gas », in *Physical Review A* **85**, p. 063607.

- SACHDEV, Subir & Eugene DEMLER (2004), « Competing orders in thermally fluctuating superconductors in two dimensions », in *Phys. Rev. B* **69** (14), p. 144504.
- SALASNICH, L. (2017), « Nonuniversal Equation of State of the Two-Dimensional Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **118** (13), p. 130402.
- SCHICK, M. (1971), « Two-Dimensional System of Hard-Core Bosons », in *Phys. Rev. A* **3**, p. 1067.
- SOMMER, Ariel T., Lawrence W. CHEUK, Mark J. H. KU, Waseem S. BAKR & Martin W. ZWIERLEIN (2012), « Evolution of Fermion Pairing from Three to Two Dimensions », in *Phys. Rev. Lett.* **108** (4), p. 045302.
- TAN, Shina (2005), « S-wave contact interaction problem : A simple description », in *arXiv preprint cond-mat/0505615*.
- TAYLOR, Edward & Mohit RANDERIA (2012), « Apparent Low-Energy Scale Invariance in Two-Dimensional Fermi Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **109** (13), p. 135301.
- VOGT, Enrico, Michael FELD, Bernd FRÖHLICH, Daniel PERTOT, Marco KOSCHORRECK & Michael KÖHL (2012), « Scale Invariance and Viscosity of a Two-Dimensional Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **108** (7), p. 070404.
- WERNER, Felix & Yvan CASTIN (2006a), « Unitary gas in an isotropic harmonic trap : Symmetry properties and applications », in *Phys. Rev. A* **74**, p. 053604.
- WERNER, Félix & Yvan CASTIN (2006b), « Unitary Quantum Three-Body Problem in a Harmonic Trap », in *Phys. Rev. Lett.* **97** (15), p. 150401.
- YEFSAH, T., R. DESBUQUOIS, L. CHOMAZ, K. J. GÜNTER & J. DALIBARD (2011), « Exploring the Thermodynamics of a Two-Dimensional Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **107**, p. 130401.
- YEFSAH, Tarik (2011), « Thermodynamique du gaz de Bose à deux dimensions », thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- ZWERGER, Wilhelm (2011), *The BCS-BEC crossover and the unitary Fermi gas*, t. 836, Springer Science & Business Media.
- (2016), « Strongly interacting fermi gases », in *arXiv preprint arXiv :1608.00457*.