Fluides quantiques de basse dimension et transition de Kosterlitz–Thouless

Jean Dalibard
Collège de France, chaire *Atomes et rayonnement*

Cours 2016-17



COLLÈGE
DE FRANCE
1530

Table des matières

Introduction **6**

I Peierls et l'ordre cristallin en basse dimension **13**

1 L'argument de Peierls à une dimension 13
1-1 Un argument simple : l'empilement de défauts 13
1-2 Le cristal harmonique classique 15
1-3 Corrélation des écarts u_j à l'équilibre thermique . . . 16
1-4 Le cas quantique 17
2 Cristaux à deux ou à trois dimensions 18
2-1 Écarts à l'équilibre dans le cas bidimensionnel 19
2-2 Un paramètre d'ordre : les pics de Bragg 20
2-3 Le cristal tri-dimensionnel 21
2-4 Le théorème de Mermin–Wagner–Hohenberg 22
3 Les cristaux bi-dimensionnels au laboratoire 22
3-1 Scénario pour la fusion d'un cristal 2D 23
3-2 Mise en évidence sur des systèmes colloïdaux 24
3-3 Et le graphène ? 25

II Du cas idéal aux interactions binaires **27**

1 Le gaz de Bose uniforme à 2D 27
1-1 La non-saturation des états excités 28
1-2 La distribution en impulsion 30
1-3 Fonction de corrélation à un corps 31
1-4 Les effets de taille finie 32
2 Le gaz de Bose dans un piège harmonique 2D 32
2-1 L'influence de la dimension d'espace 33
2-2 Le point de condensation 33
2-3 Approximation semi-classique 34
2-4 Approximation de densité locale 35
3 Un gaz 2D presque idéal : les photons en cavité 36
3-1 Masse et potentiel harmonique pour les photons . . . 36
3-2 Température et potentiel chimique 37
3-3 Résultats expérimentaux 38
4 Collisions binaires à deux dimensions 40
4-1 Séparation des variables, amplitude de diffusion . . 41
4-2 La longueur de diffusion à 3D 42
4-3 La longueur de diffusion à 2D 43

4-4 Collisions dans une géométrie quasi-2D 45

III Le quasi-ordre à longue portée **49**

1 L'approche champ classique 49
1-1 Analogie optique 49
1-2 Simplification du problème quantique à N corps . . . 50
1-3 Retour sur les distributions statistiques 51
1-4 Que reste-t-il de quantique ? 53
2 Fonctionnelle de Gross-Pitaevskii 53
2-1 De l'hamiltonien quantique au champ classique . . . 53
2-2 Factorisation du mouvement "gelé" 54
2-3 Coupure ultra-violette et longueur de cicatrisation . . 56
2-4 La version "optique non linéaire" 57
3 Fluctuations de phase et quasi-ordre 59
3-1 Suppression des fluctuations de densité 59
3-2 Hamiltonien effectif à basse énergie 60
3-3 Analyse de Fourier des fluctuations de phase 60
3-4 Corrélations en phase à l'équilibre thermique 61
3-5 Le modèle xy 64
4 L'approche de Bogoliubov 64
4-1 Équations du mouvement « amplitude – phase » . . . 65
4-2 Spectre de Bogoliubov et ondes sonores 66
4-3 Fluctuations de phase et fluctuations de densité . . . 67

IV Le point critique de la transition BKT **69**

1 Seuil d'apparition d'un vortex isolé 69
1-1 Apparition et disparition des vortex 69
1-2 L'énergie d'un vortex 70
1-3 L'observation d'un vortex isolé est-elle probable ? . . 72
1-4 Vortex isolés et non-superfluidité 74
2 Une paire "vortex – antivortex" 74
2-1 Champ de vitesses et énergie d'une paire 75
2-2 Elongation moyenne d'une paire 76
2-3 Densité de paires 76
3 Énergie d'une assemblée de vortex 76
3-1 Champs de vitesses longitudinaux et transverses . . 77
3-2 Champ de vitesse d'une assemblée de vortex 77
3-3 Énergie des vortex 78
4 Densité superfluide dans un fluide 2D 79
4-1 Conditions aux limites distordues 79
4-2 Densité superfluide et corrélations en vitesse 80
4-3 Densité superfluide et positions des vortex 82
4-4 Le principe de la renormalisation 83
4-5 Premières études expérimentales : films d'hélium . . 84

V La transition BKT explorée avec des gaz **89**

1 Lois d'échelle au point critique 89
1-1 Thermodynamique du champ classique 90
1-2 Densité totale et densité superfluide 91
1-3 Caractérisation du point critique 91
2 Le point critique d'un gaz atomique piégé 93
2-1 L'approximation de densité locale 93

2-2 Faibles densités et approche de Hartree–Fock 93
2-3 Le point critique dans un piège harmonique 95
2-4 Le cas d'un potentiel désordonné 96
3 Le quasi-ordre en phase dans un gaz atomique 97
3-1 La fonction G_1 dans un piège 97
3-2 Fluctuations de phase et interférométrie atomique . . 98
3-3 La distribution en impulsion d'un gaz piégé 99
3-4 Mouvement d'une impureté et modes collectifs . . . 101
4 Les polaritons de cavité 102
4-1 L'hybridation lumière–matière 102
4-2 La relation de dispersion des polaritons de cavité . . 104
4-3 Quasi-condensat de polaritons 105
4-4 Expériences montrant un quasi-ordre en phase 106
4-5 Polaritons autour d'un obstacle 108

VI Invariance d'échelle classique, anomalies quantiques 109
1 Invariance d'échelle à l'équilibre thermodynamique 110
1-1 Variables et potentiels thermodynamiques 110
1-2 Changements d'échelle de longueur et de temps . . . 111
1-3 Conséquences d'une loi d'échelle pour l'énergie . . . 113
1-4 Fluides invariants d'échelle 114
2 Mesures de l'équation d'état d'un gaz 2D 115
2-1 Approximation de densité locale 115
2-2 Liens entre quantités thermodynamiques 117
2-3 Les méthodes "sans ajustement" 118
2-4 Comportement universel autour de T_c 118
3 Le potentiel delta à 2D 119
3-1 État stationnaire de diffusion 119
3-2 Nécessité d'une coupure 120
3-3 Equation d'état à température nulle 121
3-4 Le cas pratique d'une expérience d'atomes froids . . 122
4 Le mode de respiration d'un gaz piégé 123
4-1 Point de vue ondulatoire 123
4-2 Point de vue algébrique 124
4-3 Brisure de l'invariance d'échelle 125
4-4 Études expérimentales 125

Références 127

Introduction

Le cours de cette année trouve son origine dans une question simple : que deviendraient les objets « ordonnés » de notre monde physique – cristaux, aimants, superfluides – si nous vivions dans un espace de dimension réduite, sur un plan par exemple ? L'analyse initiée par PEIERLS (1935) avait montré que les fluctuations thermiques et quantiques auraient alors une importance accrue et qu'elles empêcheraient l'apparition d'un ordre similaire à celui observé dans notre espace à trois dimensions. Ce résultat avait été renforcé au cours des années 60 par MERMIN & WAGNER (1966) et HOHENBERG (1967).

Toutefois, si une transition « ordre-désordre » conventionnelle ne peut se produire en dimension réduite, cela n'entraîne pas la disparition de toute transition de phase : au début des années 1970, les études de Vadim Berezinskii d'un côté et celles de J. Michael Kosterlitz et David J. Thouless de l'autre ont montré qu'un nouveau mécanisme pouvait émerger, en liaison avec l'apparition de défauts « topologiques ».

Commençons par dire quelques mots de ce lien entre topologie et physique que le jury Nobel de 2016 est venu saluer en récompensant David J. Thouless, F. Duncan M. Haldane et J. Michael Kosterlitz pour *les découvertes théoriques des transitions de phase topologiques et des phases topologiques de la matière*. Ces deux disciplines, topologie et physique, semblent éloignées l'une de l'autre. La topologie est une branche des mathématiques visant à établir des équivalences souvent abstraites entre des objets différents, équivalences fondées sur la forme - à comprendre au sens large - de ces objets. Ce type de préoccupation pourrait sembler déconnecté des recherches en physique de la matière, qui se préoccupent des phases susceptible d'apparaître en fonction de la densité, de la température ou des interactions au sein d'un matériau.

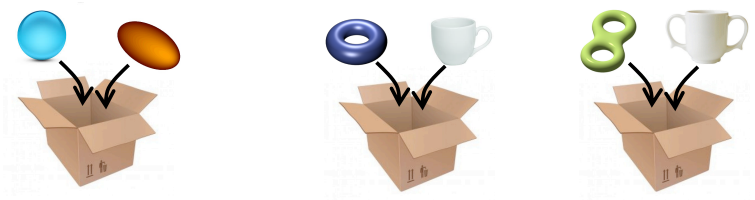


FIGURE 1. *Des objets de genre $g = 0, 1, 2$.*

Pour comprendre comment la physique "du quotidien" peut tirer profit de notions de topologie, il est utile de faire un détour par la géométrie, plus précisément par le lien entre topologie et géométrie établi par Gauss (qui ne l'a pas publié) et Bonnet (qui l'a publié en 1848). Dans sa version simple, le théorème de Gauss–Bonnet porte sur l'étude des surfaces régulières dans l'espace à trois dimensions, surfaces que nous supposerons ici orientables et sans bord (c'est-à-dire fermées). En chaque point $\boldsymbol{r}$ de la surface $\mathcal{S}$, on peut définir sa courbure $\Omega(\boldsymbol{r})$. Le théorème de Gauss–Bonnet prouve la quantification de l'intégrale de $\Omega(\boldsymbol{r})$ sur la surface $\mathcal{S}$ et donne une interprétation à cette quantification :

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}} \Omega(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}^2 r = 1 - g \tag{1}$$

où g est un entier, appelé *genre* de la surface, qui compte son "nombre d'anses". Une sphère ou la surface d'un bol n'ont pas d'anse, donc $g = 0$; un tore ou une tasse à café normale ont une anse, donc $g = 1$; des objets plus complexes ont deux, trois anses (figure 1).



FIGURE 2. *Déformation continue d'une tasse en un tore. L'intégrale de la courbure (1) reste constante durant cette déformation (et égale à 0 pour cet objet à une anse). Figure extraite de la page web de* Scientific American *et réalisée par Keenan Crane (Columbia U.).*

Avec ce théorème émerge la notion de "protection topologique" : partant par exemple d'un tore, on peut le déformer continûment en une tasse sans fermer l'anse (figure 2). Dans cette déformation, la courbure en chaque point va bien sûr changer, mais son intégrale sur la surface va rester constante : cette intégrale donc est une quantité robuste, protégée des déformations. En fait, le seul moyen de la modifier est de boucher l'anse (ou d'en créer une deuxième). À l'instant précis où l'anse se bouche, la surface n'est plus régulière et le théorème de Gauss–Bonnet ne s'applique pas. Sitôt l'anse bouchée, la surface redevient régulière, mais elle appartient désormais à la classe $g = 0$ de la sphère et des bols...

Une fois transposée à des objets physiques, cette robustesse topologique est d'un grand intérêt pratique. Supposons qu'une quantité physique s'écrive comme l'intégrale sur une ligne fermée ou sur une surface fermée d'une quantité Ω assimilable à une courbure. On sait alors que cette quantité sera robuste, insensible aux changements de détail de l'objet considéré, un matériau par exemple. C'est précisément la situation que l'on rencontre dans le cadre de l'effet Hall quantique entier, où la conductivité est obtenue en intégrant la *courbure de Berry* sur une surface fermée, en l'occurence la zone de Brillouin associée à la bande d'énergie peuplée. Nous n'aborderons pas dans ce cours cet aspect du lien topologie-physique, mais il rentre sans aucun doute dans le champ récompensé par le jury Nobel, avec notamment le fameux article TKNN (THOULESS, KOHMOTO et al. 1982) que nous avons eu l'occasion de discuter dans le cours 2013-14.

Un autre exemple d'objet topologiquement robuste qui sera quant à lui bien présent dans le cours de cette année est un vortex dans un fluide bidimensionnel de particules obéissant à la statistique de Bose–Einstein. Introduisons brièvement la notion de vortex dans ce contexte. Nous supposons[1] que le fluide est décrit par un champ d'onde de matière $\psi(\boldsymbol{r})$ avec $\boldsymbol{r} = (x, y)$. Ce champ est complexe et il est donc caractérisé par son amplitude et sa phase. On l'écrit traditionnellement :

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\rho(\boldsymbol{r})}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{r})}, \tag{2}$$

où $\rho(\boldsymbol{r}) = |\psi(\boldsymbol{r})|^2$ représente la densité au point $\boldsymbol{r}$. La phase $\theta(\boldsymbol{r})$ est définie modulo 2π, puisque la seule contrainte sur le champ ψ est d'être monovalué. Connaissant le champ ψ, on détermine la vitesse du fluide en fonction du gradient de la phase $\theta(\boldsymbol{r})$, en tout point $\boldsymbol{r}$ où la densité est non nulle :

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar}{m}\, \boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{r}). \tag{3}$$

Il est important que la densité soit non nulle en $\boldsymbol{r}$ pour que la phase $\theta(\boldsymbol{r})$ soit elle-même bien définie au voisinage de $\boldsymbol{r}$ et que l'on puisse prendre son gradient. La vitesse étant proportionnelle au gradient de la phase, on en déduit que pour tout contour fermé $\mathcal{C}$ sur lequel la phase est définie (figure 3) :

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = n\, 2\pi \qquad \longrightarrow \qquad \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = n\frac{2\pi\hbar}{m}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Cette circulation est une quantité quantifiée et protégée topologiquement : elle ne peut changer que si le contour $\mathcal{C}$ est déformé pour passer sur un point où $\theta(\boldsymbol{r})$ n'est pas définie, c'est-à-dire un zéro de ψ.

Ces zéros de ψ correspondent précisément aux vortex. Ceux que nous rencontrerons dans ce cours sont des zéros simples de ψ, correspondant au cas $n = \pm 1$. Un vortex en $\boldsymbol{r} = 0$ est obtenu en prenant par exemple un champ $\psi(\boldsymbol{r})$ de la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = (x \pm \mathrm{i}y)\, F\left(x^2 + y^2\right) = r\, F(r^2)\, \mathrm{e}^{\pm i\varphi} \tag{5}$$

où F est une fonction régulière. Le nombre $n = \pm 1$ déterminant l'enroulement de phase $\pm 2\pi$ sur un contour entourant un vortex est appelé *charge topologique* de ce vortex.

1. Nous reviendrons abondamment sur cette hypothèse dans les cours qui suivent. Comme références possibles sur ce sujet, citons PITAEVSKII & STRINGARI (2016), LEGGETT (2006) ou encore SVISTUNOV, BABAEV et al. (2015).

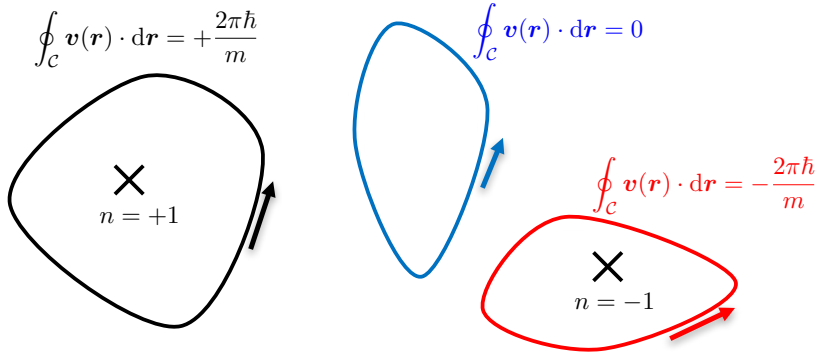


FIGURE 3. *Circulation du champ de vitesse sur un contour fermé $\mathcal{C}$ dans un gaz bi-dimensionnel de bosons. Cette circulation est non nulle si le contour englobe un vortex. La valeur est alors quantifiée [équation (4)] avec l'entier n qui donne la charge du vortex (ou la somme des charges si plusieurs vortex se trouvent à l'intérieur du contour).*

Du fait de la protection de $\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ pour n'importe quel contour entourant un vortex, ces vortex sont qualifiés de "défauts topologiques". Un champ $\psi(\boldsymbol{r})$ contenant un vortex ne peut pas être déformé continûment en un champ $\psi(\boldsymbol{r})$ sans vortex. Au contraire, un champ $\psi(\boldsymbol{r})$ ne présentant que des oscillations douces de $\rho(\boldsymbol{r})$ et $\theta(\boldsymbol{r})$, avec $\rho(\boldsymbol{r})$ ne s'annulant nulle part, peut être déformé continument en un champ complètement uniforme ψ_0 (figure 4). Nous interpréterons plus tard ces oscillations douces comme des phonons.

Cette notion de défaut topologique joue un rôle central dans le mécanisme découvert par Kosterlitz et Thouless (KOSTERLITZ & THOULESS 1973). En fait, leur travaux ont été menés en parallèle[2] de ceux de BEREZINSKII (1971) et nous parlerons dans ce cours de mécanisme BKT. Le mécanisme BKT consiste en une transition "appariement–désappariement" des défauts topologiques (figure 5) :

— Considérons la situation où les défauts sont appariés ; dans le cas du fluide de Bose, cela signifie qu'au voisinage immédiat de tout vortex

2. Vadim Berezinskii (1935-1980) travaillait à l'Institut Landau de physique théorique.

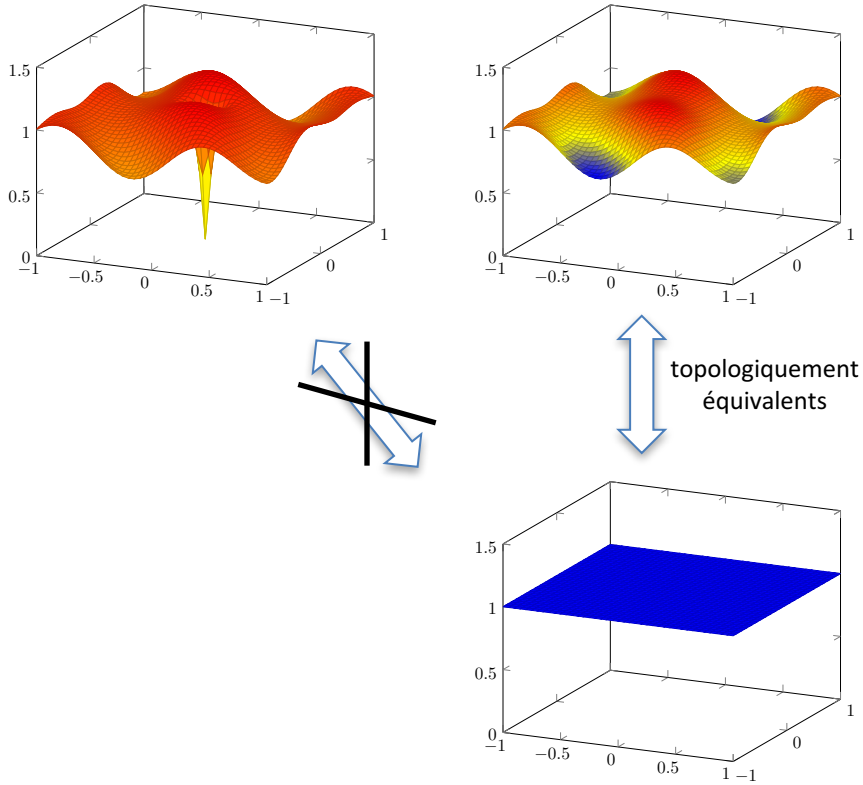


FIGURE 4. *Gauche : amplitude du champ $\psi(\boldsymbol{r})$ contenant un vortex. Ce "défaut" est protégé topologiquement du fait de l'enroulement de phase de $\pm 2\pi$ autour de lui. Droite : amplitude d'un champ $\psi(\boldsymbol{r})$ ne présentant que des oscillations douces de $\rho(\boldsymbol{r})$ et $\theta(\boldsymbol{r})$, avec $\rho(\boldsymbol{r})$ ne s'annulant nulle part. Ce champ peut être déformé continument en un champ uniforme, correspondant à l'état attendu à température nulle.*

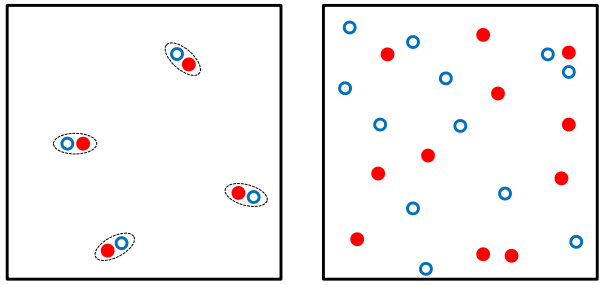


FIGURE 5. *Gauche : basse température, défauts topologiques appariés ; si on fait une "moyenne à gros grains" de l'état du système, tout se passe comme si les défauts n'étaient pas présents. Droite : haute température, défauts topologiques non appariés ; la phase obtenue est radicalement différente de celle attendue à basse température.*

de charge $+1$, on trouve un vortex de charge -1. Si on se limite à des contours $\mathcal{C}$ assez grands, les deux vortex seront presque toujours à l'intérieur du contour et conduiront à une intégrale nulle. L'état $\psi(\boldsymbol{r})$ pourra être vu, au moins dans le cadre d'une moyenne à gros grains, comme similaire à l'état uniforme attendu à température nulle. On parle *d'ordre topologique* pour qualifier cet état.

— En revanche si les défauts sont désappariés, un contour $\mathcal{C}$ englobera généralement un nombre différent de vortex positifs et de vortex négatifs. L'état $\psi(\boldsymbol{r})$ ne peut pas être continument déformé vers l'état uniforme. Cet état n'est topologiquement pas équivalent à l'état de température nulle.

À la limite thermodynamique, la transition correspondante est une transition de phase. Dans le cas particulier du fluide de Bose de densité fixée, elle se produit pour une température critique T_c que l'on peut calculer. Le mécanisme BKT s'applique à une grande variété de systèmes, classiques ou quantiques. La transition de phase correspondante est radicalement différente de celles décrites dans le cadre de la classification de Landau. En fait, la transition BKT peut être vue comme une transition d'ordre infinie, car toutes les fonctions thermodynamiques sont continues en T_c.

Le plan que nous allons suivre pour ce cours sera le suivant :

— Le premier chapitre sera consacré à l'argument de Peierls, montrant pourquoi l'ordre cristallin non conventionnel ne peut exister à une et deux dimensions du fait des fluctuations thermiques. Nous donnerons également quelques illustrations de l'ordre topologique susceptible d'apparaître dans un fluide de particules en interaction.

— Nous nous tournerons ensuite vers les fluides quantiques, en commençant par le gaz parfait. Nous retrouverons l'impossibilité d'arriver à un ordre à longue portée, mais nous verrons comment les effets de confinement peuvent malgré tout faire émerger un condensat de Bose–Einstein. Nous illustrerons ce point à partir d'expériences de "condensation de photons" dans une cavité électromagnétique. Nous terminerons ce chapitre en décrivant comment prendre en compte les interactions entre deux particules en dimension deux.

— Le chapitre 3 sera consacré au cas d'un gaz de Bose en interaction, dans la limite basse température où une approche de type Bogoliubov est pertinente. En accord avec le résultat de Mermin–Wagner–Hohenberg, nous montrerons que l'ordre en phase d'un condensat 3D ne peut apparaître, et nous verrons qu'il est remplacé par un quasi-ordre avec une décroissance algébrique de la fonction G_1 pour un gaz uniforme :

$$G_1(\boldsymbol{r}) = \langle \hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\, \hat{\psi}(0) \rangle \;\propto\; \frac{1}{r^\eta}, \tag{6}$$

où l'exposant η peut être relié à la densité dans l'espace des phases du gaz.

— Le rôle des défauts topologiques (vortex) sera détaillé au chapitre 4. Nous verrons pourquoi l'existence de vortex isolés détruit la superfluidité, alors que les paires de vortex liées n'ont pas de conséquence majeure. Nous décrirons de manière semi-quantitative les méthodes désormais standards pour analyser le point critique de la transition BKT. Nous verrons également comment les premières expériences menées sur des films d'hélium à la fin des années 70 ont confirmé ces prédictions.

— Le chapitre 5 sera consacré à la confrontation des prédictions BKT avec les expériences menées sur les fluides quantiques dilués, gaz atomiques ou assemblées de polaritons de cavité. Nous verrons notamment qu'il n'est pas aisé de concevoir un système physique unique

permettant de mettre en évidence l'ensemble des caractéristiques de la transition BKT.

— Enfin au chapitre 6, nous nous interrogerons sur la différence entre les aspects classiques et quantiques des gaz dégénérés dimensionnels. La transition BKT émerge quand on décrit ces fluides par un champ *classique* $\psi(\boldsymbol{r})$, la seule quantification étant celle de la circulation de la vitesse (4). Cette approche "champ classique" apporte un bonus, l'invariance d'échelle. Au contraire, une description complètement quantique du fluide brise cette invariance. Nous ferons le point sur des expériences récentes ayant abordé ce sujet.

Il est bien clair que dans le volume restreint imparti à ce cours, il n'est pas envisageable de dresser un panorama complet des recherches sur la transition BKT. Cette dernière a fait l'objet de nombreux livres ou articles de revue, et nous renvoyons le lecteur désireux d'en apprendre davantage vers le l'ouvrage récent édité par JOSÉ (2013) qui contient de nombreuses références sur le sujet.

Chapitre I

Peierls et l'ordre cristallin en basse dimension

L'essentiel du cours de cette année va être consacré à l'étude de gaz quantiques en dimension réduite, essentiellement en dimension deux. Du fait de cette dimension réduite, le phénomène de condensation lié à la statistique de Bose–Einstein sera absent, au moins à la limite thermodynamique, c'est-à-dire pour un système infini. En d'autres termes, l'ordre à longue portée qui caractérise un condensat de Bose–Einstein, c'est-à-dire la corrélation en phase de la fonction d'onde qui décrit le gaz, disparaît à deux ou à une dimensions. Les fluctuations thermiques jouent en effet un rôle plus important qu'à trois dimensions, et elles viennent détruire l'ordre que la statistique ou les interactions auraient tendance à créer.

C'est le physicien Rudolf Peierls, d'origine allemande, mais travaillant en Angleterre à partir de 1933, qui a le premier formalisé cette perte possible de l'ordre à longue portée dans les systèmes de dimensions réduites (PEIERLS 1934 ; PEIERLS 1935). Il ne s'intéressait pas aux condensats de Bose–Einstein, mais à l'ordre d'un solide et il a montré qu'un cristal ne pourrait pas exister dans un monde uni ou bidimensionnel.

Dans ce chapitre, nous allons commencer par examiner les arguments de Peierls à une, puis à deux dimensions. Nous décrirons ensuite quelques expériences récentes menées sur des colloïdes et qui ont permis de tester la prédiction de Peierls. Mais nous verrons aussi que l'absence d'ordre cristallin ne signifie pas un désordre complet : ces assemblées colloïdales peuvent être "presque" cristallines à basse température, avant de devenir complètement liquides à température plus élevée. Ce sera notre première rencontre avec une transition de phase induite par des défauts topologiques, concept formalisé par KOSTERLITZ & THOULESS (1973).

1 L'argument de Peierls à une dimension

Nous allons commencer notre étude avec un système unidimensionnel, c'est-à-dire une chaîne d'atomes. Nous allons nous limiter au cas d'interactions entre proches voisins pour arriver simplement au résultat de Peierls : un tel système ne peut pas présenter d'ordre cristallin. Même si on connaît précisément la position d'un atome donné de la chaîne, la position d'un autre atome est complètement indéfinie à l'échelle de la maille cristalline pourvu que cet autre atome soit choisi assez loin du premier.

1-1 Un argument simple : l'empilement de défauts

Considérons une chaîne d'atomes avec une interaction entre proches voisins décrite par le potentiel $U(x)$. Si on numérote les atomes avec un indice j en supposant $\ldots < x_{j-1} < x_j < x_{j+1} < \ldots$, l'énergie d'interaction du système vaut donc

$$V_{\text{inter.}}(\{x_j\}) = \sum_j U(x_{j+1} - x_j). \tag{I.1}$$

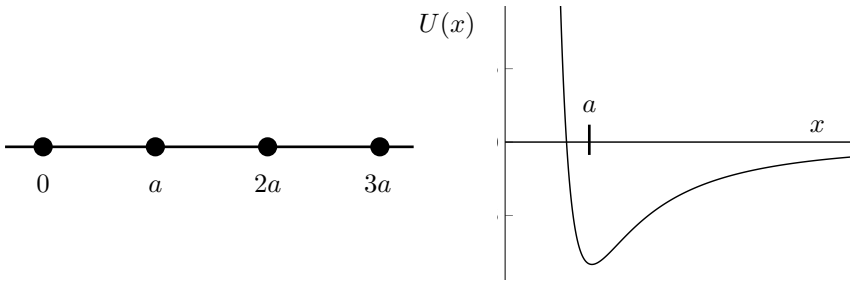


FIGURE I.1. *Chaine uni-dimensionnelle d'atomes avec des interactions entre proches voisins décrites par le potentiel $U(x)$. Ce potentiel a un minimum en $x = a$, ce qui a pour effet de former un cristal, au moins pour un gaz de particules à température nulle décrites par la physique classique (pas de fluctuations thermiques, ni quantiques).*

Pour favoriser l'apparition d'un éventuel ordre cristallin, supposons que ce potentiel possède un minimum local en $x = a$, de sorte qu'à température nulle et en absence de toute fluctuation d'origine quantique, la chaîne d'atomes est régulière, avec un espacement entre atomes adjacents égal à a (figure I.1).

Supposons maintenant que le système soit à température T non nulle. En prenant la position x_0 de l'atome 0 comme référence, la position x_1 de son voisin de droite fluctuera autour de sa position d'équilibre avec un écart quadratique moyen δ_1 qui se déduit du théorème d'équipartition de l'énergie :

$$x_1 = x_0 + a + \delta_1 \qquad \text{avec} \quad \langle \delta_1 \rangle = 0, \qquad \langle \delta_1^2 \rangle \sim \frac{k_{\rm B} T}{\kappa}, \quad \kappa = \left. \frac{{\rm d}^2 U}{{\rm d}x^2} \right|_{x=a}. \tag{I.2}$$

Nous nous sommes limités ici au cas où $|\delta| \ll a$, de sorte qu'on peut utiliser une approximation quadratique pour estimer les variations du potentiel $U(x)$ au voisinage de son minimum $x = a$. Par ailleurs, nous avons mis un signe $\sim$ et pas un signe $=$ car le traitement fait ici ne peut donner qu'un ordre de grandeur de $\langle \delta_1^2 \rangle$. En effet, la position de l'atome 1 ne doit pas se repérer seulement par rapport à son voisin de gauche, c'est-à-dire l'atome 0, mais aussi par rapport à son voisin de droite, c'est-à-dire l'atome 2. La prise en compte correcte de l'ensemble des interactions conduit à un ensemble d'équations couplées que nous examinerons un peu plus loin (§ 1-2).

Le même argument permet d'évaluer les fluctuations de la position de l'atome j par rapport à son voisin $j - 1$:

$$x_j = x_{j-1} + a + \delta_j \qquad \text{avec} \quad \langle \delta_j^2 \rangle \sim \frac{k_{\rm B} T}{\kappa} \tag{I.3}$$

Par rapport à l'atome initial 0, la position de l'atome j est donc donnée par

$$x_j = x_0 + ja + \Delta_j \tag{I.4}$$

où la quantité Δ_j est la somme des j variables aléatoires indépendantes :

$$\Delta_j = \delta_1 + \ldots + \delta_j. \tag{I.5}$$

Cette quantité est également de valeur moyenne nulle et elle a pour variance :

$$\langle \Delta_j^2 \rangle \sim \frac{k_{\rm B} T}{\kappa}\, j. \tag{I.6}$$

On voit donc que l'incertitude sur la position de l'atome j croît comme $\sqrt{j}$ au fur et à mesure où l'on s'éloigne de l'atome de référence. Pour j assez grand, typiquement

$$\langle \Delta_j^2 \rangle \gtrsim a^2 \qquad \longrightarrow \qquad j \gtrsim \frac{\kappa a^2}{k_{\rm B} T}, \tag{I.7}$$

l'incertitude Δ_j devient supérieure à la maille a du réseau et l'ordre cristallin est perdu : même si on sait exactement où se trouve l'atome de référence 0, on n'a aucune information sur la position de l'atome j à l'échelle de la maille cristalline.

Cet argument très simple permet de conclure dans le cas unidimensionnel, mais il est difficile à généraliser en dimension supérieure. Nous allons donc passer par un traitement un peu plus élaboré, où l'on considère les vibrations (phonons) du réseau, traitement qui sera transposable en dimension 2 et 3. Ce traitement est par ailleurs voisin de ce que l'on sera amené à faire plus tard pour étudier la superfluidité.

1-2 Le cristal harmonique classique

Nous reprenons la chaîne d'atomes précédente, en choisissant des conditions aux limites périodiques pour simplifier les calculs. En notant N le nombre total d'atomes, nous identifions l'atome N et l'atome 0, ce qui revient à positionner les atomes sur un cercle (figure I.2). Nous nous limitons à des petites variations des distance $x_{j+1} - x_j$ autour de leur valeur d'équilibre a de sorte que l'énergie totale (cinétique + interactions) du système s'écrit dans l'approximation harmonique

$$E = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{u}_j^2 \; + \; \frac{\kappa}{2} (u_{j+1} - u_j)^2 \tag{I.8}$$

où u_j désigne l'écart de l'atome j par rapport à sa position d'équilibre X_j :

$$u_j = x_j - X_j \qquad \text{avec} \quad X_j = ja \tag{I.9}$$

(avec la convention $u_{N+1} \equiv u_1$). Notons que l'hypothèse de petite variation de la distance entre proches voisins :

$$|u_{j+1} - u_j| \ll a \tag{I.10}$$

n'implique pas que u_j et u_{j+1} soient séparément petits devant a. Les atomes j et $j+1$ peuvent être chacun fortement écartés de leurs positions d'équilibre X_j et X_{j+1}, mais nous faisons l'hypothèse que leurs écarts u_j et u_{j+1} sont voisins ; en d'autres termes, il peut y avoir un ordre local sans avoir d'ordre à longue portée.

Les équations du mouvement conduisent à un système de N équations linéaires couplées :

$$m \, \ddot{u}_j = \kappa (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}), \tag{I.11}$$

dont les solutions sont les modes propres du système, c'est-à-dire les phonons. La résolution de ce système d'équations est un classique des ouvrages de physique des solides [voir par exemple ZIMAN (1960) et ASHCROFT & MERMIN (1976)]. Une méthode rapide consiste à considérer les coefficients $\hat{u}_q$ (prenons N pair pour fixer les idées)

$$\hat{u}_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, qX_j} \; u_j, \qquad q = -\frac{\pi}{a}, \ldots, -\frac{2\pi}{Na}, \; 0, \; \frac{2\pi}{Na}, \ldots, +\frac{\pi}{a} \tag{I.12}$$

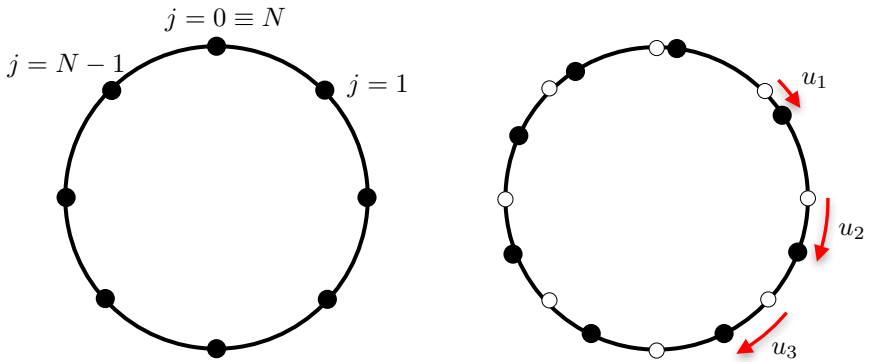


FIGURE I.2. *Gauche : chaîne ordonnée de N atomes avec des conditions aux limites périodiques, conduisant à identifier l'atome $j = 0$ et l'atome $j = N$. Droite : définition des déplacements u_j par rapport aux positions d'équilibre. On suppose que $|u_{j+1} - u_j| \ll a$ mais pas nécessairement que $|u_j| \ll a$.*

où les deux valeurs extrêmes $q = \pm\pi/a$ conduisent au même coefficient $\hat{u}_q$.

La transformation $u_j \to \hat{u}_q$ n'est autre qu'une transformée de Fourier discrète qui associe les écarts u_j aux amplitudes $\hat{u}_q$ des moments q. Cette transformation s'inverse pour donner

$$u_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, qX_j} \; \hat{u}_q. \tag{I.13}$$

Comme les N positions u_j sont réelles, les amplitudes complexes $\hat{u}_q$ vérifient

$$\hat{u}_q^* = \hat{u}_{-q}, \qquad \hat{u}_0, \; \hat{u}_{\pm\pi/a} \in \mathbb{R}. \tag{I.14}$$

On a donc N variables réelles indépendantes, aussi bien dans l'espace des positions que dans l'espace de Fourier.

L'écriture de l'énergie totale (I.8) en fonction des modes phononiques $\hat{u}_q$ s'obtient après un calcul simple :

$$E = \sum_q \frac{1}{2} \, m \, \dot{\hat{u}}_q \dot{\hat{u}}_{-q} + \frac{1}{2} \, m \, \omega_q^2 \, \hat{u}_q \hat{u}_{-q} \tag{I.15}$$

où l'on a posé

$$\omega_q = 2\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\,|\sin\frac{qa}{2}|. \tag{I.16}$$

On a donc décomposé le problème en N modes de phonons indépendants, régis par l'équation du mouvement :

$$\ddot{\hat{u}}_q + \omega_q^2 \hat{u}_q = 0; \tag{I.17}$$

— le mode $\hat{u}_0$, avec l'équation du mouvement $\ddot{\hat{u}}_0 = 0$, correspond au mouvement du centre de masse de l'ensemble de la chaîne. Rien ne vient contraindre la position de ce centre de masse puisque l'énergie totale est invariante par translation globale des N atomes.

— les $N-1$ modes $\hat{u}_q$ avec $q \neq 0$ forment des oscillateurs harmoniques découplés de pulsation ω_q.

Les modes (I.12-I.16) correspondent à une version discrétisée d'ondes progressives en $\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}$, avec la position $x = X_j \equiv ja$. Pour les petits nombres d'onde ($q \ll \pi/a$), on trouve une relation de dispersion linéaire

$$\omega_q = c\,|q| \qquad \text{avec} \quad c = a\sqrt{\frac{\kappa}{m}}, \tag{I.18}$$

correspondant à des ondes « sonores » de vitesse c.

1-3 Corrélation des écarts u_j à l'équilibre thermique

À l'équilibre thermodynamique, on déduit de l'expression de l'énergie (I.15) que chaque mode $\hat{u}_q$ pour $q \neq 0$ a une valeur moyenne nulle et une variance donnée par le théorème d'équipartition :

$$\frac{1}{2}m\omega_q^2\langle|\hat{u}_q|^2\rangle = \frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T \qquad \langle\hat{u}_q\hat{u}_{q'}^*\rangle = 0 \text{ si } q \neq q'. \tag{I.19}$$

Pour établir cette relation (avec les facteurs 2 corrects !), il faut rappeler que l'on travaille avec des oscillateur complexes [*cf.* (I.14)]. En cas de doute, il est conseillé de se ramener à des oscillateurs réels indépendants, par exemple en considérant les parties réelles et imaginaires des $\hat{u}_q$ et en reprenant la somme (I.15) pour la restreindre aux variables indépendantes correspondant à $q \geq 0$.

Il est alors simple de calculer la corrélation entre le déplacement de l'atome j et celui de l'atome 0 ($\equiv N$). Partons de

$$u_j - u_0 = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_q \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}qX_j} - 1\right)\hat{u}_q, \tag{I.20}$$

ce qui donne, en prenant le carré, puis la valeur moyenne thermique

$$\langle(u_j - u_0)^2\rangle = \frac{4}{N}\sum_q \sin^2(qX_j/2)\ \langle|\hat{u}_q|^2\rangle \tag{I.21}$$

$$= \frac{k_{\mathrm{B}}T}{m}\,\frac{4}{N}\sum_q \frac{\sin^2(qX_j/2)}{\omega_q^2}. \tag{I.22}$$

À ce stade, il est utile de remplacer la somme sur le moment discrétisé q par une intégrale en utilisant la relation déduite de (I.12) :

$$\sum_q \longrightarrow \frac{Na}{2\pi}\int_{-\pi/a}^{\pi/a}\mathrm{d}q, \tag{I.23}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\langle(u_j - u_0)^2\rangle &= \frac{2}{\pi}\,\frac{k_{\mathrm{B}}Ta}{m}\int_{-\pi/a}^{\pi/a}\frac{\sin^2(qX_j/2)}{\omega_q^2}\,\mathrm{d}q \\ &= \frac{4}{\pi}\,\frac{k_{\mathrm{B}}Ta}{m}\int_0^{\pi/a}\frac{\sin^2(qX_j/2)}{\omega_q^2}\,\mathrm{d}q \\ &\approx \frac{4}{\pi}\,\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\kappa a}\int_0^{\pi/a}\frac{\sin^2(qX_j/2)}{q^2}\,\mathrm{d}q\end{aligned} \tag{I.24}$$

où nous avons remplacé dans la dernière ligne la pulsation ω_q par son expression linéarisée $\omega_q = cq$, et utilisé l'expression (I.18) pour la vitesse du son c. Cette approximation sera justifiée *a posteriori* quand nous connaitrons les modes q qui contribuent majoritairement à cette intégrale.

Nous allons nous placer dans le cas où l'atome j est éloigné de l'atome 0 puisque nous nous intéressons à l'ordre à longue portée. Pour évaluer cette intégrale, nous allons tout d'abord utiliser une méthode approchée. Elle consiste à découper l'intervalle d'intégration, puis à évaluer chaque morceau. Cette méthode nous donnera simplement la loi d'échelle reliant

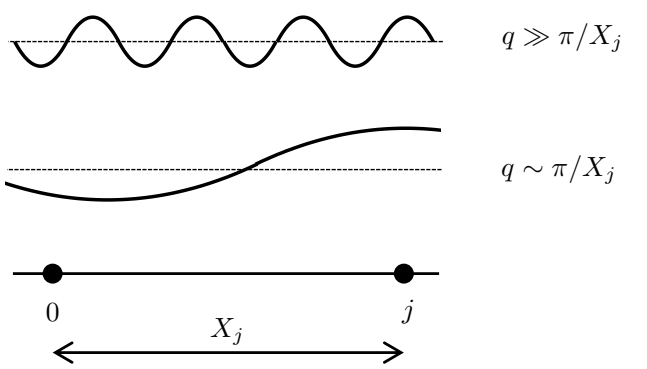


FIGURE I.3. *Les deux types de modes susceptibles de contribuer à l'intégrale (I.24), pour une distance X_j donnée entre les deux sites considérés.*

$\langle (u_j - u_0)^2 \rangle$ et sera directement transposable au cas bi-dimensionnel. Nous examinerons ensuite une deuxième méthode, spécifique du cas 1D, permettant de faire un calcul (presque) exact de cette intégrale.

Découpage et approximations. La structure de l'intégrande suggère de découper l'intervalle d'intégration en deux parties (figure I.3) :

— Les valeurs telles que $q \gtrsim \pi/X_j$, pour lesquelles on peut remplacer le $\sin^2$ par sa moyenne $1/2$, soit

$$\approx \frac{2}{\pi}\,\frac{k_\mathrm{B}T}{\kappa a}\int_{\pi/X_j}^{\pi/a}\frac{1}{q^2}\,\mathrm{d}q \approx \frac{2}{\pi^2}\,\frac{k_\mathrm{B}T}{\kappa a}\,X_j \tag{I.25}$$

où l'on a utilisé le fait que $X_j \gg a$.

— Les valeurs telles que $q \lesssim \pi/X_j$ pour lesquelles on peut remplacer le sinus par son argument :

$$\approx \frac{1}{\pi}\,\frac{k_\mathrm{B}T}{\kappa a}\,{X_j}^2\int_0^{\pi/X_j}\mathrm{d}q = \frac{k_\mathrm{B}T}{\kappa a}\,X_j \tag{I.26}$$

Sous cette forme, on voit que les deux contributions sont sensiblement du même ordre, leur valeur relative précise dépendant de la position de la frontière entre les deux domaines (ici π/X_j). Elles conduisent chacune à la divergence linéaire de $\langle (u_j - u_0)^2 \rangle$ avec j. On voit également que les valeurs de q qui contribuent le plus à ces deux intégrales sont les valeurs autour de $q \sim 1/X_j \ll 1/a$, c'est-à-dire les modes dont la longueur d'onde est de l'ordre de la distance entre les deux sites 0 et j considérés ici. Cette constatation justifie *a posteriori* la linéraisation de la fréquence $\omega_q \propto \sin(qa/2)$ faite à l'équation (I.24).

Calcul (presque) exact de l'intégrale (I.24). Un changement de variable permet de se ramener à :

$$\langle (u_j - u_0)^2 \rangle = \frac{2}{\pi}\,\frac{k_\mathrm{B}T}{\kappa a}\,X_j\int_0^{\pi X_j/a}\frac{\sin^2 z}{z^2}\,\mathrm{d}z. \tag{I.27}$$

Dans la limite $j \gg 1$, la borne supérieure de l'intégrale peut être étendue à $+\infty$ et l'intégrale vaut $\pi/2$, ce qui redonne le résultat trouvé dans le premier paragraphe [*cf.* (I.6)] :

$$\langle (u_j - u_0)^2 \rangle = \frac{k_\mathrm{B}T}{\kappa a}X_j = \frac{k_\mathrm{B}T}{\kappa}j. \tag{I.28}$$

Ce résultat coïncide également (à 20 % près) avec la somme des deux contributions (I.25) et (I.26).

Ce calcul confirme donc la conclusion de l'analyse simplifiée du paragraphe § 1-1 : à température non nulle, il n'y a pas d'ordre à longue portée et la « mémoire » de la position de l'atome $j = 0$ est effacée au bout d'une distance qui varie comme $1/T$. En revanche, à température nulle, on trouve un ordre à longue portée dans ce modèle classique, chaque atome occupant alors exactement sa position d'équilibre.

1-4 Le cas quantique

Avant de passer au cas multi-dimensionnel, il est intéressant de regarder comment les résultats précédents sont modifiés quand on prend en compte l'influence des fluctuations quantiques. Plaçons-nous à température nulle pour simplifier l'analyse. Pour commencer, remarquons que l'énergie (I.8) est une fonction quadratique des positions et des vitesses, de

sorte que le traitement quantique peut être calqué sur le traitement classique. En particulier, l'identification des modes phononiques est inchangé et on trouve pour l'énergie potentielle de chaque oscillateur $\hat{u}_q$:

$$\frac{1}{2}m\omega_q^2\langle|\hat{u}_q|^2\rangle = \frac{1}{4}\hbar\omega_q, \tag{I.29}$$

cette expression venant remplacer l'équipartition classique de l'énergie donnée en (I.19).

Injectons ce résultat dans l'expression (I.21) donnant la variance de l'écart $u_j - u_0$:

$$\langle(u_j-u_0)^2\rangle = \frac{2\hbar}{mN}\sum_q \frac{\sin^2(qX_j/2)}{\omega_q} \tag{I.30}$$

$$\approx \frac{2}{\pi}\,\frac{\hbar}{\sqrt{\kappa m}}\int_0^{\pi/a}\frac{\sin^2(qX_j/2)}{q}\,\mathrm{d}q \tag{I.31}$$

où l'on a remplacé ω_q par cq. Comme nous l'avons fait en (I.25-I.26), nous pouvons séparer cette intégrale en deux parties, selon la valeur relative de q et $1/X_j$:

— Pour $q \gtrsim \pi/X_j$, on a pour $X_j \gg a$

$$\approx \frac{1}{\pi}\,\frac{\hbar}{\sqrt{\kappa m}}\int_{\pi/X_j}^{\pi/a}\frac{1}{q}\,\mathrm{d}q = \frac{1}{\pi}\,\frac{\hbar}{\sqrt{\kappa m}}\,\ln(X_j/a) \tag{I.32}$$

— Pour $q \lesssim \pi/X_j$, on trouve :

$$\approx \frac{1}{2\pi}\,\frac{\hbar}{\sqrt{\kappa m}}\,X_j^2\int_0^{\pi/X_j} q\,\mathrm{d}q = \frac{\pi}{4}\,\frac{\hbar}{\sqrt{\kappa m}}. \tag{I.33}$$

Pour $X_j \gg a$, la première contribution est dominante puisqu'elle diverge comme $\ln(X_j)$. On trouve donc, à une constante additive près

$$\langle(u_j-u_0)^2\rangle \sim \frac{a_{\mathrm{oh}}^2}{\pi}\,\ln(X_j/a), \tag{I.34}$$

où on a introduit $a_{\mathrm{oh}} = (\hbar^2/m\kappa)^{1/4}$, qui est la taille caractéristique de l'état fondamental d'un oscillateur harmonique quantique de masse m et de raideur κ.

Cette divergence indique que même à température nulle, un cristal unidimensionnel quantique ne pourrait pas exister, au moins si on se limite à des interactions entre proches voisins. Cette divergence est faible puisque logarithmique, mais elle suffit à empêcher l'ordre cristallin.

Nous allons retrouver dans le paragraphe qui suit une divergence logarithmique pour un cristal classique 2D à température non nulle, avec un traitement mathématique qui sera directement inspiré de celui que nous venons d'utiliser. Notons que cette relation entre un système quantique de dimension d à température nulle et son équivalent classique en dimension $d+1$ à température finie n'est pas fortuite. Elle peut être complètement formalisée pour certains problèmes, comme discuté par exemple dans l'article de revue de SONDHI, GIRVIN et al. (1997).

2 Cristaux à deux ou à trois dimensions

L'analyse que nous venons de faire peut être transposée au cas multidimensionnel (MERMIN 1968 ; MERMIN 1979 ; MERMIN 2006). La recherche des modes propres du système se fait de la même façon, en linéarisant le potentiel d'interaction entre atomes au voisinage de leur position d'équilibre dans le cristal. L'invariance par translation du système permet là aussi de rechercher les modes propres du système sous forme d'ondes planes caractérisées par leur vecteur d'onde $\boldsymbol{q}$.

Une complication supplémentaire apparaît dans un réseau de dimension supérieure à 1 : pour préciser complètement la forme d'un mode propre, il faut également se donner sa polarisation $\boldsymbol{\epsilon}$, c'est-à-dire la direction d'oscillation des atomes par rapport au vecteur d'onde. À une dimension, le problème ne se posait pas puisque l'oscillation se faisait nécessairement de manière longitudinale, le long de l'axe du cristal. À deux (resp. trois) dimensions, il y a deux (resp. trois) polarisations indépendantes pour un vecteur $\boldsymbol{q}$ donné. La situation est simplifiée dans le cas d'un cristal isotrope, pour lequel on peut toujours choisir une solution polarisée parallèlement à $\boldsymbol{q}$ et l'autre (ou les deux autres à 3D) perpendiculairement à $\boldsymbol{q}$ (ASHCROFT & MERMIN 1976).

Une fois cette identification des modes propres effectuées, nous pouvons reprendre le raisonnement précédent pour évaluer la variance de

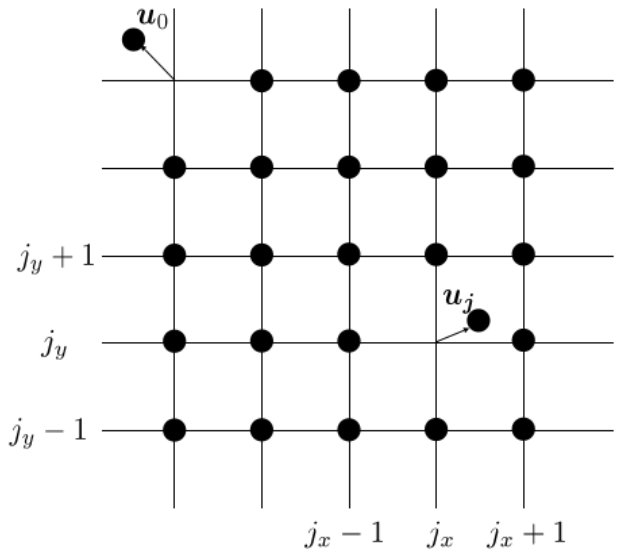


FIGURE I.4. *Réseau à deux dimensions, avec les positions d'équilibre $\boldsymbol{R_j}$, $\boldsymbol{j} = (j_x, j_y)$ et l'écart $\boldsymbol{u_j}$.*

l'écart entre les déplacements $\boldsymbol{u}_0$ et $\boldsymbol{u_R}$ de deux atomes séparés de $\boldsymbol{R}$. Le traitement exact est compliqué par la nécessité de séparer les contributions des différentes polarisations des modes, mais nous pourrons heureusement nous contenter de lois d'échelle pour conclure.

2-1 Écarts à l'équilibre dans le cas bidimensionnel

Considérons un réseau carré de pas a, avec N sites le long de chaque direction et des conditions aux limites le long de chaque axe (figure I.4). Chaque site du réseau est repéré par un couple d'entiers, $(j_x, j_y) \equiv \boldsymbol{j}$, correspondant à la position

$$\boldsymbol{R_j} = a\,(j_x \hat{\mathbf{x}} + j_y \hat{\mathbf{y}}) \tag{I.35}$$

où $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$ sont deux vecteurs unitaires le long des axes x et y. On repère la position $\boldsymbol{r_j}$ d'un atome par son écart $\boldsymbol{u_j}$ par rapport à la position d'équilibre $\boldsymbol{R_j}$:

$$\boldsymbol{r_j} = \boldsymbol{R_j} + \boldsymbol{u_j}. \tag{I.36}$$

Dans l'hypothèse $|\boldsymbol{u_j} - \boldsymbol{u_{j'}}| \ll a$ si $\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{j'}$ sont proches voisins, on peut ramener l'énergie d'interaction entre atomes à un hamiltonien quadratique en les $\boldsymbol{u_j}$, et les modes propres (phonons) peuvent alors être déterminés exactement, en particulier leur relation de dispersion $\omega_{\boldsymbol{q}}$.

L'équipartition de l'énergie appliquée à chaque mode conduit à un résultat qui a la même structure que le résultat uni-dimensionnel (I.22) :

$$\langle (\boldsymbol{u_j} - \boldsymbol{u}_0)^2 \rangle \sim \frac{k_{\mathrm{B}} T}{m}\, \frac{8}{N^2} \sum_{\boldsymbol{q}} \frac{\sin^2(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R_j}/2)}{\omega_{\boldsymbol{q}}^2}, \tag{I.37}$$

où l'on a introduit un facteur multiplicatif 2 pour tenir compte des deux directions d'espace.

Le passage d'une somme discrète à une intégrale sur $\boldsymbol{q}$ se fait par :

$$\text{(2D)} : \qquad \sum_{\boldsymbol{q}} \longrightarrow \left(\frac{Na}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathrm{ZB}} \mathrm{d}^2 q, \tag{I.38}$$

où l'intégrale porte sur toute la zone de Brillouin (ZB) : $-\pi/a < q_x,\ q_y \leq \pi/a$. En remplaçant $\omega_{\boldsymbol{q}}$ par $c|\boldsymbol{q}|$, ce qui est possible car – comme dans le cas 1D – ce seront les petites valeurs de q ($q \ll 1/a$) qui auront une contribution dominante [1], on arrive à :

$$\text{(2D)} : \qquad \langle (\boldsymbol{u_j} - \boldsymbol{u}_0)^2 \rangle \sim \frac{k_{\mathrm{B}} T}{\kappa}\, \frac{2}{\pi^2} \int_{\mathrm{ZB}} \frac{\sin^2(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R_j}/2)}{q^2}\, \mathrm{d}^2 q. \tag{I.39}$$

On a posé $mc^2 = \kappa a^2$ où κ est (comme à une dimension) une estimation de la raideur associée à la force de rappel d'un atome vers sa position d'équilibre.

Comme pour le cas uni-dimensionnel, nous pouvons évaluer de manière approchée cette intégrale en la coupant en deux parties :

1. En toute rigueur, il faudrait prendre en compte ici le fait que la vitesse du son n'est pas la même pour les vibrations longitudinales et les vibrations transverses. Comme nous ne nous intéressons ici qu'aux lois d'échelle, nous omettrons ce raffinement.

— Pour $q \gtrsim \pi/R_{\boldsymbol{j}}$, en remplaçant le $\sin^2(\ldots)$ par sa valeur moyenne $1/2$, on arrive à

$$\approx \frac{1}{\pi^2}\,\frac{k_{\rm B}T}{\kappa}\,\int_{\pi/R_{\boldsymbol{j}}}^{\pi/a}\frac{1}{q^2}\,2\pi q\,{\rm d}q \;\approx\; \frac{2}{\pi}\frac{k_{\rm B}T}{\kappa}\log(R_{\boldsymbol{j}}/a). \tag{I.40}$$

— Pour $q \lesssim \pi/R_{\boldsymbol{j}}$, en remplaçant le sinus par son argument, on trouve

$$\sim \frac{1}{2\pi^2}\,\frac{k_{\rm B}T}{\kappa}\,R_{\boldsymbol{j}}^2\int_0^{\pi/R_{\boldsymbol{j}}}\pi q\,{\rm d}q \sim \frac{\pi}{4}\,\frac{k_{\rm B}T}{\kappa}. \tag{I.41}$$

La contribution principale provient donc du premier terme qui diverge logarithmiquement avec la distance $R_{\boldsymbol{j}}$:

$$\langle(\boldsymbol{u_j}-\boldsymbol{u}_0)^2\rangle \;\sim\; \frac{2}{\pi}\,\frac{k_{\rm B}T}{\kappa}\log\left(\frac{R_{\boldsymbol{j}}}{a}\right). \tag{I.42}$$

Comme dans le cas 1D, cette divergence provient des moments q de l'ordre de $1/R_{\boldsymbol{j}}$, c'est-à-dire des grandes longueurs d'onde, de l'ordre de la distance $R_{\boldsymbol{j}}$.

2-2 Un paramètre d'ordre : les pics de Bragg

Pour tester expérimentalement si un ordre cristallin est présent ou non dans un échantillon, une méthode standard consiste à diffracter sur cet échantillon une onde (photons, électrons, neutrons) de vecteur d'onde incident $\boldsymbol{k}_i$. Pour un cristal caractérisé par des vecteurs de base $\boldsymbol{a}_\alpha$, avec $\alpha = 1, 2$ à deux dimensions, on s'attend à observer des pics de Bragg dans des directions de vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ tels que

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_i + \boldsymbol{Q}, \tag{I.43}$$

où $\boldsymbol{Q}$ est un vecteur du réseau réciproque défini par

$$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{a}_\alpha = 0 \quad \text{modulo } 2\pi. \tag{I.44}$$

La variation de l'intensité diffractée autour de $\boldsymbol{Q}$ permet alors de révéler l'ordre ou l'absence d'ordre cristallin.

Pour simplifier les notations, supposons que $\boldsymbol{k}_i$ est orthogonal au plan des atomes (figure I.5). L'intensité diffractée dans la direction $\boldsymbol{k}$ est donc,

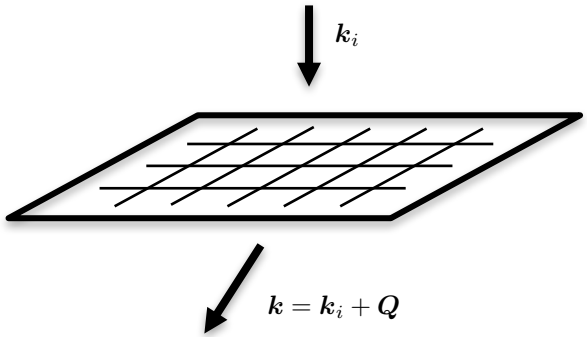


FIGURE I.5. *Diffraction de Bragg d'une onde incidente de vecteur d'onde $\boldsymbol{k}_i$ vers un vecteur d'onde final $\boldsymbol{k}$. On a choisi ici $\boldsymbol{k}_i$ orthogonal au plan des atomes. L'intensité $I(\boldsymbol{k})$ révèle un possible ordre ou quasi-ordre cristallin.*

après moyenne sur les fluctuations thermiques des écarts $\boldsymbol{u}_j$ par rapport aux positions d'équilibre $\boldsymbol{R}_j$:

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{k}) \;&\propto\; \Big\langle\Big|\sum_j {\rm e}^{{\rm i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{R}_j+\boldsymbol{u}_j)}\Big|^2\Big\rangle \\ &\propto\; \sum_{j,j'}{\rm e}^{{\rm i}\boldsymbol{k}\cdot\left(\boldsymbol{R}_j-\boldsymbol{R}_{j'}\right)}\,\big\langle{\rm e}^{{\rm i}\boldsymbol{k}\cdot\left(\boldsymbol{u}_j-\boldsymbol{u}_{j'}\right)}\big\rangle \end{aligned} \tag{I.45}$$

Après décomposition sur les modes de phonons, le déplacement relatif $\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_{j'}$ s'écrit comme une somme de variables indépendantes. On peut donc utiliser le résultat classique pour une variable gaussienne $\langle{\rm e}^{{\rm i}\theta}\rangle = {\rm e}^{-\langle\theta^2\rangle/2}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \langle\exp\left[{\rm i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{u}_j-\boldsymbol{u}_{j'})\right]\rangle \;&=\; \exp\left[-\frac{k^2}{4}\langle(\boldsymbol{u}_j-\boldsymbol{u}_{j'})^2\rangle\right] \\ &\approx\; \exp\left[-\frac{k^2\,k_{\rm B}T}{2\pi\kappa}\ln\left(\frac{R_{\boldsymbol{j}}}{a}\right)\right] \\ &\approx\; \left(\frac{a}{R_{jj'}}\right)^{\eta} \end{aligned} \tag{I.46}$$

où l'exposant η est définie par :

$$\eta = \frac{k^2\, k_{\rm B}T}{2\pi\kappa}. \tag{I.47}$$

Rappelons que la raideur κ qui apparaît ici décrit de manière heuristique le potentiel de liaison entre atomes. Un traitement plus rigoureux fait apparaître les *constantes élastiques de Lamé* du solide (NELSON & HALPERIN 1979).

En absence de fluctuations thermiques, $\eta = 0$, tous les coefficients $\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\left(\boldsymbol{u}_j-\boldsymbol{u}_{j'}\right)}\rangle$ sont égaux à 1 et l'intensité diffractée

$$I(\boldsymbol{k}) \propto \sum_{j,j'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\left(\boldsymbol{R}_j-\boldsymbol{R}_{j'}\right)} \tag{I.48}$$

est constituée de pics de Dirac (à la limite d'un réseau infini) localisés sur les vecteurs du réseau réciproque $\boldsymbol{Q}$.

En présence de fluctuations thermiques, les coefficients $\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\left(\boldsymbol{u}_j-\boldsymbol{u}_{j'}\right)}\rangle$ décroissent algébriquement avec la distance $R_{jj'}$ avec l'exposant η. Les pics de Bragg sont alors élargis, puisque l'intensité varie au voisinage d'un vecteur $\boldsymbol{Q}$ donné comme

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{k}) &\propto \sum_{j,j'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\left(\boldsymbol{R}_j-\boldsymbol{R}_{j'}\right)} \left(\frac{a}{R_{jj'}}\right)^{\eta} \\ &\propto \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{Q})\cdot\boldsymbol{R}} \left(\frac{a}{R}\right)^{\eta} \mathrm{d}^2R \end{aligned} \tag{I.49}$$

ou encore

$$I(\boldsymbol{k}) \propto |\boldsymbol{k}-\boldsymbol{Q}|^{\eta-2}. \tag{I.50}$$

Notons que ce résultat est notablement différent de celui qu'on aurait pour une assemblée d'atomes complètement désordonnée. Dans ce dernier cas, il n'y aurait aucune structure marquée dans une direction $\boldsymbol{Q}$ donnée. Ici au contraire, on continue à observer une diffraction importante dans des directions privilégiées de l'espace, mais la structure du profil diffracté est moins "piqué" que pour un ordre cristallin parfait. On parle ainsi d'un quasi-ordre cristallin (NELSON & HALPERIN 1979 ; STRANDBURG 1992).

2-3 Le cristal tri-dimensionnel

Pour comprendre la spécificité des problèmes de dimension réduite, il est intéressant de reprendre le traitement qui précède pour un cristal tridimensionnel. Le point de départ est inchangé : après avoir introduit les écarts $\boldsymbol{u_j}$ aux positions d'équilibre $\boldsymbol{R_j}$ avec ici $\boldsymbol{j} = (j_x, j_y, j_z)$, on se ramène là encore à un hamiltonien quadratique en les $\boldsymbol{u_j}$. La décomposition en modes propres et le théorème d'équipartition de l'énergie conduisent à une estimation de la variance de l'écart relatif entre l'atome 0 et l'atome j :

$$\langle(\boldsymbol{u_j}-\boldsymbol{u}_0)^2\rangle \sim \frac{k_{\rm B}T}{m}\,\frac{12}{N^3}\sum_{\boldsymbol{q}}\frac{\sin^2(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R_j}/2)}{\omega_{\boldsymbol{q}}^2}, \tag{I.51}$$

pour un cristal de $N\times N\times N$ sites, avec des conditions aux limites périodiques.

Le passage d'une somme discrète à une intégrale donne alors

$$\begin{aligned} \langle(\boldsymbol{u_j}-\boldsymbol{u}_0)^2\rangle &\sim \frac{k_{\rm B}T}{m}\,\frac{12}{N^3}\left(\frac{Na}{2\pi}\right)^3\int_{\rm ZB}\frac{\sin^2(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R_j}/2)}{\omega_{\boldsymbol{q}}^2}\,\mathrm{d}^3q \\ &\sim \frac{3}{2\pi^3}\,\frac{ak_{\rm B}T}{\kappa}\int_{\rm ZB}\frac{\sin^2(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R_j}/2)}{q^2}\,\mathrm{d}^3q, \end{aligned} \tag{I.52}$$

où l'on a comme avant remplacé la pulsation ω_q par son expression linéarisée [2] cq, et introduit une raideur caractéristique κ telle que $mc^2 = \kappa a^2$.

Appliquons à cette intégrale le même traitement qu'à une et deux dimensions, en coupant le domaine d'intégration en deux parties :

— Pour $q \gtrsim \pi/R_{\boldsymbol{j}}$, la substitution du $\sin^2$ par sa valeur moyenne $1/2$ donne

$$\sim \frac{3}{2\pi^3}\,\frac{ak_{\rm B}T}{\kappa}\int_{\pi/R_{\boldsymbol{j}}}^{\pi/a}\frac{1}{2q^2}\,4\pi q^2\mathrm{d}q \;\sim\; \frac{k_{\rm B}T}{\kappa}. \tag{I.53}$$

— Pour $q \lesssim \pi/R_{\boldsymbol{j}}$, la substitution du $\sin$ par son argument donne

$$\sim \frac{k_{\rm B}T}{\kappa}\,\frac{a}{R_{\boldsymbol{j}}}. \tag{I.54}$$

2. En fait, cette linéarisation n'est pas aussi bien justifiée qu'à 1D ou 2D, car les modes de grand vecteur d'onde ont une contribution significative à 3D, comme nous le verrons un peu plus loin. Mais comme nous ne cherchons ici que des lois d'échelle, cette approximation $\omega_q \approx cq$ sera suffisante.

Comme à deux dimensions, la contribution du premier terme est dominante :

$$\langle (\boldsymbol{u_j} - \boldsymbol{u}_0)^2 \rangle \sim \frac{k_\mathrm{B} T}{\kappa}, \tag{I.55}$$

mais la forme de cette contribution est très différente : elle est désormais dominée par les grandes valeurs de q, typiquement $q \sim 1/a$, c'est-à-dire les longueurs d'onde de l'ordre de la maille du réseau. Une conséquence essentielle est que cette contribution est indépendante de la distance R_j. Cela entraîne qu'un ordre cristallin peut exister pourvu que ce terme soit petit devant le carré de la maille du réseau

$$\frac{k_\mathrm{B} T}{\kappa} \ll a^2. \tag{I.56}$$

Quand cette condition est vérifiée, la position de l'atome $\boldsymbol{j}$ sera bien définie par rapport à celle de l'atome 0 à l'échelle de la maille cristalline, quelle que soit la distance R_j qui sépare ces deux sites. Plus précisément, le critère de Lindeman indique que l'ordre cristallin sera possible tant que (NELSON 2002)

$$\left[\langle (\boldsymbol{u_j} - \boldsymbol{u}_0)^2 \rangle\right]^{1/2} \sim 0.15 \ - \ 0.30 \ a \tag{I.57}$$

2-4 Le théorème de Mermin–Wagner–Hohenberg

Les conclusions auxquelles nous venons d'arriver sur l'existence ou non d'un ordre cristallin en fonction de la dimension d'espace ne sont qu'un cas particulier d'un résultat très général connu sous le nom de théorème de Mermin–Wagner–Hohenberg. Nous allons maintenant énoncer ce théorème, que nous retrouverons dans la suite de ce cours dans un autre cas, celui de l'existence ou non d'une condensation de Bose–Einstein.

Ce théorème a été prouvé par MERMIN & WAGNER (1966) et indépendamment [3] par HOHENBERG (1967). L'article de Mermin et Wagner s'intéressait au ferromagnétisme ou à l'antiferromagnétisme dans des systèmes 1D ou 2D, alors qu'Hohenberg prenait pour exemple le liquide de Bose ou les paires de Cooper dans un système supraconducteur. Leur démarche était similaire : partant d'une inégalité établie par BOGOLIUBOV (1962), ils arrivaient à un résultat qui peut se formuler de la manière générale suivante :

Pour un système de dimension inférieure ou égale à 2 et des interactions à courte portée, il ne peut pas y avoir de brisure spontanée d'une symétrie continue à température non nulle.

Nous ne démontrerons pas ce théorème dans le cas général [voir par exemple HERBUT (2007) ou MUDRY (2014)], mais nous allons insister sur quelques points importants :

— Les interactions doivent être à courte portée. Si la portée est infinie, on se retrouve dans une situation où la théorie de champ moyen peut s'appliquer et les transitions de phase "standard" prévues par cette théorie peuvent se produire, quelle que soit la dimension d'espace.

— On s'intéresse à la brisure d'une symétrie continue : c'est par exemple le cas de la symétrie de translation qui nous a intéressés dans ce chapitre. Ce peut également être la symétrie $U(1)$ associée au choix de la phase d'une fonction d'onde macroscopique, dont la brisure correspond à la condensation de Bose–Einstein. En revanche, le théorème ne s'applique pas tel quel aux symétries discrètes. Par exemple, pour le modèle d'Ising où des spins $\sigma_z = \pm 1$ sont placés sur un réseau avec des interactions entre proches voisins, il y a une transition de phase pour une température critique $T_c > 0$ dans le cas bi-dimensionnel (ONSAGER 1944).

— On parle ici de transition à $T \neq 0$. À température nulle, le gaz de Bose 2D quantique en interaction est condensé [SCHICK (1971) et POPOV (1972) et plus récemment PILATI, BORONAT et al. (2005) et MORA & CASTIN (2009)]. Nous reviendrons sur ce problème au chapitre 6.

3 Les cristaux bi-dimensionnels au laboratoire

Dans leur article de 1973, Kosterlitz et Thouless avaient suggéré d'appliquer leur modèle théorique de transition de phase induite par des défauts au cas de cristaux bidimensionnels. Toutefois, la situation est plus

3. Ces deux articles ont été soumis à une semaine d'intervalle. L'article de Mermin et Wagner est paru en 1966 alors que l'article de Hohenberg est paru en 1967 ; toutefois Mermin et Wagner avaient connaissance du travail de Hohenberg puisqu'ils le citent explicitement en tant que *unpublished*.

complexe que ce que nous rencontrerons plus tard dans ce cours pour les superfluides, car deux transitions successives se produisent pour passer du cristal triangulaire parfait attendu à température nulle à l'état liquide pour les hautes températures. La théorie quantitative de la fusion à deux dimensions a été faite par HALPERIN & NELSON (1978a), HALPERIN & NELSON (1978b), NELSON & HALPERIN (1979) et YOUNG (1979) [on parle de la théorie KTHNY] et les principaux résultats sont détaillés dans l'article de revue de STRANDBURG (1988).

3-1 Scénario pour la fusion d'un cristal 2D

Résumons quelques points saillants du modèle KTHNY qui sont observés expérimentalement dans des système colloïdaux [voir par exemple DEUTSCHLÄNDER, DILLMANN et al. (2015) et refs. in]. Ces points ont également été validés par des simulations récentes menées sur un gaz de 10^5 particules interagissant via un potentiel de Lennard–Jones (WIERSCHEM & MANOUSAKIS 2011).

— À température nulle, on a un cristal triangulaire parfait (au moins si on néglige les fluctuations quantiques) qui correspond à l'arrangement le plus dense. Dans ce cristal, chaque particule a exactement 6 voisins à égale distance.

— À très basse température, le réseau cristallin est presque triangulaire, les phonons détruisant l'ordre à longue portée comme nous l'avons vu plus haut. On a donc un quasi-ordre translationnel, avec une croissance logarithmique de l'écart quadratique moyen $\langle(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j)^2\rangle$ avec la distance $R_{\boldsymbol{ij}}$, ce qui induit une décroissance algébrique du paramètre d'ordre (pics de Bragg), comme nous l'avons vu plus haut. On a également un véritable ordre orientationnel, c'est-à-dire que la fonction de corrélation de l'orientation locale du cristal $\theta(\boldsymbol{r})$ ne tend pas vers 0 à l'infini. Il peut y avoir des défauts locaux, comme celui indiqué sur la figure I.6, mais qui ne change pas la conclusion générale à laquelle nous avions abouti par notre étude des modes de phonons.

— Au dessus d'une température T_m, des défauts appelés *dislocations* ont une probabilité significative d'apparaître. Un exemple de dislocation est représenté sur la figure I.7. Ce type de défaut est créé par une paire $A_5 - A_7$, c'est-à-dire un site à 5 voisins contigu d'un site à 7 voisins. La présence d'une dislocation revient à ajouter une demi-ligne d'atomes (figure I.7, droite).

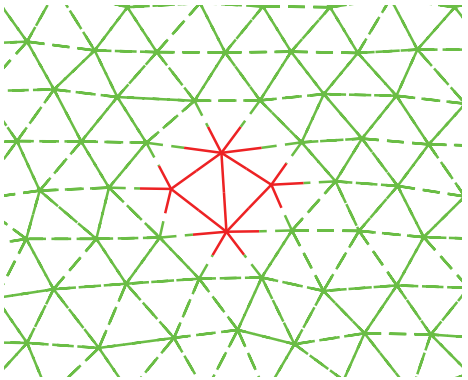


FIGURE I.6. *Un défaut local dans une assemblée de particules présentant un quasi-ordre translationnel à longue portée. Ce défaut peut être vu comme une paire de dislocations, avec deux sites A_5 (à cinq voisins) et deux sites A_7 (à sept voisins). Figure extraite de* WIERSCHEM & MANOUSAKIS *(2011).*

Cette phase intermédiaire est appelée *phase hexatique*. Dans cette phase, la présence de dislocations vient détruire le quasi-ordre translationnel et transforme la décroissance du paramètre d'ordre en une loi exponentielle. En effet, l'ajout d'une demi ligne entre les deux sites $\boldsymbol{R}_i$ et $\boldsymbol{R}_j$ change la distance $R_{\boldsymbol{ij}}$ d'une quantité qui est de l'ordre de la maille du réseau. On s'attend donc à une décorrélation complète des écarts $\boldsymbol{u_j}$ et $\boldsymbol{u_j}$ dès que $R_{\boldsymbol{ij}}$ est de l'ordre de la distance moyenne entre dislocations.

Toutefois, on constate sur l'image de droite de la figure I.6 qu'une dislocation ne détruit pas complètement l'ordre orientationnel. En dépit de l'ajout de la demi-ligne d'atomes, les axes du réseau restent approximativement les mêmes (en fait, la fonction de corrélation de l'orientation locale $\theta(\boldsymbol{r})$ décroît algébriquement dans ce régime).

— Au dessus d'une deuxième température critique T_i, les deux membres A_5 et A_7 des dislocations peuvent s'éloigner arbitrairement loin l'un

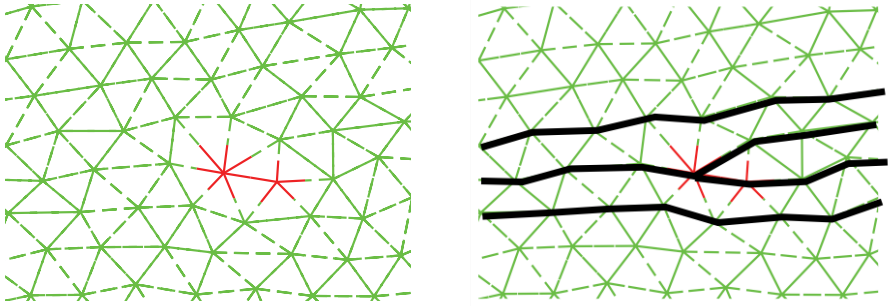


FIGURE I.7. *Dislocation isolée composée d'un site A_5 et d'un site A_7, ce qui revient à insérer une demi-ligne supplémentaire d'atomes. Figure extraite de* WIERSCHEM & MANOUSAKIS *(2011).*

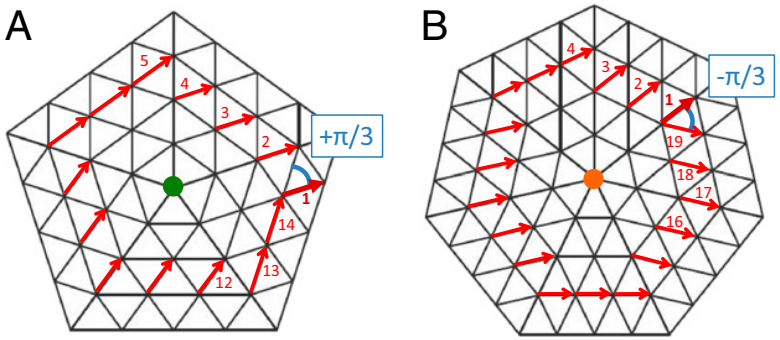


FIGURE I.8. *Disclinations correspondant à un défaut de type A_5 ou A_7. La prolifération de ce type de défaut induit une perte de l'ordre orientationnel. Figure extraite de* DEUTSCHLÄNDER, DILLMANN *et al. (2015).*

de l'autre. Or, un site A_5 isolé ou un site A_7 isolé, un défaut appelé *disclination*, change l'orientation du cristal, comme on le voit sur la figure I.8. On perd alors également l'ordre orientationnel, la fonction de corrélation de l'orientation $\theta(\boldsymbol{r})$ décroissant alors exponentiellement avec la distance.

3-2 Mise en évidence sur des systèmes colloïdaux

La mise en évidence expérimentale du scénario KTHNY a fait l'objet de nombreux travaux depuis sa proposition. Intéressons-nous ici aux résultats récents obtenus par le groupe de Constance, dirigé par Peter Keim et Georg Maret sur des monocouches colloïdales. Ces expériences sont menées sur des billes de polystyrène de diamètre 4.5 microns immergées dans de l'eau retenue par capillarité dans une cellule en verre (figure I.9), avec une interface eau-air pour la surface inférieure (DEUTSCHLÄNDER, PUERTAS et al. 2014 ; DEUTSCHLÄNDER, DILLMANN et al. 2015).

La densité des billes est de 1.7 et elles s'accumulent donc au fond de l'eau, à l'interface eau-air. Elle forment une monocouche d'environ 10^5 particules, parmi lesquelles on sélectionne celles situées dans une fenêtre de 1 mm$\times$ 1 mm (figure I.10). Il y a environ 4000 billes dans cette fenêtre et on suit la position de chacune grâce à un système d'imagerie de résolution sub-micrométrique.

Ces billes sont dopées avec des nanoparticules d'oxyde de fer, ce qui les rend paramagnétiques. En appliquant un champ magnétique perpendiculaire au plan de la cellule, on induit dans chaque bille un dipole magnétique. Comme ces dipoles verticaux sont orthogonaux aux segments joignant deux billes, l'interaction dipole-dipole est répulsive et isotrope dans le plan ; elle tend donc à former un ordre cristallin triangulaire. Pour les paramètres expérimentaux de l'expérience de Constance, la distance moyenne entre billes est de 13 μm. L'expérience est menée à température ambiante avec un contrôle de l'horizontalité de l'échantillon au microradian près. Les temps de thermalisation peuvent atteindre le mois, pendant lequel on suit les trajectoires des billes toutes les secondes.

Une image typique est montrée sur la figure I.10 où l'on a colorié les défauts apparaissant dans la distribution spatiale des billes. Le paramètre de contrôle de l'expérience est le rapport

$$\Gamma = \frac{E_{\mathrm{mag}}}{k_{\mathrm{B}}T}, \tag{I.58}$$

entre l'énergie magnétique de deux dipoles voisins et l'énergie thermique

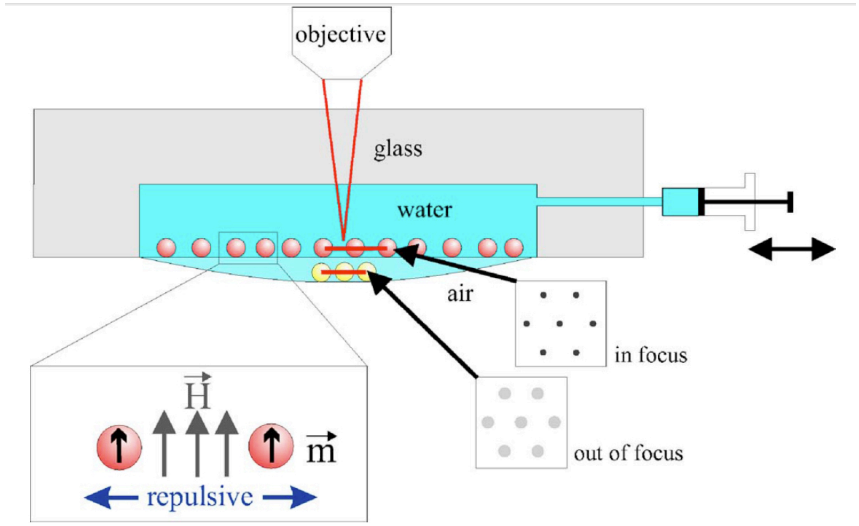


FIGURE I.9. *Montage expérimentale utilisé dans les expériences de Constance. Une goutte d'eau de diamètre 8mm est suspendue par capillarité. Des billes de polystyrène dopées par des nanoparticules d'oxyde de fer s'accumulent sur le plan inférieur, à l'interface eau-air. Un champ magnétique vertical induit un moment magnétique dans les billes, ce qui crée une interaction répulsive entre billes. Figure extraite de* KEIM, MARET *et al. (2007).*

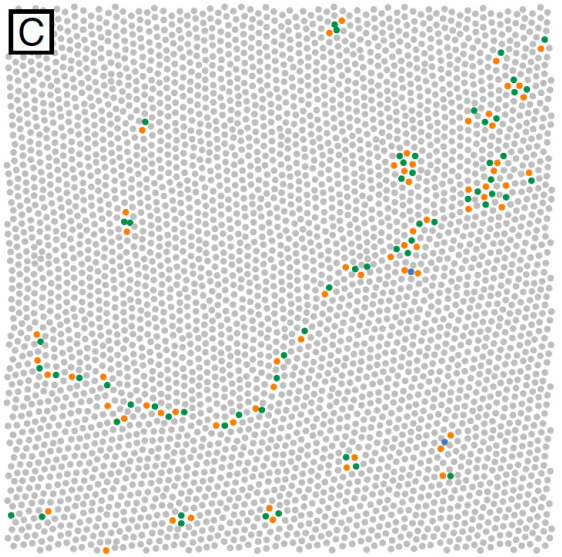


FIGURE I.10. *Identification de défauts dans une assemblée d'environ 4000 billes paramagnétiques. Cette figure a été obtenue pour le rapport* $\Gamma = 98$*, après une trempe de pente* $\dot{\Gamma} = 1/(19\,\text{jours})$*. Figure extraite de* DEUTSCHLÄNDER, DILLMANN *et al. (2015).*

caractéristique $k_B T$. Les deux transitions indiquées plus haut sont obtenues pour (DEUTSCHLÄNDER, PUERTAS et al. 2014) :

— $\Gamma_m = 70.3$ pour la transition cristal/hexatique,

— $\Gamma_i = 67.3$ pour la transition hexatique/isotope,

en bon accord avec les valeurs obtenues par simulation numérique.

En fait, ces expériences d'une richesse remarquable permettent non seulement de valider les prédictions concernant l'état d'équilibre de matériaux bi-dimensionnels, mais aussi d'étudier l'évolution temporelle du système quand on croise les deux transitions de phase à vitesse $\dot{\Gamma}$ finie. Il s'agit du problème de Kibble–Zurek, qui vise à caractériser le nombre de défauts engendrés en fonction de la vitesse de trempe (DEUTSCHLÄNDER, DILLMANN et al. 2015). Une autre étude récente sur ces systèmes a consisté à mesurer les fluctuations de densité à grande échelle spatiale (ILLING, FRITSCHI et al. 2017).

3-3 Et le graphène ?

L'exemple le plus célèbre d'un ordre cristallin à deux dimensions est sans conteste le graphène (CASTRO NETO, GUINEA et al. 2009). On peut donc s'interroger sur la compatibilité entre l'existence de ces feuilles d'atomes de carbone et le théorème de Mermin–Wagner–Hohenberg. On trouve dans la littérature deux classes de réponse, d'ailleurs compatibles :

— On peut remarquer que compte tenu de la raideur des liens dans le graphène, on trouve une valeur gigantesque pour la distance caractéristique sur laquelle la perte de l'ordre cristallin devrait se manifester

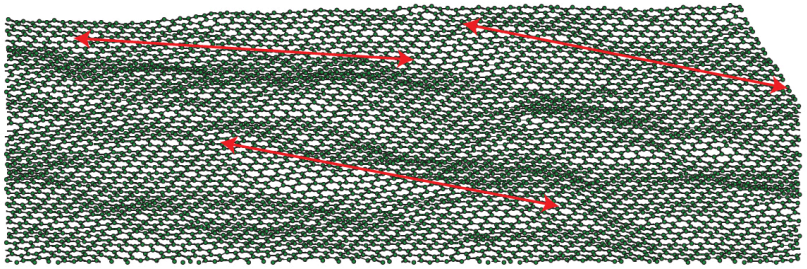


FIGURE I.11. *Simulation numérique d'une surface de graphène à 300K, avec* $N = 8640$ *atomes, montrant que la surface est plissée sous l'effet des fluctuations thermiques. Les flèches ont une longueur de 8 nm. Figure extraite de* FASOLINO, LOS *et al. (2007).*

(THOMPSON-FLAGG, MOURA et al. 2009). Les effets de taille finie suffisent donc à eux seuls à expliquer l'ordre apparent dans les échantillons de laboratoire.

— La surface du graphène n'est pas plane : elle est plissée (figure I.11) et les déviations par rapport au plan peuvent jouer, au moins au niveau fondamental, un rôle important (FASOLINO, LOS et al. 2007 ; SCHOELZ, XU et al. 2015). Le couplage non linéaire entre fluctuations de hauteur et déplacements parallèles à la surface change la nature des interactions en leur donnant une composante effective à longue portée, ce qui peut invalider le théorème de Mermin–Wagner–Hohenberg.

Chapitre II

Du cas idéal aux interactions binaires

Nous abordons maintenant la notion de fluide quantique à deux dimensions. L'essentiel du chapitre sera consacré au gaz parfait régi par la statistique de Bose-Einstein. Nous nous intéresserons successivement au cas uniforme, pour lequel il n'y a pas condensation à la limite thermodynamique, et au cas d'un gaz piégé, pour lequel la condensation peut se produire. Nous décrirons des expériences menées sur une assemblée de photons en cavité illustrant cette prédiction. Dans le dernier paragraphe, nous expliquerons comment prendre en compte les interactions entre particules en nous intéressant à une collision binaire entre deux atomes identiques.

Rappelons pour commencer quelques éléments permettant de traiter l'équilibre thermodynamique d'un gaz parfait de particules de Bose. Supposons connus les états propres $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$ de l'hamiltonien à une particule et E_α les énergies propres associées, l'indice α étant une variable discrète ou continue permettant de repérer chaque état de manière non ambiguë. La population moyenne d'un état ψ_α est alors donnée par

$$N_\alpha = \frac{1}{\mathrm{e}^{(E_\alpha-\mu)/k_\mathrm{B}T}-1}, \tag{II.1}$$

où nous avons introduit deux variables thermodynamiques intensives, la température T et le potentiel chimique μ. Pour les expériences d'atomes froids, on peut en général mesurer avec une bonne précision la température T et le nombre d'atomes total N, dont on déduit le potentiel chimique en inversant la relation $N = \sum_\alpha N_\alpha$.

1 Le gaz de Bose uniforme à 2D

Nous considérons dans ce paragraphe un gaz de particules confiné dans une boîte carrée (à deux dimensions) de taille $L \times L$. Nous utiliserons pour simplifier les calculs l'expression des états propres obtenus en prenant des conditions aux limites périodiques. Ces états sont alors des ondes planes repérées par leur impulsion $\boldsymbol{p}$:

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{L}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}, \qquad \boldsymbol{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{n} = (n_x, n_y) \in \mathbb{Z}^2. \tag{II.2}$$

Nous allons nous intéresser à la limite thermodynamique de ce gaz, en faisant tendre la taille L de la boîte et le nombre N de particules vers l'infini, tout en gardant la densité spatiale constante :

$$L \to \infty,\ N \to \infty,\ \rho^{(2)} = \frac{N}{L^2} : \text{constante} \tag{II.3}$$

Une notion importante pour le calcul des quantités physiques est la densité d'états $D(E)$. Considérons une quantité physique $F(\boldsymbol{p})$ variant de manière relativement douce avec $\boldsymbol{p}$, la population $N(\boldsymbol{p})$ du niveau $\boldsymbol{p}$ par exemple, et intéressons-nous à la somme $\sum_{\boldsymbol{p}} F(\boldsymbol{p})$. Lors du passage à la limite thermodynamique, on peut remplacer les sommes discrètes sur les impulsions quantifiées (II.2) par une intégrale :

$$F(\boldsymbol{p}) \text{ régulière :} \quad \sum_{\boldsymbol{p}} F(\boldsymbol{p}) \longrightarrow \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^2 \int F(\boldsymbol{p})\ \mathrm{d}^2p \tag{II.4}$$

Si la quantité à sommer $F(\boldsymbol{p})$ n'est fonction que de l'énergie $E(\boldsymbol{p}) = p^2/2m$, l'intégrale sur la distribution angulaire de l'impulsion $\boldsymbol{p}$ peut être effectuée analytiquement et on trouve

$$\sum_{\boldsymbol{p}} F(\boldsymbol{p}) \longrightarrow \int_0^{+\infty} F(E)\, D^{(2)}(E)\, \mathrm{d}E \qquad \text{avec} \quad D^{(2)}(E) = \frac{mL^2}{2\pi\hbar^2}. \quad \text{(II.5)}$$

La variation de la densité d'états aux basses énergies va jouer un rôle crucial dans ce qui suit : alors que cette densité s'annule dans le cas 3D comme[1] $\sqrt{E}$ quand $E \to 0$, elle reste constante à 2D. Les états de basse énergie y jouent donc un rôle plus important ; ce fait confirme ce que nous avions déjà vu au premier cours, quand nous avions constaté que c'était les phonons de grande longueur d'onde qui étaient responsables de la destruction de l'ordre cristallin à 2D.

1-1 La non-saturation des états excités

Rappel sur le cas tri-dimensionnel. La condensation de Bose-Einstein du gaz idéal à 3D est abordée dans de nombreux ouvrages de physique statistique, et nous l'avons décrite en détail dans le cours 2015-16. Rappelons que l'on trouve à sa base trois propriétés liées à la distribution (II.1) :

— À température T fixée, chaque population N_α est une fonction croissante du potentiel chimique μ.

— Pour que N_α soit défini pour tout état α, y compris l'état fondamental que nous notons ici $\alpha = 0$, il faut que $\mu < E_0$.

— Cette inégalité sur μ entraîne que pour une température T donnée, il existe une borne supérieure sur le nombre d'atomes $N_{\mathrm{exc}}(T,\mu)$ pouvant occuper l'ensemble des états excités :

$$N_{\mathrm{exc}}(T,\mu) < N_{\mathrm{exc}}^{\max}(T) \quad \text{(II.6)}$$

avec

$$N_{\mathrm{exc}}(T,\mu) = \sum_{\alpha\neq 0} \frac{1}{\mathrm{e}^{(E_\alpha-\mu)/k_{\mathrm{B}}T}-1}, \qquad N_{\mathrm{exc}}^{\max}(T) = \sum_{\alpha\neq 0} \frac{1}{\mathrm{e}^{(E_\alpha-E_0)/k_{\mathrm{B}}T}-1}. \quad \text{(II.7)}$$

1. La valeur exacte est $D^{(3)}(E) = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2mL^2}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E}$.

Pour un gaz 3D pris à la limite thermodynamique, la quantité utile est la densité spatiale associée à ces états excités

$$\rho_{\mathrm{exc}}^{(3)}(T,\mu) = \frac{N_{\mathrm{exc}}(T,\mu)}{L^3}. \quad \text{(II.8)}$$

qui se calcule analytiquement en remplaçant la somme discrète par une intégrale :

$$\rho_{\mathrm{exc}}^{(3)}(T,\mu) = \frac{1}{L^3}\int_0^{+\infty} \frac{D^{(3)}(E)}{\frac{1}{Z}\mathrm{e}^{E/k_{\mathrm{B}}T}-1}\,\mathrm{d}E = \frac{1}{\lambda_T^3}\mathrm{Li}_{3/2}(Z) \quad \text{(II.9)}$$

où l'on a introduit la longueur d'onde thermique et la fugacité du gaz

$$\lambda_T = \frac{\hbar\sqrt{2\pi}}{\sqrt{mk_{\mathrm{B}}T}} \qquad Z = \mathrm{e}^{\mu/k_{\mathrm{B}}T} \quad \text{(II.10)}$$

et la fonction polylogarithme

$$\mathrm{Li}_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}. \quad \text{(II.11)}$$

Pour $\alpha > 1$, cette fonction est définie en tout point de l'intervalle $x \in [0,1]$ et on trouve en particulier[2] $\mathrm{Li}_{3/2}(1) = 2.612\ldots$

La limite $Z \to 1$ correspond à $\mu \to E_0 = 0$ pour ce gaz de particules libres. Le fait que $\mathrm{Li}_{3/2}(Z)$ reste fini quand $Z \to 1$ signifie que la densité spatiale que l'on peut placer dans les états excités est bornée par $2.612/\lambda_T^3$. La densité dans l'espace des phases associée aux états excités, définie comme

$$\mathcal{D}_{\mathrm{exc}} = \rho_{\mathrm{exc}}^{(3)}\lambda_T^3, \quad \text{(II.12)}$$

est donc elle aussi bornée supérieurement :

$$\mathcal{D}_{\mathrm{exc}} < \mathcal{D}_{\mathrm{exc}}^{\max} = 2.612. \quad \text{(II.13)}$$

La condensation de Bose–Einstein découle de cette inégalité : elle se produit lorsque la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D}$ dépasse la valeur

2. La constante $\mathrm{Li}_{3/2}(1)$ est également égale à la valeur de la fonction $\zeta(x)$ de Riemann en $x = 3/2$: $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x}$.

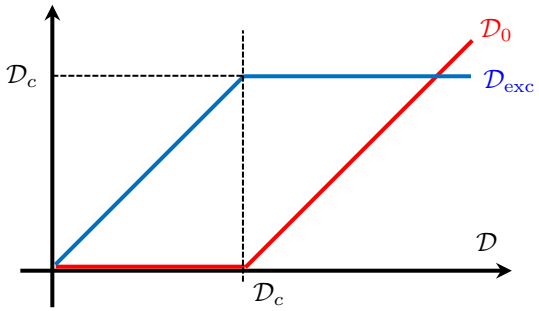


FIGURE II.1. *Cas 3D : densités dans l'espace des phases associées respectivement à l'état fondamental ($\mathcal{D}_0$) et à l'ensemble des états excités $\mathcal{D}_{\rm exc}$, en fonction de la densité totale dans l'espace des phases $\mathcal{D}$. On a posé $\mathcal{D}_c \equiv \mathcal{D}_{\rm exc}^{\rm max} = 2.612$.*

critique $\mathcal{D}_{\rm exc}^{\rm max}$. Le surplus de particules doit s'accumuler dans l'état fondamental à une particule $\boldsymbol{p} = 0$. En d'autres termes, deux cas sont possibles (figure II.1) :

$$\mathcal{D} \leq 2.612 : \quad \mathcal{D} \approx \mathcal{D}_{\rm exc} = {\rm Li}_{3/2}(Z), \quad \mathcal{D}_0 \ll \mathcal{D}, \tag{II.14}$$

$$\mathcal{D} > 2.612 : \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_{\rm exc}^{\rm max} \quad \text{avec } \mathcal{D}_{\rm exc}^{\rm max} = 2.612. \tag{II.15}$$

Le couple d'équations (II.14-II.15) constitue l'équation d'état du gaz de Bose idéal à 3D.

Le cas bi-dimensionnel Pour un gaz 2D, le calcul de la densité spatiale associée aux états excités peut être repris de manière quasi-inchangée par rapport au cas 3D, la seule différence résidant dans l'expression de la densité d'états, qui perd un facteur $\sqrt{E}$. Pour le dire de manière imagée, la proportion d'états au voisinage de l'énergie nulle augmente quand on passe de 3D à 2D ; comme nous allons le voir, cela fait perdre son caractère singulier à l'état $E = 0$ et vient empêcher la condensation.

En remplaçant là aussi la somme discrète (II.7) par une intégrale, on trouve :

$$\rho_{\rm exc}^{(2)} = \frac{1}{L^2} \int_0^{+\infty} \frac{D^{(2)}(E)}{\frac{1}{Z}{\rm e}^{E/k_{\rm B}T} - 1} \, {\rm d}E = \frac{1}{\lambda_T^2} {\rm Li}_1(Z). \tag{II.16}$$

Notons que la fonction ${\rm Li}_1(Z)$, qui se calcule à partir de l'expression générale (II.11), peut s'exprimer sous forme analytique ${\rm Li}_1(Z) = -\ln(1-Z)$, ce qui donne pour la densité dans l'espace des phases

$$\mathcal{D}_{\rm exc} = -\ln(1-Z). \tag{II.17}$$

On arrive alors au point crucial suivant : contrairement à ${\rm Li}_{3/2}(Z)$, la fonction ${\rm Li}_1(Z)$ n'admet pas de limite finie quand $Z \to 1$. Ceci signifie que même pour une densité dans l'espace des phases $\mathcal{D}$ arbitrairement grande, on pourra toujours trouver (à température donnée) un potentiel chimique μ tel que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\rm exc}(T, \mu)$. Ceci ne signifie pas que la population du niveau fondamental est nulle, mais simplement qu'elle ne prend pas de valeur "macroscopique" à la limite thermodynamique. Aucune singularité n'apparait quand on augmente la densité à température constante et la condensation de Bose–Einstein ne se produit pas.

Il est important de repérer l'ingrédient essentiel qui cause cette différence entre les cas 3D et 2D. Toute la question est de savoir si l'intégrale en dimension d :

$$\rho_{\rm exc}^{(d)}(T) = \frac{1}{L^d} \int_0^{+\infty} \frac{D^{(d)}(E)}{\frac{1}{Z}{\rm e}^{E/k_{\rm B}T} - 1} \, {\rm d}E \tag{II.18}$$

admet une limite finie dans le cas très dégénéré $Z \to 1$. Comme il n'y a aucun problème de convergence de l'intégrale quand $E \to +\infty$, la difficulté est concentrée en $E \to 0$. On peut alors faire un développement limité de l'intégrande au voisinage de $E = 0$ dans le cas limite $Z = 1$:

$$Z = 1, \ E \to 0 : \qquad \frac{D^{(d)}(E)}{\frac{1}{Z}{\rm e}^{E/k_{\rm B}T} - 1} \sim k_{\rm B}T \, \frac{D^{(d)}(E)}{E}. \tag{II.19}$$

Pour une densité d'état variant en loi de puissance au voisinage de 0 :

$$D^{(d)}(E) \propto E^{\nu} \tag{II.20}$$

alors l'intégrale sera convergente en $E = 0$ si

$$\nu > 0 \tag{II.21}$$

et cela même si $Z = 1$, qui est la valeur maximale autorisée. C'est la situation atteinte à 3D : la densité dans les états excités sature et le phénomène

de condensation se produit. En revanche le cas 2D correspond à $\nu = 0$ et l'intégrale est divergente pour $Z = 1$. Quelle que soit la densité spatiale choisie, on peut donc toujours trouver un Z assez proche de 1 qui permet de rentre compte de cette densité.

Équation d'état du gaz 2D. Le résultat

$$\mathcal{D}(T,\mu) = -\ln(1-Z) \qquad Z \equiv \mathrm{e}^{\mu/k_\mathrm{B}T} \tag{II.22}$$

constitue l'équation d'état du gaz de Bose idéal à 2D. Indiquons ici deux cas limites intéressants :

— Le cas non dégénéré s'obtient en prenant la limite $Z \ll 1$:

$$Z \ll 1 : \qquad \mathcal{D}(T,\mu) \approx Z = \mathrm{e}^{\mu/k_\mathrm{B}T} \ll 1, \tag{II.23}$$

ce qui correspond au résultat bien connu pour le gaz de Boltzmann.

— Le cas $Z \to 1$, obtenu pour $|\mu| \ll k_\mathrm{B}T$, correspond au contraire à un gaz fortement dégénéré :

$$Z \approx 1 : \quad 1 - Z \approx \frac{|\mu|}{k_\mathrm{B}T} \quad \to \quad \mathcal{D}(T,\mu) \approx \ln\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{|\mu|}\right) \gg 1 \tag{II.24}$$

1-2 La distribution en impulsion

Pour un gaz parfait, cette distribution s'écrit :

$$N(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{\frac{1}{Z}\mathrm{e}^{p^2/(2mk_\mathrm{B}T)} - 1}. \tag{II.25}$$

Pour gagner de l'intuition sur la forme de cette distribution (*cf.* figure II.2), nous allons étudier les deux cas limites du gaz non dégénéré ($Z \ll 1$) et du cas fortement dégénéré $Z \approx 1$.

Cas non dégénéré. Dans le cas $Z \ll 1$, on peut faire l'approximation

$$Z \ll 1 : \qquad N(\boldsymbol{p}) \approx Z\ \mathrm{e}^{-p^2/(2mk_\mathrm{B}T)} \tag{II.26}$$

qui redonne la distribution gaussienne de Maxwell–Boltzmann.

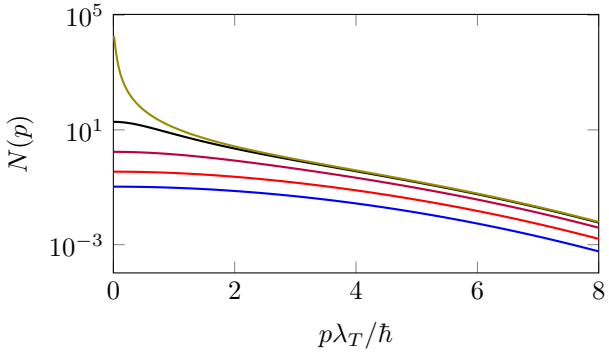


FIGURE II.2. *Distributions en impulsion pour* $\mathcal{D} = 0.1,\ 0.3,\ 1,\ 3,\ 10.$

Cas fortement dégénéré. Pour décrire le cas $Z \approx 1$, correspondant à $|\mu| \ll k_\mathrm{B}T$, nous allons séparer les impulsions en deux classes :

— Les impulsions p telles que $\frac{p^2}{2m} < k_\mathrm{B}T$, c'est-à-dire $p\lambda_T/\hbar < \sqrt{4\pi}$, pour lesquelles nous allons linéariser l'exponentielle figurant au dénominateur de (II.25) :

$$Z \approx 1, \quad \frac{p^2}{2m} < k_\mathrm{B}T : \qquad N(\boldsymbol{p}) \approx \frac{k_\mathrm{B}T}{\frac{p^2}{2m} + |\mu|} = \frac{4\pi\hbar^2}{\lambda_T^2}\frac{1}{p^2 + p_c^2} \tag{II.27}$$

avec

$$p_c = \sqrt{2m|\mu|} \ \ll \ \sqrt{2mk_\mathrm{B}T} \tag{II.28}$$

(rappelons que μ est toujours négatif).

— Les impulsions p telles que $\frac{p^2}{2m} > k_\mathrm{B}T$ pour lesquelles nous allons négliger le terme "de Bose" -1 au dénominateur de (II.25) pour retrouver une distribution gaussienne à la Boltzmann :

$$Z \approx 1, \quad \frac{p^2}{2m} > k_\mathrm{B}T : \qquad N(\boldsymbol{p}) \approx \mathrm{e}^{-p^2/(2mk_\mathrm{B}T)}. \tag{II.29}$$

La distribution en impulsion se compose donc de deux parties distinctes : une partie centrale lorentzienne de largeur p_c et des ailes gaussiennes de largeur $\sqrt{mk_\mathrm{B}T}$. Pour aller plus loin, il est intéressant d'évaluer

les poids respectifs de ces deux distributions. On trouve pour la partie centrale lorentzienne

$$\mathcal{D}_{\text{lor.}} \approx \int_0^{\sqrt{2mk_{\text{B}}T}} \frac{2p}{p^2+p_c^2}\,\mathrm{d}p \approx \ln\left(\frac{k_{\text{B}}T}{|\mu|}\right) \tag{II.30}$$

c'est-à-dire, en utilisant (II.24)

$$\mathcal{D}_{\text{lor.}} \approx \mathcal{D}. \tag{II.31}$$

Pour les ailes gaussiennes, on a

$$\mathcal{D}_{\text{gau.}} \approx \frac{\lambda_T^2}{2\pi\hbar^2}\int_{\sqrt{2mk_{\text{B}}T}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-p^2/(2mk_{\text{B}}T)}\; p\,\mathrm{d}p \approx 1/e \;\ll\; \mathcal{D}. \tag{II.32}$$

Cette contribution $\mathcal{D}_{\text{gau.}}$ est petite devant $\mathcal{D}$ puisqu'on s'est placé dans l'hypothèse d'un gaz fortement dégénéré. On peut donc considérer que la majeure partie des atomes est localisée dans une distribution lorentzienne de largeur $p_c \ll \sqrt{mk_{\text{B}}T}$. Toutefois, comme une distribution lorentzienne est non normalisable à 2D (contrairement au cas 1D), il faut mettre une coupure sur les intégrales au niveau de l'impulsion thermique $\sqrt{2mk_{\text{B}}T}$.

1-3 Fonction de corrélation à un corps

Au-delà de l'apparition possible d'une fraction macroscopique des atomes dans l'état fondamental, une autre manifestation de la condensation de Bose–Einstein apparaît sur la fonction de corrélation :

$$G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \langle \boldsymbol{r}|\hat{\rho}_1|\boldsymbol{r}'\rangle \tag{II.33}$$

où $\hat{\rho}_1$ est l'opérateur densité à un corps. Rappelons que l'invariance par translation du système assure que la valeur de G_1 ne dépend en fait que de $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$.

Pour évaluer G_1, partons de l'élément de matrice de $\hat{\rho}_1$ entre deux états d'impulsion $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{p}'$ et introduisons une double relation de fermeture en position

$$\langle \boldsymbol{p}|\hat{\rho}_1|\boldsymbol{p}'\rangle = \iint \langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{r}\rangle\, G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\, \langle \boldsymbol{r}'|\boldsymbol{p}'\rangle\, \mathrm{d}^2r\, \mathrm{d}^2r'. \tag{II.34}$$

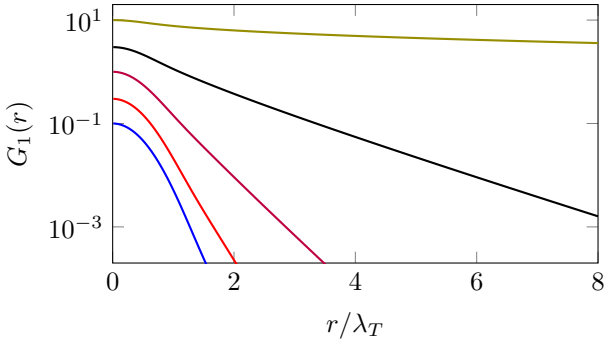


FIGURE II.3. *Fonction de corrélation $G_1(r)$ pour un gaz de Bose idéal à deux dimensions. Courbes réalisées pour $\mathcal{D} = 0.1,\ 0.3,\ 1,\ 3,\ 10$.*

avec $\langle \boldsymbol{r}|\boldsymbol{p}\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}/\hbar}/L$. En utilisant l'invariance par translation, cette relation devient

$$\langle \boldsymbol{p}|\hat{\rho}_1|\boldsymbol{p}'\rangle = \delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}/\hbar}\, G_1(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^2r. \tag{II.35}$$

où l'on a noté pour simplifier $G_1(\boldsymbol{r}) = G_1(\boldsymbol{r},0)$. La distribution en impulsion $N(\boldsymbol{p}) = \langle \boldsymbol{p}|\hat{\rho}_1|\boldsymbol{p}\rangle$ et la fonction de corrélation $G_1(\boldsymbol{r})$ sont donc transformées de Fourier l'une de l'autre. On notera que la démonstration de ce résultat ne dépend pas du fait que le gaz est idéal, ni de la dimension choisie pour l'espace.

La fonction de corrélation G_1 s'obtient en prenant la transformée de Fourier inverse

$$\begin{aligned} G_1(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}/\hbar}\, N(\boldsymbol{p})\,\mathrm{d}^2p \\ &= \frac{1}{\lambda_T^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{Z^n}{n}\,\mathrm{e}^{-\pi r^2/(n\lambda_T^2)}. \end{aligned} \tag{II.36}$$

Pour analyser ce résultat, concentrons-nous sur les deux cas limites déjà identifiés, celui du gaz non dégénéré et celui du gaz fortement dégénéré.

Dans le cas non dégénéré, le caractère gaussien de la distribution $N(\boldsymbol{p})$ donné en (II.26) conduit à une fonction de corrélation G_1 également gaus-

sienne :

$$Z \ll 1 : \qquad G_1(\boldsymbol{r}) \approx \rho^{(2)}\ \mathrm{e}^{-\pi r^2/\lambda_T^2}. \tag{II.37}$$

La longueur d'onde thermique λ_T donne donc l'extension de la cohérence spatiale dans ce cas.

Dans le cas fortement dégénéré, nous avons vu que l'essentiel de la distribution est concentrée dans la lorentzienne centrale de largeur p_c. La transformée de Fourier 2D de cette lorentzienne est définie en tout point $\boldsymbol{r} \neq 0$ et est proportionnelle à la fonction de Bessel d'argument imaginaire $K_0(p_c r/\hbar)$. Le comportement asymptotique de cette fonction est

$$x \to \infty : \qquad K_0(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\ \mathrm{e}^{-x} \tag{II.38}$$

et il est dominé par la décroissance exponentielle. On a alors

$$G_1(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}} \mathrm{e}^{-r/\ell} \qquad \text{avec} \quad \ell = \frac{\hbar}{p_c}. \tag{II.39}$$

En utilisant la définition (II.28) de p_c et le lien (II.24) entre la densité dans d'espace des phases et le rapport $k_{\mathrm{B}}T/|\mu|$, on arrive à la longueur caractéristique de décroissance de la fonction G_1 dans le cas fortement dégénéré :

$$\ell \approx \frac{\lambda_T}{\sqrt{4\pi}}\ \mathrm{e}^{\mathcal{D}/2}. \tag{II.40}$$

On constate ici le caractère marginal du gaz de Bose uniforme à 2D. Bien qu'il n'y ait pas d'ordre à longue portée à strictement parler puisque la fonction G_1 tend vers 0 de manière exponentielle, la longueur caractéristique de cette exponentielle diverge exponentiellement vite avec la densité dans l'espace des phases du système. Un tel comportement entraîne un rôle important des effets de taille finie, que nous allons examiner dans le paragraphe suivant.

1-4 Les effets de taille finie

Dans les expériences d'atomes froids, on réalise couramment des densités dans l'espace des phases qui dépassent la trentaine. Pour ces valeurs de $\mathcal{D}$, on trouve $\ell \sim \lambda_T \times 10^6$. Pour une valeur typique de la longueur d'onde thermique $\lambda_T = 1\,\mu$m, la longueur de décroissance ℓ de G_1 est de l'ordre du mètre, donc indétectable sur un échantillon de taille réaliste. Dans ces conditions, la phase est essentiellement constante sur l'étendue de l'échantillon et tout se passe comme si on avait un véritable condensat de Bose–Einstein.

On peut se donner deux critères équivalents pour fixer le seuil d'apparition des effets de taille finie :

— Le premier consiste à comparer la différence $E_0 - \mu$ à l'écart $E_1 - E_0$ entre le premier état excité et l'état fondamental. Quand $E_0 - \mu$ devient inférieur à $E_1 - E_0$, alors la discrétisation des niveaux d'énergie due aux effets de taille finie commence à jouer un rôle significatif. A un facteur numérique près sans importance ici, l'écart $E_1 - E_0$ est d'ordre $E_1 - E_0 \sim \hbar^2/mL^2$ de sorte que ce premier critère s'écrit :

$$|\mu| \lesssim \frac{\hbar^2}{mL^2} \quad \to \quad \frac{k_{\mathrm{B}}T}{|\mu|} \gtrsim \frac{L^2}{\lambda_T^2} \tag{II.41}$$

ce qui entraîne pour le cas dégénéré [*cf.* (II.24)] :

$$\mathcal{D} \gtrsim \ln(L^2/\lambda_T^2). \tag{II.42}$$

— Le second critère consiste à comparer la longueur de décroissance ℓ de la fonction G_1 avec la taille linéaire L de l'échantillon. Les effets de taille finie deviennent significatifs quand ℓ dépasse L, c'est-à-dire :

$$\ell \gtrsim L \quad \to \quad \mathrm{e}^{\mathcal{D}/2} \gtrsim \frac{L}{\lambda_T}, \tag{II.43}$$

ce qui est effectivement équivalent au critère (II.42).

2 Le gaz de Bose dans un piège harmonique 2D

De nombreuses expériences menées sur des atomes, de la lumière ou des systèmes hybrides utilisent un confinement harmonique des particules. L'effet majeur de ce confinement est de modifier la densité d'états du système et donc de changer, pour une dimensionalité donnée, l'existence ou la non-existence du phénomène de condensation. Nous considérerons

dans ce qui suit un piège harmonique isotrope de pulsation ω pour lequel les niveaux d'énergie s'écrivent à une constante additive près $E_j = j\ \hbar\omega$, avec $j \in \mathbb{N}$. Dans le cas d'un piège non isotrope, la plupart des résultats qui suivent restent valables pourvu que l'on remplace ω par la moyenne géométrique des pulsations du piège.

2-1 L'influence de la dimension d'espace

Pour trouver s'il y a ou non possibilité de condensation, revenons à l'expression donnant le nombre d'atomes dans les états excités de l'hamiltonien à une particule

$$N_{\rm exc} = \sum_{\alpha\neq 0} \frac{1}{\frac{1}{Z}{\rm e}^{E_\alpha/k_{\rm B}T} - 1} \tag{II.44}$$

où l'indice α repère ici les niveaux d'énergie dans le piège. Comme pour le cas uniforme, il est utile de remplacer cette somme discrète par une intégrale, ce qui est une bonne approximation si l'énergie thermique $k_{\rm B}T$ est grande devant l'écart entre niveaux d'énergie consécutifs. On obtient alors

$$N_{\rm exc} = \int_0^{+\infty} \frac{D(E)}{\frac{1}{Z}{\rm e}^{E/k_{\rm B}T} - 1}\,{\rm d}E \tag{II.45}$$

où $D(E)$ est la densité d'états pour le piège.

Comme pour le cas d'une boîte, la densité d'état dans un piège harmonique dépend de la dimensionalité. Pour un piège 1D, les niveaux $(j+1/2)\hbar\omega$ sont non dégénérés ($\xi_j = 1$), équidistants et séparés de $\hbar\omega$, soit

$$D^{(1)}(E) = \frac{1}{\hbar\omega}. \tag{II.46}$$

En dimension 2, le niveau d'énergie $E_j = (j+1)\hbar\omega$ est dégénéré $\xi_j = j+1$ fois ; en dimension 3, le niveau $E_j = (j+3/2)\hbar\omega$ est dégénéré $\xi_j = (j+1)(j+2)/2$ fois, de sorte que

$$D^{(2)}(E) = \frac{E}{(\hbar\omega)^2}, \qquad D^{(3)}(E) = \frac{E^2}{2(\hbar\omega)^3}. \tag{II.47}$$

Revenons maintenant au critère trouvé en (II.19-II.21). La densité d'états varie effectivement comme E^ν et l'exposant ν est strictement positif en dimension 3 et en dimension 2 (respectivement $\nu = 2$ et $\nu = 1$). Il y a donc possibilité de condensation dans ces deux cas. En revanche la dimension 1 reste (marginalement) exclue puisqu'elle correspond à $\nu = 0$.

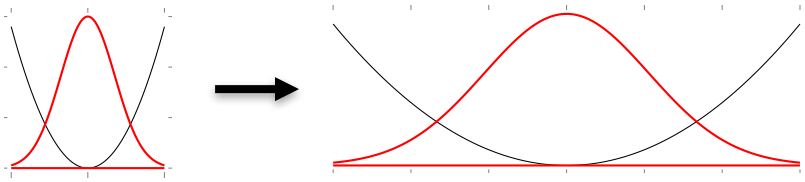


FIGURE II.4. *Limite thermodynamique dans un piège : on diminue la pulsation ω tout en augmentant le nombre d'atomes de manière à garder la densité centrale constante.*

2-2 Le point de condensation

Le nombre maximal d'atomes que l'on peut mettre dans un piège harmonique est obtenu en injectant la densité d'états (II.47) dans l'expression (II.45) pour la fugacité maximale $Z = 1$. On obtient

$$\text{2D :}\quad N_{\rm exc}^{(\max)}(T) = {\rm Li}_2(1)\left(\frac{k_{\rm B}T}{\hbar\omega}\right)^2 \qquad \text{avec}\quad {\rm Li}_2(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{II.48}$$

et

$$\text{3D :}\quad N_{\rm exc}^{(\max)}(T) = {\rm Li}_3(1)\left(\frac{k_{\rm B}T}{\hbar\omega}\right)^3 \qquad \text{avec}\quad {\rm Li}_3(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = 1.202\ldots \tag{II.49}$$

Rappelons que ces résultats sont valables dans l'hypothèse $k_{\rm B}T \gg \hbar\omega$, nécessaire pour remplacer la somme discrète (II.44) par une intégrale. Le cas opposé $k_{\rm B}T \ll \hbar\omega$ est conceptuellement trivial : les particules s'accumulent alors dans l'état fondamental par le simple fait que les niveaux excités ne sont pas activés thermiquement.

Limite thermodynamique dans un piège. Pour un gaz dans une boîte carrée, la notion de limite thermodynamique est simple : pour une température T donnée, on fait tendre le nombre de particules N et la taille de la boîte L vers l'infini, en gardant la densité spatiale constante. Dans un piège harmonique, la limite thermodynamique est obtenue de façon similaire, mais on cherche maintenant à maintenir la densité centrale $n(0)$ constante, tout en faisant tendre le nombre de particules N vers l'infini (DE GROOT, HOOYMAN et al. 1950 ; BAGNATO, PRITCHARD et al. 1987). Pour comprendre comment cela est obtenu, utilisons par exemple la prédiction pour la statistique de Maxwell–Boltzmann :

$$\rho^{(\mathrm{d})}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{N}{\sigma^d} \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2} \qquad \text{avec} \quad \frac{1}{2}m\omega^2\sigma^2 \equiv \frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T, \tag{II.50}$$

soit :

$$\rho^{(\mathrm{d})}(0) = \left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}}T}\right)^{d/2} N\omega^d. \tag{II.51}$$

La limite thermodynamique est donc obtenue en prenant (figure II.4) :

$$N \to +\infty, \quad \omega \to 0, \qquad \rho^{(\mathrm{d})}(0) \propto N\omega^d = \text{constante}. \tag{II.52}$$

Les deux résultats (II.48) et (II.49) sur la saturation des états excités dans des pièges 2D et 3D sont pertinents dans cette limite, puisqu'ils s'expriment en fonction de la seule variable $N_{\mathrm{exc}}^{(\max)}(T)\ \omega^d$:

$$N_{\mathrm{exc}}^{(\max)}(T)\ \omega^d = \mathrm{Li}_d(1) \left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar}\right)^d \tag{II.53}$$

Le cas uni-dimensionnel. A une dimension, la situation est plus délicate qu'à 2D et 3D puisque l'intégrale (II.45) diverge quand $Z \to 1$ (BAGNATO & KLEPPNER 1991). Il faut donc revenir à la somme discrète (II.44) pour évaluer le nombre maximal d'atomes que l'on peut placer dans un piège de pulsation ω et à température T. Le calcul est décrit par KETTERLE & VANDRUTEN (1996) et conduit au résultat :

$$\text{1D, } k_{\mathrm{B}}T \gg \hbar\omega : \qquad N_{\mathrm{exc}}^{(\max)}(T) \approx \frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\omega} \ln\left(\frac{2k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\omega}\right). \tag{II.54}$$

Comme prévu, ce résultat ne survit pas à la limite thermodynamique puisque le produit $N\omega$ nécessaire pour atteindre le seuil de condensation diverge. En revanche, dans un piège 1D à ω fixé, un condensat se forme quand le nombre d'atomes dépasse (II.54).

2-3 Approximation semi-classique

L'état d'équilibre d'un gaz parfait dans un piège harmonique peut s'écrire en terme de l'opérateur densité à une particule

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{\frac{1}{Z}\mathrm{e}^{\hat{H}/k_{\mathrm{B}}T} - 1}, \tag{II.55}$$

où $\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + V_{\mathrm{trap}}(\hat{\boldsymbol{r}})$ est l'hamiltonien à une particule. L'opérateur densité $\hat{\rho}_1$ est diagonal dans la base des états propres de $\hat{H}$ et la population de chaque état est donnée par la statistique de Bose–Einstein (II.1).

L'approximation semi-classique (BAGNATO, PRITCHARD et al. 1987) consiste à "oublier" le fait que $\hat{p}$ et $\hat{r}$ sont des opérateurs qui ne commutent pas et à les remplacer par des variables classiques. L'opérateur $\hat{\rho}_1$ devient alors une distribution dans l'espace des phases :

$$W(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \frac{1}{\frac{1}{Z}\mathrm{e}^{[\frac{p^2}{2m}+V(\boldsymbol{r})]/k_{\mathrm{B}}T} - 1} \tag{II.56}$$

qui permet, par intégration sur l'une ou l'autre des variables, de déterminer la distribution en position ou en vitesse. La constante de normalisation de W sera justifiée un peu plus loin.

En réalité, le concept de distribution dans l'espace des phases n'existe pas en physique quantique. Il est en effet impossible de préparer une particule dans un état tel que sa position et son impulsion soient toutes deux parfaitement définies. L'objet qui s'en rapproche le plus est la distribution de Wigner (WIGNER 1932), quantité réelle mais pas toujours positive. Le lien entre la fonction $W(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ définie ci-dessus et la distribution de Wigner est discuté en détail par CASTIN (2001). Le bilan de cette discussion est que (II.56) peut valablement être utilisée si on s'intéresse à des structures de l'espace des phases d'étendue grande devant $\hbar$. En d'autres termes, il ne faut pas chercher à résoudre individuellement la contribution de chaque

état quantique, mais se limiter à l'évaluation de quantités physiques qui varient doucement d'un état donné à un état voisin. Cela doit être en particulier le cas pour la population de ces états, ce qui impose que $k_{\rm B}T \gg \hbar\omega$.

Dans le cadre de cette approximation, il est simple de déterminer le profil de densité spatiale en dimension d, $\rho^{(d)}_{\rm exc.}(\boldsymbol{r})$, dans un piège à température donnée (rappelons que l'état fondamental, s'il est macroscopiquement peuplé, échappe à cette distribution semi-classique). L'intégration sur l'impulsion donne :

$$\begin{aligned}\rho^{(d)}_{\rm exc}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d}\int \frac{Z{\rm e}^{-[\frac{p^2}{2m}+V(\boldsymbol{r})]/k_{\rm B}T}}{1-Z{\rm e}^{-[\frac{p^2}{2m}+V(\boldsymbol{r})]/k_{\rm B}T}}\,{\rm d}^d p \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d}\sum_{j=1}^{+\infty} Z^j \int {\rm e}^{-j[\frac{p^2}{2m}+V(\boldsymbol{r})]/k_{\rm B}T}\,{\rm d}^d p \\ &= \frac{1}{\lambda_T^d}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j^{d/2}}\left[Z\,{\rm e}^{-V(\boldsymbol{r})/k_{\rm B}T}\right]^j = \frac{1}{\lambda_T^d}\,{\rm Li}_{d/2}\left[Z\,{\rm e}^{-V(\boldsymbol{r})/k_{\rm B}T}\right] \qquad \text{(II.57)}\end{aligned}$$

On remarque que pour $Z \ll 1$, le premier terme ($j = 1$) de la somme est grand devant tous les autres et on retrouve la formule de Boltzmann

$$\rho^{(d)}_{\rm exc}(\boldsymbol{r}) \approx \rho^{(d)}_{\rm tot}(\boldsymbol{r}) = \frac{Z}{\lambda_T^d}\,{\rm e}^{-V(\boldsymbol{r})/k_{\rm B}T}. \qquad \text{(II.58)}$$

Nombre d'atomes à l'approximation semi-classique. Le résultat (II.57) fournit la densité en tout point du piège. Pour le potentiel harmonique $V(\boldsymbol{r}) = m\omega^2 r^2/2$, on peut maintenant intégrer cette densité sur l'espace et vérifier que l'on retrouve bien les résultats obtenus précédemment :

$$\begin{aligned}N^{(d)}_{\rm exc} &= \frac{1}{\lambda_T^d}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j^{d/2}}Z^j\int {\rm e}^{-jm\omega^2 r^2/(2k_{\rm B}T)}\,{\rm d}^d r \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{Z^j}{j^{d/2}}\left(\frac{k_{\rm B}T}{\hbar\omega}\right)^d = {\rm Li}_d(Z)\left(\frac{k_{\rm B}T}{\hbar\omega}\right)^d. \qquad \text{(II.59)}\end{aligned}$$

2-4 Approximation de densité locale

Pour un potentiel uniformément nul ($\omega = 0$), on retrouve le résultat donné plus haut pour un gaz uniforme à 2D [*cf.* (II.16)] :

$$\rho^{\rm (d)}_{\rm exc}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\lambda_T^d}\,{\rm Li}_{d/2}\left({\rm e}^{\mu/k_{\rm B}T}\right), \qquad \text{(II.60)}$$

ce qui justifie *a posteriori* la constante de normalisation introduite en (II.56). Dans le cas général, le résultat (II.57), écrit sous la forme

$$\rho^{\rm (d)}_{\rm exc}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\lambda_T^d}\,{\rm Li}_{d/2}\left({\rm e}^{[\mu-V(\boldsymbol{r})]/k_{\rm B}T}\right) \qquad \text{(II.61)}$$

fournit une illustration de *l'approximation de densité locale* : la densité en un point quelconque du piège est la densité d'un gaz uniforme de même température et de potentiel chimique $\mu - V(\boldsymbol{r})$. Nous aurons l'occasion d'utiliser cette approximation pour un gaz de particules en interaction.

Seuil de condensation à l'approximation semi-classique. Plaçons-nous tout d'abord à trois dimensions. La condensation dans le piège harmonique $V(\boldsymbol{r}) = m\omega^2 r^2/2$ est obtenue quand la fugacité Z tend vers 1, auquel cas le résultat (II.57) indique que la densité centrale du piège vaut :

$$\rho^{(3)}_{\rm exc}(0) = \frac{1}{\lambda_T^3}\,{\rm Li}_{3/2}\,(1)\,. \qquad \text{(II.62)}$$

On arrive donc à une conclusion remarquable (et satisfaisante !) qui relie le cas uniforme et le cas du piège : la condensation dans le piège se produit quand la densité centrale est égale à la densité critique d'un gaz uniforme de même température.

Comment ce résultat se transpose-t-il à deux dimensions ? La réponse ne semble pas évidente, puisqu'il y a condensation dans le piège harmonique, mais pas dans le cas uniforme. Cette réponse se trouve dans le fait que la densité centrale $n(0)$ dans le piège diverge quand $Z \to 1$, bien que l'intégrale de $n(\boldsymbol{r})$ sur tout l'espace reste convergente. La divergence de

$n(\boldsymbol{r})$ autour du point $\boldsymbol{r} = 0$ est en effet assez douce :

$$Z = 1 : \quad \rho^{(2)}_{\mathrm{exc}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\lambda_T^2}\,\mathrm{Li}_1\left(\mathrm{e}^{-V(\boldsymbol{r})/k_\mathrm{B}T}\right) = -\frac{1}{\lambda_T^2}\,\ln\left(1-\mathrm{e}^{-m\omega^2 r^2/(2k_\mathrm{B}T)}\right)$$
$$\overset{r\to 0}{\approx} -\frac{1}{\lambda_T^2}\,\ln(r^2) + \text{constante}. \qquad \text{(II.63)}$$

On retrouve ainsi le côté marginal de la condensation à deux dimensions, au moins dans la limite thermodynamique : elle peut se faire dans un piège harmonique, mais il faut pour cela ajouter des atomes jusqu'au moment où la densité centrale devient infinie. Même si cela est en principe possible pour un gaz parfait, on pressent que ce sera problématique en présence d'interactions répulsives entre particules.

3 Un gaz 2D presque idéal : les photons en cavité

Un exemple de condensation de Bose–Einstein d'un gaz parfait dans un piège harmonique 2D est fourni par les expériences menées dans le groupe de Martin Weitz à Bonn depuis 2010 (KLAERS, SCHMITT et al. 2010), et reprises plus récemment dans le groupe de Robert Nyman à Imperial College (MARELIC & NYMAN 2015 ; MARELIC, ZAJICZEK et al. 2016). Il s'agit de la condensation à deux dimensions de photons dans une cavité Fabry-Perot. *A priori*, l'extension à des photons de la notion de condensation de Bose–Einstein, un phénomène propre aux particules massives, soulève un certain nombre de questions :

— Les photons ne sont pas des particules massives dans l'espace 3D. Comment peuvent-ils acquérir une masse à 2D ?

— Pour avoir un condensat à deux dimensions, il faut confiner les particules, par exemple dans un piège harmonique. Comment obtient-on ce piégeage harmonique pour les photons ?

— On attribue généralement un potentiel chimique nul aux photons, en invoquant le fait que leur nombre n'est pas conservé. C'est en particulier cet argument qui permet d'établir la formule du rayonnement du corps noir. Comment se fait-il que les photons puissent acquérir un potentiel chimique non nul dans cette expérience ?

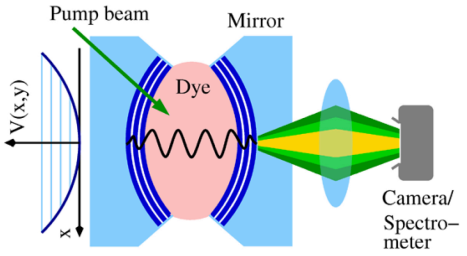


FIGURE II.5. *Cavité Fabry-Perot remplie de colorant et pompée latéralement par un laser. Pour un taux de pompage suffisamment élevé, la condensation de Bose–Einstein de photons se produit dans le mode longitudinal $N = 7$ et dans le mode transverse fondamental. Figure extraite de* KLAERS, SCHMITT *et al. (2011).*

— La condensation de Bose–Einstein correspond à l'accumulation d'un nombre macroscopique de particules dans un seul état quantique du système, le laser également. En quoi les expériences de Bonn diffèrent-elles d'un laser « ordinaire » ?

3-1 Masse et potentiel harmonique pour les photons

Le schéma expérimental de KLAERS, SCHMITT et al. (2010) est représenté sur la figure II.5. L'expérience est menée avec des photons de longueur d'onde λ autour de 570 nm. On utilise une cavité Fabry-Perot de grande finesse (10^5) et de faible épaisseur $L \approx 1.5\,\mu$m. La cavité est remplie d'un milieu (méthanol+colorant) d'indice $n_0 = 1.33$, de sorte que $L \approx N\frac{\lambda}{2n_0}$ avec $N = 7$. Les photons sont stockés dans la cavité dans le mode longitudinal $N = 7$.

Le choix de la valeur de L est motivé par le fait que l'intervalle spectral libre, c'est-à-dire l'écart énergétique entre le mode $N = 7$ et ses voisins $N = 6$ ou 8, doit être plus grand que $k_B T$, où T est la température ambiante, et que la largeur spectrale de la lumière de fluorescence du colorant. Quand cette condition est vérifiée, ces autres modes ne jouent pas de rôle : le degré de liberté selon z peut être considéré comme gelé. Le choix $L = 1.5\,\mu$m conduit à un écart énergétique de $10\,k_\mathrm{B}T$ environ, ce qui est

largement suffisant.

Comment donner une masse aux photons ? Nous nous intéressons dans ce qui suit à la dynamique et à la thermodynamique des photons dans le plan xy, où z désigne l'axe de la cavité. Un photon résonnant avec la cavité a pour vecteur d'onde $(\boldsymbol{k}_\perp, k_z)$ avec $k_z = N\pi/L$. Si on se limite à l'approximation paraxiale, c'est-à-dire à des photons faisant un angle faible avec l'axe z, on a $|\boldsymbol{k}_\perp| \ll k_z$. L'énergie des photons dans le milieu d'indice n_0 qui remplit la cavité s'écrit donc

$$\hbar\omega(\boldsymbol{k}_\perp) = \frac{\hbar c}{n_0}\left(k_z^2 + \boldsymbol{k}_\perp^2\right)^{1/2} \approx \hbar\omega_0 + \frac{\hbar^2\boldsymbol{k}_\perp^2}{2m_{\rm ph}}, \tag{II.64}$$

où l'on a posé

$$\hbar\omega_0 = \frac{N\pi\hbar c}{n_0 L}. \tag{II.65}$$

On obtient bien une relation de dispersion de particules massives et la masse effective du photon pour le mouvement dans le plan xy vaut :

$$m_{\rm ph} = \frac{\hbar n_0 k_z}{c} = n_0^2\frac{\hbar\omega_0}{c^2}. \tag{II.66}$$

Cette masse effective vaut 0.7×10^{-35} kg dans l'expérience de Bonn, 100 000 fois moins qu'un électron !

Comment induire un potentiel harmonique dans le plan xy ? Nous allons faire ici un raisonnement corpusculaire classique, qui pourrait se transposer en formalisme ondulatoire. La cavité est formée de deux miroirs sphériques de rayon R, de sorte que la distance L entre les deux miroirs varie avec l'écart à l'axe $r = \left(x^2+y^2\right)^{1/2}$:

$$L(r) = L_0 - 2\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right). \tag{II.67}$$

Le rayon de courbure des miroirs $R \approx 1$ m est grand devant l'écart à l'axe typique, $r \approx 100\,\mu$m, de sorte que l'on peut faire un développement limité de cette expression :

$$L(r) \approx L_0 - \frac{r^2}{R}. \tag{II.68}$$

Cette variation de la longueur de la cavité avec l'écart à l'axe induit une variation spatiale de l'énergie d'un photon stocké dans le mode N. Plus précisément, si on injecte ce résultat pour $L(r)$ dans la définition (II.65) de $\hbar\omega_0$, on arrive à

$$\hbar\omega_0(r) = \hbar\omega_0(0) + \frac{1}{2}m_{\rm ph}\Omega^2 r^2 \tag{II.69}$$

où la pulsation Ω est définie par :

$$\Omega = \frac{c}{n_0\sqrt{L_0 R/2}}. \tag{II.70}$$

On obtient bien le confinement harmonique recherché, avec une fréquence d'oscillation $\Omega/(2\pi) \approx 40$ GHz pour l'expérience de Bonn.

À ce stade, l'énergie d'un photon de position transverse $\boldsymbol{r}$ et d'impulsion transverse $\hbar\boldsymbol{k}_\perp$ s'écrit donc

$$E(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}_\perp) = \frac{\hbar^2\boldsymbol{k}_\perp^2}{2m_{\rm ph}} + \frac{1}{2}m_{\rm ph}\Omega^2\boldsymbol{r}^2, \tag{II.71}$$

ce qui suffit d'un point de vue cinématique à appliquer le formalisme précédent.

3-2 Température et potentiel chimique

La cavité est remplie d'un colorant (rhodamine 6G) que l'on éclaire sur le côté avec un laser pompe à 532 nm. Une molécule de colorant peut être considérée comme un système à deux niveaux électroniques g (fondamental) et e (excité), avec pour chacun de ces niveaux un quasi-continuum de sous-niveaux de vibration et de rotation (figure II.6). Lors d'une transition $e \to g$, une molécule émet un photon dans le mode $N = 7$ de la cavité. Ce photon peut être réabsorbé par une molécule (transition $g \to e$), puis réémis de multiples fois avant de finalement s'échapper de la cavité.

Cette succession de processus d'absorption et d'émission conduit à une distribution thermique pour l'énergie des photons. Plus précisément, en utilisant la loi de Kennard–Stepanov qui relie les spectres d'absorption et d'émission de molécules, on peut montrer que la distribution énergétique des photons est caractérisée (à peu près) par la même température que celle

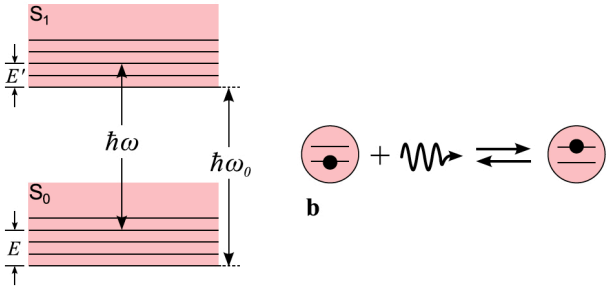


FIGURE II.6. *Absorption et émission d'un photon par une molécule de colorant. Figure extraite de* KLAERS, SCHMITT *et al. (2011).*

du colorant, $T = 300\,\mathrm{K}$ (KLAERS, SCHMITT et al. 2011). En association avec la masse effective déterminée plus haut, ceci correspond à une longueur d'onde thermique $\lambda_T \sim 1.6\,\mu$m.

À ce stade, la situation semble similaire à celle du rayonnement du corps noir, où l'on s'intéresse aux photons en équilibre avec les parois d'un four. Or, pour le rayonnement du corps noir, on est conduit à imposer un potentiel chimique nul aux photons. La raison en est que le nombre de photons, ou plus précisément le nombre d'excitations du système, n'est pas conservé. Quand on considère la dynamique des photons en interaction avec les parois du four, on peut avoir un processus du type :

$$1 \text{ photon } \rightarrow \text{ 1 excitation des parois } \rightarrow \text{ 2 photons} \qquad \text{(II.72)}$$

résultant dans la conversion d'un photon d'énergie $\hbar\omega$ en deux photons d'énergie $\hbar\omega'$ et $\hbar\omega''$, avec $\omega = \omega' + \omega''$. L'existence de tels processus impose $\mu = 2\mu$ pour les photons, soit $\mu = 0$.

La situation est très différente dans l'expérience de Bonn. Les photons ont certes la même température T que le colorant, mais leur nombre dans la gamme de longueur d'onde autour de 570 nm est différent de celui d'un corps noir à cette température, car il dépend également de l'intensité de pompage. Pour comprendre ce point, partons du processus représenté en figure II.6 :

$$1 \text{ photon} + \text{une molécule } g \longleftrightarrow \text{une molécule } e. \qquad \text{(II.73)}$$

Dans un tel processus élémentaire, le nombre d'excitations du système est constant[3], contrairement au cas du rayonnement du corps noir. Une version simplifiée de l'équilibre dans la relation ci-dessus peut s'écrire en terme de l'équation bilan :

$$\mathcal{N}(\omega)\; N_g(E) = [1 + \mathcal{N}(\omega)]\, N_e(E + \hbar\omega) \qquad \text{(II.74)}$$

où $\mathcal{N}(\omega)$ représente le nombre de photons de pulsation ω, $N_{g/e}(E)$ le nombre de molécules d'énergie interne E. Nous avons tenu compte dans cette équation du phénomène d'émission stimulée, qui est responsable *in fine* de la condensation. Dans cette modélisation simple, posons

$$\frac{N_e(E + \hbar\omega)}{N_g(E)} = Z\,\mathrm{e}^{-\hbar\omega/k_\mathrm{B}T}, \qquad \text{(II.75)}$$

qui fait l'hypothèse implicite que la relaxation à l'intérieur des sous-niveaux rovirbrationnels garantit une distribution thermique pour chacun de ces deux continuums. En revanche, le rapport entre les populations globales de g et e n'est pas thermique, mais imposé par le laser de pompe et décrit par le coefficient Z. La solution de l'équation-bilan est

$$\frac{\mathcal{N}(\omega)}{1 + \mathcal{N}(\omega)} = \frac{N_e(E + \hbar\omega)}{N_g(E)} \qquad \longrightarrow \qquad \mathcal{N}(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{Z}\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_\mathrm{B}T} - 1} \qquad \text{(II.76)}$$

c'est-à-dire une loi de Bose–Einstein de fugacité $Z \neq 1$.

3-3 Résultats expérimentaux

Un exemple typique de spectres expérimentaux est montré sur la figure II.7. On voit que sur une gamme d'une vingtaine de nanomètres, la distribution en fréquence des photons issus de la cavité reproduit très bien une loi de Bose–Einstein à température $T = 300\,\mathrm{K}$ et avec un potentiel chimique qui dépend de la puissance de pompe. Pour une puissance assez grande, on observe clairement une accumulation de photons dans un pic étroit en longueur d'onde, autour de 584 nm. Une image directe de la lumière issue de la cavité, en dessous et au-dessus du seuil, confirme l'interprétation

3. Si l'on revient à la description des processus élémentaires d'interaction molécule–rayonnement, on peut remarquer que ce point est à la base de l'approximation du champ tournant (RWA), consistant à ne garder dans l'hamiltonien que les termes en $\hat{a}^\dagger|g\rangle\langle e| + \mathrm{H.c.}$

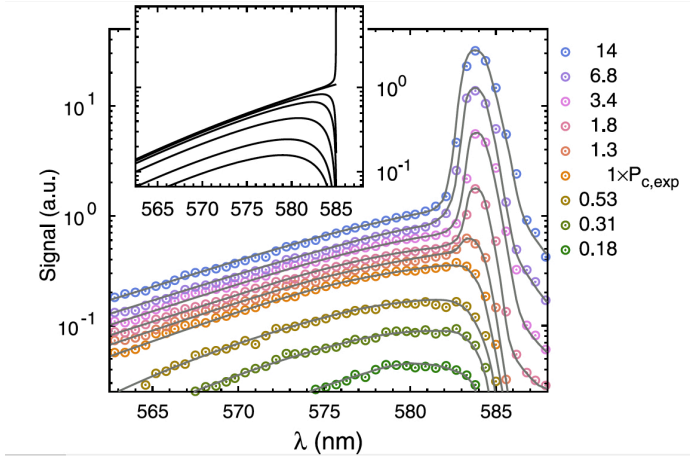


FIGURE II.7. *Spectre de la lumière émise pour différentes puissances de pompe. Les lignes continues sont des ajustements par des distributions de Bose–Einstein associées à l'énergie (II.71) et de fugacité non nulle. Pour une puissance de pompe supérieure à un certain seuil, une accumulation macroscopique de photons se produit dans le mode fondamental de la cavité. Figure extraite de* KLAERS, SCHMITT *et al. (2011).*

de ce pic comme une accumulation de photons dans un mode central de la cavité (figure II.9). Pour $\lambda > 585\,\mathrm{nm}$, le nombre de photons chute car ce domaine est au-delà de la longueur d'onde de coupure pour le mode considéré ($N = 7$). Le spectre est alors très différent d'un corps noir à 3D, pour lequel $\mathcal{N}(\omega)$ diverge à basse fréquence. Le nombre de photons dans la cavité au seuil de la transition est de l'ordre de 60 000, en bon accord avec la prédiction [4] pour un gaz parfait $\frac{\pi^2}{3}\,(k_\mathrm{B}T/\hbar\Omega)^2$.

Des expériences plus récentes, toujours menées par le groupe de Bonn, ont porté sur l'étude de la distribution statistique du nombre de photons présents dans le condensat à un instant donné. SCHMITT, DAMM et al. (2014) ont notamment montré que ces fluctuations correspondaient à celles attendues pour l'ensemble grand canonique. Cela est en accord avec l'idée que le gaz de photons échange de l'énergie et des particules avec le réservoir formé par les molécules du colorant. Ce résultat a récemment été confirmé par la mesure de la cohérence de phase de la lumière sortant de la cavité (SCHMITT, DAMM et al. 2016). La mesure de la chaleur spécifique du gaz de photons (fig. II.9), avec une variation caractéristique en "λ", a par ailleurs confirmé la validité de l'interprétation de ces phénomènes en tant que condensation de Bose–Einstein (DAMM, SCHMITT et al. 2016).

4. Ce nombre diffère par un facteur 2 de (II.48) car il faut prendre en compte les deux états de polarisation possibles pour les photons.

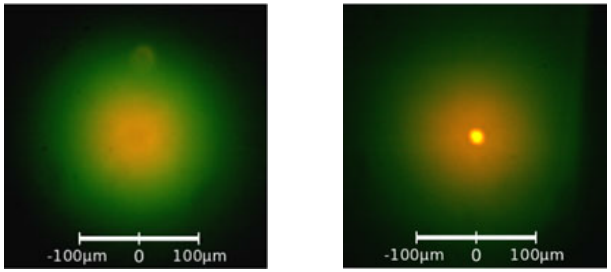


FIGURE II.8. *Répartition spatiale de la lumière émise par la cavité, en dessous (gauche) et au-dessus (droite) de la puissance seuil. On notera que les longueurs d'onde les plus courtes (vertes) sont émises sur les bords, confirmant la présence du potentiel harmonique effectif $m_\mathrm{ph}\Omega^2 r^2/2$. Figure extraite de* KLAERS, SCHMITT *et al. (2011).*

Condensat ou laser ? La réponse à cette question dépend des critères que l'on fixe pour obtenir l'un ou l'autre des deux effets. Tout d'abord, on peut imposer qu'un condensat apparaisse au-dessus d'un piédestal assimilable à une distribution thermique, ce qui n'est pas le cas pour un laser. L'expérience de Bonn satisfait bien ce critère. Par ailleurs, la plupart des lasers tendent à produire de la lumière avec une distribution poissonienne du nombre de photons émis pendant une durée donnée. Ici, la lumière sortant de la cavité présente des fluctuations beaucoup plus importantes, bien décrites dans l'ensemble grand-canonique d'un gaz de Bose. On peut par ailleurs remarquer qu'un condensat correspond à une situation d'équilibre thermodynamique. De ce point de vue, l'expérience de Bonn n'est pas vraiment dans un état d'équilibre, puisque la cavité est un système ouvert : on y injecte en permanence de l'énergie via la pompe, et de l'énergie s'en échappe quand les photons sortent de la cavité. En revanche, puisque

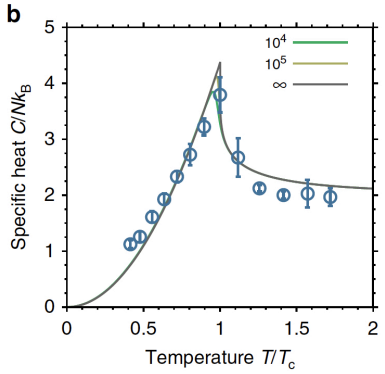


FIGURE II.9. *Chaleur spécifique (par photon) mesurée en fonction de la température réduite T/T_c, montrant la singularité caractéristique de la transition de Bose–Einstein. Dans le régime de haute température, la chaleur spécifique atteint la limite classique de $2k_B$ par photon. Les lignes continues donnent la prédiction pour un gaz de Bose idéal pour trois nombres de particules différents. Figure extraite de* DAMM, SCHMITT *et al. (2016).*

chaque photon subit de multiples processus "absorption–émission" avant de s'échapper, un quasi-équilibre thermique a bien le temps d'être atteint. Au vu de ces différents critères, tous liés à des propriétés statiques du système, il semble légitime de considérer que cette expérience a effectivement réalisé un condensat 2D de photons piégés. Signalons enfin que CHIOCCHETTA, GAMBASSI et al. (2015) ont récemment proposé des critères d'une autre nature, plus contraignants et fondés sur la vérification de relations de type fluctuation–dissipation. À notre connaissance, ces critères n'ont pas encore été testés sur les « condensats 2D de photons ».

4 Collisions binaires à deux dimensions

Pour aller au-delà du modèle du gaz parfait et arriver à la transition BKT, il faut prendre en compte les interactions entre particules. Dans les gaz dilués qui nous intéressent ici, ces interactions sont très bien décrites par un modèle de collisions binaires, où l'hamiltonien d'interaction se décrit comme une somme de termes à deux corps

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} U(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j). \tag{II.77}$$

Nous devons donc commencer par décrire le problème à deux corps interagissant par l'intermédiaire du potentiel $U(\boldsymbol{r})$. L'étude est simplifiée par les remarques suivantes :

— Les interactions dominantes [5] sont à symétrie sphérique, de sorte que $U(\boldsymbol{r})$ ne dépend en fait que de $r = |\boldsymbol{r}|$. Le moment cinétique est conservé dans une collision, ce qui permet de traiter le problème à deux corps avec des états propres de l'opérateur $\hat{\boldsymbol{L}}$. C'est le principe du développement en ondes partielles, repérées par la valeur $\ell \in \mathbb{N}$ du moment cinétique. Notons par ailleurs que pour des bosons polarisés, la symétrisation de la fonction d'onde à deux corps entraîne que seules les valeurs paires de ℓ sont autorisées.

— Les atomes sont froids de sorte que leur longueur d'onde thermique λ_T est grande devant la portée du potentiel qui sera notée b. En d'autre termes, les vecteurs d'onde $\boldsymbol{k}$ pertinents, qui sont de l'ordre de $1/\lambda_T$, vérifient $kb \ll 1$. Par ailleurs, le potentiel $U(\boldsymbol{r})$ décroît assez vite à l'infini. La conjonction de ces deux propriétés assure que l'essentiel des propriétés collisionnelles sont décrites par l'onde s, c'est-à-dire l'état correspondant à un moment cinétique relatif $\ell = 0$ entre les deux partenaires de collision (figure II.10).

Le traitement des collisions binaires dans un espace à trois dimensions est fait dans tous les manuels de physique quantique. Dans le cas des atomes froids, on pourra consulter par exemple PETHICK & SMITH (2008). Le but de cette section est de montrer les modifications importantes apportées par le passage à deux dimensions, pour préparer ainsi le terrain à notre étude de la transition BKT.

5. Nous négligerons donc ici les interactions magnétiques de type dipole-dipole qui briseraient cette invariance par rotation.

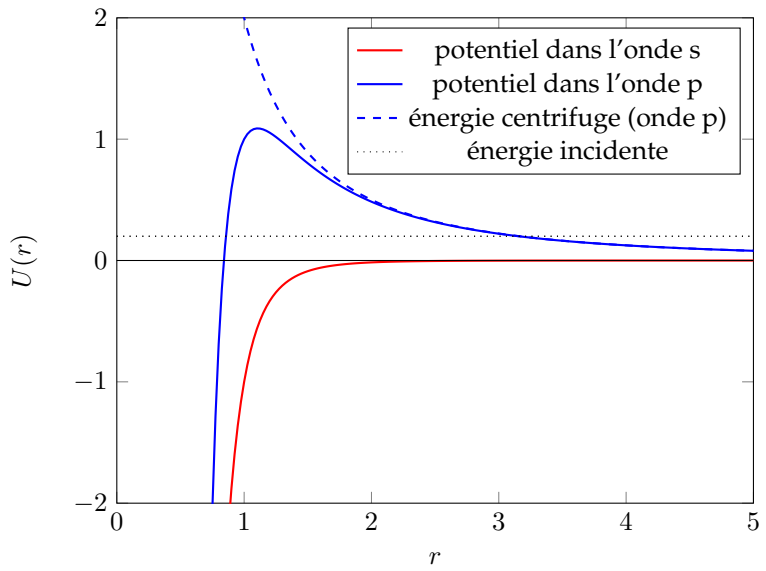


FIGURE II.10. *Potentiel radial en $-1/r^6$ ressenti par une particule dans l'onde s (en rouge, pas de terme centrifuge), et dans une onde partielle de moment cinétique non nul (en bleu, avec un terme centrifuge en $+1/r^2$). Les échelles de longueur et d'énergie sont choisies ici adimensionnées.*

4-1 Séparation des variables, amplitude de diffusion

Considérons deux atomes identiques de masse m et introduisons les variables du centre de masse, $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2), \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 \tag{II.78}$$

et les variables relatives, $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{p}$:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \qquad \boldsymbol{p} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2). \tag{II.79}$$

L'hamiltonien du système se sépare en deux termes

$$\hat{H} = \hat{H}_{\rm CM} + \hat{H}_{\rm rel}, \qquad \hat{H}_{\rm CM} = \frac{\hat{P}^2}{2M}, \qquad \hat{H}_{\rm rel} = \frac{\hat{p}^2}{2m_r} + U(\boldsymbol{r}), \tag{II.80}$$

où l'on a introduit la masse totale $M = 2m$ et la masse relative $m_r = m/2$. Le problème de la collision binaire se ramène donc au problème à un corps de masse réduite m_r dans le potentiel extérieur $U(\boldsymbol{r})$, décrit par l'hamiltonien $\hat{H}_{\rm rel}$. C'est ce problème que nous allons étudier.

Nous allons nous intéresser aux états asymptotiquement libres qui décrivent un processus de diffusion. Le formalisme de la théorie des collisions nous indique qu'à toute onde plane $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ état propre de l'hamiltonien

$$\hat{H}_{\rm rel,0} = \frac{\hat{p}^2}{2m_r}, \tag{II.81}$$

avec la valeur propre $E_{\boldsymbol{k}} = \hbar^2 k^2/2m_r$, nous pouvons associer un état propre $\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$ de $\hat{H}_{\rm rel}$ de même énergie,

$$\hat{H}_{\rm rel}\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = E_{\boldsymbol{k}}\ \psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}), \tag{II.82}$$

cet état s'écrivant asymptotiquement comme la somme de l'onde plane incidente et d'une onde sortante sphérique (à trois dimensions) ou cylindrique (à deux dimensions) :

$$\text{3D, } 1 \ll kr \quad : \qquad \psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) \ \sim\ C_0 \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + f(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \right\}, \tag{II.83}$$

$$\text{2D, } 1 \ll kr \quad : \qquad \psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) \ \sim\ C_0 \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + f(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{\sqrt{kr}} \left[-\sqrt{\frac{\mathrm{i}}{8\pi}} \right] \right\} \tag{II.84}$$

où C_0 est une constante de normalisation. Nous avons tenu compte du fait que la diffusion se fait essentiellement dans le canal de moment cinétique nul (onde s) et nous nous limitons donc au cas d'une onde diffusée isotrope. Par ailleurs, on remarque que la définition de l'amplitude de diffusion $f(k)$ n'est pas exactement la même à trois et deux dimensions, avec le facteur $\sqrt{k}$ qui apparaît explicitement dans (II.84). La définition adoptée ici permet d'assurer des propriétés analytiques simples à $f(k)$ (ADHIKARI 1986). Signalons enfin que la raison d'être du facteur entre crochets dans la définition 2D tient à la forme trouvée pour $f(k)$ dans le cas d'une géométrie quasi-2D (§ 4-4) qui prendra la forme $f(k) \approx \tilde{g}$, où la constante $\tilde{g}$ est le paramètre habituellement utilisé pour caractériser la force des interactions dans ce type de problème.

L'amplitude de diffusion $f(k)$ détermine donc les propriétés de la collision binaire. Pour la calculer, prenons la moyenne angulaire de l'équation

de Schrödinger (II.82) en notant $R_k(r) = \frac{1}{4\pi}\int \psi_{\boldsymbol{k}}(r,\theta,\varphi)\ \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi$ à 3D et $R_k(r) = \frac{1}{2\pi}\int \psi_{\boldsymbol{k}}(r,\varphi)\ \mathrm{d}\varphi$ à 2D. On arrive alors à l'équation de Schrödinger radiale :

$$\text{3D :} \qquad \frac{\mathrm{d}^2R_k}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R_k}{\mathrm{d}r} + \left[k^2 - \frac{2m_r}{\hbar^2}U(r)\right] R_k(r) = 0 \tag{II.85}$$

et

$$\text{2D :} \qquad \frac{\mathrm{d}^2R_k}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R_k}{\mathrm{d}r} + \left[k^2 - \frac{2m_r}{\hbar^2}U(r)\right] R_k(r) = 0, \tag{II.86}$$

La différence entre les cas 3D et 2D apparaît ici bien mineure, avec uniquement un facteur 2 de différence pour le terme de dérivée première. Nous allons voir que cet écart change pourtant fortement le comportement de la fonction radiale $R_k(r)$ et de l'amplitude de diffusion $f(k)$. Notons que le comportement asymptotique de la fonction radiale $R_k(r)$ est obtenu par moyenne angulaire de (II.83-II.84) :

$$\text{3D, } 1 \ll kr \quad : \qquad R_k(r) \ \sim\ C_0\left\{\frac{\sin(kr)}{kr} + f(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\right\}, \tag{II.87}$$

$$\text{2D, } 1 \ll kr \quad : \qquad R_k(r) \ \sim\ C_0\left\{J_0(kr) + f(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{\sqrt{kr}}\left[-\sqrt{\frac{\mathrm{i}}{8\pi}}\right]\right\} \tag{II.88}$$

Pour simplifier notre analyse, nous supposerons que le potentiel $U(\boldsymbol{r})$ s'annule (ou prend des valeurs négligeables par rapport aux autres énergies du problème) au-delà du rayon b. Nous nous intéresserons au régime de faible énergie $kb \ll 1$, de sorte qu'il existe une région intermédiaire de l'espace

$$b < r \ll k^{-1} \tag{II.89}$$

dans laquelle le potentiel $U(\boldsymbol{r})$ n'a pas d'influence et où nous pourrons faire un développement à petites valeurs de kr pour les états de diffusion $\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$. En particulier l'onde plane incidente vaut $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \approx 1$ dans cette région intermédiaire.

4-2 La longueur de diffusion à 3D

Nous cherchons à obtenir ici une solution de l'équation de Schrödinger avec le comportement asymptotique (II.87). Nous allons pour cela procéder en trois étapes, que nous reprendrons ensuite dans le cas bidimensionnel.

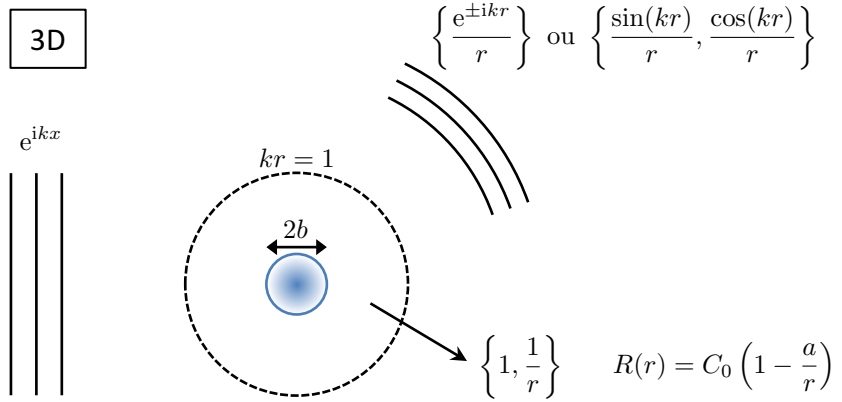


FIGURE II.11. *Principe du calcul de l'amplitude de diffusion à 3D par un potentiel ne prenant des valeurs significatives que pour $r < b$ et pour des faibles vecteurs d'onde $kb \ll 1$. Pour $kr \gg 1$, la superposition de l'onde plane incidente et de l'onde sphérique divergente peut s'écrire après moyenne angulaire comme combinaison linéaire de $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kr}/r$. Ces deux fonctions de base se raccordent dans la zone intermédiaire $b < r < k^{-1}$ aux deux fonctions $R^{(\mathrm{I})}(r) = 1$ et $R^{(\mathrm{II})}(r) = 1/r$. La combinaison linéaire physiquement pertinente, avec notamment la régularité requise en $r = 0$, permet de définir la longueur de diffusion a.*

Étape 1 : solutions générales dans la zone $U = 0$. Plaçons-nous dans la zone $r > b$ de sorte que U est négligeable. Les deux fonctions $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kr}/r$ sont alors solutions exactes de l'équation radiale (II.85) (aussi bien pour $kr \gg 1$ que pour $b < r < k^{-1}$), et la solution générale est donc une combinaison linéaire de ces deux fonctions. En particulier, si on se place dans la région intermédiaire $b < r < k^{-1}$, on trouve (*cf.* figure II.11)

$$\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kr}}{r} \approx \frac{1 \pm \mathrm{i}kr}{r} = \frac{1}{r} \pm \mathrm{i}k \tag{II.90}$$

qui, par combinaisons linéaires, donnent une base commode des fonctions solutions dans cette région [6] :

$$R^{(\mathrm{I})}(r) = 1 \qquad R^{(\mathrm{II})}(r) = 1/r, \tag{II.91}$$

soit

$$R(r) = C_1 - \frac{C_2}{r}, \tag{II.92}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes. La forme asymptotique (II.87) écrite en termes des deux fonctions $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kr}/r$ peut se transposer à cette région intermédiaire puisque ces fonctions sont solutions exactes tant que le potentiel U est négligeable et on aboutit bien à la forme (II.92) avec

$$R_k(r) = C_1 \left[1 + \frac{f(k)}{r}\right]. \tag{II.93}$$

Étape 2 : solution d'énergie nulle. Prenons $k = 0$ dans l'équation de Schrödinger radiale (II.85) et considérons la zone $0 < r < b$ où $U(r)$ n'est plus négligeable. Comme il s'agit d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, l'espace des solutions est toujours de dimension 2. Toutefois, on trouve de façon générale qu'une seule combinaison linéaire des solutions est acceptable si l'on veut respecter la régularité de $R_0(r)$ en $r = 0$. Quand on suit cette solution jusqu'au point $r = b$ où U devient négligeable et où la forme (II.92) devient pertinente, cette combinaison linéaire vient imposer le rapport C_2/C_1. Définissons la longueur de diffusion à trois dimensions par le rapport $a = C_2/C_1$. La fonction solution pour $E = 0$ a donc la forme suivante pour $r > b$:

$$E = 0 : \qquad R_0(r) = C_1 \left(1 - \frac{a}{r}\right), \tag{II.94}$$

la longueur de diffusion correspondant donc par définition au point où cette forme asymptotique s'annule.

6. On peut immédiatement retrouver cette base en considérant directement la limite $k \to 0$, $U \to 0$ de (II.85), $rR'' + 2R' = 0$, qui s'intègre en $R'(r) = C_2/r^2$ où C_2 est une constante, et donc $R(r) = C_1 - C_2/r$ où C_1 est une autre constante.

Étape 3 : Raccord des solutions pour une énergie faible. Considérons maintenant une solution $R_k(r)$ d'énergie faible ($kb \ll 1$) et plaçons-nous dans la zone intermédiaire $b < r \ll k^{-1}$. La comparaison entre la forme (II.93) et la solution $R_0(r)$ pour $E = 0$ conduit immédiatement au lien entre longueur de diffusion et amplitude $f(k)$:

$$a = -\lim_{k \to 0} f(k). \tag{II.95}$$

La section efficace totale de diffusion par le potentiel $U(r)$ se calcule alors en faisant un bilan des courants de probabilité en entrée et en sortie et on trouve $\sigma = 4\pi a^2$. Pour des particules bosoniques, les effets de statistique quantique viennent multiplier ce résultat par 2.

4-3 La longueur de diffusion à 2D

Reprenons étape par étape le raisonnement fait à 3D (*cf.* figure II.12).

Étape 1 : solutions générales dans la zone $U = 0$. Le cas 2D apparaît immédiatement plus compliqué que le cas 3D car les ondes cylindriques $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kr}/\sqrt{r}$ ne sont pas solutions exactes de l'équation radiale (II.86) pour $U = 0$. Si elles l'étaient, la limite basse énergie donnerait comme base de fonctions $\frac{1}{\sqrt{r}} \pm \mathrm{i}k\sqrt{r}$, soit par combinaison linéaire $\frac{1}{\sqrt{r}}$ et $\sqrt{r}$. Or la limite $k \to 0$ et $U \to 0$ de (II.86) donne $rR'' + R' = 0$ qui s'intègre en $R'(r) = C_1/r$ et donc

$$R^{(\mathrm{I})}(r) = \ln(r) \qquad R^{(\mathrm{II})}(r) = 1, \tag{II.96}$$

soit

$$R(r) = C_1 \ln(r) + C_2. \tag{II.97}$$

Pour retrouver ce résultat dans un cadre plus général, on remarque que l'équation (II.86) pour la fonction radiale pour $U = 0$ est en fait l'équation de définition des fonctions de Bessel d'ordre 0. Deux solutions indépendantes de cette équation sont la fonction de Bessel de première espèce, $J_0(kr)$, et la fonction de Bessel de deuxième espèce [7] $Y_0(kr)$. Les comportements de J_0 et Y_0 sont connus à la fois pour les grandes et les petites

7. Cette fonction est également notée $N_0(kr)$ et appelée *fonction de Neumann*.

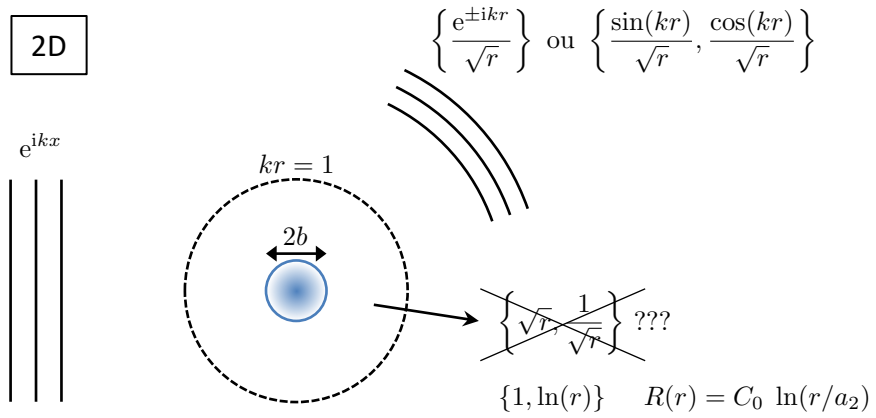


FIGURE II.12. *Principe du calcul de l'amplitude de diffusion à 2D par un potentiel ne prenant des valeurs significatives que pour $r < b$ et pour des faibles vecteurs d'onde $kb \ll 1$. Pour $kr \gg 1$, la superposition de l'onde plane incidente et de l'onde sphérique divergente peut s'écrire après moyenne angulaire comme combinaison linéaire de $e^{\pm ikr}/\sqrt{r}$. Ces deux fonctions sont les formes asymptotiques des fonctions de Bessel de première et deuxième espèce. Elles se raccordent dans la zone intermédiaire $b < r < k^{-1}$ aux deux fonctions $R^{(I)}(r) = \ln(r)$ et $R^{(II)}(r) = 1$. La combinaison linéaire physiquement pertinente, avec notamment la régularité requise en $r = 0$, permet de définir la longueur de diffusion a_2.*

valeurs de kr :

$$kr \gg 1 : \qquad J_0(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right) \tag{II.98}$$

$$Y_0(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin\left(kr - \frac{\pi}{4}\right) \tag{II.99}$$

et

$$kr \ll 1 : \qquad J_0(kr) \sim 1 \tag{II.100}$$

$$Y_0(kr) \sim \frac{2}{\pi} \ln(\eta\, kr) \tag{II.101}$$

où [8] $\eta = 0.89\ldots$. En particulier, toute combinaison linéaire de J_0 et Y_0 pour $kr \ll 1$ est bien de la forme (II.97).

Étape 2 : solution d'énergie nulle. Pour $k = 0$ et en présence du potentiel $U(r)$, l'espace des solutions générales $R_0(r)$ de l'équation radiale est de dimension 2. La condition de régularité de $R_0(r)$ en $r = 0$ vient sélectionner une combinaison linéaire particulière de ces fonctions. Quand on la prolonge au-delà du rayon $r = b$, cette combinaison linéaire se raccorde à une combinaison linéaire particulière du type $C_1 \ln(r) + C_2$ [*cf.* (II.97)], qui peut encore s'écrire

$$r > b : \qquad R_0(r) = C_1 \ln(r/a_2) \tag{II.102}$$

où $a_2 \equiv e^{-C_2/C_1}$ est la longueur de diffusion à deux dimensions.

Étape 3 : Raccord des solutions pour une énergie faible. Passons maintenant au cas où k n'est pas nul, mais reste très petit devant $1/b$. Pour former une onde cylindrique sortante, nous voyons sur (II.98-II.99) que nous devons prendre une fonction proportionnelle à la combinaison linéaire [9] $J_0 + iY_0$. Plus précisément, nous allons choisir

$$\text{2D, } 1 \ll kr : \qquad \frac{1}{4i}\left[J_0(kr) + iY_0(kr)\right] \sim \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \left[-\sqrt{\frac{i}{8\pi}}\right], \tag{II.103}$$

où l'on reconnait entre crochets le préfacteur de $f(k)$ introduit en (II.88). Pour $r > b$ la fonction radiale recherchée est donc du type

$$R_k(r) = C_0 \left\{J_0(kr) + \frac{f(k)}{4i}\left[J_0(kr) + iY_0(kr)\right]\right\}. \tag{II.104}$$

Dans la région intermédiaire $b < r < k^{-1}$, cette combinaison linéaire devient :

$$R_k(r) = C_0 \left\{1 + \frac{f(k)}{4i}\left[1 + i\,\frac{2}{\pi}\ln(\eta\, kr)\right]\right\}. \tag{II.105}$$

ce qui conduit à poser dans la limite $k \to 0$

$$f(k) = -4i\,\frac{1}{1 + i\,\frac{2}{\pi}\ln(\eta\, ka_2)} = \frac{1}{-\frac{1}{2\pi}\ln(\eta\, ka_2) + \frac{i}{4}} \tag{II.106}$$

8. $\eta = e^{\gamma}/2$ où $\gamma = 0.5772\ldots$ est la constante d'Euler.

9. Cette combinaison porte le nom de fonction de Hankel de première espèce, notée $H_0^{(1)}(kr)$. La fonction de deuxième espèce, $H_0^{(2)}(kr)$, correspond quant à elle à $J_0 - iY_0$.

pour retrouver la forme (II.102) en $C_1 \ln(r/a_2)$, avec en particulier $R_k(r) = 0$ pour $r = a_2$ (PETROV & SHLYAPNIKOV 2001 ; PRICOUPENKO & OLSHANII 2007).

On notera en particulier que l'amplitude de diffusion $f(k)$ tend vers 0 aux petits k, contrairement au cas 3D où elle tendait vers une limite finie égale à $-a$. Par ailleurs, la section efficace totale de diffusion par le potentiel $U(r)$ se calcule là aussi par un bilan des courants de probabilité en entrée et en sortie. On trouve $\sigma(k) = |f(k)|^2/(4k)$, quantité qui a la dimension d'une longueur et qui diverge à petit k.

4-4 Collisions dans une géométrie quasi-2D

Dans une expérience, la réduction de dimension se fait en confinant fortement les atomes le long d'un axe, z par exemple. Le confinement est caractérisé par l'extension résiduelle du gaz le long de cette direction. Par exemple, si le confinement est obtenu en imposant le potentiel harmonique $V_{\rm trap}^{(1D)}(z) = \frac{1}{2} m\omega_z^2 z^2$ et si la température est assez basse, les atomes n'occuperont que l'état fondamental $n_z = 0$ du mouvement selon z,

$$\chi_0(z) = \frac{1}{(\pi a_{\rm oh}^2)^{1/4}} {\rm e}^{-z^2/(2a_{\rm oh}^2)} \qquad \text{avec} \quad a_{\rm oh} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}}, \tag{II.107}$$

au moins tant qu'on néglige les interactions entre ces atomes.

Le traitement détaillé de la collision entre deux atomes en présence du potentiel $V_{\rm trap}^{(1D)}(z)$ a été fait par PETROV & SHLYAPNIKOV (2001) et nous nous contenterons de donner ici certains résultats de cet article. L'interaction entre deux atomes en absence de potentiel le long de l'axe z est caractérisée par la longueur de diffusion tri-dimensionnelle a. Nous allons nous concentrer sur le cas le plus souvent rencontré en pratique :

$$a \ll a_{\rm oh}, \tag{II.108}$$

de sorte que l'énergie associée aux interactions, $\hbar^2/(ma^2)$, est grande devant $\hbar\omega_z$. Dans une vision dynamique de la collision, ceci signifie que même si les atomes entrent et sortent dans le canal $n_z = 0$, plusieurs états d'excitation $n_z \neq 0$ du mouvement selon z interviennent au cours du choc.

Par ailleurs, puisque les états asymptotiques sont ceux d'un gaz confiné selon z dans l'état $n_z = 0$, la fonction d'onde de la variable relative de la paire d'atomes doit s'écrire dans la version 2D vue plus haut :

$$1 \ll kr : \qquad \psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}, z) \sim \left\{ {\rm e}^{{\rm i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + f(k) \frac{{\rm e}^{{\rm i}kr}}{\sqrt{kr}} \left[-\sqrt{\frac{\rm i}{8\pi}} \right] \right\} \chi_0(z) \tag{II.109}$$

où $\boldsymbol{r} \equiv (x, y)$. L'amplitude de diffusion $f(k)$ doit rester de la forme (VI.79) et le travail de PETROV & SHLYAPNIKOV (2001) a été de relier la longueur de diffusion bi-dimensionnelle a_2 à la longueur de diffusion tri-dimensionnelle a. Leur résultat peut s'écrire de la manière suivante [10] :

$$a_2 = 2.092\ a_{\rm oh}\ \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a_{\rm oh}}{a} \right). \tag{II.110}$$

En pratique, comme $a \ll a_{\rm oh}$, cette équation conduit à des valeurs extrêmement faibles de a_2. Prenons le cas d'atomes de rubidium ($a \approx 5\,$nm) confinés par un potentiel de fréquence $\omega_z/2\pi = 10\,$kHz, ce qui conduit à $a_{\rm oh} \approx 100\,$nm. On trouve alors $a_2 \approx 3\ 10^{-18}\,$m. Cette valeur, 1000 fois inférieure à la taille du noyau atomique, n'a aucune signification physique particulière et doit simplement être vue comme un intermédiaire de calcul. Il est en fait plus intéressant de revenir à l'expression de l'amplitude de diffusion (VI.79) que l'on peut mettre sous la forme :

$$f(k) = \frac{1}{\dfrac{1}{\tilde{g}} - \dfrac{1}{2\pi} \ln(\eta'\, k a_{\rm oh}) + \dfrac{\rm i}{4}} \qquad \text{avec} \quad \eta' = 1.86. \tag{II.111}$$

et

$$\tilde{g} = \sqrt{8\pi}\, \frac{a}{a_{\rm oh}}. \tag{II.112}$$

Le paramètre $\tilde{g}$ va jouer un rôle central dans les cours qui vont suivre, car il va nous permettre de caractériser l'intensité des interactions entre atomes. Pour comprendre ce rôle, notons que la condition de validité de notre traitement, $a \ll a_{\rm oh}$, entraîne que $\tilde{g} \ll 1$. Le terme $1/\tilde{g}$ figurant au dénominateur de $f(k)$ est donc grand devant 1. Comme les vecteurs d'onde décrivant les collisions entre atomes sont d'ordre $1/a_{\rm oh}$ (en tout cas, ils n'en diffèrent

10. L'évaluation du coefficient numérique 2.092 intervenant dans cette équation a été améliorée par PRICOUPENKO & OLSHANII (2007) et c'est donc la valeur des ces derniers que nous indiquons ici.

Région	permise		interdite	
Équation	$rR'' + R' + rk^2R = 0$		$rR'' + R' - rk^2R = 0$	
Fonction	$J_0(kr)$	$Y_0(kr)$	$I_0(kr)$	$K_0(kr)$
$kr \to 0$	$1 - \frac{1}{4}(kr)^2$	$\frac{2}{\pi}\ln(\eta\, kr)$	$1 + \frac{1}{4}(kr)^2$	$-\ln(\eta\, kr)$
$kr \to \infty$	$\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\sin\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi kr}}\mathrm{e}^{kr}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\mathrm{e}^{-kr}$
Dérivée	$J_0' = -J_1$	$Y_0' = -Y_1$	$I_0' = I_1$	$K_0' = -K_1$

TABLE II.1. *Résumé des propriétés des fonctions de Bessel intervenant dans ce chapitre pour déterminer la fonction radiale $R(r)$. La constante $\eta \approx 0.8905\ldots$ est définie par $\eta = \mathrm{e}^{\gamma}/2$ où $\gamma = 0.5772\ldots$ est la constante d'Euler.*

pas par des ordres de grandeurs), le terme $\ln(\eta'\, ka_{\mathrm{oh}})$ figurant également au dénominateur de $f(k)$ est d'ordre 1. Il s'ensuit que le terme $1/\tilde{g}$ est largement dominant devant le terme $\frac{1}{2\pi}\ln(\eta'\, ka_{\mathrm{oh}})$ ainsi que devant $\mathrm{i}/4$, au moins tant que $\tilde{g}$ reste inférieur à 1. On peut alors faire l'approximation

$$\tilde{g} \lesssim 1 : \qquad f(k) \approx \tilde{g} \tag{II.113}$$

d'une amplitude de diffusion constante.

Nous retrouverons cette approximation (II.113) au prochain cours dans le cadre d'une approche variationnelle, et nous reviendrons sur les termes correctifs à cette approximation au chapitre 6. Nous montrerons alors que ces corrections sont responsable d'une "anomalie quantique", qui vient briser l'invariance d'échelle du problème 2D traité par un champ classique.

Appendice : diffusion par un potentiel carré

À titre d'exemple, nous présentons dans ce paragraphe le problème de la diffusion d'une particule de masse m_r par un puits ($U_0 < 0$) ou une bosse ($U_0 > 0$) de potentiel de rayon b :

$$U(\boldsymbol{r}) = U_0 \quad \text{si } r < b, \qquad U(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \text{si } r > b. \tag{II.114}$$

Nous poserons $k_0 = \sqrt{2m_r|U_0|}/\hbar$. Dans la zone $r > b$, nous savons que la fonction radiale est une combinaison linéaire des fonctions de Bessel

$$r > b : \qquad R(r) = C_1\, J_0(kr) + C_2\, Y_0(kr) \tag{II.115}$$

et que l'amplitude de diffusion est reliée aux coefficients C_1 et C_2 par [*cf.* (II.104)]

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{1 + f(k)/4\mathrm{i}}{f(k)/4} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{f(k)} = \frac{1}{4}\frac{C_1}{C_2} + \frac{\mathrm{i}}{4}. \tag{II.116}$$

On identifie alors la longueur de diffusion à partir de la relation (VI.79) :

$$k \to 0 : \qquad \frac{1}{f(k)} \approx -\frac{1}{2\pi}\ln(\eta\, ka_2) + \frac{\mathrm{i}}{4}, \tag{II.117}$$

soit

$$k \to 0 : \qquad \ln(\eta\, ka_2) \approx -\frac{\pi}{2}\frac{C_1}{C_2}. \tag{II.118}$$

Cas d'une bosse de potentiel

Nous considérons le cas d'une diffusion à basse énergie, avec $k < k_0$. La région centrale est donc classiquement interdite et l'équation radiale pour la fonction $R(r)$ s'écrit dans cette zone

$$rR'' + R' - rk_1^2R = 0 \qquad \text{avec} \quad k_1^2 = k_0^2 - k^2 > 0. \tag{II.119}$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions de Bessel modifiées (encore appelées fonctions de Bessel hyperboliques) notées $I_0(k_1r)$ et $K_0(k_1r)$. Leur comportement au voisinage de 0 est donné par

$$x \to 0 : \qquad I_0(x) \approx 1 + \frac{x^2}{4} \tag{II.120}$$

$$K_0(x) \approx -\ln(\eta x). \tag{II.121}$$

La divergence en $\ln(r)$ élimine la contribution de K_0 :

$$r < b : \qquad R(r) = C_0\, I_0(k_1r) \tag{II.122}$$

et nous devons raccorder cette fonction en $r = b$ avec (II.135) en assurant la continuité de la fonction elle-même et de sa dérivée première. Ceci impose

$$k_1 \frac{I_0'(k_1 b)}{I_0(k_1 b)} = k \frac{C_1 J_0'(kb) + C_2 Y_0'(kb)}{C_1 J_0(kb) + C_2 Y_0(kb)} \tag{II.123}$$

En utilisant $J_0'(x) \approx -x/2$ et $Y_0'(x) \approx 2/(\pi x)$ au voisinage de 0, on voit que l'on peut négliger la contribution de J_0' devant celle de Y_0' au numérateur de l'expression ci-dessus [11]. Puisque nous nous intéressons à la limite $k \to 0$, nous prenons $k_1 \approx k_0$, $J_0(kb) \approx 1$ et $Y_0(kb) \approx \frac{2}{\pi} \ln(\eta kb)$, et nous arrivons à

$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{2}{\pi} \ln(\eta\, kb) + \frac{2}{\pi k_0 b} \frac{I_0(k_0 b)}{I_0'(k_0 b)} \tag{II.124}$$

dont on déduit la longueur de diffusion (figure II.13) :

$$a_2 = b\, \exp\left[-\frac{1}{k_0 b} \frac{I_0(k_0 b)}{I_0'(k_0 b)} \right]. \tag{II.125}$$

Dans la limite $U_0 \to \infty$ (sphère dure), la longueur de diffusion tend vers b. Le comportement asymptotique de $I_0(x)$ en l'infini est en effet

$$x \to \infty : \qquad I_0(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \tag{II.126}$$

de sorte que $I_0(x)/I_0'(x) \sim 1$. Dans la limite inverse $U_0 \to 0$, on trouve $a_2 \approx b \exp[-2/(k_0 b)^2]$ qui tend exponentiellement vite vers 0.

Cas d'un creux de potentiel

Recherche des états liés

Un état lié à symétrie cylindrique d'énergie $E = -\hbar^2 \kappa^2 / 2m_r$, avec $|E| < |U_0|$, sera caractérisé par une fonction radiale solution de

$$rR'' + R' + r k_1^2 R = 0 \qquad \text{avec} \quad k_1^2 = k_0^2 - \kappa^2 > 0 \tag{II.127}$$

à l'intérieur du puits (région permise) et de

$$rR'' + R' - r\kappa^2 R = 0 \tag{II.128}$$

à l'extérieur (région interdite).

Dans la région permise, les solutions sont des combinaisons linéaires de $J_0(k_1 r)$ et $Y_0(k_1 r)$. La fonction $Y_0(k_1 r)$ diverge en $r = 0$ et doit donc être éliminée. Il reste

$$r < b : \qquad R(r) = C_0\ J_0(k_1 r). \tag{II.129}$$

Dans la région interdite, la solution est une combinaison linéaire de $I_0(\kappa r)$ et $K_0(\kappa r)$. Nous avons déjà indiqué que $I_0(x)$ diverge comme $\mathrm{e}^x/\sqrt{2\pi x}$ à l'infini et doit donc être écartée. La fonction $K_0(x)$ en revanche se comporte comme

$$x \to \infty : \qquad K_0(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\ \mathrm{e}^{-x} \tag{II.130}$$

et est acceptable. Nous prenons donc dans cette région :

$$r > b : \qquad R(r) = C_1\ K_0(\kappa r). \tag{II.131}$$

Le raccord à la frontière $r = b$ impose

$$k_1 \frac{J_0'(k_1 b)}{J_0(k_1 b)} = \kappa \frac{K_0'(\kappa b)}{K_0(\kappa b)}, \qquad \kappa^2 + k_1^2 = k_0^2, \tag{II.132}$$

qui permet de déterminer un ensemble discret de solutions pour une valeur de k_0 fixée.

Intéressons-nous au cas d'un puits de faible profondeur $k_0 b \ll 1$. En utilisant les développements des fonctions J_0 et K_0 au voisinage de 0, on trouve dans ce cas une solution unique au problème

$$\eta\, \kappa b \approx \mathrm{e}^{-2/k_0^2 b^2}. \tag{II.133}$$

Il y a donc toujours un état lié dans un creux de potentiel à 2D, mais la liaison n'est que très faible puisque l'énergie décroît exponentiellement vite avec la profondeur du puits $|U_0|$. Rappelons qu'à 3D, un état lié n'existe dans un creux de potentiel qu'au dessus d'un certain seuil.

Quand on augmente la profondeur du puits, d'autres états liés apparaissent. Au seuil d'apparition d'un état lié, on a $\kappa \approx 0$, de sorte que le membre de droite $\kappa K_0'/K_0$ de (II.132) tend vers 0 en ce point. L'apparition d'un nouvel état lié correspond donc à un zéro de $J_0'(k_0 b)$, ou encore de $J_1(k_0 b)$ puisque $J_1(x) = -J_0'(x)$.

11. On vérifie *a posteriori* que l'amplitude relative de C_1 et C_2 à laquelle on aboutit est compatible avec cette approximation.

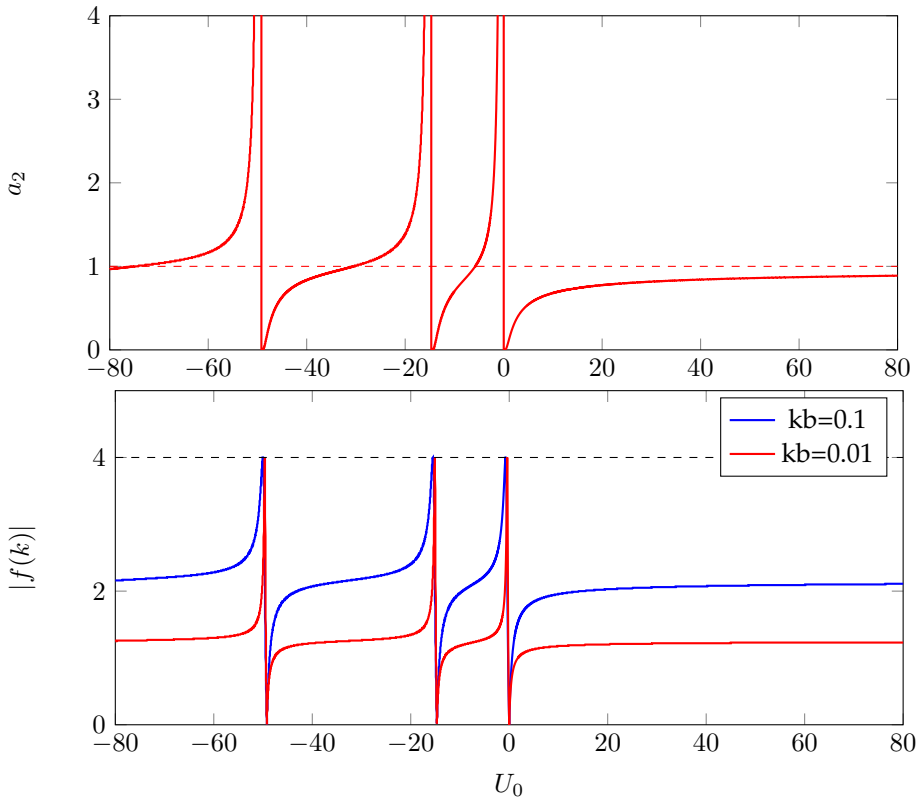


FIGURE II.13. *Haut : variation de la longueur de diffusion a_2 (en unité de b) en fonction de la profondeur du puits U_0 (en unité de $\hbar^2/(2m_r b^2)$). Bas : module de l'amplitude de diffusion $f(k)$ pour deux valeurs du vecteur d'onde, $kb = 0.1$ et $kb = 0.01$. Cette amplitude est calculée directement à partir de (II.116) et (II.123) (ou de son équivalent quand la région centrale est classiquement permise). On vérifie numériquement que ce résultat est très proche de l'expression asymptotique (VI.79).*

Recherche des états de diffusion

Dans la zone centrale du puits, on garde la forme

$$r < b : \qquad R(r) = C_0\, J_0(k_1 r) \qquad \text{avec} \quad k_1^2 = k_0^2 + k^2 \tag{II.134}$$

et on prend dans la zone extérieure :

$$r > b : \qquad R(r) = C_1\, J_0(kr) + C_2\, Y_0(kr). \tag{II.135}$$

Le raccord en $r = b$ impose cette fois pour $k \to 0$:

$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{2}{\pi}\,\ln(\eta k b) + \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{k_0 b}\,\frac{J_0(k_0 b)}{J_0'(k_0 b)} \tag{II.136}$$

soit (figure II.13) :

$$a_2 = b\,\exp\left[-\frac{1}{k_0 b}\,\frac{J_0(k_0 b)}{J_0'(k_0 b)}\right]. \tag{II.137}$$

La longueur de diffusion diverge donc à l'apparition de chaque nouvel état lié puisque $J_0'(k_0 b)$ s'annule en ce point en changeant de signe (théorème de Levinson).

Pour un puits de faible profondeur ($k_0 b \ll 1$), on trouve

$$a_2 = b\,\mathrm{e}^{2/(k_0 b)^2} \tag{II.138}$$

ce qui correspond à une grande longueur de diffusion. En utilisant (II.133), on trouve que $\eta\, a_2 \kappa = 1$, de sorte que $\hbar^2/(2m_r a_2^2)$ est égale (au facteur η^2 près) à la valeur absolue de l'énergie (très faible) de cet état lié.

Chapitre III

Le quasi-ordre à longue portée

Nous abordons maintenant la description d'un gaz à deux dimensions en interaction. Nous allons nous concentrer dans ce cours sur le régime de basse température, où l'état du gaz peut être décrit comme un "quasi-condensat", c'est-à-dire un condensat avec une phase fluctuante (KAGAN, SVISTUNOV et al. 1987 ; POPOV 1987 ; PETROV, GANGARDT et al. 2004).

Nous allons adopter une description du fluide atomique en termes de champ classique, ce qui va amener des simplifications importantes par rapport à la description quantique. Toutefois nous montrerons que cette description en terme de champ classique contient toujours un « élément quantique » essentiel, la *quantification de la circulation de la vitesse*. Cette dernière jouera un rôle central dans le cours suivant, où nous nous pencherons sur la physique des vortex.

Dans le cours d'aujourd'hui, nous allons nous concentrer sur les excitations « douces » du gaz, c'est-à-dire les phonons, qui sont prépondérantes à basse température. Notre résultat essentiel sera de montrer que les interactions répulsives entre atomes, qui sont à la base de cette physique des phonons, induisent un quasi-ordre à longue portée dans le gaz, avec une décroissance algébrique de la fonction de corrélation à un corps $G_1(r)$. Ce résultat est radicalement différent de celui trouvé pour un gaz parfait dans le cours précédent ; nous avions en effet montré que $G_1(r)$ décroissait toujours exponentiellement avec la distance en l'absence d'interactions.

1 L'approche champ classique

1-1 Analogie optique

Les états condensés de Bose ou les états superfluides sont considérés à juste titre comme des états quantiques de la matière. Pour les décrire théoriquement, il faut aller au-delà de la statistique de Boltzmann et prendre en compte l'indiscernabilité des particules. Les statistiques quantiques qui apparaissent alors, Bose–Einstein ou Fermi–Dirac, permettent d'expliquer l'émergence de l'état superfluide ou de l'état supraconducteur quand on tient compte des interactions entre particules.

De ce point de vue, l'approche que nous allons adopter dans ce chapitre et dans le suivant peut sembler paradoxale : nous allons décrire par un champ classique l'assemblée de N particules en interaction. D'où la question immédiate : cette approche « champ classique » n'est-elle pas contradictoire avec le phénomène quantique que l'on cherche à décrire ? Le but de cette première section est de montrer qu'il n'en est rien. Il ne faut pas confondre un traitement classique des particules composant le gaz (ce que nous ne ferons pas) et le traitement de ce même gaz par un champ classique (ce que nous allons faire). En un sens que nous allons bientôt préciser, ces deux concepts – bien qu'ils soient tous deux qualifiés de « classiques »– correspondent à deux cas limites opposés de la distribution de Bose–Einstein.

Une analogie optique peut être utile à ce stade. Le traitement « champ

classique » correspond simplement à la résolution des équations de Maxwell pour les champs électriques $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ et magnétiques $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$. On sait que ce traitement permet de décrire de multiples phénomènes optiques, y compris ceux que l'on a envie de qualifier de « non classiques » comme le fonctionnement d'un laser. Les phénomènes qui échappent à ce traitement en terme de champs classiques sont ceux où la granularité de la lumière joue un rôle important, le phénomène d'émission spontanée par exemple. Une autre difficulté est le *problème du corps noir* : l'énergie du champ classique diverge du fait de la contribution des modes de haute énergie et donc faiblement peuplés. Mais pour les situations où le nombre de photons dans les modes pertinents est grand devant 1, cette restriction n'est pas essentielle.

1-2 Simplification du problème quantique à N corps

L'état d'un système quantique à N corps est décrit par sa fonction d'onde $\Phi(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N)$ ou plus généralement par son opérateur densité $\hat{\rho}$. L'idée du traitement *champ classique* est d'approcher cet état quantique par un mélange statistique d'états caractérisés par un champ $\psi(\boldsymbol{r})$, commun aux N particules et noté :

$$|N:\psi\rangle \text{ ou encore } \psi(\boldsymbol{r}_1)\ldots\psi(\boldsymbol{r}_N), \tag{III.1}$$

et appelé *fonction de Hartree*. Le problème est de trouver une distribution de probabilité $\mathcal{P}[\psi]$ qui reproduise aussi fidèlement que possible l'état Φ ou la matrice densité de départ. Idéalement, on souhaiterait que pour toute quantité physique A décrite par l'observable $\hat{A}$, on ait en utilisant le formalisme de l'intégrale fonctionnelle pour le champ ψ

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{A}\,\hat{\rho}\right) = \int \langle N:\psi|\hat{A}|N:\psi\rangle\,\mathcal{P}[\psi]\,\mathrm{d}[\psi]. \tag{III.2}$$

Comme nous allons le voir ci-dessous sur un exemple simple, il n'est pas toujours possible de trouver une fonction $\mathcal{P}[\psi]$ satisfaisant toutes les propriétés requises pour une distribution de probabilité (positivité, régularité). Il s'agit donc plutôt, pour un problème donné, de trouver la distribution $\mathcal{P}[\psi]$ qui s'approche au mieux de l'état quantique de départ. Cette recherche a fait l'objet de multiples travaux en optique quantique pour les photons, avec les représentations de Wigner, de Glauber–Sudarshan ou de Husimi par exemple (GARDINER & ZOLLER 2004).

L'impossibilité de trouver pour tout $|\Phi\rangle$ une distribution $\mathcal{P}[\psi]$ se montre sur un contre-exemple, en considérant un système de deux particules identiques ayant chacune deux états possibles $\uparrow$ et $\downarrow$. On considère l'état

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:\uparrow;\ 2:\downarrow\rangle + |1:\downarrow;\ 2:\uparrow\rangle\right) \tag{III.3}$$

et on s'intéresse[1] à la probabilité $P_{\uparrow\uparrow}$ de trouver les deux particules dans l'état $\uparrow$ et à la probabilité $P_{\downarrow\downarrow}$ de trouver les deux particules dans l'état $\downarrow$. Ces deux probabilités sont clairement nulles pour l'état $|\Phi\rangle$, alors qu'elles ne le seront pas simultanément si on considère un mélange statistique de fonctions $|\psi\rangle$. En effet, ces fonctions peuvent être paramétrées par exemple par les deux angles θ et φ :

$$|\psi\rangle = \cos\theta\,|\uparrow\rangle + \sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,|\downarrow\rangle. \tag{III.4}$$

et on trouve $P_{\uparrow\uparrow} = \langle\cos^4\theta\rangle$, $P_{\downarrow\downarrow} = \langle\sin^4\theta\rangle$. On a donc

$$P_{\uparrow\uparrow} + P_{\downarrow\downarrow} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\langle\cos(4\theta)\rangle \qquad \rightarrow \qquad P_{\uparrow\uparrow} + P_{\downarrow\downarrow} \geq \frac{1}{2}. \tag{III.5}$$

Ce contre-exemple est instructif. Dans le point de vue de la seconde quantification, la nullité de la probabilité $P_{\uparrow\uparrow}$ vient du fait qu'il faut calculer la valeur moyenne de l'opérateur $\hat{a}_\uparrow^\dagger\hat{a}_\uparrow^\dagger\hat{a}_\uparrow\hat{a}_\uparrow$ qui est nul car on ne peut pas détruire deux particules dans l'état $\uparrow$ pour l'état $|\Phi\rangle$. En revanche si on considère $\hat{a}_\uparrow^\dagger\hat{a}_\uparrow\hat{a}_\uparrow^\dagger\hat{a}_\uparrow$, on trouve une valeur moyenne non nulle et compatible avec une représentation en champ classique. C'est donc parce que le commutateur $[\hat{a}_\uparrow^\dagger,\hat{a}_\uparrow]$ n'est pas nul que ce contre-exemple fonctionne.

Cette remarque nous donne le principal critère de validité pour la représentation en champ classique. Tant qu'on s'intéressera à des modes de population grande devant 1, la différence entre $\hat{a}_\uparrow^\dagger\hat{a}_\uparrow$ et $\hat{a}_\uparrow\hat{a}_\uparrow^\dagger$, c'est-à-dire le commutateur $[\hat{a}_\uparrow,\hat{a}_\uparrow^\dagger] = 1$, ne jouera pas de rôle important et l'approximation sera pertinente. En revanche, pour les modes de population de l'ordre de ou plus petite que 1, les effets de "granularité quantique" seront essentiels et l'approximation ne sera pas valable.

1. Opérateurs associés : $\hat{A} = |1:\uparrow;\ 2:\uparrow\rangle\langle 1:\uparrow;\ 2:\uparrow|$ et $\hat{B} = |1:\downarrow;\ 2:\downarrow\rangle\langle 1:\downarrow;\ 2:\downarrow|$.

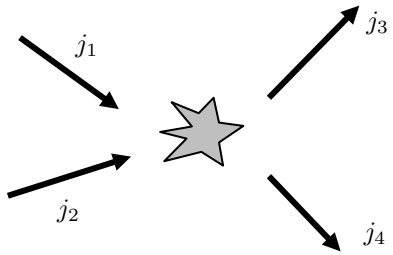


FIGURE III.1. *Collision élastique entre deux particules permettant d'assurer l'atteinte de l'équilibre thermique. La conservation de l'énergie impose $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$.*

1-3 Retour sur les distributions statistiques

Pour bien expliquer en quoi l'approche *champ classique* que nous adoptons ici est radicalement différente du traitement classique des particules à la Boltzmann, il est utile de revenir sur les hypothèses sous-jacentes aux différentes distributions statistiques. Nous allons reprendre ici les grandes lignes d'un argument que nous avons déjà présenté dans le cours 2015-16.

Statistique de Boltzmann. À la base des lois statistiques pour un gaz idéal, on trouve implicitement un bilan d'équilibre entre différents processus de collision. Considérons une paire de particules dans les états j_1 et j_2, d'énergies respectives E_1 et E_2. Ces particules peuvent entrer en collision élastique (figure III.1) et sortir de la collision dans deux autres états, j_3 et j_4, la conservation de l'énergie imposant :

$$j_1 + j_2 \longrightarrow j_3 + j_4 \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4. \tag{III.6}$$

Le processus inverse $j_3 + j_4 \longrightarrow j_1 + j_2$ est également possible et à l'équilibre, la condition de *bilan détaillé* impose l'égalité entre les taux des deux processus :

$$N_{j_1}\, N_{j_2} = N_{j_3}\, N_{j_4} \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4. \tag{III.7}$$

Supposons pour simplifier que la population d'un état j ne dépend que de l'énergie E_j de cet état, $N_j = N(E_j)$, de sorte que la relation de bilan détaillé s'écrit :

$$N(E_1)\, N(E_2) = N(E_3)\, N(E_4) \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4. \tag{III.8}$$

Une analyse mathématique simple (voir cours 2015-16) montre que les fonctions $N(E)$ satisfaisant cette équation sont les exponentielles d'une fonction affine $aE + b$:

$$N(E) = \mathrm{e}^{aE+b} \equiv \mathrm{e}^{(\mu-E)/k_{\mathrm{B}}T} \qquad \text{avec} \quad a = -1/k_{\mathrm{B}}T, \quad b = \mu/k_{\mathrm{B}}T. \tag{III.9}$$

On a retrouvé la statistique de Maxwell–Boltzmann.

Statistique de Bose–Einstein. La différence avec le cas du gaz de Boltzmann est que les probabilités de transition sont augmentées du fait de l'émission stimulée si les états finaux sont déjà occupés. Le bilan détaillé s'écrit alors

$$N_{j_1}\, N_{j_2}\, [1 + N_{j_3}]\, [1 + N_{j_4}] = N_{j_3}\, N_{j_4}\, [1 + N_{j_1}]\, [1 + N_{j_2}], \tag{III.10}$$

qui peut se réécrire

$$\frac{N_{j_1}}{1 + N_{j_1}}\, \frac{N_{j_2}}{1 + N_{j_2}} = \frac{N_{j_3}}{1 + N_{j_3}}\, \frac{N_{j_4}}{1 + N_{j_4}} \tag{III.11}$$

pour tout quadruplet d'états tel que $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$. Faisons là aussi l'hypothèse que N_j ne dépend que de l'énergie E_j de l'état j et posons

$$G(E) = \frac{N(E)}{1 + N(E)} \tag{III.12}$$

qui satisfait donc une équation identique à celle trouvée pour la statistique de Boltzmann

$$G(E_1)\, G(E_2) = G(E_3)\, G(E_4) \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4. \tag{III.13}$$

Les solutions sont $G(E) = \mathrm{e}^{(\mu-E)/k_{\mathrm{B}}T}$, ce qui conduit à

$$N(E) = \frac{1}{\frac{1}{G(E)} - 1} = \frac{1}{\mathrm{e}^{(E-\mu)/k_{\mathrm{B}}T} - 1}. \tag{III.14}$$

Nous retrouvons donc bien la statistique de Bose–Einstein.

Avant de passer au cas d'un champ classique, il est intéressant de distinguer deux régimes pour la statistique de Bose–Einstein, selon les valeurs relatives de $E - \mu$ et $k_{\mathrm{B}}T$ [*cf.* figure III.2] :

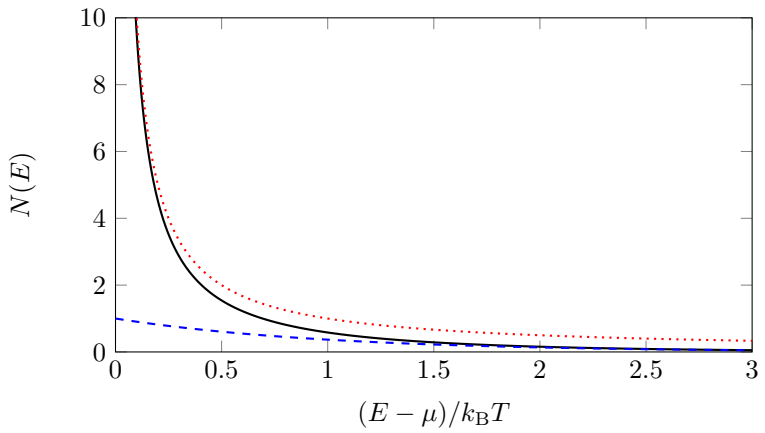


FIGURE III.2. *Ligne continue noire : distribution de Bose-Einstein* $N(E) = 1/[\mathrm{e}^{(E-\mu)/k_{\rm B}T} - 1]$. *Ligne en tirets noirs : distribution de Maxwell-Boltzmann* $N(E) = \mathrm{e}^{-(E-\mu)/k_{\rm B}T}$. *Ligne en pointillés rouges : distribution pour un champ classique* $N(E) = \frac{k_{\rm B}T}{E-\mu}$.

— Si $E - \mu \gg k_{\rm B}T$, l'exponentielle domine au dénominateur de $N(E)$ et on peut négliger le "- 1" devant cette exponentielle. On trouve alors

$$N(E) \approx \mathrm{e}^{-(E-\mu)/k_{\rm B}T}, \tag{III.15}$$

c'est-à-dire le résultat de Boltzmann. Ce résultat est par construction valable si et seulement si $N(E) < 1$, puisqu'on a requis que l'exponentielle soit dominante au dénominateur.

— Dans le cas opposé $E - \mu \ll k_{\rm B}T$, on peut faire un développement limité de l'exponentielle, $\mathrm{e}^{(E-\mu)/k_{\rm B}T} \approx 1 + (E-\mu)/k_{\rm B}T$, similaire à celui fait au chapitre précédent dans le cas du gaz parfait, et on trouve

$$N(E) \approx \frac{k_{\rm B}T}{E-\mu}. \tag{III.16}$$

Ce résultat est par construction valable seulement si $N(E) > 1$.

On dispose donc de deux approximations de la loi de Bose–Einstein, selon que le taux d'occupation d'un état à une particule est petit ou grand devant 1. Dans le premier cas, on retrouve le résultat de particules classiques *à la* Boltzmann. Le deuxième cas, comme nous l'avons déjà indiqué, correspond au domaine de validité de l'approche *champ classique*.

Statistique de champ classique. Comme le champ classique va jouer un rôle central dans la suite, il peut être utile de montrer comment l'approximation (III.16) peut être retrouvé directement à partir de l'équation de bilan détaillé obtenue pour les bosons

$$N_{j_1}\, N_{j_2}\, [1+N_{j_3}]\, [1+N_{j_4}] = N_{j_3}\, N_{j_4}\, [1+N_{j_1}]\, [1+N_{j_2}] \tag{III.17}$$

quand les N_j sont grands devant 1. Si on néglige tous les "1" dans cette équation, on obtient le résultat trivial que $N_{j_1}\, N_{j_2}\, N_{j_3}\, N_{j_4}$ doit être égal à lui-même. Allons donc à l'ordre suivant, ce qui donne

$$N_{j_1}\, N_{j_2}\, [N_{j_3} + N_{j_4}] = N_{j_3}\, N_{j_4}\, [N_{j_1} + N_{j_2}] \tag{III.18}$$

ou encore

$$\frac{1}{N_{j_1}} + \frac{1}{N_{j_2}} = \frac{1}{N_{j_3}} + \frac{1}{N_{j_4}} \quad \text{si} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4. \tag{III.19}$$

La solution de cette équation est simple : la fonction $1/N(E)$ doit être une fonction affine de E et elle peut donc s'écrire

$$\frac{1}{N(E)} = \frac{E-\mu}{k_{\rm B}T} \quad \rightarrow \quad N(E) = \frac{k_{\rm B}T}{E-\mu}. \tag{III.20}$$

Ceci nous redonne bien la limite "haute occupation" de la distribution de Bose–Einstein trouvée plus haut. Ce comportement $N(E) \propto 1/E$ pour les énergies assez grandes sera caractéristique de l'état d'équilibre du champ classique que nous trouverons dans ce chapitre.

Maintenant que nous avons vérifié que l'approximation de champ classique décrivait correctement les modes très peuplés, donc de basse énergie, la pertinence de cette approximation pour le problème traité dans le cours de cette année apparaît clairement. Nous avons vu dans les chapitres qui précèdent que la spécificité du cas bi-dimensionnel, avec le théorème de Mermin–Wagner–Hohenberg, résidait dans le comportement du système aux grandes longueurs d'onde. Or ces longueurs d'onde sont associées aux modes de basse énergie, modes qui seront donc bien décrits par un champ classique. Il en va de même si on cherche à étudier la condensation de Bose–Einstein dans le cas tri-dimensionnel.

1-4 Que reste-t-il de quantique ?

Comme nous l'avons déjà indiqué, l'approche champ classique revient à oublier la granularité de la matière en négligeant le commutateur $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$, où $\hat{a}$ est l'opérateur destruction d'un mode donné. Il reste néanmoins un aspect quantique dans la description de l'état de l'assemblée d'atomes par un champ $\psi(\boldsymbol{r})$, lié à la nature même de ce champ. Pour un gaz à deux dimensions x, y, le champ complexe $\psi(\boldsymbol{r})$ est caractérisé par son amplitude et sa phase : $\psi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\rho(\boldsymbol{r})}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{r})}$. À ce champ, on associe une vitesse en tout point où la phase est définie, c'est-à-dire où la densité est non nulle :

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar}{m}\boldsymbol{\nabla}\theta. \tag{III.21}$$

Comme expliqué par SVISTUNOV, BABAEV et al. (2015), cette équation met en évidence le paramètre pertinent $\hbar/m$ de l'approche champ classique. La masse m d'un atome a perdu sa signification physique puisqu'on a effacé la granularité de la matière. Il en va de même pour $\hbar$ pris de manière individuelle. En revanche, le rapport $\hbar/m$ joue un rôle central en reliant le champ ψ au flux de matière observable.

Une fois établi ce point, l'aspect quantique qui subsiste est clair. Il s'agit de *la quantification de la circulation de la vitesse* sur n'importe quel contour fermé ne passant pas par un point où $\rho(\boldsymbol{r})$ s'annule (figure III.3) :

$$\oint \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = n\frac{2\pi\hbar}{m}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{III.22}$$

Cette quantification découle directement du fait que la vitesse est proportionnelle au gradient d'une phase. Elle est essentielle pour faire émerger la notion de défauts topologiques, les vortex, qui seront eux-mêmes les briques élémentaires du mécanisme BKT.

2 Fonctionnelle de Gross-Pitaevskii

2-1 De l'hamiltonien quantique au champ classique

Nous considérons ici un fluide composé de particules identiques (bosons) avec une interaction binaire décrite par le potentiel $U(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$. Ces

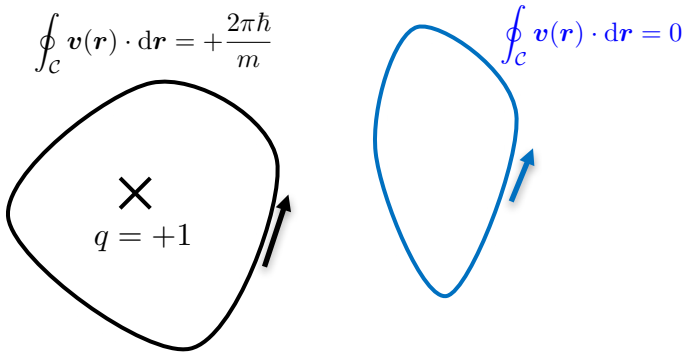


FIGURE III.3. *Quantification de la circulation de la vitesse $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar}{m}\boldsymbol{\nabla}\theta$ associée au champ classique $\psi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\rho(\boldsymbol{r})}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{r})}$. La valeur de la circulation ne peut changer que si le contour $\mathcal{C}$ passe sur un vortex, c'est-à-dire un point où $\rho(\boldsymbol{r})$ s'annule.*

particules sont par ailleurs piégées par le potentiel extérieur

$$V_{\mathrm{trap}}^{(3\mathrm{D})}(\boldsymbol{r}) = V_{\mathrm{trap}}^{(1\mathrm{D})}(z) + V_{\mathrm{trap}}^{(2\mathrm{D})}(x, y) \tag{III.23}$$

qui est responsable

— du confinement fort le long de l'axe z, qui gèle le mouvement correspondant et rend ainsi le gaz bi-dimensionnel.

— d'un confinement plus faible dans le plan xy, par exemple sous forme d'un potentiel harmonique ou d'une boîte de taille $L \times L$. Dans ce chapitre, nous nous placerons dans le cas de la boîte et nous prendrons des conditions aux limites périodiques dans le plan xy.

L'hamiltonien du gaz s'écrit dans le formalisme de la première quantification :

$$1^{\text{ère}}\text{ quantif. :} \quad \hat{H} = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\hat{\boldsymbol{p}}_j^2}{2m} + V_{\mathrm{trap}}^{(3\mathrm{D})}(\hat{\boldsymbol{r}}_j)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} U(\hat{\boldsymbol{r}}_i - \hat{\boldsymbol{r}}_j). \tag{III.24}$$

On peut également l'écrire en formalisme de seconde quantification, en introduisant l'opérateur $\hat{\Psi}(\boldsymbol{r})$, qui détruit une particule au point $\boldsymbol{r}$ et son

hermitique conjugué $\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r})$ qui crée une particule en ce point :

$$2^{\text{ème}}\text{ quantif. :}\quad \hat{H} = \int \left(\frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\nabla}\hat{\Psi}(\boldsymbol{r}) + \hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r})V_{\text{trap}}^{(3\text{D})}(\boldsymbol{r})\hat{\Psi}(\boldsymbol{r})\right)\mathrm{d}^3r + \frac{1}{2}\iint \hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r}')\,U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\hat{\Psi}(\boldsymbol{r}')\hat{\Psi}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3r'.$$

Le traitement exact de cet hamiltonien est compliqué dès que le potentiel d'interaction entre atomes U est non nul. A deux et trois dimensions, il n'est par exemple pas possible de remplacer simplement ce potentiel par une interaction de contact $U(\boldsymbol{r}) = U_0\ \delta(\boldsymbol{r})$ car cela conduit à des incohérences sur le plan mathématique. En revanche, cela ne pose pas de problème dans le formalisme de champ classique que nous avons décrit au premier paragraphe et que nous allons maintenant utiliser.

Comme expliqué plus haut, une méthode simple pour aborder le problème à N corps bosonique (quelle que soit la dimensionnalité) consiste à prendre pour classe de fonctions possibles l'*ansatz* de Hartree :

$$\Phi(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N) \propto \phi(\boldsymbol{r}_1)\ldots\phi(\boldsymbol{r}_N), \tag{III.25}$$

la fonction ϕ étant normée ici par le nombre de particules [2] :

$$\int |\phi(\boldsymbol{r})|^2\,\mathrm{d}^3r = N. \tag{III.26}$$

Cet *ansatz* est bien sûr inspiré du concept de condensation de Bose–Einstein, puisqu'on place toutes les particules dans le même état. Mais la fonction ϕ ne correspond pas ici à l'état d'énergie minimal ; elle fournit simplement un échantillonnage possible du fluide à un instant donné. Dans ce qui va suivre, cette fonction aura sa dynamique propre, avec notamment des fluctuations d'amplitude et de phase qui joueront un rôle important. Par l'intermédiaire de ces fluctuations, on pourra assigner une température au fluide et mettre en évidence la transition de phase recherchée.

L'énergie $E(\phi)$ associée à une fonction ϕ donnée se calcule à partir de

2. Dans le cours 2015-16, nous avions normalisé ϕ à l'unité.

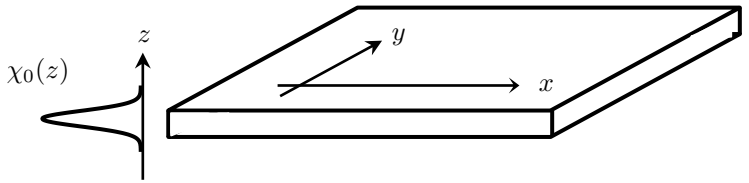


FIGURE III.4. *Fonction d'onde $\chi_0(z)$ correspondant au gel du mouvement dans la direction z.*

$\langle\Phi|\hat{H}|\Phi\rangle$ en y injectant l'ansatz de Hartree :

$$E(\phi) = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m}|\boldsymbol{\nabla}\phi|^2 + V_{\text{trap}}^{(3D)}(\boldsymbol{r})|\phi(\boldsymbol{r})|^2\right)\mathrm{d}^3r + \frac{1}{2}\iint U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,|\phi(\boldsymbol{r})|^2\,|\phi(\boldsymbol{r}')|^2\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3r' \tag{III.27}$$

où l'on a pris $N-1\approx N$.

Dans cette approche "champ classique", il n'y a pas de problème pour modéliser l'interaction entre atomes par une interaction de contact

$$U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = g\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad \text{avec} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \tag{III.28}$$

où a est la longueur de diffusion associée au potentiel U initial. La fonctionnelle d'énergie (toujours à 3D pour l'instant) s'écrit donc :

$$E(\phi) = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m}|\boldsymbol{\nabla}\phi|^2 + V_{\text{trap}}^{(3\text{D})}(\boldsymbol{r})|\phi(\boldsymbol{r})|^2 + \frac{g}{2}|\phi(\boldsymbol{r})|^4\right)\mathrm{d}^3r. \tag{III.29}$$

2-2 Factorisation du mouvement "gelé"

Il nous reste à prendre en compte le fait que le mouvement selon la dimension z est gelé par le potentiel fortement confinant le long de cet axe (figure III.4). Nous allons donc faire un *ansatz* supplémentaire, qui consiste

à écrire la fonction $\phi(\boldsymbol{r})$ sous la forme factorisée :

$$\phi(x,y,z) = \psi(x,y)\ \chi_0(z) \tag{III.30}$$

où $\chi_0(z)$ est l'état fondamental du mouvement à une particule selon z :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\chi_0}{\mathrm{d}z^2} + V_{\mathrm{trap}}^{(1\mathrm{D})}(z)\ \chi_0(z) = \epsilon_0\ \chi_0(z), \tag{III.31}$$

que nous prendrons normalisé à l'unité :

$$\int |\chi_0(z)|^2\ \mathrm{d}z = 1. \tag{III.32}$$

Cette hypothèse de factorisation est valable si l'énergie associée aux interactions entre particules et l'énergie thermique $k_{\mathrm{B}}T$ sont toutes deux petites devant l'écart entre l'énergie du fondamental de ce mouvement selon z et celle de son premier état excité.

À une constante additive près sans importance ici, on arrive alors à l'énergie associée à $\psi(x,y)$:

$$E(\psi) = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m}|\boldsymbol{\nabla}\psi|^2 + V_{\mathrm{trap}}^{(2\mathrm{D})}(\boldsymbol{r})|\psi(\boldsymbol{r})|^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\ \tilde{g}\ |\psi(\boldsymbol{r})|^4\right)\ \mathrm{d}^2r, \tag{III.33}$$

où l'on a introduit le nombre sans dimension $\tilde{g}$ qui caractérise la force des interactions dans ce problème 2D :

$$\tilde{g} = 4\pi\, a \int |\chi_0(z)|^4\ \mathrm{d}z. \tag{III.34}$$

Pour un confinement harmonique de pulsation ω_z le long de l'axe z, l'état χ_0 s'écrit :

$$\chi_0(z) = \frac{1}{(\pi a_{\mathrm{oh}}^2)^{1/4}}\mathrm{e}^{-z^2/(2a_{\mathrm{oh}}^2)} \qquad \text{avec} \quad a_{\mathrm{oh}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}}, \tag{III.35}$$

ce qui conduit à

$$\tilde{g} = \sqrt{8\pi}\ \frac{a}{a_{\mathrm{oh}}}. \tag{III.36}$$

On retrouve le paramètre sans dimension caractéristique des interactions à deux dimensions que nous avions introduit au chapitre précédent.

À ce stade, il est intéressant d'écrire l'équation du mouvement du champ $\psi(\boldsymbol{r})$, c'est-à-dire l'équation de Gross–Pitaevskii dépendante du temps [3] . En prenant un piégeage harmonique isotrope de pulsation ω dans le plan xy, on arrive à :

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\ \boldsymbol{\nabla}^2\psi\ +\ \frac{m}{2\hbar}\omega^2r^2\psi\ +\ \frac{\hbar}{m}\,\tilde{g}\,|\psi|^2\psi \tag{III.39}$$

Comme annoncé plus haut, on peut vérifier sur cette équation que le paramètre pertinent est $\hbar/m$, conjointement avec la pulsation du piège ω et le paramètre d'interaction $\tilde{g}$. Par ailleurs, on peut vérifier explicitement sur cette équation que le nombre total de particules $N(\psi) = \int|\psi|^2$ ainsi que l'énergie totale $E(\psi)$ sont des quantités conservées.

Pour simplifier, considérons désormais le cas d'un gaz confiné dans une boîte de taille $L \times L$ avec des conditions aux limites périodiques. L'énergie totale (III.33) est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie d'interaction :

$$E_{\mathrm{cin}} = \frac{\hbar^2}{2m}\int|\boldsymbol{\nabla}\psi|^2\ \mathrm{d}^2r \qquad\qquad E_{\mathrm{int}} = \frac{\hbar^2}{2m}\ \tilde{g}\int\rho^2(\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}^2r \tag{III.40}$$

où l'on a introduit la densité surfacique au point $\boldsymbol{r}$

$$\rho(\boldsymbol{r}) = |\psi(\boldsymbol{r})|^2 \qquad \text{avec} \quad \int\rho(\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}^2r = N. \tag{III.41}$$

L'état fondamental du système correspond à la fonction d'onde uniforme :

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\rho} \qquad \text{avec} \quad \rho = \frac{N}{L^2}, \tag{III.42}$$

avec uniquement l'énergie d'interaction qui est non nulle :

$$E_{\mathrm{int}} = \frac{\hbar^2}{2m}\ \tilde{g}\ \rho N. \tag{III.43}$$

3. Cette équation s'obtient par exemple en utilisant l'approche lagrangienne, avec [*cf.* cours 2015-16]

$$L(\psi) = \int\mathcal{L}_{\mathrm{dyn}}[\psi(\boldsymbol{r})]\ \mathrm{d}^2r - E(\psi) \tag{III.37}$$

où la partie dynamique du Lagrangien s'écrit, à une dérivée totale par rapport au temps près :

$$\mathcal{L}_{\mathrm{dyn}}[\psi(\boldsymbol{r})] = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\left(\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi\right). \tag{III.38}$$

Pour acquérir une intuition de la valeur de $\tilde{g}$ correspondant à une "interaction forte", on peut comparer l'énergie d'interaction du fondamental à l'énergie cinétique du gaz si on dispose les N particules sur les N premiers états d'énergie de la boîte, allant de l'énergie $E = 0$ à l'énergie $E_{\max}$ (un état "fermionisé" en quelque sorte [4]). En utilisant la densité d'états $D(E)$ (constante) déterminée au chapitre 2, on commence par déterminer la valeur de $E_{\max}$:

$$N = \int_0^{E_{\max}} D(E)\,\mathrm{d}E \qquad \text{avec} \quad D(E) = \frac{mL^2}{2\pi\hbar^2} \qquad \Longrightarrow \quad E_{\max} = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\,\rho. \tag{III.44}$$

On en déduit l'énergie cinétique de ce gaz fermionisé :

$$E_{\text{cin, fermion.}} = \int_0^{E_{\max}} E\,D(E)\,\mathrm{d}E = \frac{\pi\hbar^2}{m}\,\rho N. \tag{III.45}$$

Selon ce critère, bien sûr quelque peu arbitraire, on voit qu'une interaction "forte" correspond à

$$E_{\text{int}} \sim E_{\text{cin, fermion.}} \qquad \longrightarrow \qquad \tilde{g} \sim 2\pi. \tag{III.46}$$

Pour une telle valeur de $\tilde{g}$, l'approche champ classique développée ici ne s'appliquera plus car les corrélations entre particules créées par les interactions sont trop fortes : elles sont en effet susceptibles d'empêcher toute accumulation de plusieurs particules dans le même état quantique. Dans les expériences menées avec des atomes froids, la valeur de $\tilde{g}$ est notablement inférieure à 1 ; pour des atomes de rubidium confinés selon z par un potentiel de fréquence $\omega_z/(2\pi) = 10\,\text{kHz}$, on trouve ainsi $\tilde{g} = 0.24$.

2-3 Coupure ultra-violette et longueur de cicatrisation

Comme toute théorie de champ classique, la modélisation du fluide en terme d'une fonction d'onde $\psi(\boldsymbol{r})$ souffre d'un problème de divergence ultra-violette. C'est le fameux problème du "corps noir" : Il y a des modes de vecteur d'onde $\boldsymbol{q}$ arbitrairement élevé, et l'équipartition de l'énergie appliquée à chacun de ces modes conduit à un divergence des quantités physiques calculées en sommant sur $\boldsymbol{q}$. En effet, comme nous l'avons vu en (III.20), la population de ces modes $N(E)$ décroît "mollement" comme $1/E_{\boldsymbol{q}}$, et cette décroissance douce associée à la densité d'états constante $D(E)$ (pour des particules libres) fait diverger l'intégrale $\int E\ N(E)\ D(E)\ \mathrm{d}E$. Ce problème ne se résout de manière exacte qu'en quantifiant le champ, ce qui introduit une coupure effective pour les modes de fréquence $\omega_{\boldsymbol{q}}$ supérieure à $k_{\mathrm{B}}T/\hbar$ [plus précisément en introduisant une décroissance exponentielle pour $N(E)$, *cf.* (III.15)].

En pratique, cette divergence ne sera pas une difficulté majeure pour nous : nous nous intéressons au comportement à grande distance des fonctions de corrélation de notre fluide, qui sont associées à des petits vecteurs d'onde. La connaissance précise dans l'ultra-violet des quantités physiques intéressantes ne sera donc pas nécessaire. Pour éliminer les divergences, il sera suffisant d'établir une coupure à un nombre d'onde $\boldsymbol{q}_{\text{coup.}}$ donné par

$$q_{\text{coup.}} \sim \frac{1}{\lambda_T} \qquad \leftrightarrow \qquad \hbar\omega_{\text{coup.}} \approx \frac{\hbar^2 q_{\text{coup.}}}{2m} \sim k_{\mathrm{B}}T, \tag{III.47}$$

au moins dans le régime "habituel" où $k_{\mathrm{B}}T$ est plus grande que l'énergie d'interaction par particule E_{int}/N.

Une connaissance précise du comportement du fluide sur des échelles de longueur plus courtes que λ_T nécessiterait un traitement au-delà de notre approche classique, mais elle ne sera pas nécessaire pour étudier les phases macroscopiques (superfluides ou non) susceptibles d'apparaître. Notons qu'une "méthode semi-classique" ne nécessitant pas l'introduction d'une coupure UV a été proposée et appliquée au cas du gaz de Bose à deux dimensions par GIORGETTI, CARUSOTTO et al. (2007). Par ailleurs, pour obtenir une théorie plus complète au moins dans le régime où les interactions ne sont pas fortes, on peut raccorder la théorie de champ classique pour $q < q_{\text{coup.}}$ à la théorie quantique du gaz parfait pour $q > q_{\text{coup.}}$ [voir par exemple PROKOF'EV & SVISTUNOV (2002)].

La longueur λ_T n'apparaît donc pas en tant que telle dans le traitement champ classique, sinon sous la forme d'une coupure « courte distance » mise à la main. On pouvait s'y attendre *a priori* puisque $\lambda_T \propto \hbar/\sqrt{m}$ n'est pas fonction de notre seul paramètre $\hbar/m$. L'autre distance caractéristique d'un gaz quantique est la distance de cicatrisation qui peut quant à elle être accessible dans cette approche champ classique. Rappelons que la distance

4. C'est le type d'état qui apparaît dans l'effet Hall quantique (état de Laughlin) ou dans des problèmes 1D (état de Tonks-Girardeau).

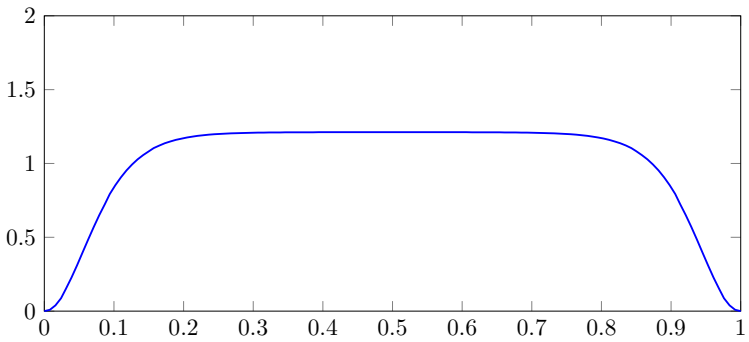


FIGURE III.5. *La longueur de cicatrisation est la distance caractéristique nécessaire pour que la densité reprenne sa valeur moyenne, quand on impose à la fonction d'onde de s'annuler en un point donné (ici les deux extrémités du segment).*

de cicatrisation est l'échelle de longueur associée à l'énergie d'interaction par particule :

$$\frac{\hbar^2}{2m\xi^2} = \frac{\hbar^2}{m}\,\tilde{g}\rho \qquad \rightarrow \qquad \xi = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{g}\rho}}. \tag{III.48}$$

Elle donne l'échelle de longueur sur laquelle la densité du fluide reprend sa valeur normale, si on lui impose de s'annuler en un point (figure III.5). Ce point peut être l'emplacement d'une bosse de potentiel ou le centre d'un vortex. Il est intéressant d'évaluer le nombre d'atomes manquants autour de ce point :

$$\delta N \approx \pi\xi^2\rho = \frac{\pi}{2\tilde{g}} \tag{III.49}$$

Plus le paramètre d'interaction $\tilde{g}$ est grand, plus ce nombre manquant est faible. Pour des interactions assez fortes ($\tilde{g} \gtrsim 1$), ce nombre devient inférieur à un atome. On ne peut alors plus détecter ce défaut par une imagerie *in situ* du gaz ; c'est simplement un point où une singularité mathématique se produit.

Comme nous l'avons écrit au paragraphe précédent, le régime habituel des expériences menées avec des gaz atomiques correspond à une énergie d'interaction par particule plus faible que l'énergie thermique $k_{\mathrm{B}}T$, ce qui entraîne [5] :

$$E_{\mathrm{int}}/N \;<\; k_{\mathrm{B}}T \qquad \rightarrow \qquad \xi > \lambda_T, \tag{III.51}$$

ce qui confirme le fait que ξ peut être calculable à partir de la simulation de champ classique alors que λ_T correspond à une distance de coupure, associée à l'énergie de coupure $\sim k_{\mathrm{B}}T$.

2-4 La version "optique non linéaire"

Le formalisme de champ classique développé ci-dessus pour décrire une onde de matière macroscopique s'applique de manière quasi-inchangée à la propagation d'un champ lumineux intense dans un milieu non-linéaire. Ce problème de base en optique a fait l'objet de recherches expérimentales récentes en lien avec la condensation ou la quasi-condensation [citons en particulier SUN, JIA et al. (2012), ainsi qu'une communication privée de Robin Kaiser d'avril 2017].

Notons tout de suite qu'il s'agit d'une problématique différente de celle étudiée à Bonn sur la condensation de photons, et que nous avons abordée au chapitre précédent (KLAERS, SCHMITT et al. 2010). Dans les expériences de Bonn, nous avons vu que l'on gèle le degré de liberté selon z grâce à une cavité Fabry–Perot. Dans ce que nous décrivons ici, le faisceau se propage librement selon l'axe z, cette propagation jouant le rôle du temps dans une équation de Schrödinger effective, décrivant la dynamique du champ dans le plan xy perpendiculaire à l'axe de propagation.

Commençons par l'équation d'onde pour une des composantes $u(\boldsymbol{r},t)$ du vecteur champ électrique ou champ magnétique dans un milieu d'indice n_0. Partant des équations de Maxwell, on peut écrire cette équation sous la forme :

$$\boldsymbol{\nabla}^2 u - \frac{n_0^2}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{III.52}$$

Une catégorie bien connue de solutions est formée par les ondes planes, comme celles se propageant le long de l'axe z, $u(\boldsymbol{r},t) = u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$ avec

5. On a plus précisément

$$\frac{\xi^2}{\lambda_T^2} = \frac{1}{8\pi}\frac{k_{\mathrm{B}}T}{E_{\mathrm{int}}/N}. \tag{III.50}$$

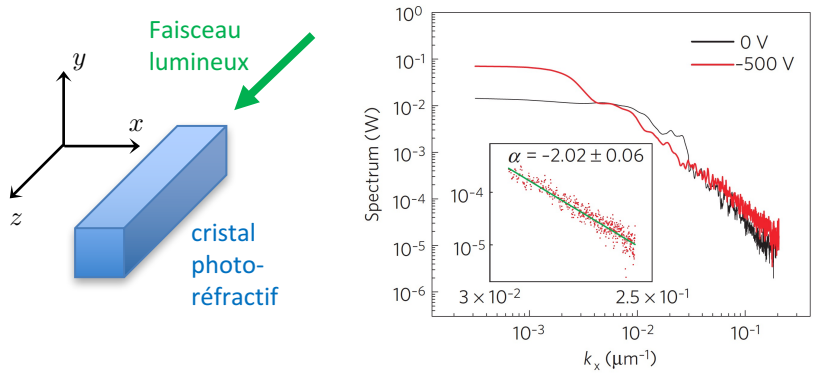


FIGURE III.6. *Principe de la « condensation d'ondes classiques lumineuses » : on envoie un faisceau laser avec un certain désordre en amplitude et en phase dans un cristal photo-réfractif. Pour une longueur d'interaction suffisamment grande, l'évolution non-linéaire du champ lumineux conduit à une distribution quasi-thermique des modes transverses du faisceau lumineux. Cette distribution est caractérisée par une décroissance de la population des modes comme* $1/k_\perp^2$. *Figure extraite de* SUN, JIA *et al. (2012).*

la relation de dispersion $\omega = ck/n_0$. Intéressons-nous à des solutions déduites de ces ondes planes, écrites sous la forme

$$u(\boldsymbol{r},t) = \psi(\boldsymbol{r})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \tag{III.53}$$

où $\psi(\boldsymbol{r})$ est supposée "lentement variable" dans l'espace, c'est-à-dire

$$\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right| \ll k\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|. \tag{III.54}$$

En injectant cette forme pour $u(\boldsymbol{r},t)$ dans l'équation d'onde (III.52) et en négligeant les terme faisant intervenir $\partial^2\psi/\partial z^2$, on arrive à

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{1}{2k}\boldsymbol{\nabla}_\perp^2\psi \tag{III.55}$$

où le laplacien transverse $\boldsymbol{\nabla}_\perp^2$ correspond à l'opérateur $\partial_x^2+\partial_y^2$. Cette équation est formellement identique à l'équation de Schrödinger pour une particule libre à deux dimensions, le temps étant remplacé par la coordonnée z le long de l'axe de propagation. On peut d'ailleurs passer véritablement à une coordonnée temporelle en introduisant $\tau = n_0 z/c$, qui paramètre le temps de propagation pour une distance z donnée. L'équation (III.55) s'écrit alors

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = -\frac{\hbar}{2m_{\mathrm{phot}}}\boldsymbol{\nabla}_\perp^2\psi \tag{III.56}$$

où l'on a introduit, comme au chapitre précédent, la masse effective des photons $m_{\mathrm{phot}} = n_0^2\,\hbar\omega/c^2$.

Pour que l'évolution de ψ soit similaire à celle du champ ψ étudiée dans ce chapitre, on utilise un milieu optiquement non linéaire de sorte que l'indice n_0 doit être remplacé par $n_0 + n_2|\psi|^2/k^2$. Notons que ψ a la dimension de l'inverse d'une longueur pour que $\int|\psi|^2\,\mathrm{d}^2r$ soit sans dimension, de sorte que n_2 est également sans dimension. En injectant cette expression pour l'indice dans (III.52) et en nous limitant au premier terme non nul en n_2, nous arrivons à :

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{1}{2k}\boldsymbol{\nabla}_\perp^2\psi - \frac{n_2}{n_0 k}\,|\psi|^2\psi \tag{III.57}$$

qui a exactement la structure de l'équation de Gross–Pitaevskii (III.39) en l'absence de piège si l'on prend une non-linéarité défocalisante ($n_2 < 0$).

Dans l'expérience de SUN, JIA et al. (2012), on imprime un désordre contrôlée sur le faisceau lumineux à l'entrée du milieu non-linéaire. Lors de la propagation, on peut définir deux quantités conservées indépendantes, l'équivalent du nombre de particules N donné par l'intégrale de $|\psi|^2$ et l'énergie E donnée par la fonctionnelle de Gross–Pitaevskii. Si la longueur d'interaction le long de l'axe z est suffisante, on réalise l'équivalent d'un ensemble microcanonique, la configuration du champ en sortie étant un échantillonnage de cet ensemble pour le couple (N,E) choisi. Plus le désordre initial est important, plus cette énergie – et donc la température – sont grandes.

Nous avons vu au début de ce chapitre que pour un champ classique en interaction faible, l'équilibre thermodynamique correspond à une population des modes de vecteur d'onde $k_\perp$ variant comme $T/[E(k_\perp) - \mu]$ avec dans l'approximation paraxiale $E(k_\perp) \propto k_\perp^2$ (CONNAUGHTON, JOSSERAND et al. 2005 ; PICOZZI, GARNIER et al. 2014). Rappelons que cette distribution n'est valable que sur un intervalle fini de valeurs de $k_\perp$, en

raison de la divergence ultra-violette propre à toute théorie de champ classique. En pratique, cette loi en $k_\perp^{-2}$ est vérifiée expérimentalement sur plus d'une décade [figure III.6 tirée de SUN, JIA et al. (2012)]. Par ailleurs, les effets de taille finie dans cette expérience conduisent à une population macroscopique dans le mode central $\boldsymbol{k}_\perp = 0$ (d'où la terminologie "condensation d'ondes lumineuses").

3 Fluctuations de phase et quasi-ordre

À température strictement nulle, un gaz de Bose 2D en interaction relativement faible a pour énergie la fonctionnelle (III.33) et est donc condensé : il est décrit par la fonction d'onde uniforme dans l'espace $\psi = \sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $\rho = N/L^2$ et θ sont eux aussi uniformes, θ pouvant être choisie arbitrairement entre 0 et 2π (invariance de jauge). Son énergie cinétique est nulle et son énergie d'interaction est :

$$E_{\mathrm{cin}} = 0 \qquad E_{\mathrm{int}} = \frac{\hbar^2}{2m}\,\tilde{g}\,L^2\,\rho^2. \tag{III.58}$$

À température non nulle, $\rho(\boldsymbol{r})$ et $\theta(\boldsymbol{r})$ seront des fonctions variant dans l'espace sous l'effet des fluctuations thermiques. La caractérisation de ces fluctuations en termes de fonctions de corrélations entre deux point $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r}'$ permet de préciser le type d'ordre présent dans le fluide.

3-1 Suppression des fluctuations de densité

Un point important dans ce qui va suivre, au moins pour la région de basse température, est la réduction des fluctuations de densité par rapport au cas du gaz parfait, du fait des interactions répulsives entre particules. Le lien entre considérations énergétiques et réduction de ces fluctuations est immédiat si l'on remarque que l'énergie d'interaction (III.40) peut s'écrire

$$E_{\mathrm{int}} = \frac{\hbar^2}{2m}\,\tilde{g}\,L^2\,\langle\rho^2(\boldsymbol{r})\rangle \tag{III.59}$$

de sorte que le surcoût en énergie d'interaction par rapport au gaz à température nulle est directement proportionnel aux fluctuations de densité caractérisées par (COHEN-TANNOUDJI & ROBILLIARD 2001)

$$(\Delta\rho)^2 = \langle\rho^2(\boldsymbol{r})\rangle - \rho^2 = [g_2(0) - 1]\;\rho^2, \tag{III.60}$$

où $g_2(\boldsymbol{r}) = \langle\rho(\boldsymbol{r})\rho(0)\rangle/\rho^2$ est la fonction de corrélation densité-densité. Pour un gaz décrit par un champ classique $\psi(\boldsymbol{r})$, la quantité $(\Delta\rho)^2$ est toujours positive, c'est-à-dire $g_2(0) \geq 1$, du fait de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$L^2 \int \rho^2(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^2r \geq \left(\int \rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^2r\right)^2 \tag{III.61}$$

de sorte que l'énergie d'interaction est toujours plus grande en présence de fluctuations thermiques qu'à température nulle.

Pour un gaz de Bose idéal en l'absence de condensat, ce qui est le cas à 2D si $T \neq 0$, on a toujours $g_2(0) = 2$. Ce résultat s'obtient en exprimant l'opérateur $\hat{\rho}(\boldsymbol{r})$ en fonction de l'opérateur champ, développé sur la base des ondes planes à 2D :

$$\hat{\rho}(\boldsymbol{r}) = \hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\hat{\Psi}(\boldsymbol{r}) \qquad \text{avec} \quad \hat{\Psi}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{L}\sum_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}\hat{a}_{\boldsymbol{p}}. \tag{III.62}$$

En choisissant par exemple le point $\boldsymbol{r} = 0$, on obtient :

$$\langle\hat{\rho}^2(0)\rangle = \frac{1}{L^4}\sum_{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4} \langle\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{p}_1}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{p}_2}\hat{a}_{\boldsymbol{p}_3}\hat{a}_{\boldsymbol{p}_4}\rangle. \tag{III.63}$$

S'il n'y a pas d'état macroscopiquement peuplé, on peut négliger dans cette somme la contribution des termes où $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_4$. Pour les autres termes, en utilisant le fait que l'opérateur densité à l'équilibre thermique est diagonal dans la base des $\boldsymbol{p}$, on remarque qu'un terme du type $\langle\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{p}_1}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{p}_2}\hat{a}_{\boldsymbol{p}_3}\hat{a}_{\boldsymbol{p}_4}\rangle$ est non nul si et seulement si

$$\{\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_3 \text{ et } \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_4\} \qquad \text{ou} \qquad \{\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_4 \text{ et } \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_3\}, \tag{III.64}$$

chacune des deux options ayant la même contribution. On a donc :

$$\langle\hat{\rho}^2(0)\rangle \approx 2\sum_{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2} \langle\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{p}_1}\hat{a}_{\boldsymbol{p}_1}\rangle\,\langle\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{p}_2}\hat{a}_{\boldsymbol{p}_2}\rangle = 2\left(\langle\hat{\rho}(0)\rangle\right)^2. \tag{III.65}$$

Pour un gaz en interaction en revanche, l'énergie E_{int} finit toujours par dominer si on va à suffisamment basse température. L'énergie d'interaction

par particule, qui est de l'ordre de $\frac{\hbar^2}{2m}\,\tilde{g}\,\rho$, devient en effet toujours plus grande que $k_{\rm B}T$ si T est suffisamment faible. Plus précisément :

$$\frac{\frac{\hbar^2}{2m}\,\tilde{g}\,\rho}{k_{\rm B}T} = \frac{\tilde{g}}{4\pi}\,\mathcal{D} \tag{III.66}$$

où l'on a introduit la densité dans l'espace des phases

$$\mathcal{D} = \rho\lambda_T^2 \qquad \text{avec} \quad \lambda_T = \frac{\hbar\sqrt{2\pi}}{\sqrt{mk_{\rm B}T}}. \tag{III.67}$$

Par conséquent, pour une densité dans l'espace des phases telle que

$$\mathcal{D} \gg \frac{4\pi}{\tilde{g}}, \tag{III.68}$$

toute modification significative de la densité par rapport à sa valeur moyenne, conduisant à une valeur de $g_2(0)$ notablement supérieure à 1, aura un coût prohibitif comparé à $k_{\rm B}T$.

3-2 Hamiltonien effectif à basse énergie

Dans la limite où les fluctuations de densité peuvent être négligées, le gradient de la fonction d'onde $\psi(\boldsymbol{r})$ qui intervient dans le terme d'énergie cinétique s'écrit

$$\boldsymbol{\nabla}\psi = \boldsymbol{\nabla}\left(\sqrt{\rho(\boldsymbol{r})}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{r})}\right) \approx \sqrt{\rho}\;(\mathrm{i}\,\boldsymbol{\nabla}\theta)\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{r})} \tag{III.69}$$

de sorte que le terme d'énergie cinétique devient

$$E_{\rm cin} \approx \frac{\hbar^2}{2m}\,\rho\int(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2\;\mathrm{d}^2r. \tag{III.70}$$

Cette expression pour l'énergie traduit la rigidité de phase du système : les excitations pertinentes sont les fluctuations de phase et leur énergie est liée au prix à payer pour "tordre" cette phase entre deux zones de l'échantillon.

Nous avons montré dans le cours 2015-16 que cette notion de rigidité en phase peut être utilisée pour définir de manière rigoureuse la densité superfluide dans un gaz homogène. De ce point de vue, l'expression (III.70) montre qu'implicitement, un système 2D décrit par la fonctionnelle d'énergie de Gross–Pitaevskii est superfluide si on néglige totalement ses fluctuations de densité. De plus, sa densité superfluide ρ_s – c'est-à-dire le coefficient devant $(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2$ – est égale à la densité totale ρ.

Ce point de vue consistant à utiliser (III.70) et conduisant à $\rho_s = \rho$ est certainement valable à très basse température, mais ne rend pas compte de la diminution observée de la densité superfluide quand la température augmente. Pour rendre compte de manière rigoureuse de cette diminution, il faut

— traiter de manière couplée les fluctuations de phase et de densité, ce que nous ferons par la méthode de Bogoliubov un peu plus loin ;

— prendre en compte les vortex qui, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, peuvent exister dans la partie superfluide sous forme de paires de tourbillons de signes opposés.

Mais on peut également procéder de manière phénoménologique, en introduisant "à la main" une densité superfluide ρ_s, qui dépend de la température, et qui conduit à l'énergie

$$E_{\rm cin} \approx \frac{\hbar^2}{2m}\,\rho_s(T)\int(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2\;\mathrm{d}^2r. \tag{III.71}$$

Cette renormalisation de ρ en ρ_s est un moyen simple pour absorber toutes les fluctuations thermiques non essentielles, y compris les fluctuations de densité sur des courtes distances, pour se concentrer sur la physique à longue distance et le quasi-ordre à longue portée susceptible d'apparaître.

Il doit être bien clair que l'énergie $E_{\rm cin}$ donnée en (III.71) ne peut pas être considérée comme un hamiltonien microscopique, ne serait-ce que parce qu'elle dépend de la température via ρ_s. Il s'agit en fait de l'accroissement de l'énergie libre du gaz si on impose le courant superfluide $(\hbar/m)\;\boldsymbol{\nabla}\theta$ [voir par exemple la discussion en appendice de l'article de BLOCH, DALIBARD et al. 2008].

3-3 Analyse de Fourier des fluctuations de phase

Partant de l'expression phénoménologique (III.71) pour l'énergie associée à une fluctuation de phase $\theta(\boldsymbol{r})$, nous voulons évaluer la fonction $G_1(r)$

décrivant les corrélations entre deux points du système :

$$G_1(\boldsymbol{r}) = \langle \psi(\boldsymbol{r})\, \psi^*(0) \rangle = \rho\, \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\theta(\boldsymbol{r})-\theta(0)]} \rangle. \tag{III.72}$$

Nous devons donc dans un premier temps déterminer les fluctuations de $\theta(\boldsymbol{r})-\theta(0)$, ce que nous allons faire à partir d'un développement en série de Fourier de la fonction $\theta(\boldsymbol{r})$ et de l'utilisation du théorème d'équipartition de l'énergie.

Commençons par écrire la phase $\theta(\boldsymbol{r})$ sous la forme

$$\theta(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{q}} c_{\boldsymbol{q}}\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{III.73}$$

où la réalité de θ entraîne

$$c^*_{\boldsymbol{q}} = c_{-\boldsymbol{q}}. \tag{III.74}$$

Notons qu'un tel développement, si naturel qu'il paraisse compte tenu des conditions aux limites périodiques, n'est pas anodin : il ne rend pas compte de la périodicité de la fonction $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ quand $\theta \to \theta + 2\pi$. Ce n'est pas un problème si on se limite à des situations où θ varie de manière douce et régulière sur l'échantillon, mais il néglige d'emblée les vortex, qui sont des points autour desquels la phase varie de 0 à π sur des distances arbitrairement courtes.

Injectons le développement (IV.31) dans l'énergie (III.71) :

$$E_{\mathrm{cin}} = \rho_s L^2 \sum_{\boldsymbol{q}} \frac{\hbar^2 q^2}{2m}\, |c_{\boldsymbol{q}}|^2. \tag{III.75}$$

Pour tenir compte du fait que les modes $\boldsymbol{q}$ et $-\boldsymbol{q}$ sont liés par (III.74), nous pouvons restreindre la somme sur $\boldsymbol{q}$ aux $q_x > 0$ et l'écrire :

$$E_{\mathrm{cin}} = \sum_{\boldsymbol{q}, q_x>0} \epsilon_{\boldsymbol{q}}\, |c_{\boldsymbol{q}}|^2 \qquad \text{avec} \quad \epsilon_{\boldsymbol{q}} = \rho_s L^2\, \frac{\hbar^2 q^2}{m}. \tag{III.76}$$

La probabilité d'occurence d'une configuration correspondant à un tirage $\{c_{\boldsymbol{q}}\}$ donné est donnée par la loi de Boltzmann :

$$\mathcal{P}[\{c_{\boldsymbol{q}}\}] \propto \prod_{\boldsymbol{q}} \mathrm{e}^{-\epsilon_{\boldsymbol{q}} |c_{\boldsymbol{q}}|^2 / k_{\mathrm{B}} T}. \tag{III.77}$$

Les $c_{\boldsymbol{q}}$ avec $q_x > 0$ sont donc des variables gaussiennes indépendantes complexes. En les décomposant en partie réelle et imaginaire,

$$c_{\boldsymbol{q}} = c'_{\boldsymbol{q}} + \mathrm{i} c''_{\boldsymbol{q}} \qquad \text{avec} \quad c'_{\boldsymbol{q}} = c'_{-\boldsymbol{q}} \quad \text{et} \quad c''_{\boldsymbol{q}} = -c''_{-\boldsymbol{q}} \tag{III.78}$$

on trouve à l'équilibre thermique :

$$\langle (c'_{\boldsymbol{q}})^2 \rangle = \langle (c''_{\boldsymbol{q}})^2 \rangle = \frac{k_{\mathrm{B}} T}{2\epsilon_{\boldsymbol{q}}}. \tag{III.79}$$

Notons que l'on trouve ici que la population moyenne $\langle |c_{\boldsymbol{q}}|^2 \rangle$ d'un mode $\boldsymbol{q}$ donné est égale à $k_{\mathrm{B}} T/\epsilon_q$, comme nous l'avions annoncé en (III.20) en posant les bases de la théorie de champ classique.

3-4 Corrélations en phase à l'équilibre thermique

Considérons maintenant la différence de phase $\theta(\boldsymbol{r}) - \theta(0)$ qui apparaît dans (III.72). On a :

$$\begin{aligned} \theta(\boldsymbol{r}) - \theta(0) &= \sum_{\boldsymbol{q}} \left(c'_{\boldsymbol{q}} + \mathrm{i} c''_{\boldsymbol{q}}\right) \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} - 1\right) \\ &= -2 \sum_{\boldsymbol{q}, q_x>0} \left\{ c'_{\boldsymbol{q}} \left[1 - \cos(\boldsymbol{q}\cdot r)\right] + c''_{\boldsymbol{q}} \sin(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}) \right\} \end{aligned} \tag{III.80}$$

ce qui donne quand on prend la moyenne du carré de cette expression à l'équilibre thermique

$$\begin{aligned} \langle [\theta(\boldsymbol{r}) - \theta(0)]^2 \rangle &= 4 \sum_{\boldsymbol{q}, q_x>0} \langle (c'_{\boldsymbol{q}})^2 \rangle \left[1 - \cos(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r})\right]^2 + \langle (c''_{\boldsymbol{q}})^2 \rangle \sin^2(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}) \\ &= 4 \sum_{\boldsymbol{q}, q_x>0} \frac{k_{\mathrm{B}} T}{\epsilon_{\boldsymbol{q}}} \left[1 - \cos(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r})\right] \\ &= 2 \sum_{\boldsymbol{q}} \frac{k_{\mathrm{B}} T}{\epsilon_{\boldsymbol{q}}} \left[1 - \cos(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r})\right] \end{aligned} \tag{III.81}$$

où l'on relâché la contrainte $q_x > 0$ dans la dernière ligne. En transformant cette somme discrète en intégrale, on arrive à

$$\begin{aligned} \langle [\theta(\boldsymbol{r}) - \theta(0)]^2 \rangle &= 2\, \frac{L^2}{4\pi^2} \int \frac{k_{\mathrm{B}} T}{\epsilon(\boldsymbol{q})} \left[1 - \cos(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r})\right]\, \mathrm{d}^2 q \\ &= \frac{1}{\pi}\, \frac{1}{\rho_s \lambda_T^2} \int \frac{1 - \cos(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r})}{q^2}\, \mathrm{d}^2 q. \end{aligned} \tag{III.82}$$

La fonction

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1-\cos(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r})}{q^2}\, \mathrm{d}^2q \tag{III.83}$$

peut être estimée en remarquant que son laplacien a une expression simple :

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \cos(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}^2q = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\, \mathrm{d}^2q = \delta(\boldsymbol{r}) \tag{III.84}$$

ce qui s'intègre à deux dimensions [6] en

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi}\, \ln(r) + \text{constante}. \tag{III.86}$$

Il n'est toutefois pas immédiat de fixer la valeur pertinente de la constante, puisque cette fonction n'admet pas de limite finie ni à courte, ni à longue distance.

Pour ce qui va suivre, il est instructif d'évaluer cette intégrale "à la main", en coupant – pour une valeur de r donnée – l'espace des vecteurs d'onde en deux parties comme nous l'avions fait dans le premier chapitre lors de notre étude d'un cristal :

$$\begin{aligned}(2\pi)^2\, f(\boldsymbol{r}) &= \int_{|\boldsymbol{q}|<\pi/r} \frac{1-\cos(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r})}{q^2}\, \mathrm{d}^2q + \int_{|\boldsymbol{q}|>\pi/r} \frac{1-\cos(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r})}{q^2}\, \mathrm{d}^2q \\ &\approx \int_{|\boldsymbol{q}|<\pi/r} \frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r})^2/2}{q^2}\, \mathrm{d}^2q + \int_{|\boldsymbol{q}|>\pi/r} \frac{1}{q^2}\, \mathrm{d}^2q \end{aligned} \tag{III.87}$$

La première partie, dans laquelle on a remplacé le cosinus par son approximation au voisinage de 0, donne après intégration une contribution constante, égale à $\pi/4$. La seconde partie, dans laquelle on a pris une moyenne nulle pour le cosinus, diverge du côté des grandes valeurs de q. Mettons comme expliqué ci-dessus une coupure au niveau du vecteur d'onde π/λ_T. On arrive alors à

$$f(\boldsymbol{r}) \approx \frac{\pi}{16} + \frac{1}{2\pi} \ln(r/\lambda_T). \tag{III.88}$$

6. C'est l'équivalent bi-dimensionnel de

$$\text{3D}: \qquad \nabla^2 f(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}) \qquad \Rightarrow \qquad f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi r} + \text{constante}. \tag{III.85}$$

soit, en négligeant le terme constant devant le logarithme, qui est *a priori* grand devant 1 si on s'intéresse aux grandes valeurs de r :

$$f(\boldsymbol{r}) \approx \frac{1}{2\pi} \ln(r/\lambda_T). \tag{III.89}$$

Nous disposons maintenant de tous les ingrédients nécessaires pour évaluer la fonction de corrélation en phase. Nous trouvons tout d'abord :

$$\langle [\theta(\boldsymbol{r}) - \theta(0)]^2 \rangle \approx \frac{2}{\rho_s \lambda_T^2} \ln(r/\lambda_T) \tag{III.90}$$

puis en injectant ce résultat dans la fonction G_1 et en utilisant le résultat $\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}u} \rangle = \mathrm{e}^{-\langle u^2 \rangle/2}$ pour une variable gaussienne u :

$$\begin{aligned} G_1(r) &= \langle \psi(\boldsymbol{r})\, \psi^*(0) \rangle \\ &\approx \rho\, \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\theta(\boldsymbol{r})-\theta(0)]} \rangle \\ &\approx \rho\, \mathrm{e}^{-\langle [\theta(\boldsymbol{r})-\theta(0)]^2 \rangle/2} \\ &\approx \rho \left(\frac{\lambda_T}{r}\right)^{\alpha} \qquad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{\rho_s \lambda_T^2}. \end{aligned} \tag{III.91}$$

Nous trouvons donc une décroissance algébrique pour la fonction $G_1(r)$ quand $r \to \infty$. Cette conclusion est compatible avec le théorème de Mermin–Wagner–Hohenberg, ce qui est rassurant. Mais on note que cette décroissance est beaucoup moins rapide que celle trouvée pour le gaz parfait au chapitre précédent, qui était de nature exponentielle en $\mathrm{e}^{-r/\ell}$ avec $\ell = (\lambda_T/\sqrt{4\pi})\ \mathrm{e}^{\rho\lambda_T^2/2}$. Par ailleurs, nous verrons au chapitre suivant que la phase superfluide, quand elle existe, vérifie toujours $\rho_s\lambda_T^2 > 4$, ce qui signifie que la décroissance (III.91) est toujours plus lente que $r^{-1/4}$.

Exemple pratique. À ce stade, il est utile d'examiner un exemple réaliste pour voir combien le cas du gaz en interaction diffère de celui du gaz parfait. Prenons pour simplifier $\rho = \rho_s$ et considérons une densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} = \rho\lambda_T^2 = 10$, correspondant à un gaz assez fortement dégénéré (figure III.7).

— On trouve pour le gaz parfait une distance caractéristique de décroissance $\ell \approx 40\lambda_T$. Pour un échantillon de taille $L = 300\,\lambda_T$, la fonction

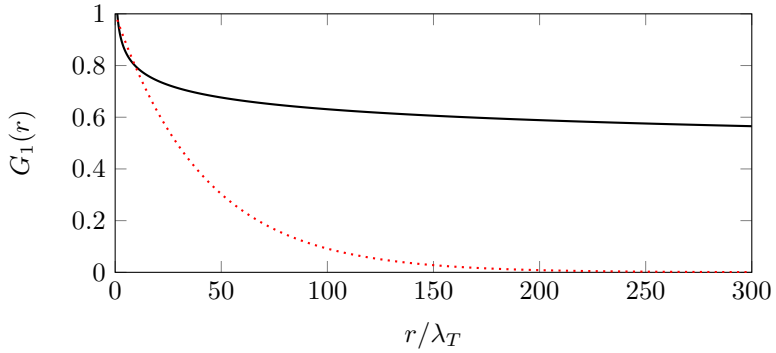


FIGURE III.7. *Ligne continue noire : variation de G_1 pour une densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} = 10$ pour le cas algébrique (en présence d'interactions), $G_1(r) \sim (\lambda_T/r)^{1/\mathcal{D}}$. Ligne pointillée rouge : cas sans interaction, $G_1(r) \sim \mathrm{e}^{-r/\ell}$ avec $\ell = (\lambda_T/\sqrt{4\pi})\ \mathrm{e}^{\mathcal{D}/2} \approx 40\,\lambda_T$.*

$G_1(r)$ décroît par un facteur > 1000 d'un bord à l'autre de l'échantillon : il n'y a aucune cohérence de phase appréciable à cette distance.

— Passons maintenant à un gaz en interaction, pour lequel la loi de décroissance algébrique (III.91) nous indique que la fonction $G_1(r)$ décroit entre $r = \lambda_T$ et $r = L$ par le facteur $(300)^{1/10} < 2$: il subsiste une forte cohérence de phase entre les deux bords de l'échantillon, comparable à ce qu'on attend pour un vrai condensat.

Cet exemple montre combien le changement de type de décroissance, d'exponentielle à algébrique, modifie radicalement la cohérence de phase de ce système. Cette cohérence est induite par les interactions répulsives, qui sont responsables du gel des fluctuations de densité. Dans des systèmes de taille finie raisonnable, elle est également à l'origine d'une fraction condensée importante. La fraction condensée dans un système de taille L peut en effet se définir comme la valeur de $G_1(L)$ [*cf.* cours 2015-16] et l'exemple ci-dessus nous montre que pour les paramètres envisagés, la fraction condensée est supérieure à 50 %, une fois que les interactions répulsives ont joué leur rôle de « lisseur de densité ».

Plus généralement, ces considérations indiquent combien la notion de limite thermodynamique pour des systèmes de dimension réduite est délicate à prendre. Si, en accord avec le théorème de Mermin-Wagner, on définit cette limite comme un gaz dont la fraction condensée $G_1(L)$ ne dépasse pas 1 % (valeur arbitraire, mais parlante), on voit que la taille L à prendre est

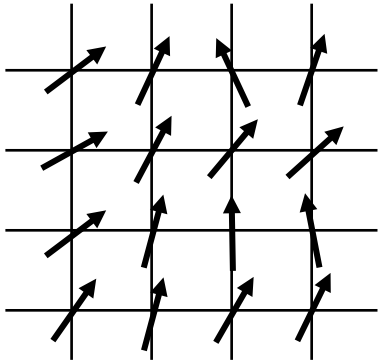


FIGURE III.8. *Le modèle xy à deux dimensions, qui peut être considéré comme la version discrétisée du gaz de Bose dont on a gelé les fluctuations de densité.*

$$\left(\frac{\lambda_T}{L}\right)^{\alpha} = 0.01 \quad \rightarrow \quad L = \frac{\lambda_T}{(0.01)^{1/\alpha}} = 10^{20}\ \lambda_T. \tag{III.92}$$

On retrouve ici le fameux argument de BRAMWELL & HOLDSWORTH (1994) qui dans le contexte de la magnétisation de systèmes 2D, montraient qu'il faudrait des échantillons de la taille de "l'état du Texas" pour atteindre la limite thermodynamique.

Nous sommes donc dans une situation subtile où le théorème de Mermin–Wagner interdit l'ordre à longue portée et l'apparition d'un condensat à la limite thermodynamique, mais où les interactions entre atomes permettent d'établir un quasi-ordre qui, dans beaucoup de cas réalistes de taille finie, "simule" l'existence d'un véritable condensat.

3-5 Le modèle xy et son implémentation avec des atomes

L'hamiltonien effectif que nous avons étudié dans cette section, $\hat{H} \propto \int (\boldsymbol{\nabla}\theta)^2$, possède une version discrète qui est un modèle très utilisé en physique statistique, le modèle xy [voir par exemple KARDAR (2007)]. On considère un réseau régulier et on dispose en chaque site $\boldsymbol{j}$ du réseau un vecteur unitaire $\boldsymbol{S_j}$ évoluant dans un espace fictif à deux dimensions (d'où le nom de modèle xy). Ce vecteur peut être paramétré par l'angle $\theta_{\boldsymbol{j}}$ (défini modulo 2π) qu'il fait avec une direction de référence. Dans le problème 2D qui nous intéresse, le réseau régulier est lui-même de dimension 2 ; ce peut être un réseau carré comme sur la figure III.8 ou un réseau triangulaire.

Dans la version la plus simple du modèle xy, on se limite à une interaction entre sites voisins que l'on écrit

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle \boldsymbol{i},\boldsymbol{j} \rangle} \boldsymbol{S_i} \cdot \boldsymbol{S}_j = -J \sum_{\langle \boldsymbol{i},\boldsymbol{j} \rangle} \cos\left(\theta_{\boldsymbol{j}} - \theta_{\boldsymbol{j}}\right). \tag{III.93}$$

Le choix $J > 0$ conduit à un état fondamental où tous les $\theta_{\boldsymbol{j}}$ sont égaux entre eux. Les excitations de basse énergie correspondent à des variations lentes des $\theta_{\boldsymbol{j}}$, de sorte qu'un développement limité du cosinus redonne bien l'hamiltonien $\int (\boldsymbol{\nabla}\theta)^2$ après passage à la limite continue. Le modèle xy conduit à un comportement similaire au modèle continu que nous avons étudié : à basse température, décroissance algébrique de la fonction de corrélation à un corps comme nous l'avons vu ci-dessus ; au dessus d'une température critique, transition BKT vers un état complètement désordonné similaire à ce que nous verrons dans le prochain cours. L'intérêt de ce modèle sur réseau est d'une part de fournir de manière naturelle une coupure à haute énergie évitant les divergences ultra-violettes, et d'autre part de permettre l'utilisation de méthodes de résolution propres aux modèles périodiques comme les matrices de transfert.

Ce modèle xy a été réalisé expérimentalement avec un gaz d'atomes froids par SCHWEIKHARD, TUNG et al. (2007). Partant d'un condensat 3D de forme approximativement sphérique, les chercheurs de Boulder ont utilisé un réseau optique pour découper environ 200 tubes verticaux et formant un réseau triangulaire dans un plan horizontal (figure III.9). Chaque tube contient environ 7000 atomes ; ce nombre est suffisamment grand pour que chaque tube constitue un micro-condensat de phase bien définie, qui joue le rôle de la variable $\theta_{\boldsymbol{j}}$ du modèle xy. Chaque tube est couplé

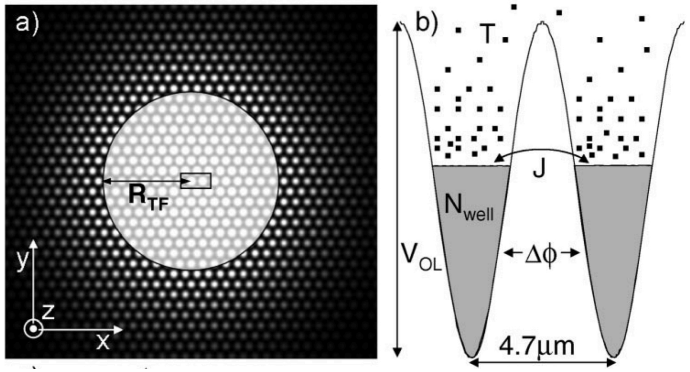


FIGURE III.9. *Réseau triangulaire de micro-condensats piégés aux nœuds d'un réseau optique, avec un couplage tunnel entre proches voisins. Chaque site contient environ 7000 atomes, ce qui assure que la phase d'un micro-condensat est bien définie. Cette expérience constitue une implémentation pratique du modèle xy. Figure extraite de* SCHWEIKHARD, TUNG *et al. (2007).*

à ses six voisins par effet tunnel, réalisant ainsi l'équivalent de jonctions Josephson. L'élément de matrice tunnel joue quant à lui le rôle du couplage J de l'hamiltonien du modèle xy. Nous n'irons pas plus loin pour l'instant dans la description de cette expérience ; notons simplement qu'elle a permis, à l'instar de celles menées sur des gaz continus, d'observer le mécanisme BKT en détectant au dessus d'une valeur critique du paramètre J/T la prolifération de vortex lorsque tous les micro-condensats sont fusionnés entre eux.

4 L'approche de Bogoliubov

Nous allons maintenant chercher à aller au-delà de l'approche "densité gelée" développée au paragraphe précédent, pour acquérir une vision plus complète de la dynamique du fluide dans le régime de basse température. Nous allons pour cela utiliser le formalisme de Bogoliubov, dans

une version adaptée[7] au cas des quasi-condensats (MORA & CASTIN 2003 ; CASTIN 2004). L'idée ne sera pas d'écrire comme à 3D $\psi(\boldsymbol{r}) = \psi_0 + \delta\psi(\boldsymbol{r})$ avec $\psi_0 = \sqrt{\rho_0}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$, où $\delta\psi$ serait en tout point petit devant ψ_0. En effet, il n'y a pas de phase homogène θ_0 dans notre fluide 2D. Notre approche sera de faire un développement en puissance des fluctuations de densité, en laissant à la phase la possibilité de varier de manière important sur l'étendue de l'échantillon (tout en restant développable en série de Fourier, ce qui exclut comme précédemment les vortex).

4-1 Équations du mouvement « amplitude – phase »

Partant de l'expression $\psi(\boldsymbol{r},t) = \sqrt{\rho(\boldsymbol{r},t)}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{r},t)}$, nous allons supposer que la phase θ varie lentement dans l'espace et peut être développée en série de Fourier, comme au paragraphe précédent :

$$\theta(\boldsymbol{r},t) = \sum_{\boldsymbol{q}} c_{\boldsymbol{q}}(t)\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{III.94}$$

Nous supposerons également que les fluctuations relatives de densité sont faibles. Comme indiqué plus haut [*cf.* (III.68)], cette hypothèse est valable pourvu que la densité dans l'espace des phases soit suffisamment grande. La densité peut donc s'écrire

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \rho_0\,(1\,+\,2\eta(\boldsymbol{r},t)) \qquad \text{avec} \quad \rho_0 = \frac{N}{L^2} \quad \text{et} \quad \eta \ll 1. \tag{III.95}$$

La fonction η peut également être décomposée en série de Fourier :

$$\eta(\boldsymbol{r},t) = \sum_{\boldsymbol{q}} d_{\boldsymbol{q}}(t)\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{III.96}$$

Les fonctions θ et η sont réelles, ce qui implique $c^*_{\boldsymbol{q}} = c_{-\boldsymbol{q}}$ et $d^*_{\boldsymbol{q}} = d_{-\boldsymbol{q}}$. La conservation de la norme entraîne

$$\int \eta\, d^3r = 0 \qquad \rightarrow \qquad d_0 = 0. \tag{III.97}$$

7. Le programme de MORA & CASTIN (2003) est en fait plus ambitieux que le nôtre puisqu'il s'agit de donner un sens aux opérateurs densité et phase dans le cadre de la théorie des champs quantiques. Ceci est possible de manière approchée en discrétisant l'espace et en s'assurant que chaque site du réseau contient en moyenne un grand nombre de particules.

La fonctionnelle d'énergie (III.33)

$$\begin{aligned} E[\psi] &= \frac{\hbar^2}{2m}\int \left(|\boldsymbol{\nabla}\psi|^2 + \tilde{g}|\psi|^4\right)\,\mathrm{d}^2r \\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\int \left(\rho(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2 \,+\, \frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{4\rho} \,+\, \tilde{g}\rho^2\right)\,\mathrm{d}^2r \end{aligned} \tag{III.98}$$

s'écrit avec ce paramétrage :

$$\begin{aligned} E[\psi] &= \frac{\hbar^2}{2m}\,\tilde{g}\rho_0 N \,+\, \frac{\hbar^2}{2m}\,\rho_0 \int \left[(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2 + (\boldsymbol{\nabla}\eta)^2 + 4\,\tilde{g}\rho_0\,\eta^2(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}^2r, \\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\,\tilde{g}\rho_0 N \,+\, \frac{\hbar^2}{2m}\,N\sum_{\boldsymbol{q}}\left[q^2\,|c_{\boldsymbol{q}}|^2 + \left(q^2 + 4\tilde{g}\rho_0\right)\,|d_{\boldsymbol{q}}|^2\right]. \end{aligned} \tag{III.99}$$

L'équation de Gross–Pitaevskii dépendante du temps (III.39) conduit alors aux deux équations couplées[8]

$$\left(\frac{2m}{\hbar}\right)\,\frac{\partial\theta}{\partial t} \;=\; \nabla^2\eta \;-\; 4\,\tilde{g}\rho_0\,\eta\,, \tag{III.100}$$

$$\left(\frac{2m}{\hbar}\right)\,\frac{\partial\eta}{\partial t} \;=\; -\,\nabla^2\theta. \tag{III.101}$$

L'évolution des coefficients $c_{\boldsymbol{q}}$ et $d_{\boldsymbol{q}}$ déduite de (III.100–III.101) s'écrit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2m}{\hbar}\right)\,\dot{c}_{\boldsymbol{q}} &= -\left(q^2 + 4\,\tilde{g}\rho_0\right)\,d_{\boldsymbol{q}}\,, \\ \left(\frac{2m}{\hbar}\right)\,\dot{d}_{\boldsymbol{q}} &= q^2\,c_{\boldsymbol{q}}\,. \end{aligned} \tag{III.102}$$

Pour $\boldsymbol{q} = 0$, on obtient $\dot{c}_0 = 0$, ce qui traduit le fait que la phase globale du gaz n'évolue pas puisque l'énergie du fondamental de (III.99) vaut 0.

En éliminant une des deux variables ($c_{\boldsymbol{q}}$ ou $d_{\boldsymbol{q}}$) au profit de l'autre, on obtient l'évolution

$$\ddot{c}_{\boldsymbol{q}} + \omega_q^2 c_{\boldsymbol{q}} = 0, \qquad \ddot{d}_{\boldsymbol{q}} + \omega_q^2 d_{\boldsymbol{q}} = 0, \tag{III.103}$$

8. Avec les variables adoptées ici, le lagrangien dynamique peut être pris égal à $\mathcal{L}_{\mathrm{dyn}}[\psi(\boldsymbol{r})] = -2\hbar\rho_0\,\dot{\theta}\,\eta$.

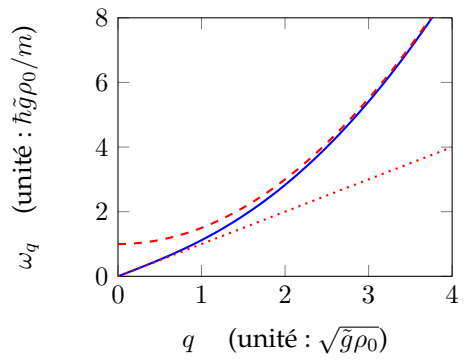


FIGURE III.10. *Relation de dispersion de Bogoliubov (III.104). La droite pointillée correspond à l'approximation linéaire (III.106) aux petites valeurs de q déterminant le régime de phonons. La courbe parabolique en tirets correspond aux grandes valeurs de q où l'on retrouve le régime de particule libre (III.108).*

avec la fréquence ω_q donnée par

$$\omega_q = \frac{\hbar}{2m}\left[q^2\left(q^2 + 4\,\tilde{g}\rho_0\right)\right]^{1/2}, \tag{III.104}$$

ce qui n'est autre que le spectre bien connu de Bogoliubov dont nous allons rappeler ci-dessous quelques propriétés.

4-2 Spectre de Bogoliubov et ondes sonores

La formule de Bogoliubov fournit la relation de dispersion reliant le vecteur d'onde $\boldsymbol{q}$ d'une perturbation et sa fréquence ω_q. Compte tenu de la forme (III.104), il est naturel de séparer deux régimes (figure III.10) :

— La partie de petit vecteur d'onde

$$q^2 \ll 4\,\tilde{g}\rho_0 \tag{III.105}$$

pour laquelle on trouve un spectre d'ondes sonores (phonons) :

$$\omega_q = c_0 q \qquad \text{avec} \quad c_0 = \frac{\hbar}{m}\sqrt{\tilde{g}\rho_0}. \tag{III.106}$$

— La partie de grands vecteurs d'onde :

$$q^2 \gg 4\,\tilde{g}\rho_0 \tag{III.107}$$

pour laquelle on retrouve un spectre de particule libre, décalé de l'énergie d'interaction ϵ_{int}

$$\hbar\omega_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \epsilon_{\text{int}} \qquad \text{avec} \quad \epsilon_{\text{int}} = \frac{\hbar^2}{m}\,\tilde{g}\rho_0. \tag{III.108}$$

La forme du spectre d'excitation de Bogoliubov, démarrant linéairement à bas vecteur d'onde, est souvent présenté comme une condition suffisante de superfluidité. En effet, en utilisant le critère de Landau, on en déduit qu'une impureté bougeant suffisamment lentement ne peut pas exciter le fluide et n'est donc pas freinée. Toutefois, la définition plus complète d'un état superfluide passe par la notion de métastabilité de courants et de rigidité en phase [voir par exemple MA (1985) ainsi que le cours 2015-16]. Nous avons déjà mentionné que le gaz de Bose décrit par la fonctionnelle d'énergie (III.71) présente cette rigidité et est donc bien superfluide. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point et le généraliser dans le prochain cours.

Mise en évidence d'ondes sonores à 2D. L'étude de la propagation d'ondes sonores dans des gaz atomiques dégénérés a fait l'objet de nombreuses études. Ces dernières sont souvent menées dans des pièges harmoniques, de sorte que la densité varie à la fois dans le plan d'onde et le long de la direction de propagation. Cette inhomogénéité peut bien sûr être prise en compte dans la description théorique, mais complique malgré tout la comparaison avec les résultats expérimentaux. Récemment, l'équipe du LKB–Collège de France [9] a réalisé une expérience visant à mesurer la propagation d'ondes sonores dans un gaz 2D uniforme. Ce gaz est piégé dans une "boîte" rectangulaire dont les parois sont formées par de la lumière. La densité atomique sur un côté du rectangle est modulée temporellement à l'aide d'un faisceau lumineux annexe, ce qui génère un paquet d'ondes qui se propage dans le gaz pendant une assez longue durée (plusieurs dizaines de millisecondes) en rebondissant sur les parois de la boîte. On peut ainsi

9. Cette expérience a été faite par Monika Aidelsburger, Jérôme Beugnon, Sylvain Nascimbene, Raphaël Saint-Jalm et Jean-Loup Ville.

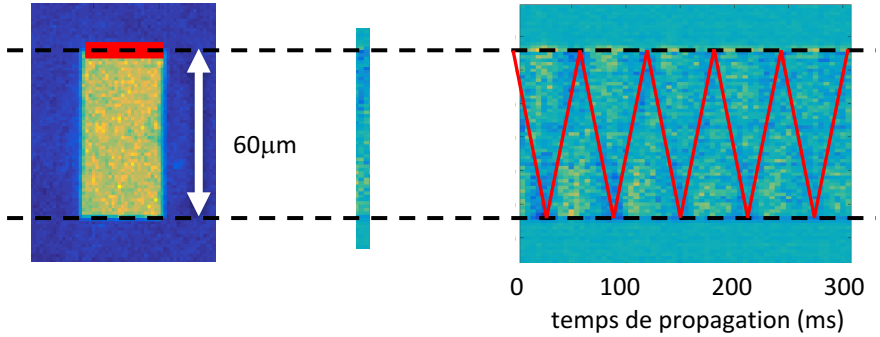


FIGURE III.11. *Mise en évidence d'ondes sonores dans un gaz 2D d'atomes de rubidium. Le gaz est confiné dans une boîte rectangulaire et l'onde sonore est générée en modulant brièvement la densité atomique sur un côté de la boîte.*

effectuer une mesure précise de la vitesse du son dans ce gaz. L'expérience représentée sur la figure III.11 conduit à $c_0 = 2.0\,\mathrm{mm/s}$, en bon accord avec la prédiction faite plus haut ($\tilde{g} = 0.15$, $\rho_0 = 50\,\mu\mathrm{m}^{-2}$).

L'étude que nous venons de faire est valable à basse température, où l'on s'intéresse au mouvement de l'ensemble du fluide. À plus haute température, la situation est plus complexe car il faut considérer les mouvements indépendants de la composante superfluide et de la composante normale. Le formalisme général est présenté pour le cas bi-dimensionnel par OZAWA & STRINGARI (2014).

4-3 Fluctuations de phase et fluctuations de densité

Considérons un mode de Bogoliubov caractérisé par les amplitudes $\bar{c}_q$ et $\bar{d}_q$ des modulations de phase et de densité. On obtient à partir du système (III.102) :

$$\frac{\bar{d}_q}{\bar{c}_q} = \frac{q}{\sqrt{q^2 + 4\,\tilde{g}\rho_0}}. \tag{III.109}$$

Pour q petit, plus précisément quand $q^2 \ll 4\tilde{g}\rho_0$ c'est-à-dire $q \ll \frac{1}{\xi}$, on trouve $\bar{d}_q \ll \bar{c}_q$, ce qui signifie que les modes consistent essentiellement en une oscillation de la phase, la densité n'étant presque pas affectée. Ceci valide *a posteriori* l'approche suivie en § 3, où nous nous étions concentrés sur les fluctuations de phase pour trouver le comportement du fluide à grande échelle spatiale, c'est-à-dire à petit vecteur d'onde.

Nous avons donc déjà caractérisé l'effet essentiel des fluctuations de phase, à savoir l'émergence d'un quasi-ordre à longue portée. Intéressons-nous maintenant aux fluctuations de densité à l'équilibre thermique, ne serait-ce que pour vérifier que l'hypothèse de linéarisation de ces fluctuations, via la fonction $\eta(\boldsymbol{r})$, est bien cohérente avec le résultat final.

Partons de :

$$\frac{\Delta\rho^2}{\rho_0^2} = \frac{\langle\rho^2(0)\rangle}{\rho_0^2} - 1 = 4\sum_{\boldsymbol{q}}\langle|d_{\boldsymbol{q}}|^2\rangle \tag{III.110}$$

Pour évaluer cette quantité, nous allons utiliser le théorème d'équipartition de l'énergie pour le champ classique $\eta(\boldsymbol{r})$. Comme nous l'avons expliqué plus haut, pour éviter des divergences de type "corps noir" sans passer par une quantification de ce champ, nous attribuons une énergie moyenne $k_\mathrm{B}T/2$ à tous les modes d'énergie $\hbar\omega_q$ inférieure à $k_\mathrm{B}T$, et nous supposerons que les modes d'énergie supérieure sont non peuplés. Ceci conduit à :

$$\frac{\hbar^2}{m}\,N\,\left(q^2 + 4\tilde{g}\rho_0\right)\,\langle|d_{\boldsymbol{q}}|^2\rangle = \begin{cases} k_\mathrm{B}T & \text{if } \hbar\omega_q < k_\mathrm{B}T\,, \\ 0 & \text{if } \hbar\omega_q > k_\mathrm{B}T\,. \end{cases} \tag{III.111}$$

Le calcul des fluctuations de densité peut alors être fait explicitement à partir de (III.110) :

$$\frac{\Delta\rho^2}{\rho_0^2} = \frac{2}{\pi\rho_0\lambda_T^2}\int\frac{1}{q^2 + 4\tilde{g}\rho_0}\mathrm{d}^2q \approx \frac{2}{\rho_0\lambda_T^2}\log\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{E_\mathrm{int}/N}.\right) \tag{III.112}$$

Comme nous l'avons écrit plus haut, l'énergie thermique $k_\mathrm{B}T$ est généralement supérieure à l'énergie d'interaction par particule E_int/N. Le rapport entre ces deux quantités peut atteindre en pratique une valeur de l'ordre de quelques dizaines, de sorte que le logarithme est lui-même compris entre 1 et 3. Le dénominateur de l'expression ci-dessus est quant à lui égal à la densité dans l'espace des phases, qui doit valoir au moins la dizaine pour que la transition superfluide soit atteinte (*cf.* chapitre 4) ; il peut monter en pratique jusqu'à la centaine pour des échantillons froids et denses. On en

déduit que $\Delta\rho \ll \rho_0$ pour ces échantillons froids, ce qui justifie l'approximation des faibles fluctuations de densité et leur linéarisation utilisée dans cette section.

Chapitre IV

Le point critique de la transition BKT

Nous avons décrit au chapitre précédent le rôle joué par les phonons dans un gaz de Bose 2D à l'équilibre thermodynamique. Nous avons montré qu'en accord avec le théorème de Mermin–Wagner–Hohenberg, ces phonons faisaient disparaître l'ordre à longue portée pour $T \neq 0$ en le remplaçant par un quasi-ordre : la fonction de corrélation à un corps décroît algébriquement, $G_1(r) \propto r^{-\alpha}$, où $\alpha = 1/\mathcal{D}_s$ est relié à la densité dans l'espace des phases superfluide, $\mathcal{D}_s = \rho_s \lambda_T^2$. Nous avons également retrouvé via le critère de Landau que ce quasi-ordre était effectivement suffisant pour maintenir un état superfluide.

Le but de ce chapitre est d'aller au delà du modèle purement phononique et de prendre en compte les vortex. L'influence des vortex peut se comprendre de manière intuitive (figure IV.1) : supposons que l'on ait – après avoir pris en compte les phonons – une certaine cohérence de phase entre deux points A et B, caractérisée par la loi de probabilité pour la différence de phase ϕ ; si un vortex avec son enroulement de phase de 2π peut être aléatoirement inséré sur le segment AB, la différence de phase va basculer entre ϕ et $\phi + \pi$. Ce déphasage aléatoire fera perdre toute cohérence entre A et B, et le quasi-ordre en phase qui pouvait exister entre ces deux points sera détruit.

Dans ce qui suit, nous allons étudier successivement le rôle d'un vortex isolé, puis d'une paire de vortex de circulations opposées, avant de nous intéresser à la thermodynamique d'une assemblée de vortex. Finalement, nous aborderons le rôle des vortex dans le cadre du groupe de renormalisation. Cela nous permettra d'établir un critère clair de superfluidité ; nous verrons en particulier que $\mathcal{D}_s$ est soit nulle, soit supérieure à 4.

1 Seuil d'apparition d'un vortex isolé

1-1 Apparition et disparition des vortex

Dans le contexte de notre gaz d'atomes décrit par une fonction d'onde classique $\psi(\boldsymbol{r})$, un vortex est un zéro de cette fonction. Autour de ce zéro, la phase présente un enroulement [1] qui vaut $\pm 2\pi$. On parle alors de vortex de charge $Q = \pm 1$.

Un moyen mathématique simple pour se représenter l'émergence de vortex dans ce contexte consiste à considérer les deux fonctions $\mathrm{Re}[\psi(\boldsymbol{r})]$ et $\mathrm{Im}[\psi(\boldsymbol{r})]$. Chacune de ces deux fonctions fluctue dans l'espace sous l'effet des excitations thermiques ; $\mathrm{Re}[\psi(\boldsymbol{r})]$ par exemple prend des valeurs positives dans certaines régions du plan et négatives dans d'autres régions. Les frontières entre ces régions sont des lignes le long desquelles $\mathrm{Re}[\psi(\boldsymbol{r})]$ s'annule. Il en va de même pour $\mathrm{Im}[\psi(\boldsymbol{r})]$. Il peut donc exister des points

1. On peut considérer d'autres situations, mais elles se ramènent toutes à des superpositions des deux cas $\pm 2\pi$. Par exemple, si l'enroulement est nul, on peut voir ce zéro de densité comme la superposition de vortex de charges topologiques opposées. Si l'enroulement vaut $2n\pi$, cela correspond à la superposition de n vortex de charge unité.

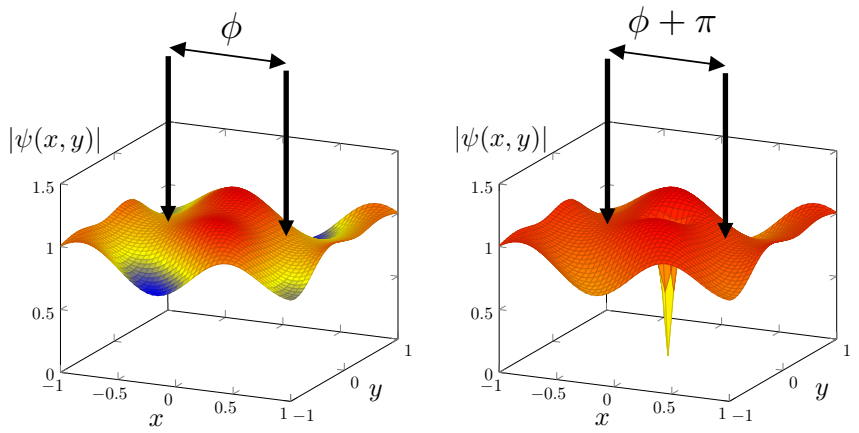


FIGURE IV.1. *Vortex isolés et cohérence de phase : si un vortex isolé vient s'intercaler entre deux points, la phase relative entre ces deux points passe de la valeur ϕ à $\phi + \pi$. Par conséquent, dans un fluide où les vortex isolés peuvent être répartis de manière aléatoire, la cohérence de phase ne peut pas excéder une longueur de l'ordre de la distance moyenne entre vortex.*

discrets $\boldsymbol{r}_j$ dans le plan où ces lignes se croisent, c'est-à-dire

$$\mathrm{Re}[\psi(\boldsymbol{r}_j)] = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}[\psi(\boldsymbol{r}_j)] = 0. \tag{IV.1}$$

Il est facile de vérifier qu'un zéro simple de ψ correspond effectivement à un vortex de charge topologique $Q_j = \pm 1$ (figure IV.2).

L'enroulement de phase d'un vortex constitue une "protection" topologique. On ne peut pas générer spontanément un vortex de charge $Q \neq 0$ au sein d'un échantillon, ni l'éliminer. Pour que des vortex apparaissent ou disparaissent, deux possibilités peuvent être envisagées :

— Le vortex est créé ou annihilé de manière individuelle sur le bord de l'échantillon, là où la fonction d'onde $\psi(\boldsymbol{r})$ s'annule ;

— Une paire de vortex de charges opposées apparaît ou disparaît en passant par l'état intermédiaire d'un zéro double de $\psi(\boldsymbol{r})$, correspondant à un enroulement nul de la phase (figure IV.3). Cet état intermédiaire peut être vu comme la superposition des deux vortex de charges opposées.

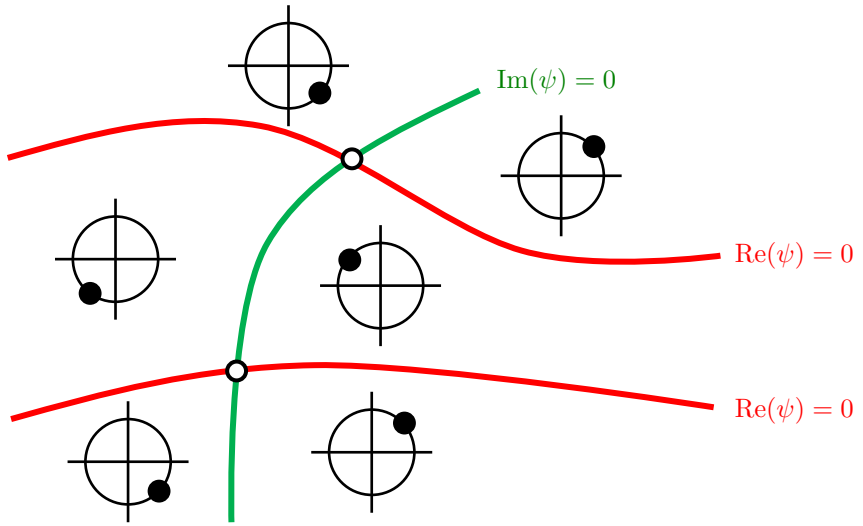


FIGURE IV.2. *Lignes sur lesquelles $\mathrm{Re}[\psi(\boldsymbol{r})] = 0$ (en rouge) et $\mathrm{Im}[\psi(\boldsymbol{r})] = 0$ en vert. Les points d'intersection $\boldsymbol{r}_j$ sont (généralement) des zéros simples de $\psi(\boldsymbol{r})$ et ils correspondent à un enroulement de phase de $\pm 2\pi$, c'est-à-dire un vortex de charge topologique $Q = \pm 1$. On a indiqué dans chaque zone du plan une représentation de la phase de ψ sur le cercle trigonométrique, ce qui permet de déterminer l'enroulement de phase du vortex.*

1-2 L'énergie d'un vortex

Les arguments énergétiques et entropiques vont jouer un rôle central dans ce qui va suivre pour déterminer si un vortex a une probabilité significativement non nulle d'être présent dans un fluide quantique. Nous allons donc commencer par évaluer l'énergie d'un vortex isolé en considérant la situation la plus simple possible, celle d'un échantillon circulaire avec un vortex situé au centre de cet échantillon.

Le champ de vitesse créé par le vortex est orthoradial et tel que la circulation le long d'un cercle centré sur l'origine est toujours égale à h/m, ce

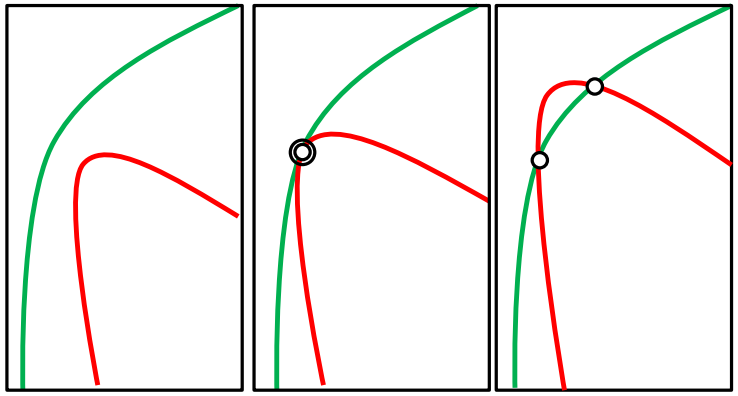


FIGURE IV.3. *Emergence d'une paire de vortex du fait de fluctuations thermiques dans le gaz. Sous l'effet d'une fluctuation, la ligne correspondant à $Re[\psi(\boldsymbol{r})] = 0$ (en rouge), initialement disjointe de la ligne $Im[\psi(\boldsymbol{r})] = 0$ (en vert) [dessin de gauche], vient la croiser pour former un zéro double [dessin central], puis en deux zéros simples d'enroulements opposés [dessin de droite]. On obtient alors une paire de vortex de charge $Q_1 = +1$ et $Q_2 = -1$. Le processus inverse est également possible, conduisant à l'annihilation de la paire de vortex.*

qui donne (figure IV.4)

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar}{mr}\boldsymbol{u}_\varphi \qquad \text{avec} \quad \boldsymbol{u}_\varphi = \boldsymbol{u}_z \times \frac{\boldsymbol{r}}{r}. \tag{IV.2}$$

La densité s'annule au point $\boldsymbol{r} = 0$ et reprend sa valeur asymptotique sur une distance de l'ordre de la longueur de cicatrisation définie au chapitre précédent :

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2\,\tilde{g}\,\rho}}. \tag{IV.3}$$

Pour simplifier, nous modéliserons le profil de densité par une fonction en escalier :

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{r}) &= 0 \quad \text{si } r < \xi, \\ \rho(\boldsymbol{r}) &= \rho \quad \text{si } r > \xi. \end{aligned} \tag{IV.4}$$

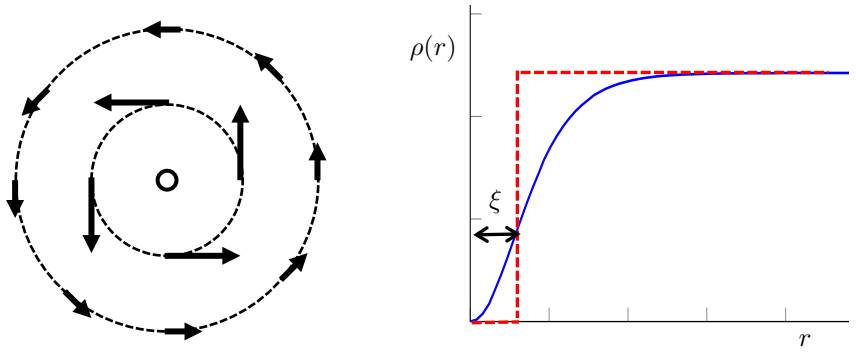


FIGURE IV.4. *Gauche : champ de vitesse créé par un vortex, décroissant comme $1/r$. Droite : profil de densité au voisinage du cœur du vortex. La taille du cœur est de l'ordre de la longueur de cicatrisation $\xi = 1/\sqrt{\tilde{g}\rho}$. En pointillé, modélisation par la fonction en escalier donnée en (IV.4).*

L'énergie cinétique du fluide vaut donc :

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}} &= \frac{1}{2}m\int \rho(\boldsymbol{r})\ \boldsymbol{v}^2(\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}^2r \approx \frac{1}{2}m\rho\frac{\hbar^2}{m^2}\int_\xi^R \frac{1}{r^2}\ 2\pi r\ \mathrm{d}r \\ &= \pi\ \frac{\hbar^2\rho}{m}\ln(R/\xi). \end{aligned} \tag{IV.5}$$

Le point essentiel de ce résultat est que l'énergie d'un seul vortex, c'est-à-dire un objet "microscopique", tend vers l'infini quand la taille du système tend elle même vers l'infini. Bien sûr la divergence n'est que logarithmique, mais cela suffit à rendre la limite thermodynamique singulière vis à vis des vortex isolés. Notons que dans cette expression, le préfacteur $\pi\hbar^2\rho/m$ devant le logarithme est "robuste" : il ne dépend pas de la modélisation choisie pour le profil de densité. La forme précise de cette modélisation n'intervient que dans l'argument du logarithme et contribue donc par l'intermédiaire d'une constante qui vient s'ajouter au terme dominant en $\ln(R)$.

Il y a également une augmentation de l'énergie d'interaction du fluide, puisqu'on passe d'une densité uniforme $N/(\pi R^2)$ à la densité $\rho = N/[\pi(R^2 - \xi^2)]$. Partant de l'expression générale pour l'énergie d'interac-

tion vue au chapitre précédent,

$$E_{\rm int} = \frac{\hbar^2}{2m}\tilde{g}\int \rho^2(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^2 r, \tag{IV.6}$$

cette augmentation s'écrit :

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= \frac{\hbar^2}{2m}\tilde{g}\left\{\left[\frac{N}{\pi(R^2-\xi^2)}\right]^2\pi(R^2-\xi^2) - \left[\frac{N}{\pi R^2}\right]^2\pi R^2\right\}\\ &\approx \frac{\pi}{2}\,\frac{\hbar^2\rho}{m}.\end{aligned} \tag{IV.7}$$

Cette énergie reste constante quand la taille du disque tend vers l'infini, et elle est donc beaucoup plus petite que l'énergie cinétique qui diverge comme $\ln(R)$. Pour un vortex isolé, cette énergie ϵ_0 peut donc être négligée, mais ce ne sera plus le cas quand on s'intéressera à une paire vortex-antivortex car l'énergie cinétique sera alors fortement réduite. La valeur de son préfacteur $\pi/2$ n'est qu'indicative, puisque ce dernier dépend de la modélisation choisie pour décrire l'annulation de la densité au cœur du vortex.

Densité totale et densité superfluide. Dans ce qui précède, la densité ρ représente la densité totale de l'échantillon, lui-même supposé à température nulle. Dans ce cas, densité totale ρ et densité superfluide ρ_s coïncident. Si la température n'est pas nulle, la densité superfluide est réduite, du fait des fluctuations de densité à courte échelle. Pour évaluer l'énergie cinétique du vortex, qui fait intervenir le gradient de phase de $\psi(\boldsymbol{r})$ sur une grande échelle de longueur, il faut alors faire intervenir uniquement la densité superfluide, ce qui conduit à

$$E_{\rm cin} \approx \pi\,\frac{\hbar^2\rho_s}{m}\ln(R/\xi) \qquad\qquad \epsilon_0 \sim \frac{\hbar^2\rho_s}{m}. \tag{IV.8}$$

Insistons sur le fait que cette densité superfluide ρ_s est une quantité dépendant de la température et de l'échelle spatiale a à laquelle on regarde le système. Les fluctuations densité-phase de longueur d'onde plus courte que a ainsi que, comme nous le verrons plus loin, les paires de vortex séparées de moins de a, sont absorbées dans la définition de ρ_s. Cette remarque joue un rôle central dans le traitement de la transition par la méthode du groupe de renormalisation.

Vortex décentré. L'analyse qui précède a fait l'hypothèse d'un vortex centré sur l'échantillon, ce qui permet de mener les calculs analytiquement. Dans le cas d'un vortex décentré, un traitement exact est plus délicat, mais le résultat n'est que peu modifié puisque l'énergie ne dépend du rayon que via un logarithme.

1-3 L'observation d'un vortex isolé est-elle probable ?

Comme indiqué plus haut, un vortex peut *a priori* apparaître dans l'échantillon en étant nucléé sur les parois, puis en dérivant vers la région centrale. L'état d'un gaz avec un vortex est déterminé par la connaissance de la position de ce vortex. Comme le cœur du vortex a une étendue $\pi\xi^2$, on peut considérer que l'on a

$$W \approx \frac{\pi R^2}{\pi\xi^2} \tag{IV.9}$$

états indépendants pour un vortex individuel dans le disque de rayon R.

La probabilité pour qu'un état donné se réalise est donnée par la loi de Boltzmann

$$p \approx \mathrm{e}^{-E_{\rm cin}/k_{\rm B}T}, \tag{IV.10}$$

où l'on a négligé la contribution de l'énergie d'interaction ϵ_0 devant l'énergie cinétique. En introduisant la longueur d'onde thermique λ_T et la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D}_s$ associée à la fraction superfluide

$$\lambda_T = \frac{\hbar\sqrt{2\pi}}{\sqrt{mk_{\rm B}T}}, \qquad \mathcal{D}_s = \rho_s\lambda_T^2, \tag{IV.11}$$

cette probabilité s'écrit en utilisant (IV.8)

$$p \approx \exp\left[-\frac{\mathcal{D}_s}{2}\ln\left(\frac{R}{\xi}\right)\right] = \left(\frac{\xi}{R}\right)^{\mathcal{D}_s/2}. \tag{IV.12}$$

Pour un échantillon "macroscopique" tel que $R \gg \xi$, cette probabilité est petite devant 1 dès que $\mathcal{D}_s$ est significativement non nulle.

Intéressons-nous maintenant à la probabilité qu'un vortex soit présent dans l'échantillon, indépendamment de sa position (figure IV.5). Puisqu'il

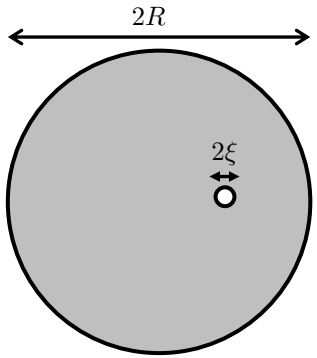


FIGURE IV.5. *Un vortex de rayon $\approx \xi$ dans un disque de rayon R.*

y a W états possibles, cette probabilité vaut $\approx Wp$, au moins tant que $Wp \ll 1$:

$$Wp = \frac{R^2}{\xi^2} p \approx \left(\frac{\xi}{R}\right)^{-2+\mathcal{D}_s/2}. \tag{IV.13}$$

Deux cas de figures sont alors à envisager selon la valeur de l'exposant $-2 + \mathcal{D}_s/2$:

— Si cet exposant est positif, c'est-à-dire si la densité superfluide $\mathcal{D}_s$ vérifie

$$\mathcal{D}_s > 4, \tag{IV.14}$$

la probabilité Wp tend vers 0 à la limite thermodynamique. Pour des échantillons assez grands, il est alors extrêmement improbable d'avoir un vortex isolé.

— Au contraire si $\mathcal{D}_s < 4$, la quantité Wp diverge à la limite thermodynamique. Cette quantité ne peut alors plus s'interpréter comme une probabilité mais le message est clair : il est très probable que le gaz contiendra un grand nombre de vortex (de charge aléatoire). Comme nous le verrons un peu plus loin (§ 1-4), cette prolifération de vortex individuels suffit à supprimer la superfluidité. La cohérence du calcul nous impose alors de prendre $\mathcal{D}_s = 0$.

La conclusion de cette étude préliminaire est donc que la superfluidité ne peut exister dans ce système bidimensionnel que si la densité superfluide est supérieure à 4, auquel cas aucun vortex isolé n'est présent dans le système à l'équilibre thermodynamique. D'une manière remarquable, cette conclusion atteinte à partir de considérations élémentaires et avec une modélisation très grossière du gaz (un seul vortex !) est quantitativement exacte : comme nous le verrons en § 4, le point critique de la transition BKT, correspondant à la transition normal–superfluide, correspond exactement au point où la densité superfluide est telle que $\mathcal{D}_s = 4$.

Un autre point tout aussi remarquable est que cette conclusion ne dépend pas de la force des interactions caractérisée par le paramètre $\tilde{g}$. Ce paramètre intervient dans la taille du cœur du vortex, mais pas dans le champ de vitesse à grande distance qui est l'élément essentiel du raisonnement précédent. Il s'agit donc d'un résultat « universel ».

Approche "énergie libre". Une approche très voisine et conduisant à une conclusion identique consiste à évaluer l'énergie libre de la configuration à un vortex (KOSTERLITZ & THOULESS 1973),

$$F = E - TS, \tag{IV.15}$$

où E est l'énergie d'un vortex, essentiellement l'énergie cinétique (IV.8), et S l'entropie associée à cette configuration, c'est-à-dire

$$S = k_{\mathrm{B}} \ln(W) \tag{IV.16}$$

où W est le nombre d'états indépendant possibles donné en (IV.9). On trouve alors :

$$F = \left(\pi \frac{\hbar^2 \rho_s}{m} - 2k_{\mathrm{B}}T\right) \ln(R/\xi) \tag{IV.17}$$

soit

$$\frac{F}{k_{\mathrm{B}}T} = \frac{1}{2}(\mathcal{D}_s - 4) \ln(R/\xi). \tag{IV.18}$$

On retrouve ainsi le résultat de la discussion précédente : si $\mathcal{D}_s > 4$, l'énergie libre est positive et très grande devant $k_{\mathrm{B}}T$ à la limite thermodynamique : il est extrêmement improbable qu'un vortex libre apparaisse dans l'échantillon. En revanche, si $\mathcal{D}_s < 4$, l'énergie libre est grande en valeur absolue, mais négative, indiquant que ce processus – et l'apparition d'autres vortex – est très probable.

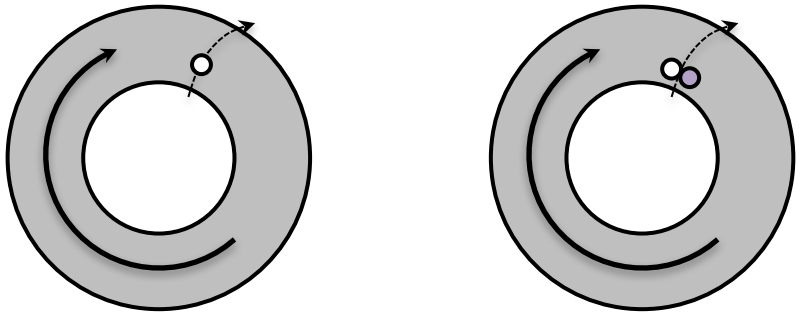


FIGURE IV.6. *Gauche : quand un anneau de fluide bi-dimensionnel est traversé par un vortex isolé, le courant (quantifié) dans cet anneau est modifié. On ne peut donc pas avoir de courant permanent – condition nécessaire de superfluidité – dès que les vortex isolés ont une probabilité significative de se trouver au sein du fluide. Droite : la traversée d'une paire liée de deux vortex de charges opposées n'a en revanche pas d'effet sur le courant permanent.*

1-4 Vortex isolés et non-superfluidité

Pour comprendre pourquoi la possibilité d'avoir un vortex isolé au sein d'un gaz 2D inhibe la superfluidité, le plus simple est de considérer une géométrie en forme d'anneau, comme celle représentée sur la figure IV.6. S'il est assez large, cet anneau est un gaz bi-dimensionnel avec des conditions aux limites périodiques selon une direction et des conditions aux limites de Dirichlet selon l'autre.

La superfluidité se manifeste par la possibilité d'avoir un courant permanent métastable dans cet anneau, c'est-à-dire un enroulement de phase de $2\pi N$, où N est un nombre entier. Supposons maintenant que la température soit assez élevée pour qu'un vortex isolé, initialement présent sur le bord intérieur ou extérieur de l'anneau, puisse migrer dans la zone de haute densité. Nous avons vu plus haut que ceci peut se produire si $\mathcal{D}_s < 4$. Il peut alors très bien arriver que ce vortex traverse l'anneau et ressorte par le bord opposé. Quand cela se produit, l'enroulement de phase est modifié :

$$\text{traversée d'un vortex isolé :} \quad N \to N \pm 1. \tag{IV.19}$$

Si les vortex isolés ont une probabilité appréciable de traverser l'anneau, l'intensité du courant va alors effectuer un mouvement brownien et sa valeur moyenne va pouvoir relaxer vers 0 : le courant n'est donc pas métastable et la densité superfluide est nulle.

Remarquons que l'argument ci-dessus ne s'applique pas aux paires formées par deux vortex de signes opposés, avec une distance (microscopique) entre les membres de la paires petite devant la taille (macroscopique) de l'anneau. Dans ce cas, aucun changement de l'enroulement de phase n'accompagne la traversée de la paire :

$$\text{traversée d'une paire de vortex :} \quad N \to N, \tag{IV.20}$$

et la présence de ces paires avec une densité non nulle n'inhibe pas la superfluidité. Elle peut néanmoins réduire la rigidité de phase, donc la fraction superfluide, comme nous le verrons un peu plus loin.

2 Une paire "vortex – antivortex"

L'argument de la section précédente s'étend immédiatement à toute configuration de vortex "non équilibrée", c'est -à-dire présentant plus de charges positives que négatives, ou vice-versa. Le champ de vitesse résultant variera à longue distance comme

$$Q_{\rm tot}\frac{\hbar}{mr} \qquad \text{avec} \quad Q_{\rm tot} = \sum_j Q_j, \tag{IV.21}$$

ce qui conduira à une divergence logarithmique de l'énergie cinétique avec la taille de l'échantillon, avec un facteur multiplicatif $Q_{\rm tot}^2$.

En revanche, les configurations équilibrées avec $Q_{\rm tot} = 0$ ne présentent pas cette pathologie. Chacune de ces configurations équilibrées a donc une probabilité non infinitésimale d'apparaître si la température du gaz n'est pas strictement nulle. Nous allons nous intéresser ici au cas simple d'une paire de vortex, l'un de charge positive, l'autre de charge négative que nous appellerons paire "vortex – antivortex" ; cette dénomination est justifiée dans la mesure où les deux membres de la paire peuvent s'annihiler (figure IV.3), comme le ferait un électron et un positron. La section suivante

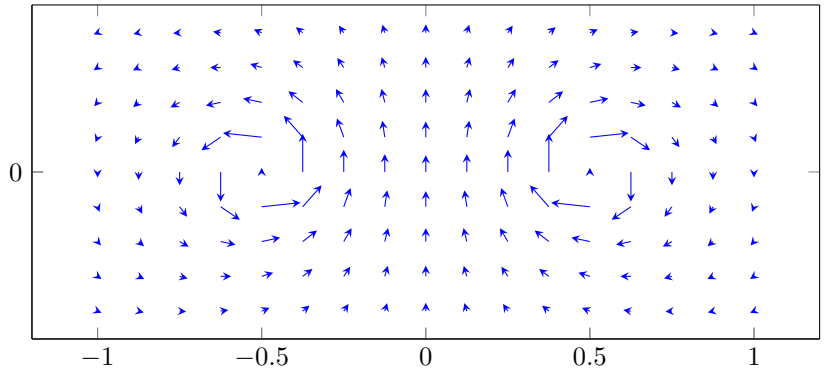


FIGURE IV.7. *Champ de vitesses créé par une paire de vortex de charges opposées. Ce champ de vitesses décroît comme $1/r^2$ à l'infini et l'énergie cinétique associée est donc bornée quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini, contrairement au cas d'un vortex isolé.*

sera consacrée au cas général, où l'on prend une moyenne statistique sur l'ensemble des configurations.

2-1 Champ de vitesses et énergie d'une paire

Considérons une paire de vortex de charges opposées, séparés par une distance ℓ, ces deux vortex étant localisés par exemple en $x = \pm\ell/2, y = 0$ (figure IV.7). Nous allons supposer que le champ de vitesse global est la somme des champs de vitesse créés par chacun des deux vortex, ce point étant justifié dans la suite de ce chapitre [voir l'équation (IV.46)] :

$$\boldsymbol{v}_\pm = \pm\frac{\hbar}{m r_\pm^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \pm \ell/2 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad r_\pm = \left[(x \pm \ell/2)^2 + y^2\right]^{1/2}. \tag{IV.22}$$

Le calcul de l'énergie cinétique correspondante est présenté par NOZIÈRES & PINES (1990) et sera repris de manière générale un peu plus loin [*cf.* (IV.52)]. Nous donnons donc le résultat sans démonstration :

$$E_{\rm cin}(\ell) \approx 2\pi\,\frac{\hbar^2\,\rho_s}{m}\ln\left(\frac{\ell}{\xi}\right). \tag{IV.23}$$

Ce résultat a une structure apparemment voisine de celui obtenu pour un vortex isolé, mais il ne diverge plus avec la taille R de l'échantillon. Cette taille est remplacée ici par la distance ℓ entre les deux vortex, les contributions des deux champs de vitesses à l'énergie cinétique se compensant pour des distances à l'origine grandes devant ℓ (ce champ de vitesse décroît comme $1/r^2$ à l'infini).

À cette énergie cinétique, il faut ajouter l'augmentation d'énergie d'interaction liée à la création de deux trous de taille ξ dans le fluide, c'est-à-dire $2\epsilon_0$ où l'énergie $\epsilon_0 \sim \hbar^2\,\rho_s/m$ a été évaluée en (IV.8). Pour une séparation ℓ entre les deux vortex de quelques ξ, énergie cinétique et énergie d'interaction sont comparables. Le poids de Boltzmann associé à l'apparition d'une paire de vortex s'écrit donc :

$$\mathcal{P}(\ell) = \exp\left\{-\frac{2\epsilon_0 + E_{\rm cin}(\ell)}{k_{\rm B}T}\right\} \tag{IV.24}$$

ou encore

$$\mathcal{P}(\ell) \approx y_0^2\,\mathrm{e}^{-\mathcal{D}_s\ln(\ell/\xi)} = y_0^2\left(\frac{\xi}{\ell}\right)^{\mathcal{D}_s}, \tag{IV.25}$$

où l'on a introduit le facteur provenant de l'énergie d'interaction de chaque vortex, appelé *fugacité d'un vortex* :

$$y_0 \equiv \exp\left(-\frac{\epsilon_0}{k_{\rm B}T}\right). \tag{IV.26}$$

Pour la modélisation de la densité par une fonction en escalier, le résultat (IV.7) conduit à $y_0 \approx \exp(-\mathcal{D}_s/4)$.

Le résultat (IV.25) est non négligeable devant 1, au moins pour des paires proches ($\ell \lesssim$ quelques ξ) et pour un gaz faiblement ou modérément dégénéré (densité dans l'espace des phases associée à la fraction superfluide $\mathcal{D}_s$ pas très grande devant 1).

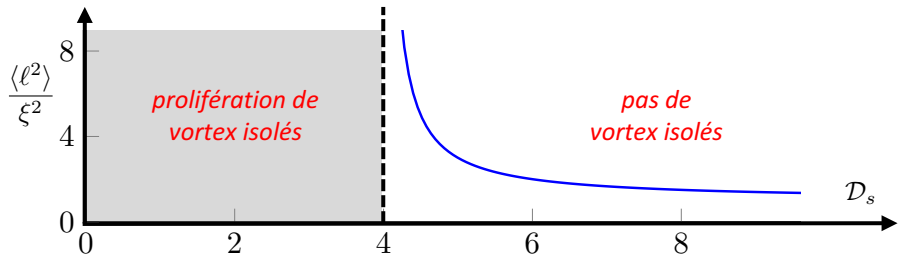


FIGURE IV.8. *Variation de l'élongation moyenne d'une paire de vortex en fonction de la densité dans l'espace des phases associée à la fraction superfluide* [cf. *eq. (IV.28)*].

2-2 Elongation moyenne d'une paire

Disposant du poids de Boltzmann $\mathcal{P}(\ell)$ pour la distance entre les deux vortex de la paire, nous pouvons maintenant évaluer plusieurs caractéristiques de la distribution statistique de cette paire. Intéressons-nous dans ce paragraphe à l'élongation moyenne de la paire, c'est-à-dire la moyenne $\langle (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)^2 \rangle$ du carré de la distance ℓ.

Partant de

$$\langle \ell^2 \rangle = \frac{\int_\xi^{+\infty} \ell^2 \, \mathcal{P}(\ell) \, 2\pi\ell \, \mathrm{d}\ell}{\int_\xi^{+\infty} \mathcal{P}(\ell) \, 2\pi\ell \, \mathrm{d}\ell} \tag{IV.27}$$

nous trouvons (KOSTERLITZ & THOULESS 1973)

$$\langle \ell^2 \rangle = \xi^2 \, \frac{\mathcal{D}_s - 2}{\mathcal{D}_s - 4}. \tag{IV.28}$$

Cette quantité tracée sur la figure IV.8 n'est définie que pour $\mathcal{D}_s > 4$: nous avons vu à la section précédente que c'est la condition à remplir pour qu'un vortex libre ne puisse pas apparaître à l'équilibre thermodynamique. En d'autres termes, c'est à cette condition que les paires ne se dissocient pas et restent effectivement liées, avec une valeur finie de leur élongation.

Pour une densité dans l'espace des phase $\mathcal{D}_s$ notablement supérieure à 4, l'élongation moyenne est d'ordre ξ, ce qui correspond à une énergie cinétique de l'ordre de l'énergie d'interaction $2\epsilon_0$. Quand $\mathcal{D}_s$ décroît et se rapproche de 4, les paires sont de moins en moins liées, l'élongation augmente pour finalement diverger en $\mathcal{D}_s = 4$.

2-3 Densité de paires

Nous pouvons également utiliser le poids de Boltzmann $\mathcal{P}(\ell)$ donné en (IV.25) pour évaluer la distance moyenne entre deux paires dans le gaz bidimensionnel. Partons d'un échantillon de surface πR^2 et définissons la position du cœur de chaque vortex à $\pi\xi^2$ près, comme nous l'avons fait pour un vortex unique en § 1. La probabilité pour que l'échantillon contienne une paire de vortex est

$$\begin{aligned} p(R) &= \iint \mathcal{P}\left(|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b|\right) \, \frac{\mathrm{d}^2 r_a}{\pi\xi^2} \, \frac{\mathrm{d}^2 r_b}{\pi\xi^2} \\ &= \frac{\pi R^2}{(\pi\xi^2)^2} \int_\xi^R \mathcal{P}(\ell) \, 2\pi\ell \, \mathrm{d}\ell \\ &\approx \frac{2}{\mathcal{D}_s - 2} \, \frac{R^2}{\xi^2} \, y_0^2. \end{aligned} \tag{IV.29}$$

Pour estimer la distance moyenne d entre paires, on pose que $d = R$, où R est le rayon pour lequel la probabilité de présence $p(R)$ calculée ci-dessus devient d'ordre 1. Ceci donne

$$\frac{2}{\mathcal{D}_s - 2} \, \frac{d^2}{\xi^2} \, y_0^2 \sim 1 \qquad \longrightarrow \qquad d \approx \xi \, \mathrm{e}^{\epsilon_0 / k_\mathrm{B} T} \, \sqrt{\mathcal{D}_s}. \tag{IV.30}$$

Pour $\mathcal{D}_s \gg 1$, les paires – dont on a vu qu'elles avaient une élongation $\sim \xi$ – sont distantes les unes des autres de la quantité $d \gg \xi$; elles forment donc un « gaz » très dilué. En revanche, quand $\mathcal{D}_s$ s'approche de la valeur 4 à laquelle les paires se dissocient, la distance d devient de l'ordre de l'élongation moyenne d'une paire. Cela signifie que les paires se recouvrent, ce qui rend notre traitement incomplet. L'objet de la section suivante sera de présenter les outils principaux permettant d'étudier plus précisément le voisinage du point critique.

3 Énergie d'une assemblée de vortex

3-1 Champs de vitesses longitudinaux et transverses

Au chapitre précédent, nous sommes partis d'une fonction d'onde $\psi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\rho(\boldsymbol{r})}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{r})}$ à laquelle nous avons associé le champ de vitesse superfluide $\frac{\hbar}{m}\boldsymbol{\nabla}\theta$. Nous avons supposé par ailleurs que la phase pouvait être développée en série de Fourier,

$$\theta(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{q}} c_{\boldsymbol{q}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{v}_s^{\parallel}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\frac{\hbar}{m}\sum_{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{q}\, c_{\boldsymbol{q}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{IV.31}$$

Ces relations peuvent aussi s'écrire

$$\theta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{\theta}(\boldsymbol{q})\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\ \mathrm{d}^2q, \qquad v_s^{\parallel}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\frac{\hbar}{m}\int \boldsymbol{q}\ \hat{\theta}(\boldsymbol{q})\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\ \mathrm{d}^2q \tag{IV.32}$$

si l'on préfère traiter $\boldsymbol{q}$ comme une variable continue.

La mention $\parallel$ que nous avons ajoutée à $\boldsymbol{v}_s$ provient du fait que le champ de vitesse ainsi défini est longitudinal, c'est-à-dire qu'il est parallèle à $\boldsymbol{q}$ en tout point de l'espace de Fourier :

$$\hat{\boldsymbol{v}}_s^{\parallel}(\boldsymbol{q}) = \mathrm{i}\frac{\hbar}{m}\ \boldsymbol{q}\,\hat{\theta}(\boldsymbol{q}). \tag{IV.33}$$

Il est bien clair que les vortex, avec leur enroulement de phase de $\pm 2\pi$ autour d'un point, échappent à la description précédente : une fonction $\theta(\boldsymbol{r})$ développable en série de Fourier comme (IV.31) vérifie $\oint \boldsymbol{\nabla}\theta\ \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$ pour tout contour fermé et ne peut donc pas présenter d'enroulement de phase non nul.

Pour décrire à la fois les fluctuations douces de la phase et les vortex, il faut se rappeler qu'un champ de vitesse $\boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{r})$ quelconque n'est pas nécessairement longitudinal. Il s'écrit dans le cas général comme la somme d'un champ longitudinal et d'un champ transverse :

$$\boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}_s^{\parallel}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}_s^{\perp}(\boldsymbol{r}) \qquad \hat{\boldsymbol{v}}_s(\boldsymbol{q}) = \hat{\boldsymbol{v}}_s^{\parallel}(\boldsymbol{q}) + \hat{\boldsymbol{v}}_s^{\perp}(\boldsymbol{q}), \tag{IV.34}$$

avec

$$\boldsymbol{q}\times\hat{\boldsymbol{v}}_s^{\parallel}(\boldsymbol{q}) = 0 \qquad \boldsymbol{q}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}_s^{\perp}(\boldsymbol{q}) = 0, \tag{IV.35}$$

ou encore, en revenant dans l'espace des positions :

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}_s^{\parallel}(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}_s^{\perp}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{IV.36}$$

Les phonons que nous avons étudiés au chapitre précédent sont entièrement décrits par la partie longitudinale du champ de vitesses. La prise en compte des vortex va se faire au contraire par l'intermédiaire de la composante transverse de ce champ de vitesses. Par exemple, pour un vortex isolé centré en 0, le champ de vitesses (IV.2) s'écrit en point de vue de Fourier

$$\hat{\boldsymbol{v}}_s^{\parallel}(\boldsymbol{q}) = 0 \qquad \hat{\boldsymbol{v}}_s^{\perp}(\boldsymbol{q}) = \mathrm{i}\ \frac{\hbar}{mq^2}\ \boldsymbol{q}\times\boldsymbol{u}_z. \tag{IV.37}$$

Pour simplifier l'analyse dans le cas général, nous allons faire l'approximation d'un découplage complet des deux champs de vitesses. Ceci revient par exemple à négliger l'influence des trous de densité créés par les vortex sur la propagation des phonons. Dans le paragraphe suivant, partant d'un jeu de positions $\{\boldsymbol{r}_j\}$ et de charges $\{Q_j\}$ données des vortex, nous allons déterminer le champ de vitesse associé $\boldsymbol{v}_s^{\perp}(\boldsymbol{r})$ en supposant qu'il n'y a aucune excitation phononique du système.

3-2 Champ de vitesse d'une assemblée de vortex

Partons d'une situation où l'on se donne les positions $\{\boldsymbol{r}_j\}$ et les charges $\{Q_j\}$ des vortex et cherchons le champ de vitesse qui minime la fonctionnelle d'énergie cinétique

$$E_{\mathrm{cin}} = \frac{\hbar^2\rho_s}{2m}\int [\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{r})]^2\ \mathrm{d}^2r. \tag{IV.38}$$

Une méthode standard de dérivation fonctionnelle indique que les fonctions $\theta(\boldsymbol{r})$ minimisantes vérifient l'équation de Laplace

$$\nabla^2\theta = 0 \tag{IV.39}$$

en tout point où la phase est bien définie, c'est-à-dire en dehors des $\boldsymbol{r}_j$. Le champ de vitesse associé $\boldsymbol{v}_s = \frac{\hbar}{m}\boldsymbol{\nabla}\theta$ vérifie

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}_s = \frac{\hbar}{m}\ \nabla^2\theta = 0 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{q}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}_s(\boldsymbol{q}) = 0. \tag{IV.40}$$

Il s'agit donc d'un champ de vitesse purement transverse, comme annoncé précédemment. Nous le noterons à partir de maintenant $\boldsymbol{v}_s^{\perp}$.

Pour résoudre l'équation de Laplace, remarquons qu'à deux dimensions, le résultat (IV.40) pour $\hat{\boldsymbol{v}}_s^{\perp}(\boldsymbol{q})$ indique qu'il existe une fonction scalaire $\hat{\Phi}(\boldsymbol{q})$ telle que

$$\hat{\boldsymbol{v}}_s^{\perp}(\boldsymbol{q}) = \mathrm{i}\ \boldsymbol{q} \times \left[\boldsymbol{u}_z\ \hat{\Phi}(\boldsymbol{q})\right] \tag{IV.41}$$

ce qui s'écrit dans l'espace réel :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_s^{\perp}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{\nabla} \times [\boldsymbol{u}_z\ \Phi(\boldsymbol{r})] = [\boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{r})] \times \boldsymbol{u}_z \\ &= \begin{pmatrix} +\partial_y \Phi \\ -\partial_x \Phi \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{IV.42}$$

Il s'agit maintenant de prendre en compte les contraintes spécifiques à un champ de vitesse superfluide, pour lequel la circulation de la vitesse sur un circuit fermé est quantifiée en multiples de $2\pi\hbar/m$, avec une valeur qui dépend de la charge des vortex à l'intérieur du contour. Utilisons la formule de Stokes pour expliciter cette contrainte en terme de Φ :

$$\begin{aligned} \oint \boldsymbol{v}_s^{\perp}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \oint \boldsymbol{\nabla} \times [\boldsymbol{u}_z\ \Phi(\boldsymbol{r})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \iint \boldsymbol{u}_z \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \{\boldsymbol{\nabla} \times [\boldsymbol{u}_z\ \Phi(\boldsymbol{r})]\}\ \mathrm{d}^2 r \\ &= -\iint \nabla^2 \Phi\ \mathrm{d}^2 r. \end{aligned} \tag{IV.43}$$

Il est alors immédiat qu'on obtiendra la quantification recherchée en prenant

$$-\nabla^2 \Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{2\pi\hbar}{m} \sum_j Q_j\ \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j). \tag{IV.44}$$

Nous avons déjà rencontré au chapitre précédent l'équation $\nabla^2\Phi \propto \delta(\boldsymbol{r})$ et nous avons indiqué que sa solution s'écrit :

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\hbar}{m}\ \sum_j Q_j\ \ln|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j| \tag{IV.45}$$

à l'addition d'une fonction de laplacien nul près. Le champ de vitesses s'obtient alors en prenant le gradient de la fonction Φ [*cf.* (IV.42)] :

$$\boldsymbol{v}_s^{\perp}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar}{m}\ \sum_j \frac{Q_j}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|^2} \begin{pmatrix} -y + y_j \\ x - x_j \end{pmatrix}. \tag{IV.46}$$

On retrouve simplement la somme des champs de vitesse individuels de chacun des vortex, ce qui justifie le calcul fait en § 2 pour une paire de vortex.

Dans la suite , il sera utile de disposer d'une expression de Φ et de $\boldsymbol{v}_s^{\perp}$ en termes de la densité de vortex

$$\rho_v(\boldsymbol{r}) = \sum_j Q_j\ \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j). \tag{IV.47}$$

Les expressions (IV.42) et (IV.45) se réécrivent

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\hbar}{m} \int \ln|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|\ \rho_v(\boldsymbol{r}')\ \mathrm{d}^2 r' \tag{IV.48}$$

et

$$\boldsymbol{v}_s^{\perp}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar}{m}\ \boldsymbol{u}_z \times \boldsymbol{\nabla} \left[\int \ln|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|\ \rho_v(\boldsymbol{r}')\ \mathrm{d}^2 r'\right]. \tag{IV.49}$$

3-3 Énergie des vortex

Avant de passer à la thermodynamique du gaz, il nous reste à évaluer l'énergie cinétique associée au champ de vitesses des vortex. En exprimant la vitesse en terme de la fonction Φ [*cf.* (IV.42)], nous obtenons :

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{cin}} &= \frac{1}{2} m\rho_s \int (\boldsymbol{v}_s^{\perp})^2(\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}^2 r \\ &= \frac{1}{2} m\rho_s \int \left[(\partial_x\Phi)^2 + (\partial_y\Phi)^2\right]\ \mathrm{d}^2 r \\ &= -\frac{1}{2} m\rho_s \int \Phi(\boldsymbol{r})\ \nabla^2\Phi(\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}^2 r \end{aligned} \tag{IV.50}$$

Magnétostatique	**Vortex**
courants I_j	charges topologiques Q_j
champ magnétique $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$	champ de vitesse $\boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{r})$
potentiel vecteur $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$	fonction $\Phi(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{u}_z$
$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{\nabla} \times [\Phi\,\boldsymbol{u}_z]$
énergie magnétostatique $\dfrac{1}{2\mu_0}\displaystyle\int \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}^2 r$	énergie cinétique $\dfrac{\hbar^2\rho_s}{2m}\displaystyle\int \boldsymbol{v}_s^2(\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}^2 r$

TABLE IV.1. *Analogie entre le champ magnétique créé par un réseau de fils parallèles à l'axe z et le champ de vitesse créé par une assemblée de vortex.*

où l'intégration par partie de la dernière ligne n'est possible que si Φ tend vers 0 à l'infini, ce qui impose que la charge topologique totale des vortex s'annule :

$$Q_{\mathrm{tot}} = \sum_j Q_j = 0. \tag{IV.51}$$

Nous avions déjà noté en § 1 que cette annulation était une condition nécessaire pour avoir un superfluide, cette restriction n'est donc pas un problème.

En utilisant maintenant que $\nabla^2\Phi$ est une somme de distributions de Dirac [*cf.* (IV.44)], le résultat précédent se simplifie en

$$E \approx N_v\epsilon_0 \;-\; \frac{2\pi\,\hbar^2\,\rho_s}{m}\sum_{i<j} Q_i Q_j\ \ln\left(\frac{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}{\xi}\right), \tag{IV.52}$$

La divergence en $\ln(R)$ qui était présente dans l'énergie (IV.8) d'un vortex isolé a disparu du fait de l'hypothèse (IV.51) d'une charge topologique totale nulle. Le champ de vitesse décroît au moins aussi vite que $1/r^2$ à l'infini, de sorte qu'il n'y pas de problème de convergence de l'intégrale définissant l'énergie cinétique.

Analogie magnétostatique. Les résultats qui précèdent sont formellement identiques à ceux bien connus en magnétostatique donnant le champ magnétique créé par des fils parcourus par des courants constants I_j. Plus précisément, la situation envisagée ici peut être identifiée au cas de fils rectilignes, tous parallèles à l'axe z et croisant le plan xy aux points r_j. Nous détaillons dans la table IV.1 les différents éléments de cette identification.

4 Densité superfluide dans un fluide 2D

La superfluidité est un phénomène qui se caractérise par (au moins) deux propriétés distinctes :

— Un état superfluide présente une certaine rigidité de phase. Par exemple si le superfluide est contenu dans un récipient que l'on met en rotation à vitesse angulaire Ω, le superfluide restera au repos dans le référentiel du laboratoire – supposé galiléen – au moins pour les basses vitesses de rotation. Un fluide normal au contraire se met en rotation quelle que soit Ω et il acquiert un champ de vitesse correspondant à une rotation rigide $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$.

— Un courant dans un superfluide peut être métastable. Si le superfluide est en mouvement à l'intérieur d'un récipient immobile dans le référentiel du laboratoire, ce mouvement pourra perdurer pendant un temps très long. Le critère de métastabilité est que le mouvement relatif du superfluide et des rugosités présentes sur les parois du récipient doit avoir une vitesse inférieure à une certaine vitesse critique.

Nous allons nous intéresser dans ce qui suit au premier critère, et chercher à calculer la rigidité de phase du superfluide bi-dimensionnel quand on prend en compte la contribution des vortex.

4-1 Rigidité en phase et conditions aux limites distordues

La fraction superfluide dans un gaz quantique se définit à partir du coût en énergie libre d'une légère distortion des conditions aux limites. Rappelons l'origine physique de cette définition : comme indiqué ci-dessus, la composante superfluide correspond à la fraction du gaz qui « refuse » de se

mettre en mouvement quand on met en rotation à la vitesse Ω le récipient contenant le fluide. Vu depuis le référentiel tournant, le fluide normal est au repos alors que le superfluide tourne à la vitesse $-\Omega$. Dans ce référentiel, le superfluide possède donc une énergie cinétique supplémentaire par rapport au cas $\Omega = 0$.

Or le passage dans le référentiel tournant, qui n'est pas galiléen, peut se faire en considérant que les conditions aux limites périodiques usuelles sont remplacées par des conditions distordues. Dans le changement $x \to x+L$, la phase des fonctions d'onde admissibles est augmentée d'une quantité Θ, où Θ dépend linéairement de Ω. La quantité $F(\Theta)-F(0)$ correspond donc à l'énergie cinétique du superfluide dans le référentiel tournant, sachant que ce superfluide est en fait resté au repos dans le référentiel du laboratoire. Pour un fluide entièrement normal, l'ensemble du gaz est au repos dans le référentiel tournant et il n'y a donc pas de coût associé à la distortion des conditions aux limites : $\rho_{\rm s} = 0$.

Plus précisément, nous partons d'un fluide décrit par un champ classique $\psi(\boldsymbol{r})$, pour lequel nous supposons connue l'énergie libre $F(0)$ pour des conditions aux limites périodiques :

$$\psi(x+L,y) = \psi(x,y+L) = \psi(x,y). \tag{IV.53}$$

Nous imposons maintenant aux états accessibles du fluide de satisfaire

$$\psi(x+L,y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}\,\psi(x,y), \qquad \psi(x,y+L) = \psi(x,y), \qquad \Theta \ll 1, \tag{IV.54}$$

ce qui correspond à une distortion des conditions aux limites selon l'axe x. Par symétrie, l'énergie libre est une fonction paire de Θ et on suppose que l'on peut la développer en série au voisinage de $\Theta = 0$. On définit la densité superfluide $\rho_{\rm s}$ par

$$F(\Theta) = F(0) + \frac{\hbar^2\Theta^2}{2m}\rho_{\rm s} + \mathcal{O}(\Theta^4), \qquad \text{soit} \quad \rho_{\rm s} = \frac{m}{\hbar^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial\Theta^2}\bigg|_{\Theta=0}. \tag{IV.55}$$

Pour notre gaz 2D décrit par $\psi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\rho}_s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{r})}$ et en présence de conditions aux limites distordues, le champ de vitesse peut se décomposer en trois parties :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_s^{\parallel} + \boldsymbol{v}_s^{\perp} + \boldsymbol{v}_\Theta. \tag{IV.56}$$

Les composantes longitudinales et transverses ont déjà été explicitées. La composante $\boldsymbol{v}_\Theta$ traduit le fait que la phase de la fonction d'onde est "tordue" de Θ sur une distance L ; nous prendrons ici une variation linéaire :

$$\theta_{\rm tordue}(x) = \Theta\frac{x}{L} \qquad \to \qquad \boldsymbol{v}_\Theta = \frac{\hbar\Theta}{mL}\boldsymbol{u}_x. \tag{IV.57}$$

Nous allons maintenant évaluer, à l'ordre le plus bas non nul en Θ, l'énergie cinétique associée à ce champ de vitesses, pour en déduire la valeur recherchée de ρ_s. Nous suivrons une démarche voisine de celle décrite par MINNHAGEN & WARREN (1981) [voir également CHAIKIN & LUBENSKY (2000)].

4-2 Densité superfluide et corrélations en vitesse

Partons d'un gaz de densité superfluide $\rho_s^{(0)}$; à température nulle, $\rho_s^{(0)}$ est égale à la densité totale ρ ; à température non nulle en revanche, $\rho_s^{(0)} < \rho$. Plus précisément, la définition de la densité superfluide passe par la donnée d'une échelle de distance minimale a. Toutes les fluctuations de densité et de phase – y compris les paires de vortex – dont l'échelle de longueur est inférieure à a sont supposées prises en compte de manière implicite par la réduction $\rho \to \rho_s^{(0)}$. Le principe de l'analyse par le groupe de renormalisation que nous aborderons au paragraphe suivant consiste à étudier le comportement de $\rho_s^{(0)}$ quand on augmente l'échelle de distance a pour absorber de plus en plus de fluctuations.

En présence de phonons de grande longueur d'onde et de vortex, et avec les conditions aux limites distordues, l'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} E_c[\Theta,\boldsymbol{v}_s] &= \frac{m\rho_s^{(0)}}{2}\int (\boldsymbol{v}_\Theta + \boldsymbol{v}_s)^2\ \mathrm{d}^2r \\ &= \frac{mL^2\rho_s^{(0)}}{2}v_\Theta^2 \ + \ \frac{m\rho_s^{(0)}}{2}\int \boldsymbol{v}_s^2\ \mathrm{d}^2r + m\rho_s^{(0)}\boldsymbol{v}_\Theta\cdot\int \boldsymbol{v}_s\ \mathrm{d}^2r. \end{aligned} \tag{IV.58}$$

Le poids de Boltzmann $\mathrm{e}^{-E_c/k_{\rm B}T}$ qui intervient dans la fonction de partition et dans les moyennes à l'équilibre thermodynamique peut donc

s'écrire

$$\exp\left(-\frac{E_c[\Theta,\boldsymbol{v}_s]}{k_{\rm B}T}\right) = \exp\left(-\frac{mL^2\rho_s^{(0)}}{2k_{\rm B}T}v_\Theta^2\right)\times\exp\left(-\frac{E_c[0,\boldsymbol{v}_s]}{k_{\rm B}T}\right) \times \exp\left(-\frac{m\rho_s^{(0)}}{k_{\rm B}T}\boldsymbol{v}_\Theta\cdot\int\boldsymbol{v}_s\,{\rm d}^2r\right) \quad \text{(IV.59)}$$

Nous allons maintenant injecter ce résultat dans la fonction de partition

$$\mathcal{Z}(\Theta)=\sum_{\{\boldsymbol{v}_s\}}\exp\left(-\frac{E[\Theta,\boldsymbol{v}_s]}{k_{\rm B}T}\right), \quad \text{(IV.60)}$$

cette somme devant en fait être comprise comme une intégrale fonctionnelle. L'énergie figurant dans cette expression est *a priori* l'énergie totale, mais la contribution essentielle provient de l'énergie cinétique à laquelle on ajoutera le moment venu l'énergie de cœur ϵ_0 de chaque vortex, qui contribuera par l'intermédiaire de la fugacité d'un vortex $y_0=\mathrm{e}^{-\epsilon_0/k_{\rm B}T}$.

Une fois connue la fonction de partition, on en déduira l'énergie libre $F(\Theta)=-k_{\rm B}T\ln[\mathcal{Z}(\Theta)]$ et la densité superfluide via :

$$\rho_s=\frac{m}{\hbar^2}\left.\frac{\partial^2F}{\partial\Theta^2}\right|_{\Theta=0}=\frac{1}{mL^2}\left.\frac{\partial^2F}{\partial v_\Theta^2}\right|_{v_\Theta=0}. \quad \text{(IV.61)}$$

Notons que dans la somme (IV.60) définissant la fonction de partition, le premier terme du membre de droite de (IV.59) peut être mis en facteur puisqu'il ne dépend pas du champ de vitesse $\boldsymbol{v}_s$.

Pour évaluer $\mathcal{Z}(\Theta)$, utilisons le fait que l'on s'intéresse aux valeurs arbitrairement faibles de Θ. On peut donc faire le développement limité :

$$\exp\left(-\frac{m\rho_s^{(0)}}{k_{\rm B}T}\boldsymbol{v}_\Theta\cdot\int\boldsymbol{v}_s\,{\rm d}^2r\right) \approx 1-\frac{m\rho_s^{(0)}}{k_{\rm B}T}v_\Theta\int v_{s,x}\,{\rm d}^2r + \frac{1}{2}\left(\frac{m\rho_s^{(0)}}{k_{\rm B}T}\right)^2 v_\Theta^2\iint v_{s,x}(\boldsymbol{r})\,v_{s,x}(\boldsymbol{r}')\,{\rm d}^2r\,{\rm d}^2r' \quad \text{(IV.62)}$$

où l'on a pris le vecteur $\boldsymbol{v}_\Theta$ parallèle à la direction x, comme indiqué en (IV.57).

À partir de ce résultat, quand on multiplie par le poids $\exp(-E_c[0,\boldsymbol{v}_s]/k_{\rm B}T)$ figurant dans (IV.59) et qu'on intègre sur $\boldsymbol{v}_s$, on constate que la contribution du terme linéaire en v_Θ a par symétrie une moyenne nulle et il reste donc

$$\mathcal{Z}(\Theta) \approx \exp\left(-\frac{mL^2\rho_s^{(0)}}{2k_{\rm B}T}v_\Theta^2\right)\times\mathcal{Z}(0) \quad \text{(IV.63)}$$

$$\times \left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{m\rho_s^{(0)}}{k_{\rm B}T}\right)^2 v_\Theta^2\iint\langle v_{s,x}(\boldsymbol{r})\,v_{s,x}(\boldsymbol{r}')\rangle\,{\rm d}^2r\,{\rm d}^2r'\right) \quad \text{(IV.64)}$$

On en déduit l'énergie libre $F(\Theta)=-k_{\rm B}T\ln[\mathcal{Z}(\Theta)]$

$$F(\Theta) \approx \frac{1}{2}mL^2\rho_s^{(0)}v_\Theta^2+F(0) - \frac{1}{2}\frac{(m\rho_s^{(0)})^2}{k_{\rm B}T}v_\Theta^2\iint\langle v_{s,x}(\boldsymbol{r})\,v_{s,x}(\boldsymbol{r}')\rangle\,{\rm d}^2r\,{\rm d}^2r'. \quad \text{(IV.65)}$$

Nous avons donc relié l'énergie libre $F(\Theta)$ au deuxième ordre inclus en Θ à la fonction de corrélation de la vitesse calculée en l'absence de torsion de la phase. Nous avons vu plus haut que le champ de vitesse avait deux composantes, l'une longitudinale liée au gradient de la phase $\theta(\boldsymbol{r})$ et aux phonons, l'autre transverse liée aux vortex. La composante longitudinale ne contribue pas à l'intégrale ci-dessus puisque $\int\boldsymbol{v}^{\parallel}(\boldsymbol{r})\,{\rm d}^2r=0$ si l'on impose à la phase d'obéir à des conditions aux limites périodiques (sans flux de matière) sur les parois de la boîte. On peut donc dans ce qui précède faire la substitution

$$\langle v_{s,x}(\boldsymbol{r})\,v_{s,x}(\boldsymbol{r}')\rangle \longrightarrow \langle v_{s,x}^{\perp}(\boldsymbol{r})\,v_{s,x}^{\perp}(\boldsymbol{r}')\rangle. \quad \text{(IV.66)}$$

Il ne reste plus qu'à prendre la dérivée seconde par rapport à v_Θ pour obtenir la densité superfluide "renormalisée" ρ_s :

$$\rho_s=\rho_s^{(0)}-\frac{m(\rho_s^{(0)})^2}{k_{\rm B}T}\,\frac{1}{L^2}\iint\langle v_{s,x}^{\perp}(\boldsymbol{r})\,v_{s,x}^{\perp}(\boldsymbol{r}')\rangle\,{\rm d}^2r\,{\rm d}^2r'. \quad \text{(IV.67)}$$

Ce résultat important montre que le champ de vitesse dû aux vortex est susceptible de réduire, voire de supprimer complètement la densité superfluide. En revanche, la présence de phonons de grande longueur d'onde,

responsables du champ $\boldsymbol{v}^{\parallel}$ ne change pas la densité superfluide initiale ; c'est le résultat que nous avions énoncé au chapitre précédent et qui trouve ici sa justification.

4-3 Densité superfluide et positions des vortex

Pour aller plus loin et mettre en place les équations appropriées pour la procédure de renormalisation, il est utile d'exprimer la densité superfluide ρ_s en termes des positions des vortex plutôt que du champ de vitesses qu'ils créent. Pour cela, introduisons un facteur de convergence $\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_y(y'-y)}$ dans l'intégrale apparaissant dans (IV.67), en considérant la limite $q_y \to 0$:

$$\begin{aligned}\iint \langle v^{\perp}_{s,x}(\boldsymbol{r})\, v^{\perp}_{s,x}(\boldsymbol{r}')\rangle \,\mathrm{d}^2r\,\mathrm{d}^2r' &= \lim_{q_y\to 0}\iint \langle v^{\perp}_{s,x}(\boldsymbol{r})\, v^{\perp}_{s,x}(\boldsymbol{r}')\rangle\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_y(y'-y)}\,\mathrm{d}^2r\,\mathrm{d}^2r' \\ &= (2\pi)^2 \lim_{q_y\to 0}\langle \hat{v}^{\perp}_{s,x}(\boldsymbol{q})\, \hat{v}^{\perp}_{s,x}(-\boldsymbol{q})\rangle \qquad \text{(IV.68)}\end{aligned}$$

où on a posé $\boldsymbol{q} = (0, q_y)$ et introduit la transformée de Fourier du champ de vitesse superfluide transverse

$$\hat{\boldsymbol{v}}^{\perp}_s(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2\pi}\int \boldsymbol{v}^{\perp}_s(\boldsymbol{r})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}^2r. \qquad \text{(IV.69)}$$

Nous avons donné en (IV.37) la transformée de Fourier $\hat{\boldsymbol{v}}^{\perp}_s(\boldsymbol{q})$ du champ de vitesse créé par un vortex de charge $Q_j = 1$ localisé en $\boldsymbol{r}_j = 0$. On en déduit le champ de vitesse créé par l'assemblée de vortex :

$$\hat{\boldsymbol{v}}^{\perp}_s(\boldsymbol{q}) = \mathrm{i}\,\frac{\hbar}{mq^2}\,\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{u}_z \sum_j Q_j\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_j}, \qquad \text{(IV.70)}$$

soit pour la composante $\hat{v}^{\perp}_{s,x}$ qui nous intéresse pour (IV.68) et le choix $\boldsymbol{q} = (0, q_y)$:

$$\hat{v}^{\perp}_{s,x}(\boldsymbol{q}) = \mathrm{i}\,\frac{\hbar}{mq_y}\,\sum_j Q_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_y\,y_j}. \qquad \text{(IV.71)}$$

Nous arrivons donc à

$$\lim_{q_y\to 0}\langle \hat{v}^{\perp}_{s,x}(\boldsymbol{q})\, \hat{v}^{\perp}_{s,x}(-\boldsymbol{q})\rangle \;=\; \frac{\hbar^2}{m^2}\lim_{q_y\to 0}\left[\frac{1}{q_y^2}\sum_{i,j}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{Q}_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_y\,(y_i-y_j)}\right]. \qquad \text{(IV.72)}$$

Pour évaluer la limite $q_y \to 0$ de l'expression entre crochets, développons l'exponentielle $\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_y(y_i-y_j)}$ à l'ordre deux en q_y :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_y(y_i-y_j)} \;\approx\; 1 \;+\; \mathrm{i}q_y(y_i-y_j) \;-\; \frac{1}{2}q_y^2(y_i-y_j)^2 \;+\ldots \qquad \text{(IV.73)}$$

La contribution des deux premiers termes est nulle car nous nous limitons à des assemblées de vortex de charge topologique totale nulle, $\sum_i Q_i = 0$. La limite $q_y \to 0$ du troisième terme donne

$$\begin{aligned}\lim_{q_y\to 0}\langle \hat{v}^{\perp}_{s,x}(\boldsymbol{q})\, \hat{v}^{\perp}_{s,x}(-\boldsymbol{q})\rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m^2}\sum_{i,j}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{Q}_j\,(y_i-y_j)^2 \\ &= -\frac{\hbar^2}{4m^2}\sum_{i,j}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{Q}_j\,(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)^2. \qquad \text{(IV.74)}\end{aligned}$$

Ce résultat peut s'exprimer en fonction de la densité de vortex $\rho_v(\boldsymbol{r}) = \sum_j Q_j\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{Q}_j\,(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)^2 &= \iint (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2\,\langle\rho_v(\boldsymbol{r})\,\rho_v(\boldsymbol{r}')\rangle\,\mathrm{d}^2r\,\mathrm{d}^2r' \\ &= L^2\int r^2\,\langle\rho_v(\boldsymbol{r})\,\rho_v(0)\rangle\,\mathrm{d}^2r \qquad \text{(IV.75)}\end{aligned}$$

de sorte qu'on obtient à partir de (IV.67)

$$\rho_s = \rho_s^{(0)} + \frac{\pi^2\hbar^2}{mk_{\mathrm{B}}T}\,(\rho_s^{(0)})^2\int r^2\,\langle\rho_v(\boldsymbol{r})\,\rho_v(0)\rangle\,\mathrm{d}^2r. \qquad \text{(IV.76)}$$

Finalement cette expression peut s'écrire de manière compacte en utilisant la densité dans l'espace des phases associée à la fraction superfluide $\mathcal{D}_s = \rho_s\lambda_T^2$:

$$\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_s^{(0)} + \frac{\pi}{2}(\mathcal{D}_s^{(0)})^2\int r^2\,\langle\rho_v(\boldsymbol{r})\,\rho_v(0)\rangle\,\mathrm{d}^2r. \qquad \text{(IV.77)}$$

Pour évaluer la fonction de corrélation densité-densité pour les vortex, limitons-nous au premier terme non nul qui correspond à une paire vortex-antivortex, avec soit le vortex + en 0 et le vortex − en $\boldsymbol{r}$, soit l'inverse. Cela revient à évaluer le premier terme dans un développement en puissances de la fugacité d'un vortex y_0. En utilisant le poids de Boltzmann trouvé

en (IV.25) pour une telle paire et nous limitant aux paires de séparation supérieure à a, nous avons

$$\int r^2 \, \langle \rho_v(\boldsymbol{r}) \, \rho_v(0) \rangle \, \mathrm{d}^2 r \approx -\frac{2\, y_0^2}{a^4} \int_a^{+\infty} r^2 \left(\frac{a}{r}\right)^{\mathcal{D}_s^{(0)}} \, 2\pi r \, \mathrm{d}r, \tag{IV.78}$$

ce qui conduit à, en passant [2] de la fonction $\mathcal{D}_s$ à $1/\mathcal{D}_s$:

$$\frac{1}{\mathcal{D}_s} = \frac{1}{\mathcal{D}_s^{(0)}} + 2\pi^2 y_0^2 \int_a^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{\mathcal{D}_s^{(0)}-3} \, \frac{\mathrm{d}r}{a}. \tag{IV.81}$$

Notons que dans cette expression la fugacité y_0 d'un vortex est elle-même une fonction de la longueur de coupure a puisque l'énergie de cœur de vortex qui contribue dans y_0 dépend de la frontière que l'on impose à cette région de cœur.

4-4 Le principe de la renormalisation

La renormalisation pour le problème BKT consiste à faire croître progressivement l'échelle de distance a pour absorber de plus en plus d'aspects de la physique courte distance, en particulier les paires liées vortex-antivortex, dans la densité superfluide $\rho_s^{(0)}$. Toute la question est de savoir si au terme de ce processus, $\rho_s^{(0)}$ aura convergé vers une valeur nulle ou non nulle. Une action du groupe de renormalisation peut être vue comme une succession de deux étapes [KARDAR (2007), chapitres 4 et 8] :

— Partant de la moyenne « à gros grains » effectuée sur l'échelle de distance a, on augmente légèrement cette échelle $a \to \tilde{a} = a(1+\epsilon)$. L'intégrale (IV.81) se récrit :

$$\int_a^{+\infty} \ldots = \int_a^{a(1+\varepsilon)} \ldots + \int_{a(1+\varepsilon)}^{+\infty} \ldots \tag{IV.82}$$

et la composante entre a et $a(1+\varepsilon)$ est incorporée dans $1/\mathcal{D}_s^{(0)}$ qui devient $1/\tilde{\mathcal{D}}_s^{(0)}$:

$$\frac{1}{\tilde{\mathcal{D}}_s^{(0)}} = \frac{1}{\mathcal{D}_s^{(0)}} + 2\pi^2 y_0^2 \int_a^{a(1+\varepsilon)} \left(\frac{a}{r}\right)^{\mathcal{D}_s^{(0)}-3} \, \frac{\mathrm{d}r}{a}. \tag{IV.83}$$

L'équation (IV.81) s'écrit alors

$$\frac{1}{\mathcal{D}_s} = \frac{1}{\tilde{\mathcal{D}}_s^{(0)}} + 2\pi^2 y_0^2 \int_{a(1+\varepsilon)}^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{\mathcal{D}_s^{(0)}-3} \, \frac{\mathrm{d}r}{a}. \tag{IV.84}$$

— On fait ensuite une transformation d'échelle sur (IV.84) pour ramener $a(1+\varepsilon)$ sur a, ce qui vient en particulier modifier y_0 : $y_0 \to \tilde{y}_0$:

$$\frac{1}{\mathcal{D}_s} = \frac{1}{\tilde{\mathcal{D}}_s^{(0)}} + 2\pi^2 \tilde{y}_0^2 \int_a^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{\tilde{\mathcal{D}}_s^{(0)}-3} \, \frac{\mathrm{d}r}{a} \tag{IV.85}$$

avec

$$\tilde{y}_0 = y_0 \, (1+\varepsilon)^{\left(4-\mathcal{D}_s^{(0)}\right)/2}. \tag{IV.86}$$

On remarquera aussi que $\tilde{\mathcal{D}}_s^{(0)}$ a été substitué à $\mathcal{D}_s^{(0)}$ dans l'exposant de l'intégrande de (IV.85), ce qui permet d'assurer l'invariance de l'équation après action du groupe de renormalisation. Ce point se justifie en allant regarder les termes d'ordre suivant (ordre 4) dans le développement en puissances de y_0 (CHAIKIN & LUBENSKY 2000).

La limite $\varepsilon \to 0$ dans les deux équations (IV.83) et (IV.86) conduit alors au système différentiel pour le couple de fonctions $\left[\mathcal{D}_s^{(0)}, y_0\right]$

$$\frac{\mathrm{d}[\mathcal{D}_s^{(0)}]^{-1}}{\mathrm{d}\varepsilon} = 2\pi^2 y_0^2 \tag{IV.87}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(4 - \mathcal{D}_s^{(0)}\right) y_0 \tag{IV.88}$$

Nous ne rentrerons pas dans le détail de la résolution de ce système qui, depuis les articles initiaux de KOSTERLITZ (1974), NELSON & KOSTERLITZ

2. La relation $\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_s^{(0)} + \alpha(\mathcal{D}_s^{(0)})^2$ avec $\alpha\mathcal{D}_s^{(0)} \ll 1$ peut en effet s'écrire :

$$\frac{1}{\mathcal{D}_s} = \frac{1}{\mathcal{D}_s^{(0)} + \alpha(\mathcal{D}_s^{(0)})^2} = \frac{1}{\mathcal{D}_s^{(0)}} \, \frac{1}{1+\alpha\mathcal{D}_s^{(0)}} \approx \frac{1}{\mathcal{D}_s^{(0)}} \, \left(1 - \alpha\mathcal{D}_s^{(0)}\right) = \frac{1}{\mathcal{D}_s^{(0)}} - \alpha. \tag{IV.79}$$

Par ailleurs cette relation est écrite dans de nombreux ouvrages en termes de la quantité $K = \hbar^2\rho_s/mk_{\mathrm{B}}T = \mathcal{D}_s/2\pi$, ce qui donne :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_0} + 4\pi^3 y_0^2 \int_a^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2\pi K_0 - 3} \, \frac{\mathrm{d}r}{a}. \tag{IV.80}$$

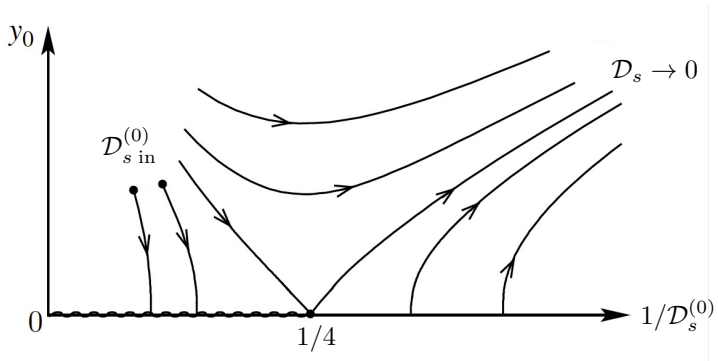


FIGURE IV.9. *Trajectoires dans le plan* $\left[\mathcal{D}_s^{(0)}, y_0\right]$ *obtenues par action de la procédure de renormalisation. Figure adaptée de* KARDAR *(2007).*

(1977) et JOSÉ, KADANOFF et al. (1977), est devenu un classique des ouvrages sur la théorie statistique des champs. Indiquons simplement ici les principaux résultats, illustrés sur la figure IV.9 :

— Si on part d'une densité superfluide $\mathcal{D}_s^{(0)} < 4$, alors on finit toujours avec une densité superfluide nulle.

— Si on part d'une densité superfluide $\mathcal{D}_s^{(0)} > 4$ et une fugacité y_0 assez basse (*i.e.* , créer un vortex coûte une énergie significative), alors on termine la procédure de renormalisation toujours avec $\mathcal{D}_s^{(0)} > 4$ et une fugacité nulle : les vortex ont été « effacés » et le gaz est superfluide.

— Si on part d'une densité superfluide $\mathcal{D}_s^{(0)} > 4$, mais avec une grande fugacité pour les vortex (*i.e.* , créer un vortex ne coûte presque rien en énergie en comparaison à $k_{\mathrm{B}}T$), on termine dans un état non superfluide. Notons toutefois que la conclusion pour cette situation peut être relativisée pour des systèmes de taille finie, car la limite de la procédure de renormalisation n'est pas forcément atteinte.

La transition BKT à laquelle on aboutit quand $\mathcal{D}_s$ décroît pour atteindre la valeur critique

$$\mathcal{D}_{s,\,\mathrm{crit.}} = 4 \tag{IV.89}$$

est très différente des transitions de phase du premier ou du deuxième ordre ordinaires :

— Tout d'abord, toutes les fonctions thermodynamiques sont continues et dérivables au point de transition : nous n'avons pas trouvé la transition BKT en recherchant des singularités de l'énergie libre et de ses dérivées par rapport aux variables thermodynamiques usuelles (potentiel chimique et température). Il n'y a donc pas d'exposants critiques associés à la transition. En revanche la densité superfluide est discontinue, puisqu'elle passe de la valeur 4 à la valeur 0 en ce point. Ce saut est souvent qualifié « d'universel » car son amplitude $\Delta\mathcal{D}_s = 4$ est indépendante de la force des interactions $\tilde{g}$. Nous avions pressenti ce résultat quand nous avions analysé la probabilité qu'un vortex libre apparaisse dans l'échantillon.

— Ce saut de la densité superfluide s'accompagne d'un changement de comportement de la fonction à un corps. Pour $T < T_c$, dans la zone superfluide, la fonction $G_1(r)$ décroît algébriquement ; c'est le quasi-ordre à longue portée que nous avons étudié au cours précédent. Pour $T > T_c$, dans la zone normale, la fonction G_1 décroît exponentiellement avec la distance. En effet les vortex isolés prolifèrent dans le gaz et on ne peut pas avoir de cohérence de phase significative entre deux points si la probabilité d'avoir un vortex entre ces deux points est elle-même significative.

— On peut montrer que cette transition « d'ordre infini » est caractérisée par une divergence extrêmement forte de la longueur de corrélation quand on approche du côté $T > T_c$. La fonction $G_1(r)$ décroît exponentiellement dans cette zone non superfluide, $G_1(r) \propto e^{-r/\ell}$, mais la longueur de décroissance augmente rapidement :

$$\ell \sim \lambda_T \exp\left(\frac{\sqrt{\zeta\, T_{\mathrm{BKT}}}}{\sqrt{T - T_{\mathrm{BKT}}}}\right) \tag{IV.90}$$

où ζ est une constante. La taille de la région critique est donc augmentée par rapport à une transition conventionnelle, ce qui fait jouer aux effets de taille finie un rôle plus important.

4-5 Premières études expérimentales : films d'hélium

Cinq ans après les articles théoriques de BKT, BISHOP & REPPY (1978) sont venus apporter une très belle confirmation expérimentale de l'exis-

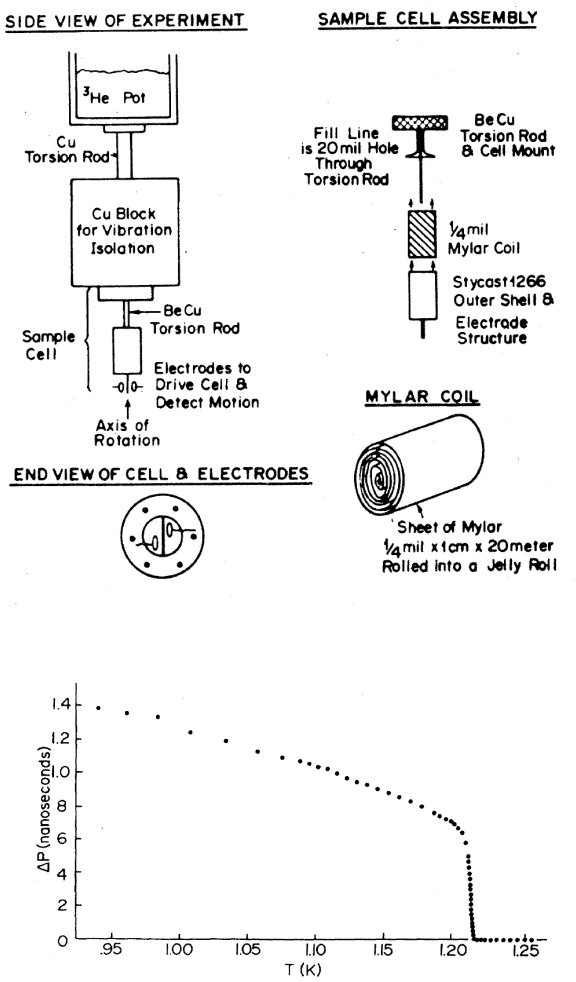


FIGURE IV.10. *Haut : schéma expérimental utilisé par* BISHOP & REPPY *(1978). Une feuille de Mylar de surface $\sim 0.4\,m^2$ est recouverte d'un film d'hélium liquide. L'épaisseur de ce film est de l'ordre de quelques couches atomiques seulement. La feuille de Mylar est montée sur un pendule de torsion pour mesurer le moment d'inertie de l'ensemble Mylar+film d'hélium. Bas : Exemple de résultat pour la période du pendule de torsion en fonction de la température du système. La transition superfluide se manifeste par une réduction soudaine du moment d'inertie. Figures extraites de* BISHOP & REPPY *(1978) et* BISHOP, KRUMHANSL *et al. (1980).*

tence d'une transition superfluide dans des films d'hélium liquide. Ces expériences, décrites de manière détaillée dans BISHOP, KRUMHANSL et al. (1980), puis AGNOLET, MCQUEENEY et al. (1989), sont faite en déposant une très fine couche d'atomes d'hélium (entre 1 et 10 couches atomiques) sur une feuille de Mylar. Cette feuille d'épaisseur 6 μm, est enroulée sur elle-même et a une surface totale de $0.4\,m^2$ dans les expériences de 1978 [$2\,m^2$ pour AGNOLET, MCQUEENEY et al. (1989)].

La superfluidité éventuelle du film d'hélium est testée en mettant la feuille de Mylar en mouvement et en mesurant si le film d'hélium adsorbé sur cette surface se met également en mouvement. Si c'est le cas, c'est que le fluide est normal. Si au contraire une fraction du fluide reste au repos, on a affaire à un superfluide. Pour effectuer une mesure précise, on relie la feuille de Mylar à un pendule de torsion de haut facteur de qualité, $Q > 10^5$ (expérience d'Andronikashvili). La fréquence d'oscillation de l'ensemble est aux alentours de 2.6 kHz et on la mesure avec une précision relative excellente, de l'ordre de $5\ 10^{-9}$. La période d'oscillation, autour de 380 μs, est donc obtenue avec une précision de 2 picosecondes !

Un exemple de variation de cette période avec la température, pour un film d'épaisseur donnée, est montré sur la figure IV.10. On y voit une période constante à "haute" température, $T > 1.22$ K, puis un saut de cette période d'environ 6 ns, correspondant à une réduction du moment d'inertie du système. Cela s'interprète comme le fait qu'une partie du film d'hélium est devenue superfluide et que la masse correspondante n'oscille donc pas. Quand on refroidit davantage le film, la réduction de période s'accroît, indiquant qu'une fraction de plus en plus grande du film devient superfluide.

Dans la mesure où la mesure de la fraction superfluide est faite autour de la fréquence de 2.6 kHz et non à fréquence nulle, il est nécessaire pour rendre compte quantitativement de cette expérience de reprendre la théorie BKT pour lui ajouter l'aspect dynamique lié aux mouvements des vortex. Cette extension a été faite par AMBEGAOKAR, HALPERIN et al. (1978) et l'accord avec les mesures expérimentales est excellent (figure IV.11). Elle explique en particulier pourquoi on n'observe pas un saut au sens strict de la densité superfluide correspondant à $\Delta\mathcal{D}_s = 4$, mais plutôt une variation rapide sur une plage de l'ordre de 5 mK. La répétition de ces mesures pour différentes quantités d'hélium déposées sur la feuille de Mylar est présen-

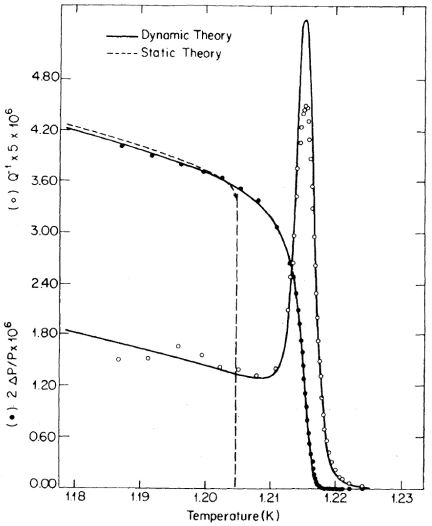


FIGURE IV.11. *Ajustement des données expérimentales avec la théorie BKT dynamique de* AMBEGAOKAR, HALPERIN *et al. (1978). La courbe en pointillé représente la théorie BKT statique que nous avons étudiée dans ce chapitre. Les données en symboles ouverts représente l'excès de dissipation Q^{-1} dû au superfluide (non discuté dans ce cours). Figure extraite de* BISHOP & REPPY *(1978).*

tée sur la figure IV.12. Chaque épaisseur correspond à un couple "température critique – saut $\Delta\rho_s$", et BISHOP & REPPY (1978) ont pu vérifier que la loi attendue $\Delta\rho_s \propto T$ était effectivement satisfaite.

Cristaux d'hélium et transition rugueuse. Un autre exemple de transition de type BKT qui se manifeste dans l'hélium froid est la transition rugueuse. Cette transition se produit à l'interface entre le superfluide ^{4}He et un cristal d'hélium. En dessous de la température critique, une facette plate se développe dans la direction de croissance ; au dessus de T_c, la surface est rugueuse. Les expériences ont confirmé plusieurs des caractéristiques de la transition BKT, en mesurant par exemple la vitesse de croissance du cristal en fonction de la température (BALIBAR & CASTAING 1980 ; WOLF, BALIBAR et al. 1983 ; WOLF, GALLET et al. 1985 ; GALLET, BALIBAR et al. 1987).

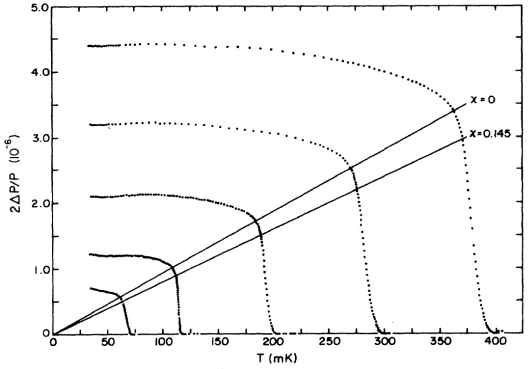


FIGURE IV.12. *Mesure de la transition BKT pour différentes quantités d'hélium adsorbées sur le Mylar, montrant le déplacement de la température de transition T_c et le saut de la densité superfluide ρ_s. La loi $\Delta\rho_s \propto T$ prédite par la théorie BKT correspond aux lignes droites en trait plein. Le paramètre phénoménologique χ appelé* obstruction géométrique *(*geometric hindrance*) représente la fraction de superfluide qui n'est pas libre de se déplacer par rapport au Mylar du fait d'imperfections dans l'enroulement de la feuille ; sa valeur expérimentale, mesurée indépendamment, est de 0.145. Figure extraite de* AGNOLET, MCQUEENEY *et al. (1989)*

Films d'hydrogène. Pour terminer, citons l'étude d'un gaz bidimensionnel d'hydrogène adsorbé à la surface d'un bain d'hélium liquide (SAFONOV, VASILYEV et al. 1998). Les atomes d'hydrogène « flottent » au dessus du bain à une distance de l'ordre de 8 micromètres. Ils ne forment pas un gaz stable : dans une collision à trois corps, deux atomes peuvent se recombiner pour former une molécule H_2, le troisième corps emportant l'énergie libérée. Le taux de processus à trois corps varie comme $\langle\rho^3\rangle$; dans un gaz « ordinaire », les fluctuations de densité conduisent à $\langle\rho^3\rangle \approx 3!\,(\langle\rho\rangle)^3$. Pour un gaz où les fluctuations de densité sont gelées (quasi-condensat), on s'attend à $\langle\rho^3\rangle \approx (\langle\rho\rangle)^3$, soit une réduction de $3! = 6$. SAFONOV, VASILYEV et al. (1998) ont effectivement mesuré une réduction du taux de pertes d'environ un ordre de grandeur

en refroidissant le gaz à une température comparable à celle prévue par la théorie BKT.

Chapitre V

La transition BKT explorée avec des gaz d'atomes ou de polaritons

Aux chapitres précédents, nous avons montré l'existence d'une transition superfluide dans un gaz de Bose 2D. Le régime superfluide obtenu à basse température est caractérisé par un quasi-ordre à longue portée : la fonction $G_1(r)$ décroît algébriquement avec r ; à haute température, le régime normal correspond à une décroissance exponentielle de G_1. Nous avons également établi qu'au point de transition, la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D}_s$ associée à la fraction superfluide saute de la valeur 4 à la valeur 0.

Le but de ce chapitre est de montrer comment les gaz dilués formés d'atomes ou de particules composites matière–lumière permettent de tester ces différentes propriétés. Nous commençons par revenir sur le formalisme de champ classique pour déterminer la position du point de transition en termes des variables thermodynamiques "usuelles", densité totale, température, potentiel chimique. Nous décrivons ensuite une série d'expériences récentes menées sur des gaz d'atomes bosoniques ou fermioniques (mais pouvant former des molécules diatomiques qui seront donc des bosons) et qui ont permis de tester à la fois la position du point critique et les propriétés du gaz de part et d'autre de ce point. Nous terminons par la description de quelques expériences de même nature menées sur les polaritons de cavité.

Notons que nous nous limiterons dans ce chapitre au cas d'un plan unique ou de plans indépendants. Nous n'aborderons donc pas la question (pourtant intéressante !) de la transition entre la situation 2D et la situation 3D, obtenue par exemple quand on introduit un couplage entre des plans parallèles entre eux (CAZALILLA, IUCCI et al. 2007).

1 Lois d'échelle au point critique

La relation $\rho_s \lambda_T^2 = 4$ reliant la densité superfluide et la température de transition est universelle, dans la mesure où elle ne dépend pas de la force des interactions, caractérisée par le paramètre $\tilde{g}$ introduit au chapitre précédent. Néanmoins cette relation est incomplète car elle ne donne pas la relation entre la densité totale ρ et la température critique. Il s'agit d'une relation implicite où ρ_s dépend elle-même de la température et elle doit donc être écrite

$$\rho_s(T_c)\, \lambda_{T_c}^2 = 4 \qquad \text{avec} \quad \lambda_T^2 = \frac{2\pi\hbar^2}{m k_{\mathrm{B}} T}. \tag{V.1}$$

Pour déterminer la densité totale au point critique, il faut revenir au modèle microscopique qui régit la dynamique de notre gaz en interaction, comme cela a été fait initialement par FISHER & HOHENBERG (1988). Nous décrivons ici l'approche développée par PROKOF'EV, RUEBENACKER et al.

(2001) et PROKOF'EV & SVISTUNOV 2002, qui est basée sur la modélisation du gaz par un champ classique $\psi(\boldsymbol{r})$.

1-1 Thermodynamique du champ classique

Nous avons déterminé au chapitre 3 la fonctionnelle d'énergie associée au champ ψ décrivant le fluide à N particules :

$$E[\psi] = \frac{\hbar^2}{2m}\int \left[|\boldsymbol{\nabla}\psi|^2 + \tilde{g}\,|\psi(\boldsymbol{r})|^4\right]\,\mathrm{d}^2r, \qquad N = \int |\psi(\boldsymbol{r})|^2\,\mathrm{d}^2r, \tag{V.2}$$

l'intégrale spatiale étant prise sur une surface $L\times L$. Nous avons montré que les excitations pouvaient se décrire à l'approximation de Bogoliubov par des ondes planes de vecteur d'onde $\boldsymbol{q}$ et de pulsation ω_q :

$$\omega_q = \frac{\hbar}{2m}\left[q^2\left(q^2+4\tilde{g}\rho\right)\right]^{1/2} \qquad \text{avec} \quad \rho = \frac{N}{L^2}. \tag{V.3}$$

L'énergie totale du gaz s'écrit alors comme la somme de l'énergie d'interaction du gaz au repos E_0 et des énergies $\epsilon_{\boldsymbol{q}}$ associées aux différents modes de Bogoliubov :

$$E \approx E_0 + E_{\mathrm{Bog}} \qquad \text{avec} \quad E_0 = \frac{\hbar^2}{2mL^2}\tilde{g}N^2, \quad E_{\mathrm{Bog}} = \sum_{\boldsymbol{q}}\epsilon_{\boldsymbol{q}}. \tag{V.4}$$

Coupure ultraviolette. Rappelons que cette approche champ classique nécessite la mise en place d'une coupure ultra-violette pour éviter les divergences de type corps noir. Cette divergence peut être mise à $\hbar\omega_{q,\,\max}\sim k_{\mathrm{B}}T$, puisque c'est au niveau de $\hbar\omega\sim k_{\mathrm{B}}T$ que l'approche correcte (champ quantique) vient limiter la contribution des modes par le facteur $\mathrm{e}^{-\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T}$ (*cf.* chapitre 3, §1-2). Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à un domaine de température tel que $k_{\mathrm{B}}T \gg \frac{\hbar^2}{m}\tilde{g}\rho$. Cela entraîne que la coupure se situe dans la zone où la relation de Bogoliubov correspond au régime de particule libre [1], $\omega_q \approx \hbar q^2/(2m)$:

$$\frac{\hbar^2 q_{\max}^2}{2m} \equiv \zeta\; k_{\mathrm{B}}T. \tag{V.5}$$

1. Cette hypothèse correspond à la plupart des régimes expérimentaux étudiés jusqu'à maintenant, mais il ne serait pas difficile de se placer dans le régime opposé d'une coupure située dans la plage du régime de phonons $\omega_q \approx c_0 q$.

où le nombre sans dimension ζ est d'ordre 1, sans qu'on puisse lui assigner une valeur plus précise. À chaque fois que ζ interviendra ci-dessous (ce sera à l'intérieur d'un logarithme), il faudra tenir compte de cette imprécision inévitable de notre approche "champ classique".

Énergie libre et potentiel chimique. Nous cherchons à relier entre elles différentes variables thermodynamiques, densité, température, potentiel chimique, pour déterminer la position du point critique en fonction de ces variables. Nous adoptons pour l'instant le point de vue de l'ensemble canonique, en travaillant à température et nombre de particule fixés. Le potentiel chimique μ se déduit alors de l'énergie libre $F(T,N,L^2)$:

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,L^2}, \tag{V.6}$$

l'énergie libre étant elle-même déduite de la fonction de partition $\mathcal{Z}$:

$$F = -k_{\mathrm{B}}T\ln\mathcal{Z}. \tag{V.7}$$

Puisque nous avons décrit (de manière approchée) la dynamique du gaz comme celle d'une somme d'oscillateurs indépendants formés par les modes de Bogoliubov, commençons par rappeler la fonction de partition et l'énergie libre d'un oscillateur de pulsation ω et d'énergie $\epsilon(x,p) = \frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Du fait de l'approximation de champ classique, valable si $\hbar\omega \ll k_{\mathrm{B}}T$, on peut se limiter ici à l'expression classique [2] de cette fonction de partition :

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2\pi\hbar}\int \mathrm{e}^{-\epsilon(x,p)/k_{\mathrm{B}}T}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\omega}. \tag{V.8}$$

dont on déduit l'énergie libre :

$$F = -k_{\mathrm{B}}T\ln\mathcal{Z} = -k_{\mathrm{B}}T\ln\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\omega}\right). \tag{V.9}$$

Comme les modes de Bogoliubov sont indépendants, la fonction de partition s'écrit comme le produit des fonctions de partition associées à chaque

2. On peut bien sûr prendre la version quantique de ce calcul, $\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\epsilon_n/k_{\mathrm{B}}T}$ avec $\epsilon_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$, qui redonne le résultat (V.8) dans la limite $\hbar\omega \ll k_{\mathrm{B}}T$.

mode, et l'énergie libre est obtenue en prenant la somme de ces différentes contributions :

$$F(T,N,L) = E_0 - k_{\rm B}T \sum_{\boldsymbol{q}} \ln\left(\frac{k_{\rm B}T}{\hbar\omega_q}\right). \tag{V.10}$$

Pour obtenir le potentiel chimique, prenons la dérivée de cette fonction par rapport à N à température T et surface L^2 constantes. Pour cela, on utilise en particulier

$$\left.\frac{\partial E_0}{\partial N}\right|_{T,L^2} = \frac{\hbar^2}{mL^2}\tilde{g}N \qquad\qquad \left.\frac{\partial \ln(\omega_q)}{\partial N}\right|_{T,L^2} = \frac{2\tilde{g}}{L^2}\,\frac{1}{q^2+4\tilde{g}\rho} \tag{V.11}$$

puis en remplaçant la somme sur $\boldsymbol{q}$ par une intégrale, on arrive à

$$\begin{aligned}\mu &\approx \frac{\hbar^2}{m}\tilde{g}\rho + \frac{k_{\rm B}T}{2\pi}\,\tilde{g}\int_0^{q_{\rm max}} \frac{2q}{q^2+4\tilde{g}\rho}\,{\rm d}q \\ &\approx \frac{\hbar^2}{m}\tilde{g}\rho + \frac{k_{\rm B}T}{2\pi}\,\tilde{g}\,\ln\left(\zeta\,\frac{k_{\rm B}T}{2\hbar^2\tilde{g}\rho/m}\right),\end{aligned} \tag{V.12}$$

où nous avons donc exprimé le potentiel chimique μ en fonction de la densité ρ.

Cette relation peut également s'écrire en terme de la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} = \rho\lambda_T^2$:

$$\frac{\mu}{k_{\rm B}T} \approx \frac{\tilde{g}}{2\pi}\left[\mathcal{D} \,+\, \ln\left(\zeta\,\frac{\pi}{\tilde{g}\mathcal{D}}\right)\right] \qquad \text{avec} \quad \zeta\sim 1. \tag{V.13}$$

Les relations (V.12) ou (V.13) constituent une *équation d'état* du gaz en interaction, équation qui relie ici la variable thermodynamique μ aux deux autres variables intensives T et ρ.

Remarquons que la validité de l'approximation de Bogoliubov n'est assurée que si le deuxième terme de cette expression est plus petit que le premier. Nous avions en effet trouvé au chapitre 3 que les fluctuations relatives de densité avaient pour expression

$$\frac{\Delta\rho^2}{\rho^2} \approx \frac{2}{\mathcal{D}}\ln\left(\zeta\,\frac{2\pi}{\tilde{g}\mathcal{D}}\right), \tag{V.14}$$

ce qui correspond, à un facteur numérique près, au rapport entre les deux termes de (V.12). Or, il faut que $\Delta\rho \ll \rho$ pour que le développement à la base de la méthode de Bogoliubov soit justifié.

1-2 Densité totale et densité superfluide

On peut inverser la relation (V.13) pour exprimer la densité en fonction du potentiel chimique, ce qui correspond au choix de variables du point de vue grand-canonique. Cette inversion se fait simplement dans la mesure où le deuxième terme de (V.13) est petit devant le premier :

$$\mathcal{D} \approx \frac{2\pi}{\tilde{g}}\,\frac{\mu}{k_{\rm B}T} \,-\, \ln\left(\zeta\,\frac{k_{\rm B}T}{2\mu}\right). \tag{V.15}$$

Nous avons vu au chapitre précédent que le point de transition BKT est repéré par la valeur qu'y prend la densité superfluide. Pour progresser, nous devons donc évaluer cette densité superfluide en fonction des paramètres du modèle de champ classique. Cela peut se faire en première approximation en utilisant la formule de Landau (PITAEVSKII & STRINGARI 2016), adaptée au cas bi-dimensionnel :

$$\rho_s = \rho + \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\hbar^2}{2m}\int \frac{{\rm d}\mathcal{N}}{{\rm d}\epsilon}\,q^2\,{\rm d}^2q, \tag{V.16}$$

où $\mathcal{N}(\epsilon)$ est le nombre d'occupation d'un mode d'excitation ϵ. Nous considérons ici les modes de Bogoliubov comme un champ classique à l'équilibre thermodynamique et de potentiel chimique nul :

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{k_{\rm B}T}{\epsilon} \qquad\to\qquad \frac{{\rm d}\mathcal{N}}{{\rm d}\epsilon} = -\frac{k_{\rm B}T}{\epsilon^2} = -\frac{k_{\rm B}T}{(\hbar\omega_q)^2} \tag{V.17}$$

L'intégrale sur les modes q donne alors

$$\mathcal{D}_s \approx \mathcal{D} \,-\, \ln\left(\zeta\,\frac{k_{\rm B}T}{2\mu}\right). \tag{V.18}$$

1-3 Caractérisation du point critique

Supposons qu'il soit légitime d'étendre les résultats (V.15-V.18) jusqu'au point critique où $\mathcal{D}_s = 4$. On arrive alors à l'équation reliant le paramètre d'interaction $\tilde{g}$ au potentiel chimique et à la température :

$$\text{point critique :} \qquad \mathcal{D} - \,\ln\left(\zeta\,\frac{k_{\rm B}T}{2\mu}\right) \approx 4, \tag{V.19}$$

ou encore

$$\text{point critique :} \qquad \frac{\mu}{k_\mathrm{B}T} \approx \frac{\tilde{g}}{\pi}\left[\ln\left(\zeta\,\frac{k_\mathrm{B}T}{2\mu}\right)+2\right] \approx \frac{\tilde{g}}{\pi}\ln\left(\zeta'\,\frac{k_\mathrm{B}T}{\mu}\right), \tag{V.20}$$

où nous avons introduit une constante sans dimension d'ordre unité, $\zeta' = \zeta\,\mathrm{e}^2/2$. Comme nous l'avons fait ci-dessus, nous pouvons inverser[3] cette relation en remplaçant l'argument du logarithme $k_\mathrm{B}T/2\mu$ par $\pi/4\tilde{g}$, ce qui conduit à la loi d'échelle au point critique

$$\left.\frac{\mu}{k_\mathrm{B}T}\right|_\mathrm{crit.} \approx \frac{\tilde{g}}{\pi}\,\ln\left(\frac{C_\mu}{\tilde{g}}\right). \tag{V.22}$$

avec $C_\mu = \pi\zeta'$.

Nous avons donc obtenu la loi d'échelle pour la valeur du paramètre $\mu/k_\mathrm{B}T$ au point critique en fonction de la force des interactions. Notons que la valeur précise de la constante C_μ n'est pas accessible dans le cadre de notre modèle, car la précision de la coupure ultra-violette que nous avons mise à la main via le paramètre ζ n'est pas suffisante pour déterminer la valeur correcte de C_μ (*i.e.* à mieux qu'un facteur 2 ou 3 près).

On peut ensuite injecter ce résultat dans l'expression (V.15) de la densité dans l'espace des phases. En utilisant (V.15), on trouve

$$\text{point critique :} \qquad \mathcal{D} \approx 2\ln\left(\frac{C_\mu}{\tilde{g}}\right) - \ln\left(\zeta\,\frac{k_\mathrm{B}T}{2\mu}\right) \approx 2\ln\left(\frac{C_\mu}{\tilde{g}}\right) - \ln\left(\frac{\pi}{2\tilde{g}}\right), \tag{V.23}$$

où l'on a négligé un terme en $\ln[\ln(\tilde{g})]$. On obtient finalement :

$$\mathcal{D}|_\mathrm{crit.} \approx \ln\left(\frac{C_\mathcal{D}}{\tilde{g}}\right), \tag{V.24}$$

où $C_\mathcal{D} = 2C_\mu^2/\pi$ est une autre constante numérique. Cette loi d'échelle était absente du résultat du cours précédent, qui ne portait que sur la valeur de $\mathcal{D}_s$. Comme pour C_μ, l'imprécision amenée par notre coupure ultra-violette est telle que nous ne pouvons pas faire mieux qu'évaluer l'ordre de grandeur de cette constante (de l'ordre d'une ou quelques centaines).

Pour déterminer la valeur de ces constantes C_μ et $C_\mathcal{D}$, PROKOF'EV, RUEBENACKER et al. (2001) ont mené des simulations de champ classique qu'ils ont raccordées de manière précise au résultat quantique asymptotique pour une particule libre aux grands ω. Cela leur a permis de caractériser précisément la position du point critique pour une force d'interaction $\tilde{g}$ donnée :

$$\mathcal{D}|_\mathrm{crit.} \approx \ln\left(\frac{380}{\tilde{g}}\right) \tag{V.25}$$

$$\left.\frac{\mu}{k_\mathrm{B}T}\right|_\mathrm{crit.} \approx \frac{\tilde{g}}{\pi}\,\ln\left(\frac{13.2}{\tilde{g}}\right) \tag{V.26}$$

Le domaine de validité de cette approche de champ classique est limité au cas de faible interaction $\tilde{g} \ll 1$. Une borne supérieure sur les valeurs de $\tilde{g}$ est obtenue en comparant la densité dans l'espace des phases totale donnée en (V.25) à la densité superfluide au point critique, $\mathcal{D}_s = 4$. Comme il faut bien évidemment que $\mathcal{D} > \mathcal{D}_s$, ceci impose $\tilde{g} < 7$. On retrouve ici la critère d'interactions fortes $\tilde{g} \gtrsim 2\pi$ donné précédemment. Pour les expériences d'atomes froids ou de polaritons usuelles, $\tilde{g}$ varie entre 0.01 et 1, de sorte que la densité dans l'espace des phases au point critique varie entre 10.5 et 6. La densité superfluide $\mathcal{D}_s = 4$ représente donc entre $40\,\%$ et $70\,\%$ de la densité totale en ce point.

Le résultat de PROKOF'EV, RUEBENACKER et al. (2001) obtenu à partir de simulations de champs classiques a ensuite été confirmé (pour $\tilde{g}$ suffisamment petit) par des approches Monte Carlo quantique et par la méthode du groupe de renormalisation non perturbatif (PILATI, GIORGINI et al. 2008 ; HOLZMANN & KRAUTH 2008 ; RANÇON & DUPUIS 2012).

3. Cette inversion se fait de manière rigoureuse en passant par la fonction de Lambert, $w = W(z)$, où w est solution de l'équation $z = w\mathrm{e}^w$, avec ici $z = \zeta'\pi/\tilde{g}$ et $w = \ln(\zeta'\,k_\mathrm{B}T/\mu)$. Le développement asymptotique aux grands z :

$$W(z) \sim \ln(z) - \ln[\ln(z)] + \frac{\ln[\ln(z)]}{\ln(z)} + \dots \tag{V.21}$$

conduit alors (V.22).

2 Le point critique d'un gaz atomique piégé

Jusqu'ici, notre analyse de la transition BKT a été menée pour un gaz homogène et infini. Or la plupart des expériences sur les gaz atomiques sont menées dans des pièges harmoniques. Le but de ce paragraphe est d'étudier la connexion entre les deux problèmes, en utilisant *l'approximation de densité locale*. Nous pourrons ainsi faire le lien entre la condensation de Bose–Einstein trouvée au chapitre 2 pour un gaz parfait confiné dans un potentiel harmonique et la transition BKT obtenue pour un gaz réel.

2-1 L'approximation de densité locale

Nous avons déjà rencontré l'approximation de densité locale au chapitre 2, lors de notre étude du gaz parfait. Son principe se généralise directement au cas d'un fluide en interaction. Partons d'une assemblée de particules confinées dans un potentiel $V(\boldsymbol{r})$ et à l'équilibre thermodynamique. Cet équilibre est caractérisé (par exemple) par les deux variables T (température) et μ (potentiel chimique). L'approximation de densité locale consiste à poser que les quantités physiques définies localement, la densité spatiale $\rho(\boldsymbol{r})$ par exemple, s'expriment en fonction du résultat connu pour le gaz homogène (*cf.* figure V.1)

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \rho_{\text{hom.}}(T_{\text{hom.}}, \mu_{\text{hom.}}) \tag{V.27}$$

avec

$$T_{\text{hom.}} = T \qquad \mu_{\text{hom.}} = \mu - V(\boldsymbol{r}). \tag{V.28}$$

Pour simplifier l'écriture, nous poserons $V(0) = 0$ dans ce qui suit.

Pour un fluide classique, cette approximation est fondée sur la forme de la fonction de partition

$$Z = \int \exp\left\{-E[\{\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{p}_j\}]/k_{\text{B}}T\right\} \prod_j \mathrm{d}^2 r_j \, \mathrm{d}^2 p_j \tag{V.29}$$

avec pour le système homogène

$$E_{\text{hom}}[\{\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{p}_j\}] = \sum_j \left(\frac{p_j^2}{2m} - \mu\right) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \mathcal{V}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \tag{V.30}$$

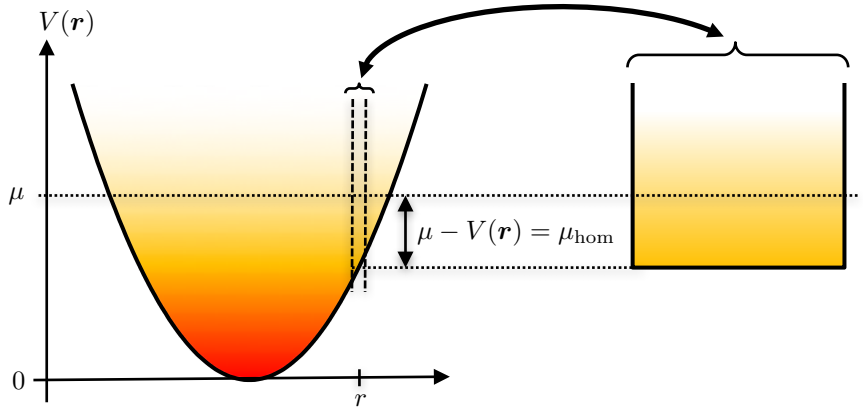


FIGURE V.1. *Principe de l'approximation de densité locale : l'état d'équilibre du gaz au point $\boldsymbol{r}$ dans un piège $V(r)$ est similaire à celui d'un gaz homogène de même température et de potentiel chimique $\mu_{\text{hom.}} = \mu - V(\boldsymbol{r})$.*

et pour le système confiné dans le potentiel $V(\boldsymbol{r})$:

$$E[\{\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{p}_j\}] = \sum_j \left(\frac{p_j^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}_j) - \mu\right) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \mathcal{V}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j). \tag{V.31}$$

Cette approximation est valable si la portée du potentiel d'interaction $\mathcal{V}$ et le libre parcours moyen sont petits devant l'échelle spatiale de variation de la densité dans le potentiel de confinement $V(\boldsymbol{r})$. Pour un fluide de particules quantiques, il faut en plus passer par une approximation semi-classique, pour transformer la somme sur les énergies de la fonction de partition, en une intégrale sur les positions et les vitesses (GIORGINI, PITAEVSKII et al. 1997 ; HOLZMANN, CHEVALLIER et al. 2008) .

2-2 Faibles densités et approche de Hartree–Fock

Dans un piège à "bord mou", un piège harmonique par exemple, la densité décroît graduellement quand on s'éloigne du centre. Les régions les plus lointaines ont un potentiel chimique local $\mu - V(\boldsymbol{r})$ négatif, et grand

en valeur absolue devant $k_{\rm B}T$, ce qui correspond à un gaz très dilué. En première approximation, on peut traiter ce gaz comme un gaz parfait et utiliser la relation que nous avions obtenue dans le cours 2 :

$$\rho(\boldsymbol{r})\,\lambda_T^2 = -\ln\left(1 - Z\,\mathrm{e}^{-V(\boldsymbol{r})/k_{\rm B}T}\right) \qquad \text{avec} \quad Z = \mathrm{e}^{\mu/k_{\rm B}T}. \tag{V.32}$$

On peut améliorer cette approximation en ajoutant à l'énergie de piégeage $V(\boldsymbol{r})$ une estimation de l'énergie $\epsilon_{\rm int}$ nécessaire pour insérer une nouvelle particule du fait des interactions. On sait que l'énergie totale d'interaction pour N particules vaut

$$E_{\rm int} = \frac{\hbar^2\tilde{g}}{2m}\int \rho^2(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^2r = \frac{\hbar^2\tilde{g}}{2m}\,L^2\,\langle\rho^2\rangle. \tag{V.33}$$

Dans le régime très dilué qui nous intéresse ici, les fluctuations de densité sont telles que [*cf.* chapitre 2 et cours 2015-16, chapitre 3] :

$$\text{régime très dilué :} \qquad \langle\rho^2\rangle = 2\,\left(\langle\rho\rangle\right)^2 \tag{V.34}$$

de sorte que

$$E_{\rm int} \approx \frac{\hbar^2\tilde{g}}{mL^2}\,N^2 \qquad\qquad \epsilon_{\rm int} = \frac{\partial E_{\rm int}}{\partial N} = 2\,\frac{\hbar^2\tilde{g}}{m}\,\rho. \tag{V.35}$$

L'ajout de l'énergie d'interaction $\epsilon_{\rm int}$ conduit à une équation implicite, où la densité locale $\rho(\boldsymbol{r})$ intervient à la fois dans le membre de gauche et le membre de droite

$$\rho(\boldsymbol{r})\,\lambda_T^2 = -\ln\left(1 - Z\,\mathrm{e}^{-\left[V(\boldsymbol{r})+2\frac{\hbar^2\tilde{g}}{m}\rho(\boldsymbol{r})\right]/k_{\rm B}T}\right). \tag{V.36}$$

Cette équation est un exemple d'approche de type Hartree–Fock pour le problème à N corps. On pourra consulter l'article de revue HADZIBABIC & DALIBARD (2011) et les références qu'il contient pour avoir plus de détails sur cette approche, en particulier concernant la prise en compte [4] des niveaux excités selon la direction fortement confinée z.

4. Cette prise en compte fait apparaître un phénomène intéressant, la *condensation transverse*. La statistique de Bose conduit à une accumulation de particules dans l'état fondamental du mouvement selon z, avec un taux d'occupation bien supérieur à ce que l'on attendrait pour des particules obéissant à la statistique de Boltzmann. Ce phénomène, prédit par DRUTEN & KETTERLE (1997) a été observé pour un gaz quasi 1D par ARMIJO, JACQMIN et al. (2011), puis par RUGWAY, MANNING et al. (2013), et pour le cas 2D qui nous intéresse ici par CHOMAZ, CORMAN et al. (2015).

Cette équation n'admet pas de solution analytique, mais il est aisé de la résoudre numériquement en tout point $\boldsymbol{r}$, pour une température T et un potentiel chimique μ donnés. On peut ensuite trouver le nombre d'atomes total $N(T,\mu)$ dans le piège en intégrant $\rho(\boldsymbol{r})$.

Le résultat de ce calcul est à première vue très surprenant, car radicalement différent du résultat pour un gaz parfait. Dès que $\tilde{g} \neq 0$, on trouve dans le cadre de cette approche Hartree–Fock que

— L'équation (V.36) admet une solution quelle que soit la valeur de μ, alors que pour le gaz parfait, seules les valeurs négatives de μ sont acceptables.

— À température fixée, le nombre d'atomes $N(T,\mu)$ peut devenir arbitrairement grand si on augmente le potentiel chimique.

En d'autres termes, le phénomène de saturation que l'on avait trouvé pour un gaz parfait dans un piège harmonique 2D disparaît dès que l'on prend en compte des interactions répulsives.

Toutefois, le paradoxe n'est qu'apparent (HOLZMANN, BAYM et al. 2007). Lors de notre étude du gaz idéal, nous avions souligné le caractère singulier de la condensation dans un piège harmonique 2D : le point de condensation est atteint quand la densité centrale devient infinie, ce qui est très différent du cas 3D où il suffit que la densité atteigne une valeur de l'ordre de λ_T^{-3}. Dès que l'on prend en compte les interactions répulsives, on ne peut plus atteindre une densité infinie au centre du piège et la possibilité de condensation disparaît, au moins dans le cadre de cette approche Hartree–Fock qui ne prend pas en compte la transition BKT. Au contraire dans le cas 3D, la présence d'interactions répulsives n'empêche pas d'atteindre une densité $\sim \lambda_T^3$ au centre du piège ; l'approche Hartree-Fock prédit simplement qu'il faut mettre un peu plus d'atomes dans le piège que pour le cas sans interaction pour atteindre ce seuil.

Régime présuperfluide. Quand on augmente la densité du fluide, les interactions répulsives prennent une importance croissante et viennent réduire fortement les fluctuations de densité, de sorte qu'on a pour ce régime

$$\text{régime présuperfluide :} \qquad \langle\rho^2\rangle \approx \left(\langle\rho\rangle\right)^2. \tag{V.37}$$

Ce phénomène de gel des fluctuations de densité se produit avant même de croiser la transition superfluide. On parle alors de régime "quasi-condensé" (KAGAN, KASHURNIKOV et al. 2000) ou "présuperfluide" (TUNG, LAMPORESI et al. 2010), c'est-à-dire un milieu où les fluctuations de densité sont réduites par rapport au cas du gaz parfait et pour lequel on peut donc définir, au moins localement, une phase pour la fonction d'onde macroscopique.

2-3 Le point critique dans un piège harmonique

Nous considérons à partir de maintenant un piégeage harmonique de pulsation ω dans le plan xy. Commençons par rappeler le résultat trouvé dans cette situation pour le gaz parfait. Nous avons montré au chapitre 2 que lorsque le nombre d'atomes dans le piège excède la valeur critique :

$$N_{\mathrm{c,ideal}} = \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\omega}\right)^2, \tag{V.38}$$

alors la population des états excités est saturée : les atomes en excès s'accumulent nécessairement dans l'état fondamental. Ce scénario est similaire à celui de la condensation de Bose–Einstein 3D, à une différence importante près : la densité centrale au point critique est infinie lorsqu'on passe à la limite thermodynamique $N \to \infty$, $\omega \to 0$, $N\omega^2$ constant. Nous avions signalé au chapitre 2 que cette valeur infinie était forcément problématique en présence d'interactions répulsives et que la condensation de Bose–Einstein serait donc bloquée dans un piège harmonique à 2D.

L'existence de la transition BKT vient enrichir considérablement la situation, puisqu'elle se produit pour la densité spatiale donnée en (V.25), $\rho = \frac{1}{\lambda_T^2}\ln(380/\tilde{g})$. Si l'approximation de densité locale est correcte, elle entraîne que le centre du gaz piégé va devenir superfluide quand la densité en $\boldsymbol{r} = 0$ atteindra cette valeur critique. En utilisant l'approche "champ classique" décrite en § 1, HOLZMANN, CHEVALLIER et al. (2010) ont montré que ce seuil était atteint pour

$$\frac{N_{\mathrm{c,BKT}}}{N_{\mathrm{c,ideal}}} \approx 1 + \frac{3\,\tilde{g}}{\pi^3}\ln^2\left(\frac{\tilde{g}}{16}\right) + \frac{3\,\tilde{g}}{8\pi^2}\left[15 + \ln\left(\frac{\tilde{g}}{16}\right)\right]. \tag{V.39}$$

Au delà de sa structure mathématique quelque peu compliquée, cette équation a le grand mérite de connecter directement la transition superfluide BKT à la condensation du gaz parfait : cette condensation apparaît comme résultant de la limite $\tilde{g} \to 0$, à température fixée. Dans cette limite, la densité centrale critique pour atteindre la superfluidité, $\rho(0) = \frac{1}{\lambda_T^2}\ln(380/\tilde{g})$ devient de plus en plus grande, pour finalement diverger en $\tilde{g} = 0$, redonnant ainsi le cas du gaz parfait.

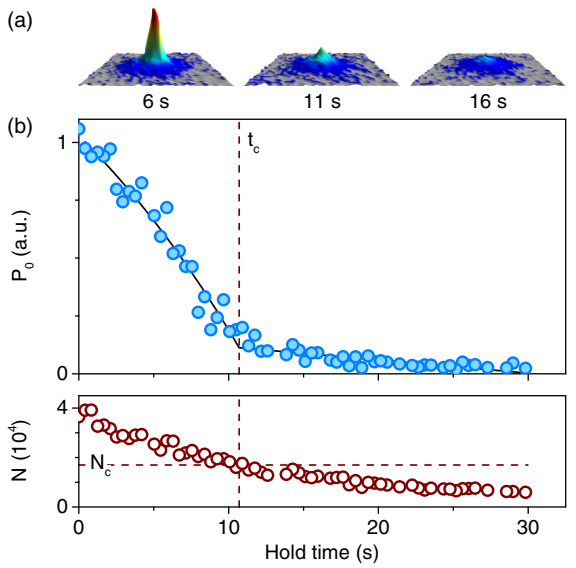


FIGURE V.2. *Méthode utilisée par* FLETCHER, ROBERT DE SAINT VINCENT *et al. (2015) pour mesurer le point critique de la transition BKT dans un piège harmonique 2D ($\nu_{xy} = 38\,$Hz). Le gaz est ≈ dans le régime 2D car la température $T \sim 150\,nK$ est telle que $k_{\mathrm{B}}T < h\nu_z$, avec $\nu_z = 4.1\,$kHz.*

L'étude expérimentale de ce point critique pour un gaz de Bose a été faite par plusieurs groupes au cours des dix dernières années, avec une précision croissante dans la détermination du point de transition (KRÜGER, HADZIBABIC et al. 2007 ; CLADÉ, RYU et al. 2009 ; TUNG, LAMPORESI et al. 2010 ; FLETCHER, ROBERT DE SAINT VINCENT et al. 2015). Nous décrirons ici les résultats de l'expérience de FLETCHER, ROBERT DE SAINT VINCENT et al. (2015), menée à Cambridge sur un gaz d'atomes de ^{39}K (bosons). Le

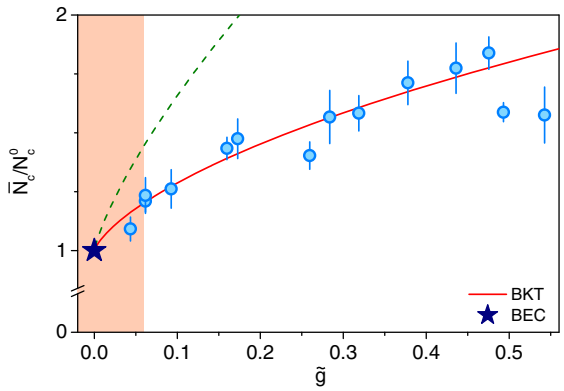


FIGURE V.3. *Nombre critique d'atomes pour la transition BKT, ramené au nombre critique d'atomes pour la condensation du gaz parfait, en fonction du paramètre d'interaction $\tilde{g}$. Dans la zone colorée, la densité dans l'espace des phases au point critique $\mathcal{D} = \ln(380/\tilde{g})$ devient grande. De ce fait, la longueur de cohérence du gaz $\ell \sim \lambda_T \, \mathrm{e}^{\mathcal{D}/2}$ (chapitre 2) est elle aussi très grande avant même d'atteindre le point critique, ce qui rend la détermination du point critique imprécise [figure extraite de* FLETCHER, ROBERT DE SAINT VINCENT *et al. (2015)].*

principe est d'effectuer une expansion ballistique [5] du gaz, en coupant soudainement le potentiel harmonique de confinement. Si un superfluide est présent dans la région centrale du piège, la fonction de corrélation $G_1(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{r}')$ dans cette zone décroît lentement [6] . La distribution en impulsion associée à cette composante superfluide est donc étroite, ce qui se manifeste par un pic central dans la distribution spatiale mesurée après temps de vol. L'intérêt de mener cette expérience sur l'espèce atomique ^{39}K est que l'on dispose d'une résonance de Feshbach qui permet de varier les interactions élastique entre atomes. Les chercheurs de Cambridge ont ainsi pu explorer le régime $\tilde{g}$ allant de 0.05 à 0.5.

5. L'expansion se fait ici à trois dimensions, c'est-à-dire que l'on relâche à la fois le confinement (faible) dans le plan xy et le confinement (fort) le long de l'axe z. Du fait de la relation de Heisenberg, l'expansion selon z est beaucoup plus rapide que dans le plan xy. La densité atomique chute donc très vite et les interactions ne jouent pas de rôle significatif dans la dynamique en xy à plus long temps.

6. Rappelons que la décroissance serait algébrique avec un exposant $< 1/4$ si le gaz était uniforme.

La méthode utilisée par FLETCHER, ROBERT DE SAINT VINCENT et al. (2015) est la suivante. On part d'un assez grand nombre d'atomes ($N \approx 40\,000$) dans un piège à température T donnée, de l'ordre de 150 nK, et un paramètre d'interaction donné $\tilde{g}$. Une expansion ballistique initiée à cette instant montre un pic étroit, signature d'une fraction centrale superfluide ; le nombre d'atomes est donc plus grand que $N_{\mathrm{c,BKT}}(T, \tilde{g})$ (figure V.2). Si on laisse les atomes dans le piège pendant un certain temps avant d'effectuer l'expansion ballistique, leur nombre va décroître sous l'effet de divers processus inélastiques (constante de temps de l'ordre de la dizaine de secondes). En repérant l'instant où le pic étroit de l'expansion ballistique disparaît, on détermine la valeur critique $N_{\mathrm{c,BKT}}(T, \tilde{g})$ du nombre d'atomes pour la transition superfluide. Cette série d'expériences est ensuite refaite pour différentes valeurs de $\tilde{g}$ et la variation de $N_{\mathrm{c,BKT}}/N_{\mathrm{c,ideal}}$ est reproduite sur la figure V.3. Elle montre un excellent accord avec la prédiction (V.39) et confirme le fait que le cas singulier de la condensation 2D du gaz parfait peut être vu comme la limite de la transition BKT pour $\tilde{g} \to 0$.

2-4 Le cas d'un potentiel désordonné

Dans ce qui précède, nous nous sommes intéressés au cas d'un gaz dans un potentiel uniforme ou harmonique. Une troisième catégorie concerne le cas de potentiels désordonnés. La situation est alors enrichie par le fait qu'une transition de type localisation d'Anderson peut également se produire.

L'étude de la dynamique d'un fluide quantique en présence de désordre déborde largement du thème de ce cours et nous nous contenterons donc de signaler quelques travaux récents menés sur ce sujet dans le cadre des gaz atomiques 2D. L'influence du désordre sur le point de transition BKT a été abordée expérimentalement par le groupe de Thomas Bourdel à Palaiseau (ALLARD, PLISSON et al. 2012) [voir aussi BEELER, REED et al. (2012) au NIST-Gaithersburg et KRINNER, STADLER et al. (2013) à Zurich]. Le désordre est créé par la figure de tavelure (*speckle*) d'un faisceau lumineux additionnel, superposé au piège harmonique. Pour le régime de paramètres étudiés expérimentalement, les résultats obtenus indiquent que l'addition du désordre résulte toujours en une réduction de la cohérence

du gaz. Une étude théorique menée par BOURDEL (2012) à partir d'un traitement du potentiel désordonné par l'approximation de densité locale (valable pour un désordre variant lentement à l'échelle des paramètres microscopiques du gaz) est venue tempérer quelque peu cette conclusion négative ; en effet, son bilan est qu'un désordre faible peut être favorable à l'apparition d'un superfluide, alors qu'un désordre plus fort le fait disparaître.

CARLEO, BOÉRIS et al. (2013) ont utilisé une méthode de Monte Carlo quantique pour prouver la robustesse de la transition BKT vis à vis d'un désordre de type *speckle* : cette transition survit même en présence de fortes fluctuations de densités induites par le désordre, et ne disparaît que lorsque l'amplitude du désordre devient de l'ordre de la valeur du potentiel chimique. CARLEO, BOÉRIS et al. (2013) ont par ailleurs montré que la disparition de la composante superfluide survient alors même que le gaz reste connecté avec une densité supérieure à la densité critique (V.25) : le désordre en ce point n'est pas encore suffisant pour correspondre à la transition de percolation classique. Mentionnons également qu'au point critique, la fonction G_1 présente toujours une décroissance algébrique avec un exposant compatible avec $1/4$, ce qui indique que la classe d'universalité de la transition en présence de désordre est la même que celle du système « propre ».

Signalons pour finir l'analyse de CHERRORET, KARPIUK et al. (2015), basée sur une analyse en champ classique, qui pointe un autre effet possible du désordre : en réduisant la densité d'états à une particule au voisinage de l'énergie nulle, ce désordre peut faire apparaître un phénomène de condensation dans un gaz 2D uniforme, alors qu'on sait que cette condensation est exclue pour un système non désordonné. Il reste toutefois à étudier le type d'ordre qui peut alors émerger pour la fonction $G_1(\boldsymbol{r})$.

3 Le quasi-ordre en phase dans un gaz atomique

3-1 La fonction G_1 dans un piège

Une fois le point critique dépassé, soit en baissant la température, soit en augmentant le nombre d'atomes, un superfluide se forme au centre du piège. Ce superfluide n'est pas *stricto sensu* un condensat, puisque sa phase n'est pas la même en tout point. Si le gaz était uniforme, on sait que la fonction

$$\begin{aligned} G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= \langle \hat\psi^\dagger(\boldsymbol{r})\,\hat\psi(\boldsymbol{r}')\rangle \\ &\propto \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\theta(\boldsymbol{r})-\theta(\boldsymbol{r}')\right]}\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\langle\left[\theta(\boldsymbol{r})-\theta(\boldsymbol{r}')\right]^2\rangle} \end{aligned} \qquad \text{(V.40)}$$

décroitrait algébriquement avec la distance $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$, avec l'exposant

$$\eta = \frac{1}{\rho_s\,\lambda_T^2}, \qquad \text{(V.41)}$$

la denisté superfluide étant telle que η est toujours inférieur à $1/4$. Nous avons supposé dans la deuxième ligne de (V.40) que les fluctuations de densité étaient gelées, ce qui est une approximation raisonnable comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents.

L'analyse du comportement de la fonction G_1 peut se faire en généralisant l'approche de Bogoliubov au cas non homogène (PETROV, HOLZMANN et al. 2000). Puisque les fluctuations de densité sont gelées, le profil de densité du superfluide $\rho_s(\boldsymbol{r})$ reste voisin du profil de Thomas–Fermi attendu dans le cas d'un "vrai" condensat :

$$r < R_{\mathrm{TF}} : \qquad V(r) \;+\; \frac{\hbar^2\tilde g}{m}\rho_s(r) = \mu, \qquad \text{(V.42)}$$

et s'annule au rayon de Thomas-Fermi[7] défini par $V(r_{\mathrm{TF}}) = \mu$. Les fluctuations en phase $\langle[\theta(\boldsymbol{r})-\theta(\boldsymbol{r}')]^2\rangle$ peuvent se caractériser en comparant la phase centrale et la phase au voisinage du bord du superfluide, et on trouve (PETROV, HOLZMANN et al. 2000)

$$\Delta\theta^2 \equiv \langle[\theta(R_{\mathrm{TF}})-\theta(0)]^2\rangle \approx \left(\frac{\tilde g}{4\pi}\right)^{1/2}\,\frac{T}{T_c}\,\ln(N). \qquad \text{(V.44)}$$

7. Un calcul simple permet de relier R_{TF} et μ au nombre d'atomes N_s dans la composante superfluide :

$$R_{\mathrm{TF}} = a_{\mathrm{oh}}\left(\frac{4}{\pi}\,\tilde g N_s\right)^{1/4}, \qquad \mu = \hbar\omega\left(\frac{1}{\pi}\,\tilde g N_s\right)^{1/2} \qquad \text{avec} \quad a_{\mathrm{oh}} = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}, \qquad \text{(V.43)}$$

où ω est la pulsation du piégeage harmonique dans le plan xy, et où on a négligé toute interaction entre la composante superfluide et la composante normale.

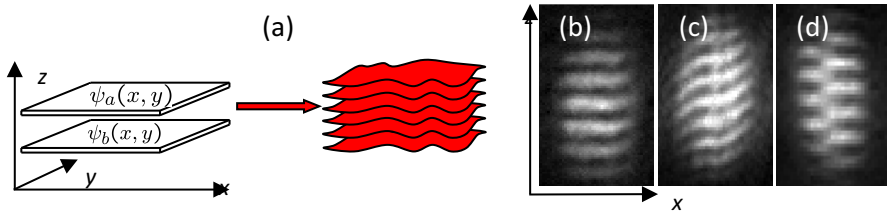


FIGURE V.4. *(a) Interférences entre deux plans atomiques indépendants, de même température et de même potentiel chimique. La mesure du contraste de l'interférence observée après expansion selon l'axe z permet d'accéder au module carré de la fonction de corrélation G_1. (b-c) Figures d'interférence obtenues pour deux températures différentes, en imageant le nuage d'atomes le long de la direction y. (d) Exemple de dislocation de la figure d'interférence révélant la présence d'un vortex dans l'un des deux plans. Figures extraites de* HADZIBABIC, KRÜGER *et al. (2006).*

En prenant $N = 10^5$ atomes, $T \sim T_c$ et un paramètre d'interaction typique pour des gaz atomiques $\tilde{g} = 0.1$, on arrive à $\Delta\theta \sim 1$, donc des fluctuations de phase significatives mais pas considérables. Le régime $\Delta\theta \gg 1$ n'apparaît que pour des nombres d'atomes exponentiellement grands ou alors pour le régime d'interactions fortes $\tilde{g} \gtrsim 1$, ce qui est possible en profitant d'une résonance de diffusion (MURTHY, BOETTCHER et al. 2015).

3-2 Fluctuations de phase et interférométrie atomique

Une caractéristique importante de l'état superfluide à deux dimensions réside dans la distribution spatiale de la phase du champ $\psi(\boldsymbol{r})$ décrivant le fluide, décrite par la fonction de corrélation $G_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$. Lors du cours 2015-16 (chapitre 2), nous avions passé en revue un certain nombre de méthodes développées au cours des années pour mesurer G_1. Nous allons décrire ici la mise en œuvre de de certaines d'entre elles dans le contexte des gaz 2D.

La première caractérisation de la transition BKT a été faite par HADZIBABIC, KRÜGER et al. (2006) en utilisant deux plans d'atomes indépendants, décrits par des champs $\psi_a(x, y)$ et $\psi_b(x, y)$, séparés par une distance d_z (figure V.4). En relâchant le confinement selon les trois directions d'espace, les nuages d'atomes issus des deux plans s'étalent et se recouvrent, de sorte qu'on observe des interférences d'ondes de matière. La densité totale est modulée le long d'une ligne parallèle à l'axe z avec la période $D_z = ht/md_z$:

$$\rho(\boldsymbol{r}) \;\propto\; |\psi_a|^2 + |\psi_b|^2 + \left(\psi_a \psi_b^* \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi z/D_z} + \text{c.c.}\right). \tag{V.45}$$

Pour simplifier, nous avons négligé ici un facteur d'enveloppe global décrivant la variation de la densité selon z. Par ailleurs, nous avons négligé l'expansion dans le plan xy, beaucoup plus lente que celle selon selon z. Une mesure de la densité permet alors d'accéder au contraste complexe de l'interférence

$$C(\boldsymbol{r}) = \psi_a(\boldsymbol{r})\; \psi_b^*(\boldsymbol{r}). \tag{V.46}$$

La valeur moyenne de cette quantité est nulle puisque les deux gaz sont indépendants l'un de l'autre. En revanche, la fonction de corrélation obtenue après moyenne sur de nombreuses réalisations de l'expérience

$$\begin{aligned} \langle C(\boldsymbol{r})\; C^*(\boldsymbol{r}')\rangle &= \langle \psi_a(\boldsymbol{r})\; \psi_b^*(\boldsymbol{r})\;\; \psi_a^*(\boldsymbol{r}')\; \psi_b(\boldsymbol{r}')\;\rangle \\ &= \langle \psi_a(\boldsymbol{r})\; \psi_a^*(\boldsymbol{r}')\;\rangle\; \langle \psi_b^*(\boldsymbol{r})\; \psi_b(\boldsymbol{r}')\;\rangle \end{aligned} \tag{V.47}$$

permet d'accéder à la fonction G_1 recherchée, ou plus exactement son module carré :

$$\langle C(\boldsymbol{r})\; C^*(\boldsymbol{r}')\rangle = |G_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')|^2 . \tag{V.48}$$

L'expérience de HADZIBABIC, KRÜGER et al. (2006) a permis d'observer une variation rapide du comportement de G_1 au voisinage du point de transition. Elle a également mis en évidence de manière directe les vortex libres qui apparaissent autour de la transition BKT. Ces vortex se manifestent en effet comme des dislocations dans le profil d'interférence. Une simulation Monte Carlo en terme de champs classiques fluctuants, menée par FOSTER, BLAKIE et al. (2010), a permis de valider de manière quantitative cette procédure d'interférences entre plans indépendants [voir aussi BISSET, DAVIS et al. (2009)]. L'observation de vortex thermiquement activés a également été faite dans le groupe de Séoul, avec une imagerie perpendiculaire au plan du gaz (CHOI, SEO et al. 2013) ; les vortex apparaissent alors comme des trous de densité.

Une méthode voisine consiste à faire interférer le gaz avec lui-même (CLADÉ, RYU et al. 2009). Partant d'un nuage atomique 2D où tous les

atomes sont dans un état interne $|1\rangle$, un processus Raman "absorption - émission stimulée" fait basculer la moitié des atomes vers un autre état interne $|2\rangle$, tout en leur conférant une vitesse $\boldsymbol{v}_0$ de l'ordre de la vitesse de recul (impulsion $\pi/2$). Après ce processus, la partie du nuage encore en $|1\rangle$ est globalement au repos, alors que la partie en $|2\rangle$ se déplace. Après un temps t ajustable, un deuxième pulse $\pi/2$ mélange de nouveau les amplitudes des deux états internes tout en communiquant la vitesse $\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_1$ lors de la transition $1 \to 2$. Si on mesure alors la distribution de densité dans l'état $|2\rangle$, on obtient des franges d'interférences entre l'état initial du nuage et l'état déplacé de $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{v}_0 t$

$$\rho(\boldsymbol{r}) \;\propto\; |\psi(\boldsymbol{r})|^2 + |\psi(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})|^2 + \Big(\psi(\boldsymbol{r})\;\psi^*(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{R}/\hbar} + \text{c.c.}\Big)\,, \quad \text{(V.49)}$$

ce qui permet de remonter à la fonction G_1 à partir du contraste complexe de ces interférences $C(\boldsymbol{r}) = \psi(\boldsymbol{r})\;\psi^*(r-\boldsymbol{R})$. Cette méthode présente un avantage notable par rapport à la précédente : un seul plan est suffisant et les interférence sont visibles en imagerie perpendiculaire à ce plan. En revanche, elle repose sur l'hypothèse que les collisions entre atomes jouent un rôle négligeable pendant le temps t, qui risque d'être invalidée pour des gaz avec des paramètres d'interaction $\tilde{g}$ élevés.

La dernière méthode que nous signalerons brièvement consiste à effectuer une courte expansion balistique au cours de laquelle les fluctuations de phase initiales sont transformées en fluctuations de densité. Cette méthode a initialement été proposée par IMAMBEKOV, MAZETS et al. (2009), puis mise en œuvre par le groupe de Seoul, CHOI, SEO et al. (2012) et SEO, CHOI et al. (2014) [voir également DESBUQUOIS (2013) ainsi qu'une analyse critique des premières expériences de Séoul par MAZETS (2012)]. L'analyse théorique récente de SINGH & MATHEY (2014) a montré qu'il était en principe possible, à partir de la fonction de corrélation densité-densité après temps de vol, $\langle\rho(\boldsymbol{r}_1)\,\rho(\boldsymbol{r}_2)\rangle$, d'accéder à l'exposant η caractérisant la décroissance algébrique de G_1 dans le régime superfluide. Toutefois, il semble que le rôle joué par les interactions durant l'expansion ballistique a empêché le groupe de Seoul d'atteindre ce but (SEO, CHOI et al. 2014).

3-3 La distribution en impulsion d'un gaz piégé

Nous avons déjà eu plusieurs fois l'occasion de rappeler le lien étroit entre la fonction $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \langle\boldsymbol{r}|\hat{\rho}_1|\boldsymbol{r}'\rangle$ qui nous intéresse ici et la distribution en impulsion $N(\boldsymbol{p})$ du fluide. Pour un système homogène, donc invariant par translation, la fonction G_1 ne dépend que de la distance $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ et, en posant $G_1(\boldsymbol{r}) \equiv G_1(\boldsymbol{r},0)$, on a la relation [8] en terme de transformée de Fourier déjà énoncée au chapitre 2

$$G_1(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{L^2}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}/\hbar}\;N(\boldsymbol{p})\;\mathrm{d}^2p. \quad \text{(V.50)}$$

La mesure de la distribution en impulsion dans un gaz 2D uniforme, comme cela été fait par CHOMAZ, CORMAN et al. (2015), devrait donc permettre en principe de remonter à la décroissance algébrique de $G_1(r)$, pourvu que la résolution en impulsion soit suffisante.

Pour un gaz confiné dans un piège harmonique, la situation est plus compliquée. La fonction G_1 dépend séparément des deux positions $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r}'$ et on a la relation

$$\bar{G}_1(\boldsymbol{r}) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}/\hbar}\;N(\boldsymbol{p})\;\mathrm{d}^2p, \quad \text{(V.51)}$$

où on a posé

$$\bar{G}_1(\boldsymbol{r}) = \int G_1\left(\boldsymbol{R}+\frac{\boldsymbol{r}}{2}\;,\;\boldsymbol{R}-\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)\;\mathrm{d}^2R. \quad \text{(V.52)}$$

Comme nous l'avons vu en § 3-1, il est utile d'aller vers le régime d'interaction forte ($\tilde{g} > 1$) si l'on souhaite que les fluctuations de phase jouent un rôle important. MURTHY, BOETTCHER et al. (2015) ont ainsi considéré un gaz de fermions (^{6}Li) et se sont placés au voisinage d'une résonance de Feshbach. Le gaz est donc la zone du *cross-over* entre la physique de type BCS (fermions appariés dans l'espace des impulsions, à la Bardeen–Cooper-Schrieffer) et le régime de condensation de Bose–Einstein, où les fermions se sont appariés dans l'espace des positions et forment des molécules Li_2, qui sont des bosons. Nous n'allons pas étudier la physique très riche de ce *cross-over* et nous renvoyons les lecteurs intéressés à l'article de revue de LEVINSEN, PARISH et al. (2015) qui traite spécifiquement de ses aspect bi-dimensionnels. Le point qui compte ici est que l'on dispose côté

8. $N(\boldsymbol{p})$ est supposée normalisée ici selon la relation $\int N(\boldsymbol{p})\;\mathrm{d}^2p = N$.

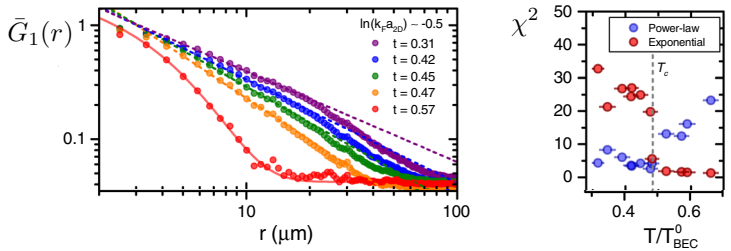


FIGURE V.5. *Fonction $\bar{G}_1(r)$ obtenue par transformée de Fourier de la distribution en impulsion, pour un gaz de molécules bosoniques $^6Li_2$, avec un paramètre d'interaction $\tilde{g} \approx 2.76$. Les températures sont repérées par rapport à la température de condensation d'un gaz parfait dans ce piège : $t = T/T_{\mathrm{c,ideal}}$ avec $T_{\mathrm{c,ideal}} = 140\,nK$. A droite : coefficient χ^2 de l'ajustement par une loi algébrique $(\alpha\, r^{-\eta})$ ou exponentielle $(\alpha\, \mathrm{e}^{-\eta r})$. Figures extraites de* MURTHY, BOETTCHER *et al. (2015).*

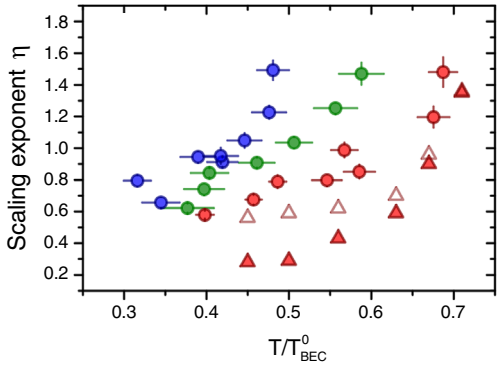


FIGURE V.6. *Cercles : exposant η obtenu par ajustement des données expérimentales avec une loi algébrique $\alpha\, r^{-\eta}$, pour les paramètres d'interaction $\tilde{g} = 0.60$ (rouge), 1.07 (vert) et 2.76 (bleu). Triangles pleins : résultats d'une simulation Monte Carlo quantique pour $\tilde{g} = 0.60$. Triangles évidés : idem avec en plus la prise en compte de la résolution finie du système d'imagerie. Figure extraite de* MURTHY, BOETTCHER *et al. (2015).*

BEC d'un gaz de bosons dont le paramètre d'interaction $\tilde{g}$ peut être arbitrairement élevé si on se rapproche de la résonance. MURTHY, BOETTCHER et al. (2015) ont ainsi étudié des valeurs de $\tilde{g}$ allant de ≈ 0.6 à 2.8 du côté BEC de la résonance.

Après mesure de la distribution en impulsion et transformation de Fourier inverse, MURTHY, BOETTCHER et al. (2015) ont analysé la variation de la fonction $\bar{G}_1(r)$ dans leur système. Les données obtenues pour $\tilde{g} \approx 2.8$ sont reportées sur la figure V.5 pour différentes températures. L'ajustement des données par une loi algébrique $(\alpha\, r^{-\eta})$ ou exponentielle $(\alpha\, \mathrm{e}^{-\eta r})$ indique clairement deux régimes. Aux basses températures, la variation algébrique de $G_1(r)$ est privilégiée, alors que l'ajustement exponentiel devient bien meilleur à plus haute température. La bascule d'un ajustement à l'autre se fait pour $T_c \approx 0.5\, T_{\mathrm{c,ideal}}$ pour les données de la figure V.5. La densité dans l'espace des phases centrale en ce point est ≈ 5, en bon accord avec la prédiction $\ln(380/\tilde{g})$.

Les données de MURTHY, BOETTCHER et al. (2015) révèlent néanmoins une surprise importante. Alors que selon la théorie BKT, l'exposant η de la décroissance algébrique ne peut dépasser 0.25 dans un gaz de Bose homogène, les exposants mesurés par l'ajustement de $G_1(r)$ en $r^{-\eta}$ sont considérablement plus grands. Les valeurs reportées sur la figure V.6 montrent une plage de valeurs qui s'étend jusqu'à $\eta = 1.5$, ce qui est 6 fois le maximum attendu ! Ce facteur 6 est obtenu aussi bien pour les interactions fortes ($\tilde{g} = 2.76$) que pour des interactions plus faibles ($\tilde{g} = 0.60$), ce qui montre que cet effet n'est pas lié à des effets en dehors de la validité de l'approche "champ classique" de la transition BKT. Par ailleurs, une simulation Monte Carlo quantique similaire à celle menée par HOLZMANN & KRAUTH (2008), reproduit assez bien ces résultats quand la résolution imparfaite du système d'imagerie est prise en compte.

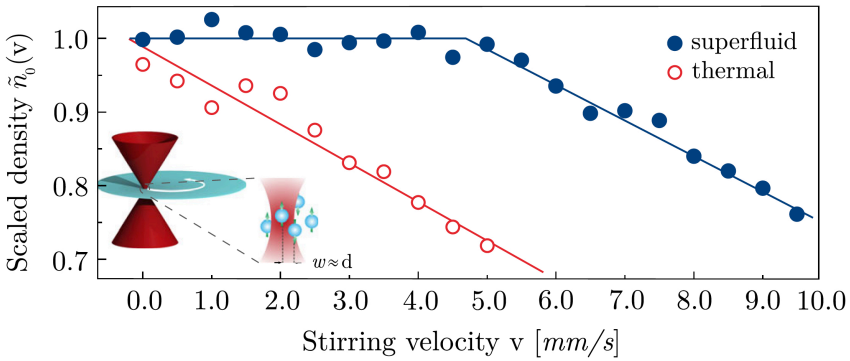
L'explication de ce désaccord apparent concernant l'ordre algébrique susceptible d'apparaître dans un gaz de Bose 2D a été donnée par BOETTCHER & HOLZMANN (2016). L'effet le plus important est la contribution de la composante normale (non superfluide) qui réside dans la partie périphérique du piège, et qui se mélange à la composante superfluide lors de l'expansion ballistique. Cette contribution vient augmenter considérablement l'exposant η. Cette modification est artificielle, dans le sens où la décroissance de fonction de corrélation G_1 dans la zone normale n'est pas

algébrique, mais exponentielle. Par une analyse précise des deux contributions, superfluide et normale, BOETTCHER & HOLZMANN (2016) ont retrouvé le facteur 5 à 6 mesuré expérimentalement. Ils ont également montré que, pour des paramètres typiques des expériences actuelles, la mesure de la quantité non moyennée $G_1(\boldsymbol{r}, 0)$ permettrait de retrouver l'exposant attendu dans le cas homogène, pourvu qu'on limite la mesure à la zone centrale $r < 0.2\, R_{\mathrm{TF}}$. Ils ont par ailleurs proposé une *approximation de corrélation locale*, qui consiste à remarquer que lorsque les deux points $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r}'$ sont dans la zone superfluide, la décroissance de $G_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ entre ces deux points est à peu près algébrique, avec un exposant qui est la moyenne géométrique de deux exposants $\eta(\boldsymbol{r})$ et $\eta(\boldsymbol{r}')$ que l'on déduirait des densités aux points $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r}'$ en utilisant la loi (V.41).

3-4 Mouvement d'une impureté et modes collectifs

Un moyen naturel pour tester la superfluidité est de s'appuyer sur le critère de Landau : est-ce qu'une impureté ponctuelle bougeant dans le fluide à une vitesse inférieure à la vitesse du son c_0 subit une force de friction et dissipe de l'énergie (ASTRAKHARCHIK & PITAEVSKII 2004) ? Ce critère a été testé avec succès sur des gaz 3D dès le début du développement des gaz quantiques d'atomes (RAMAN, KÖHL et al. 1999 ; ONOFRIO, RAMAN et al. 2000) et il a été transposé récemment aux gaz de Bose à deux dimensions. En déplaçant un trou microscopique (rayon $\sim 1\,\mu$m) créé par un faisceau laser focalisé, DESBUQUOIS, CHOMAZ et al. (2012) ont observé un comportement superfluide pour une valeur du paramètre $\mu/k_{\mathrm{B}}T$ en relativement bon accord avec la prédiction (V.26). Le léger écart a été expliqué dans une publication très récente de SINGH, WEITENBERG et al. (2017), étudiant la dynamique de la thermalisation du gaz d'atomes après le passage du trou créé par le laser. Toujours avec des bosons, KWON, KIM et al. (2016) ont observé l'allée de von Karman composée de vortex, dans le sillage du trou créé par un laser bougeant à une vitesse supersonique.

Ces expériences ont récemment été reprises à Hambourg pour un gaz quasi-2D de fermions ^{6}Li au voisinage d'une résonance de Feschbach, pour explorer toute la région de transition entre un condensat de molécules bosoniques $^6Li_2$ (longueur de diffusion 3D positive) et une assemblée de paires de Cooper (longueur de diffusion 3D négative) (WEIMER,



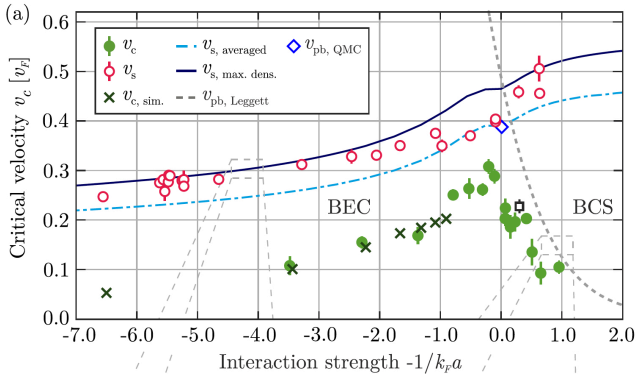


FIGURE V.7. *Comportement superfluide d'un gaz de fermions (^{6}Li). Haut : variation de la densité centrale* (i.e. *chauffage) induit par une impureté bougeant à vitesse v dans la partie superfluide ou la partie normale du gaz. Bas : vitesse critique (points verts) et vitesse du son (points rouges) en unité de la vitesse de Fermi v_F dans la zone de transition entre le condensat de molécules $^6Li_2$ et le régime de paires de Cooper. Figure extraite de* WEIMER, MORGENER *et al. (2015).*

MORGENER et al. 2015). Là encore, une « impureté laser » était en mouvement dans le superfluide, mais au contraire des deux expériences que nous venons de citer, le potentiel créé par le laser était attractif et l'impureté consistait donc en une bosse de densité plutôt qu'un trou. Un exemple de comportement superfluide est visible sur la figure V.7 (haut) : l'impureté bougeant dans la zone centrale (superfluide) à une vitesse suffisamment basse ne crée aucun chauffage, et la densité centrale du gaz reste inchangée. Au contraire, si l'impureté bouge dans la région périphérique, un chauffage se produit quelle que soit la vitesse de l'impureté. Cette expérience a été reproduite pour différentes valeurs de la longueur de diffusion. La valeur de la vitesse critique est reportée sur la figure V.7 (bas), de même que la vitesse du son mesurée en excitant un paquet d'ondes central et en mesurant sa vitesse d'expansion.

Pour terminer cette section, mentionnons une dernière méthode pour détecter la superfluidité ; elle passe par l'étude de modes collectifs, en particulier le mode « ciseaux » initialement considéré en physique nucléaire pour mettre en évidence la superfluidité de noyaux déformés (GUÉRY-ODELIN & STRINGARI 1999 ; MARAGO, HOPKINS et al. 2000). Les propriétés de ce mode et sa pertinence pour l'étude de la superfluidité de gaz atomiques ont fait l'objet de cours au Collège de France par C. Cohen-Tannoudji (2001-02) et nous n'en rappelons ici que les principales caractéristiques. On considère un piège harmonique légèrement anisotrope dans le plan xy, $\omega_x > \omega_y$, le gaz à l'équilibre étant donc lui aussi anisotrope. On tourne légèrement les axes propres du nuage par rapport à leur position d'équilibre et on regarde l'évolution du système, par exemple en regardant l'évolution de la quantité moyenne $\langle xy \rangle$. Si le gaz est superfluide, on observe un mouvement non amorti à une seule fréquence, $(\omega_x^2 + \omega_y^2)^{1/2}$. Pour un gaz normal, deux fréquences contribuent à l'évolution ($|\omega_x \pm \omega_y|$ si le gaz est dans le régime ballistique), avec en plus un amortissement notable.

Il y a toutefois une difficulté qui apparaît immédiatement quand on cherche à exploiter ce mode : dans le cadre de l'approximation de densité locale, le centre du gaz est superfluide mais l'extérieur ne l'est pas. Les deux types d'évolution sont alors mélangés, ce qui rend difficile l'exploitation quantitative de l'évolution du gaz. DE ROSSI, DUBESSY et al. (2016) ont récemment contourné cette difficulté de manière élégante. En s'intéressant à la valeur moyenne de xy calculée sur un anneau fin, ils ont montré la transition attendue entre le régime mono-fréquence au centre (superfluide)

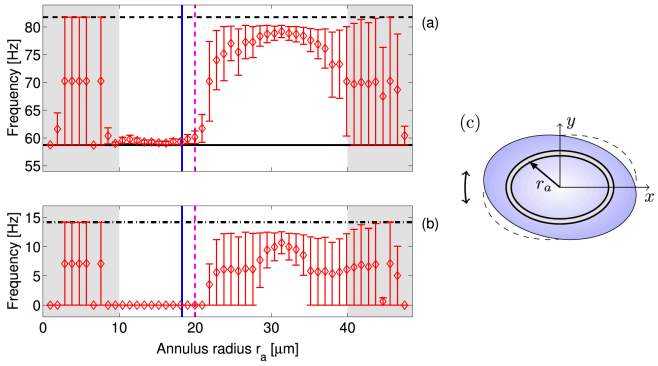


FIGURE V.8. *Mode « ciseaux » observé sur un gaz 2D de rubidium en utilisant une analyse de la moyenne locale de la quantité xy, moyenne prise sur un anneau fin. Selon la position de l'anneau, on sonde (i) la région centrale superfluide, avec une seule fréquence d'oscillation ; (ii) la région périphérique normale, avec deux fréquences d'oscillation non nulles. Figure extraite de* DE ROSSI, DUBESSY *et al. (2016).*

et le régime bi-fréquence à l'extérieur (normal). La position de la zone de transition est en bon accord avec les prédictions de champ classique présentées en § 1.

4 Les polaritons de cavité

4-1 L'hybridation lumière–matière

Les polaritons de cavité sont des particules hybrides mi-lumière, mi-matière que nous avons déjà rencontrées plusieurs fois dans les cours et les séminaires des années précédentes. Commençons par présenter séparément les deux blocs permettant de construire ces polaritons. Nous nous limitons ici aux quelques concepts indispensables et nous renvoyons le lecteur aux articles de revue de CARUSOTTO & CIUTI (2013) et de AMO & BLOCH (2016) pour approfondir les différentes notions.

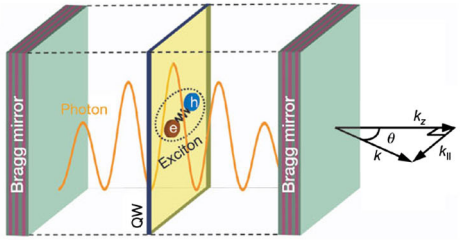


FIGURE V.9. *Géométrie utilisée pour les expériences sur les fluides de polaritons de cavité. La lumière est stockée entre deux miroirs plans de grande réflectivité formant une cavité Fabry–Perot résonante. Les excitons sont produits dans un puits quantique. Un polariton est un boson composite, superposition d'un exciton et d'un photon. On sonde les propriétés du fluide de polaritons en analysant les propriétés de la lumière sortant de la cavité. Figure extraite de* KASPRZAK, RICHARD *et al. (2006).*

— La partie "lumière" d'un polariton correspond à un photon stocké entre deux miroirs plans, dans une cavité de type Fabry-Perot d'axe optique z et de longueur L (figure V.9). Comme nous l'avons vu au chapitre 2, un photon résonnant avec la cavité a un vecteur d'onde $(\boldsymbol{k}_\perp, k_z)$ avec k_z multiple entier de π/L. Si on se limite à des photons faisant un angle faible avec l'axe z, $|\boldsymbol{k}_\perp| \ll k_z$, l'énergie de ces photons dans un milieu d'indice n_0 s'écrit

$$\hbar\omega_{\rm ph}(\boldsymbol{k}_\perp) = \frac{\hbar c}{n_0}\left(k_z^2 + \boldsymbol{k}_\perp^2\right)^{1/2} \approx \hbar\omega_{0,\,\rm ph} + \frac{\hbar^2\boldsymbol{k}_\perp^2}{2m_{\rm ph}} \qquad \text{(V.53)}$$

où $\omega_{0,\,\rm ph} = ck_z/n_0$ et où la masse effective du photon pour le mouvement dans le plan xy vaut :

$$m_{\rm ph} = \frac{\hbar n_0 k_z}{c} = n_0^2\frac{\hbar\omega_0}{c^2}. \qquad \text{(V.54)}$$

En pratique, on utilise des miroirs de Bragg [9] formés de quelques dizaines de paires de couches $Ga_xAl_{1-x}As/Ga_yAl_{1-y}AlAs$, avec des facteurs de qualité Q de plusieurs 10^4. Pour des photons de longueur d'onde [10] ~ 800 nm, ceci conduit à une masse de quelques $10^{-5}\,m_e$, où m_e est la masse de l'électron libre. La durée de vie $\tau_{\rm ph}$ d'un photon dans ces cavités varie d'une dizaine à quelques dizaines de picosecondes.

— La partie "matière" d'un polariton est un exciton, c'est-à-dire une paire électron–trou liée par l'interaction coulombienne dans un semi-conducteur Ga As. Ces excitons sont créés dans une zone active (BASTARD & SCHULMAN 1992) placée au centre de la cavité optique et de faible épaisseur [11], inférieure à 10 nm (figure V.9). Dans cette zone active, le bas de la bande de conduction se situe à une énergie inférieure à celle de l'environnement : le mouvement des excitons selon z est donc gelé et ces excitons se déplacent seulement dans le plan xy. Nous n'aborderons pas ici le détail de la structure d'un exciton [12] et nous le considérerons comme une particule bosonique, de masse $m_{\rm ex} = m_e + m_h$ où m_e et m_h sont les masses effectives d'un électron et d'un trou, avec une énergie :

$$\hbar\omega_{\rm ex}(\boldsymbol{k}_\perp) = \hbar\omega_{0,\,\rm ex} + \frac{\hbar^2\boldsymbol{k}_\perp^2}{2m_{\rm ex}} \qquad \text{(V.55)}$$

Grosso modo, cette approximation reste valable tant que la distance entre excitons voisins reste grande devant leur rayon de Bohr ; nous renvoyons le lecteur souhaitant approfondir ce point vers l'article de COMBESCOT, BETBEDER-MATIBET et al. (2008).

L'interaction matière-lumière conduit à un mélange de ces deux types d'états. Partant de la zone active vide d'excitons avec un photon présent dans la cavité, ce photon peut être absorbé par le semi-conducteur : un exciton est alors créé. Le processus inverse est également possible : si un exciton est présent dans le semi-conducteur et qu'il n'y a pas encore de photon dans la cavité, l'exciton peut disparaître (recombinaison particule-trou) en émettant un photon dans le mode de la cavité. On obtient ainsi une oscillation de Rabi possible entre ces deux états. Le point important

9. Contrairement à l'hypothèse qui a conduit à (V.53), les miroirs de Bragg ont une épaisseur bien supérieure à la longueur d'onde. Toutefois on peut montrer que le résultat (V.53) se généralise au cas de miroirs épais (Savona, 1999).

10. Indice de réfraction ≈ 3.7 pour Ga As.

11. En pratique on peut placer plusieurs zones actives parallèles les unes aux autres au voisinage du centre de la cavité optique, pour augmenter le signal.

12. Dans les puits quantiques de GaAs utilisés en pratique, le rayon de Bohr de l'exciton est ~ 5 nm.

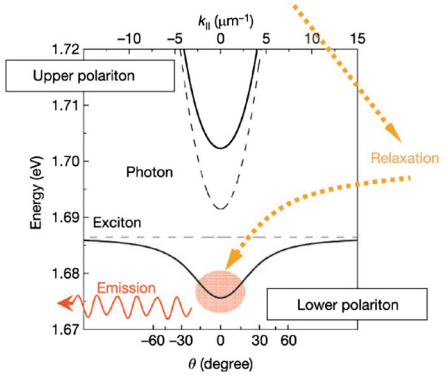


FIGURE V.10. *Relation de dispersion $(\boldsymbol{k}, \hbar\omega_{\rm ex})$ pour le mouvement d'un polariton dans le plan xy, résultant de l'hybridation entre la relation de dispersion d'un exciton, quasiment plate à cette échelle, et celle d'un photon, qui acquiert une masse effective (très faible) du fait de son confinement dans la cavité Fabry–Perot. Figure extraite de* KASPRZAK, RICHARD *et al. (2006).*

est que l'impulsion dans le plan xy est conservée lors de cette oscillation de Rabi : le couplage matière lumière se fait à $\boldsymbol{k}_\perp$ constant.

4-2 La relation de dispersion des polaritons de cavité

Les gaz quantiques de polaritons sont obtenus en se plaçant dans le régime de couplage fort, pour lesquels le couplage cohérent décrit ci-dessus, caractérisé par une fréquence de Rabi Ω, est beaucoup plus grand que l'inverse des temps de relaxation du système, en particulier $\tau_{\rm ph}$. Dans ce régime, l'excitation hybride appelée polariton correspond aux modes propres de l'hamiltonien (figure V.10)

$$\hat{H}(\boldsymbol{k}_\perp) = \hbar \begin{pmatrix} \omega_{\rm ph}(\boldsymbol{k}_\perp) & \Omega \\ \Omega & \omega_{\rm ex}(\boldsymbol{k}_\perp) \end{pmatrix} \tag{V.56}$$

couplant les deux branches photoniques et excitoniques, pour une impulsion $\boldsymbol{k}_\perp$ donnée. Le régime le plus intéressant en terme de fluide quantique est obtenu pour $\omega_{0,\,\rm ph} \approx \omega_{0,\,\rm ex}$, et il correspond aux deux branches de valeur propres $E_\pm(\boldsymbol{k}_\perp)$ (*cf.* figure V.10) :

$$E_\pm = \frac{\hbar}{2}\left(\omega_{\rm ph} + \omega_{\rm ex}\right) \pm \frac{\hbar}{2}\left[\left(\omega_{\rm ph} - \omega_{\rm ex}\right)^2 + 4\Omega^2\right]^{1/2} \tag{V.57}$$

Plaçons-nous dans le cas où $\omega_{\rm ph} \approx \omega_{\rm ex}$, pour lequel on a en $\boldsymbol{k}_\perp = 0$ la relation $E_\pm = \hbar(\omega_{\rm ph} \pm \Omega)$. Les modes de polaritons correspondants ont alors une amplitude égale pour la partie photonique et la partie excitonique, du moins tant que $\hbar^2\boldsymbol{k}_\perp^2/2m_{\rm ph} \ll \Omega$. La courbure des deux branches au voisinage de $\boldsymbol{k}_\perp = 0$ est dominée par l'aspect photonique, avec une masse effective $m_{\rm eff} \approx 2\,m_{\rm ph}$, ce qui est donc très faible devant la masse d'un exciton. Cette masse effective très faible a une conséquence directe pour l'obtention du régime de dégénérescence quantique : la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} = \rho\lambda_T^2$ fait intervenir le carré de la longueur d'onde thermique

$$\lambda_T^2 = \frac{2\pi\hbar^2}{m_{\rm eff}k_{\rm B}T}, \tag{V.58}$$

ce qui entraîne que pour une densité et une température données, $\mathcal{D}$ est augmentée par 5 ordres de grandeur par rapport à un gaz d'excitons purs ! Un point tout aussi remarquable de cette hybridation est que l'interaction polariton-polariton est très significative du fait de l'amplitude significative de la branche excitonique. On arrive ainsi avec ces polaritons à fabriquer des quasi-particules de très faible masse, de l'ordre de celle des photons dans la cavité, mais notablement couplées entre elles, ce qui est indispensable pour atteindre un état superfluide. Dans ce qui suit, nous allons nous concentrer sur la branche inférieure E_-, appelée *lower polariton* sur la figure V.10.

Les polaritons sont créés grâce à une irradiation laser qui crée des paires électron-trou. Ces paires ont une énergie nettement plus grande que $k_{\rm B}T$, mais elles refroidissent par l'émission de phonons. Du fait de la durée de vie finie d'un polariton, on atteint un régime stationnaire avec une densité spatiale qui est une fonction croissante de l'intensité du laser de pompe. On est donc en présence d'un système dissipatif ouvert, ce qui est *a priori* très différent des gaz d'atomes que nous avons rencontrés jusqu'à maintenant. Toutefois ce gaz de polaritons peut atteindre un régime stationnaire, et ce régime sera proche d'un état d'équilibre thermique si le temps caractéristique de thermalisation est court devant la durée de vie d'un polariton.

4-3 Quasi-condensat de polaritons

Le premier fluide de polaritons de cavité présentant les signes d'une condensation de Bose–Einstein a été décrit par KASPRZAK, RICHARD et al. (2006) [voir aussi BALILI, HARTWELL et al. (2007)]. Le schéma de l'expérience est représenté sur la figure V.11. Le spot illuminé par le laser de pompe a un diamètre de 35 μm et un profil plat pour que la production de polaritons soit uniforme dans ce disque. L'excitation est faite avec une énergie $\hbar\omega$ nettement supérieure (de 100 meV) à l'énergie du fondamental. Le seuil de condensation est atteint en augmentant la puissance de pompe : au dessus d'un certain seuil, la lumière émise par la cavité provient presque exclusivement du voisinage de $\boldsymbol{k}_\perp = 0$ (figure V.11). Une analyse plus précise montre qu'à partir du seuil, les états excités sont pratiquement saturés et les polaritons en excès s'accumulent dans l'état $\boldsymbol{k}_\perp = 0$ ou en son voisinage immédiat. La résolution en énergie de ces mesures n'est toutefois pas suffisante pour déterminer s'il s'agit d'un vrai condensat (pic de Dirac en $\boldsymbol{k}_\perp = 0$) ou du quasi-condensat (quasi-ordre algébrique) attendu à 2D.

La description générale de l'interaction polariton-polariton est complexe. Les excitons peuvent exister dans 4 états de spin, caractérisés par leur projection le long de l'axe z : $\sigma = \pm 1, \pm 2$. Pour les expériences que nous décrivons ici, seuls les états $\sigma = \pm 1$ sont pertinents. Dans le cas particulier où la lumière incidente utilisée pour créer les excitons est polarisée circulairement, seule une des deux valeurs possibles de σ est réalisée et l'interaction entre polaritons peut se décrire comme une interaction de contact répulsive, avec un coefficient de couplage $\tilde{g}$ constant. Nous nous limiterons à ce cas pour simplifier la discussion.

Une modélisation en terme de champ classique $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ à deux dimensions d'espace conduit alors à une équation du mouvement proche de l'équation de Gross–Pitaevskii utilisée pour des gaz atomiques :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}}\nabla^2\psi + \frac{\hbar^2\tilde{g}}{m_{\text{eff}}}|\psi|^2\psi - \mathrm{i}\frac{\gamma}{2}\psi + \Gamma_{\text{pump}}. \qquad \text{(V.59)}$$

Le facteur sans dimension $\tilde{g}$ caractérisant la force des interactions se situe dans la plage 0.01 – 0.05, ce qui est comparable aux gaz atomiques en interaction faible. Les deux derniers termes de cette équation décrivent respectivement (i) la décroissance du champ de polariton du fait de la durée de vie finie des quasi-particules et (ii) l'alimentation de ce champ par le laser de

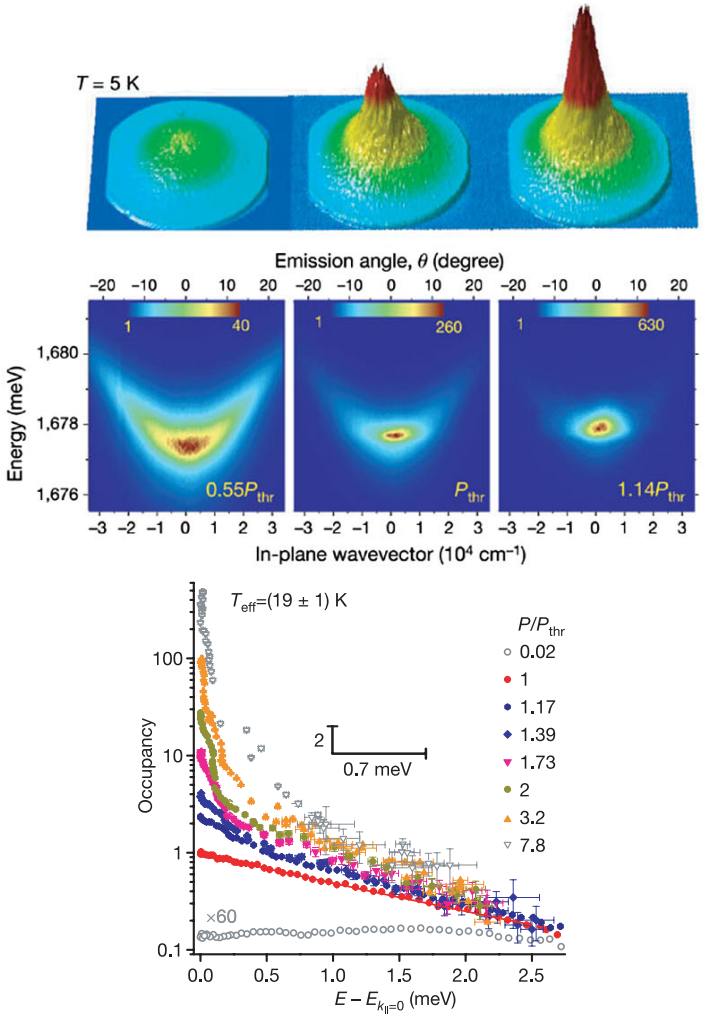


FIGURE V.11. *Spectre de la lumière émise par la micro-cavité quand on varie la puissance de pompe. Au dessus d'un certain seuil, la lumière émise est concentrée autour de $\boldsymbol{k}_\perp = 0$, signalant l'accumulation macroscopique de polaritons au voisinage de ce point. La population des états de grande énergie est saturée. L'expérience est faite à 5 K. Figure extraite de* KASPRZAK, RICHARD *et al. (2006).*

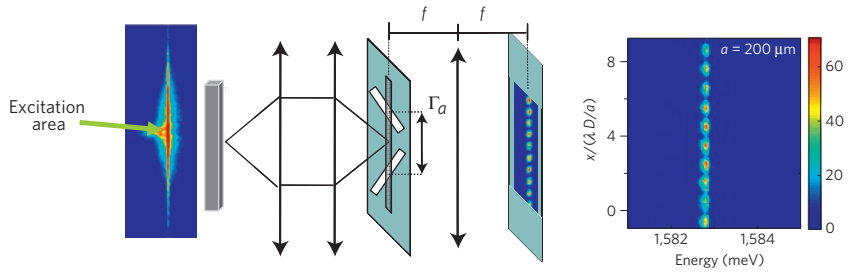


FIGURE V.12. *Un fluide de polaritons est créé dans un milieu très allongé. En faisant interférer la lumière issue de deux points séparés d'une distance a, on sonde la cohérence en phase du fluide. La figure de droite obtenue pour $a = 200\,\mu$m, c'est-à-dire entre les deux extrémités de l'échantillon, montre que la cohérence en phase reste très bonne malgré l'éloignement de ces deux points. Figure extraite de* WERTZ, FERRIER *et al. (2010).*

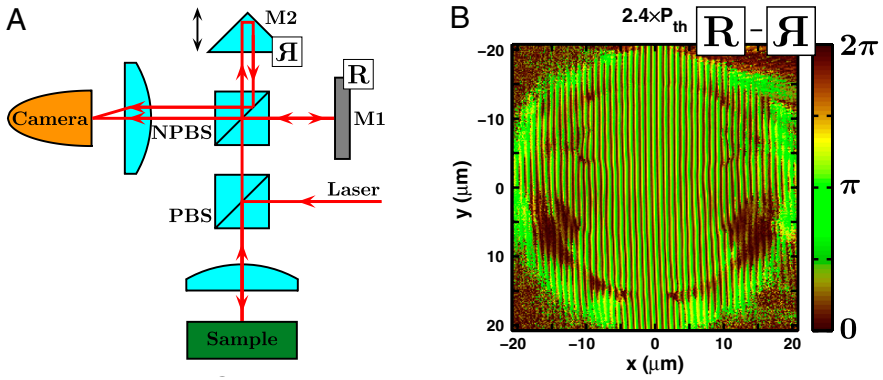


FIGURE V.13. *Pour sonder la cohérence en phase d'n fluide de polaritons bi-dimensionnel, on fait interférer la lumière émise avec son image miroir, ce qui permet de reconstruire la fonction de corrélation $G_1(\boldsymbol{r}, -\boldsymbol{r})$. Figure extraite de* ROUMPOS, LOHSE *et al. (2012).*

pompe. Cette alimentation peut prendre des formes différentes selon que le pompage est cohérent, auquel cas le laser de pompe impose sa phase au champ de polariton, ou incohérent quand la cohérence de la pompe est effacée lors de la relaxation des polaritons. Cette deuxième situation est voisine du cas des gaz d'atomes, la cohérence éventuelle n'étant pas imposée de l'extérieur, mais résultant d'une accumulation macroscopique de polaritons dans des états de basse énergie cinétique, accumulation favorisée par la stimulation bosonique.

4-4 Expériences montrant un quasi-ordre en phase

Un avantage majeur des condensats de polaritons par rapport aux condensats atomiques réside dans le fait que le champ électromagnétique qui s'échappe de la cavité du fait de la réflexivité imparfaite des miroirs porte l'information de la phase du champ de polariton ψ. Avec des atomes, nous avons vu que l'on est obligé de recourir à des techniques relativement élaborées pour accéder à la fonction de corrélation G_1. Avec des polaritons, il "suffit" de faire l'analyse des corrélations en phase du champ électromagnétique sortant de la cavité.

Un premier exemple de cette analyse des corrélations en phase est présenté sur la figure V.12, tirée de l'article de WERTZ, FERRIER et al. (2010). Les polaritons peuvent évoluer dans ce cas dans un milieu quasi-unidimensionnel, de largeur L_x entre 2 et 4 μm et de longueur L_y de 200 μm. Ils sont produits par un faisceau pompe de très faible diamètre, de 2 μm environ, et se propagent ensuite dans l'échantillon. Un dispositif de fentes d'Young permet de faire interférer la lumière émise par des points distants (jusqu'à L_y) et de vérifier qu'un degré de cohérence élevé existe entre ces points si la puissance de pompe est au dessus d'un certain seuil. Comme attendu dans un gaz de Bose 1D dégénéré, la longueur de cohérence est donc beaucoup plus grande que $\lambda_T \sim 4\,\mu$m.

Des expériences portant sur la géométrie 2D ont été faites par ROUMPOS, LOHSE et al. (2012), puis par NITSCHE, KIM et al. (2014) (il s'agit dans les deux cas du groupe dirigé par Y. Yamamoto). Nous avons représenté sur la figure V.13 l'interféromètre de Michelson utilisé par cette équipe. Il permet de faire interférer le champ issu de la cavité avec son image miroir, ce qui donne accès à la fonction de corrélation $G_1(\boldsymbol{r}, -\boldsymbol{r})$. L'expérience de ROUMPOS, LOHSE et al. (2012) a été menée avec un pompage incohérent et uniforme[13] d'un disque relativement étendu, de dia-

13. Profil d'intensité en forme de "chapeau haut de forme" (*top hat*).

mètre $\sim 40\,\mu$m, alors que celle de NITSCHE, KIM et al. (2014) a été faite avec un faisceau de pompe gaussien de largeur totale à mi-hauteur de $15\,\mu$m.

Dans les deux expériences, on trouve que G_1 décroît algébriquement avec la distance quand la puissance de pompage est au dessus d'un certain seuil. Cette décroissance algébrique est bien sûr en accord avec ce qui est attendu pour le régime superfluide 2D. Toutefois, pour l'expérience de ROUMPOS, LOHSE et al. (2012), l'exposant mesuré était nettement trop élevé par rapport aux prédictions théoriques puisqu'il atteignait 1.2, c'est-à-dire une valeur qui dépassait par un facteur 5 la borne supérieure prédite ($\eta = 1/\mathcal{D}_s \leq 1/4$). La raison mise en avant par ROUMPOS, LOHSE et al. (2012) était le caractère hors d'équilibre du gaz de polaritons [voir aussi l'article de revue de ROUMPOS & YAMAMOTO (2012)].

Cette explication a été modifiée dans l'article de NITSCHE, KIM et al. (2014), qui montre quant à lui des valeurs compatibles avec la borne supérieure $\eta = 0.25$ (figure V.14). Selon NITSCHE, KIM et al. (2014), la valeur élevée de l'exposant mesuré dans les expériences de 2012 serait due à la forme particulière du faisceau pompe, qui aurait favorisé une fragmentation du quasi-condensat. La leçon à retenir de ces deux mesures ainsi que de la recherche équivalente sur les gaz d'atomes (MURTHY, BOETTCHER et al. 2015) est la difficulté à mesurer des lois algébriques avec des exposants aussi petits que 0.25. Toute imperfection expérimentale conduisant à une mauvaise homogénéité du gaz risque d'augmenter la vitesse de décroissance de G_1 et de montrer une violation apparente de la borne supérieure de $1/4$ prédite dans le cadre de la théorie BKT.

Quelle limite thermodynamique ? L'article théorique récent de ALTMAN, SIEBERER et al. (2015) est venu montrer que la situation des systèmes ouverts comme les gaz de polaritons de cavité était en fait fondamentalement différente de celle des systèmes fermés, comme les gaz d'atomes. La conclusion de ce travail est qu'à grande échelle, le quasi-ordre à longue portée ne peut pas exister dans un gaz de polaritons : la fonction $G_1(r)$ doit toujours décroître exponentiellement avec la distance r.

Le point de départ de ALTMAN, SIEBERER et al. (2015) est l'équation d'évolution de la phase $\theta(\boldsymbol{r}, t)$ du champ $\psi(\boldsymbol{r}, t)$. Moyennant des approxi-

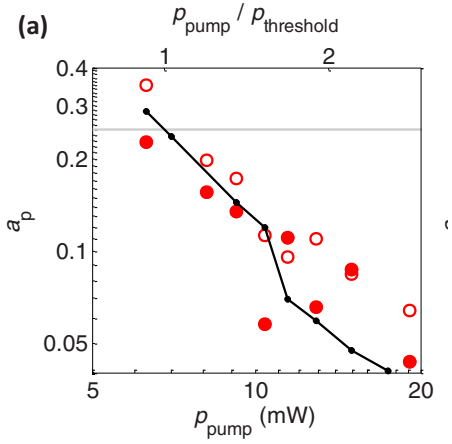


FIGURE V.14. *Variation avec la puissance de pompe de l'exposant a_p de la loi algébrique $G_1(r) \propto r^{-a_p}$. L'exposant mesuré au seuil de la transition est compatible avec la borne supérieure* 0.25. *Figure extraite de* NITSCHE, KIM *et al. (2014).*

mations raisonnables, cette équation s'écrit pour un système ouvert

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D\nabla^2\theta + \frac{\lambda}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\theta\right)^2 + \zeta(\boldsymbol{r}, t), \tag{V.60}$$

qui a la structure de l'équation KPZ (Kardar–Parisi–Zhang). Le terme D représente un coefficient de diffusion, λ caractérise la force du couplage non-linéaire et ζ représente un bruit blanc. À partir d'une analyse par le groupe de renormalisation, ALTMAN, SIEBERER et al. (2015) ont montré que le terme non-linéaire finit toujours par devenir dominant, ce qui signifie que la fonction $\theta(\boldsymbol{r}, t)$ devient de plus en plus "rugueuse". Le quasi-condensat est donc toujours détruit à l'issue de cette étape de renormalisation, d'où la décroissance exponentielle de G_1.

Toutefois ALTMAN, SIEBERER et al. (2015) expliquent également que la distance caractéristique ℓ de cette décroissance exponentielle de G_1 peut être très grande. La situation réalisée expérimentalement sonde donc une échelle de longueur intermédiaire $\ll \ell$ sur laquelle on peut linéariser l'équation KPZ. On retrouve alors la décroissance en loi de puissance pour G_1, ainsi que la transition BKT pilotée par la dissociation des paires de

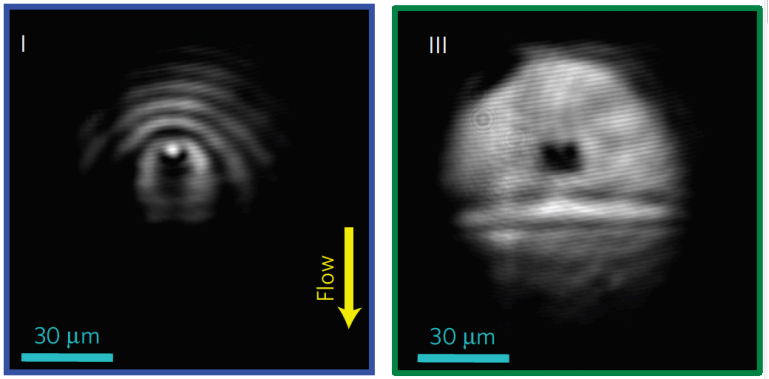


FIGURE V.15. *Écoulement d'un fluide de polaritons de vitesse* $\sim 6\,10^5$ *m/s autour d'un obstacle statique. À basse densité (image de gauche), une trainée claire apparaît dans le sillage de l'objet. À haute densité, ce sillage disparaît, indication d'un écoulement superfluide. La vitesse du son pour l'image de droite est de l'ordre de* $2\,10^6$*m/s. Figure extraite de* AMO, LEFRÈRE *et al. (2009).*

vortex [voir par exemple CHIOCCHETTA & CARUSOTTO (2013)].

4-5 Polaritons autour d'un obstacle

La mise en évidence directe de la superfluidité d'un fluide de polaritons de cavité a été faite par AMO, LEFRÈRE et al. (2009). Dans cette expérience, on produit les polaritons avec une énergie donnée au moyen d'un pompage cohérent et résonant. En choisissant un angle d'incidence non nul (entre 2 et 4 degrés) pour le laser de pompe, on crée les polaritons avec une vitesse v_p non nulle, en l'occurence de l'ordre de $6\,10^5$ m/s. On peut en particulier les produire au voisinage d'un défaut du matériau [14]. L'écoulement du fluide polaritonique autour du défaut renseigne sur son caractère superfluide. À basse densité du fluide, $\sim 1\,\mu\text{m}^{-2}$, la vitesse du son $c_0 = \frac{\hbar}{m}\sqrt{\tilde{g}\rho}$ est inférieure à v_p et on voit clairement une trainée lors du passage du fluide sur l'objet. À plus haute densité, $40\,\mu\text{m}^{-2}$ pour l'image de droite de la figure V.15, cette trainée disparaît, signe d'un écoulement superfluide. Pour ces expériences, le paramètre $\tilde{g}$ est de l'ordre de 10^{-3}, correspondant à une vitesse du son $c_s = 2\ 10^6\text{m/s}$ pour l'expérience à haute densité. Le caractère superfluide de l'écoulement est confirmé la mesure de la distribution en impulsion, qui n'est pas affectée par la présence de l'obstacle dans le régime de haute densité.

14. Ces défauts apparaissent naturellement dans le processus de croissance des échantillons et on s'intéresse ici à un défaut de petite taille, que l'on peut considérer comme un objet ponctuel.

Chapitre VI

Invariance d'échelle classique, anomalies quantiques

L'invariance d'échelle est un concept que l'on rencontre dans de nombreuses branches de la physique, depuis le comportement d'un système au voisinage d'une transition de phase jusqu'à la physique des hautes énergies. Nous l'aborderons dans ce chapitre sous l'angle de la théorie de champ classique utilisée jusqu'ici pour décrire un gaz de Bose à deux dimensions. L'invariance d'échelle consiste à tirer parti du fait que les différentes contributions à l'énergie du fluide se comportent de manière très simple quand on multiplie une ou plusieurs variables thermodynamiques par un facteur d'échelle λ. L'invariance d'échelle permet alors de simplifier considérablement l'équation d'état qui ne dépend plus que du seul paramètre $\mu/k_{\mathrm{B}}T$, au lieu de faire intervenir de manière indépendante le potentiel chimique μ et la température T comme c'est le cas pour un fluide « ordinaire », à 3D par exemple.

Cette invariance d'échelle a également des conséquences sur les propriétés dynamiques du système. Nous en donnerons un exemple à propos du *mode de respiration*, ou *mode monopolaire* d'un gaz confiné dans un piège harmonique isotrope (PITAEVSKII & ROSCH 1997). On trouve que ce mode oscille toujours à la fréquence double de celle du piège, quelle que soit la force des interactions et quel que soit le degré d'excitation du mouvement de respiration.

Les résultats que nous venons de mentionner portent sur un fluide décrit par un champ classique, dans lequel les interactions sont prises en compte par le paramètre sans dimension $\tilde{g}$. Décrire les interactions de cette façon revient à supposer que le potentiel entre atomes est proportionnel à une distribution de Dirac à deux dimensions, $U(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) = \frac{\hbar^2}{m}\,\tilde{g}\,\delta(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$. Le caractère sans dimension de $\tilde{g}$ joue ici un rôle essentiel : c'est parce qu'il n'y a aucune échelle de longueur, ni d'énergie associée aux interactions que température et potentiel chimique ne peuvent intervenir que sous la forme du rapport $\mu/k_{\mathrm{B}}T$. Toutefois, l'interaction de contact est singulière sur le plan quantique, ne serait-ce que si l'on souhaite étudier la collision entre deux particules. Pour traiter correctement le problème quantique, il est nécessaire de régulariser la distribution de Dirac.

On se retrouve alors face à un phénomène connu sous le nom « d'anomalie quantique » (HOLSTEIN 1993 ; CABO, LUCIO et al. 1998) : on part d'un problème qui présente une symétrie exacte au niveau classique, en l'occurrence l'invariance d'échelle. Mais la quantification du problème nécessite une régularisation pour éliminer certaines divergences. L'anomalie réside alors dans le fait que la version régularisée amène obligatoirement une brisure de la symétrie initiale. Dans le cas du gaz 2D, la régularisation du potentiel de contact introduit nécessairement une échelle d'énergie ε, de sorte que température et potentiel chimique peuvent reprendre comme à 3D des rôles indépendants, les quantités sans dimension du problème s'exprimant désormais en fonction des deux variables μ/ε et $k_{\mathrm{B}}T/\varepsilon$. Arès avoir décrit en détail cette procédure de régularisation, nous terminerons ce chapitre en examinant les conséquences de la brisure de l'invariance d'échelle sur le mode monopolaire.

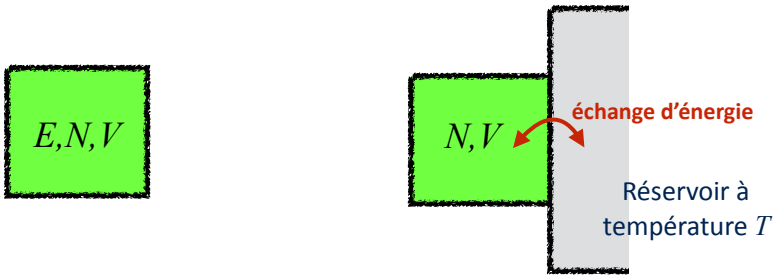


FIGURE VI.1. *Gauche, ensemble micro-canonique : système isolé décrit par trois variables extensives : l'énergie E, le nombre de particules N et le volume V. Droite, ensemble canonique : système pouvant échanger de l'énergie avec un réservoir qui impose ainsi sa température T (variable intensive). Le volume et le nombre de particules du système restent fixés.*

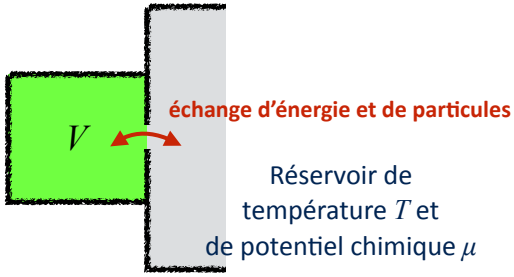


FIGURE VI.2. *Ensemble grand-canonique : le système peut échanger de l'énergie et des particules avec un réservoir, qui impose sa température T et son potentiel chimique μ (variables intensives). Le volume du système reste fixé.*

1 Invariance d'échelle à l'équilibre

Nous commençons ce chapitre par un bref rappel de quelques choix possibles pour paramétrer et caractériser un fluide à l'équilibre thermodynamique. Nous nous placerons ensuite dans le cadre de l'ensemble grand-canonique avec les variables naturelles T, μ, V, qui sont les plus appropriées pour caractériser l'invariance d'échelle recherchée.

1-1 Variables et potentiels thermodynamiques

Un fluide homogène de particules de masse m sans spin (ou polarisées) est caractérisé par trois variables thermodynamiques. Selon le point de vue choisi, c'est-à-dire l'ensemble statistique adopté pour le calcul, ces variables diffèrent mais les conséquences physiques sont bien entendues les mêmes. On peut considérer entre autres :

— *l'ensemble microcanonique* décrivant un système complètement isolé (figure VI.1, gauche), les variables choisies pertinentes étant le nombre de particules, l'énergie et le volume (ou la surface à 2D) :

$$\text{micro-canonique :} \qquad E,\ N,\ V \tag{VI.1}$$

et toutes les autres quantités, entropie et pression par exemple, dépendront de ces variables.

— *L'ensemble canonique*, où le système peut échanger de l'énergie avec un réservoir qui impose sa température T, mais où on maintient fixés le nombre de particules N et le volume V (figure VI.1, droite)

$$\text{canonique :} \qquad T,\ N,\ V. \tag{VI.2}$$

— *l'ensemble grand-canonique*, où le système peut échanger de l'énergie et des particules avec un réservoir qui impose sa température T et son potentiel chimique μ (figure VI.2), les variables étant alors :

$$\text{grand-canonique :} \qquad T,\ \mu,\ V. \tag{VI.3}$$

Une fois ces variables thermodynamiques identifiées, on caractérise l'état du fluide par son *potentiel thermodynamique*. Pour l'ensemble micro-canonique, un choix naturel est l'entropie $S(E, N, V)$, dont une variation infinitésimale s'écrit :

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}E - \frac{\mu}{T}\mathrm{d}N + \frac{P}{T}\mathrm{d}V. \tag{VI.4}$$

On définit ainsi la version micro-canonique de la température T, du potentiel chimique μ et de la pression P, avec par exemple :

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{N,V}. \tag{VI.5}$$

Pour l'ensemble canonique, le potentiel thermodynamique naturel est *l'énergie libre de Helmoltz* $F(T,N,V)$ qui se déduit de l'entropie par une transformation de Legendre :

$$F = E - TS \tag{VI.6}$$

dont la différentielle s'écrit

$$\mathrm{d}F = -S\,\mathrm{d}T + \mu\,\mathrm{d}N - P\,\mathrm{d}V, \tag{VI.7}$$

avec par exemple la définition de la pression :

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}. \tag{VI.8}$$

Dans le cadre de l'ensemble grand-canonique, on utilise le grand potentiel, encore appelé *énergie libre de Landau* et noté $\Omega(T,\mu,V)$. Il se déduit lui aussi de l'entropie $S(E,N,V)$ par une transformation de Legendre :

$$\Omega = E - TS - \mu N \tag{VI.9}$$

dont la différentielle s'écrit :

$$\mathrm{d}\Omega = -S\,\mathrm{d}T - N\,\mathrm{d}\mu - P\,\mathrm{d}V, \tag{VI.10}$$

avec la définition de la pression pour ces variables :

$$P = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial V}\right)_{T,\mu}. \tag{VI.11}$$

On caractérise le fluide par une *équation d'état* qui exprime une grandeur thermodynamique, la pression par exemple, en fonction des variables choisies. Ainsi, dans le cadre de l'ensemble grand-canonique, la connaissance de $P(T,\mu,V)$ permet ensuite de calculer – à une constante d'intégration près – les autres quantités physiques en utilisant les dérivées croisées (relations de Maxwell) :

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial T\partial V} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial V\partial T} \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\mu,V} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,\mu} \tag{VI.12}$$

Exemple : le gaz parfait classique. Son équation d'état est traditionnellement écrite sous la forme

$$P = \frac{Nk_BT}{V}, \tag{VI.13}$$

ce qui correspond aux choix de variables (T,N,V) de *l'ensemble canonique*.

Loi d'échelle "homogène". Une première invariance d'échelle apparaît pour tout fluide homogène avec des interactions à relativement courte portée[1]. Dans ce cas, si on multiplie la taille du système par un facteur λ tout en gardant constantes les deux variables intensives T et μ, alors les quantités physiques extensives comme l'énergie interne E, le nombre de particules N ou encore le grand potentiel Ω sont elles aussi multipliées par le facteur d'échelle λ :

$$\Omega(T,\mu,\lambda V) = \lambda\,\Omega(T,\mu,V). \tag{VI.14}$$

En d'autres termes, une fois connue la variation du grand potentiel Ω par rapport aux deux variables intensives T et μ, sa variation vis à vis de la troisième variable (extensive) V est une simple loi linéaire avec le coefficient de proportionnalité $\frac{\partial\Omega}{\partial V} = -P$. On en déduit la relation :

$$\Omega(T,\mu,V) = -V\ P(T,\mu). \tag{VI.15}$$

Pour un fluide avec des interactions à suffisamment courte portée, l'équation d'état est donc une fonction à deux variables intensives seulement, T et μ par exemple, ou encore T et $\rho = N/V$ pour l'équation d'état du gaz parfait (VI.13) en point de vue canonique : $P = k_{\mathrm{B}}T\,\rho$.

1-2 Changements d'échelle de longueur et de temps

L'invariance d'échelle que nous venons de rencontrer est très simple et porte uniquement sur "l'additivité" de deux sous-systèmes caractérisés par les même variables intensives. Une invariance d'échelle plus subtile que

1. Ce qui suit ne serait pas vrai pour un potentiel d'interaction en $1/|\boldsymbol{r}i - \boldsymbol{r}_j|$, que l'on trouve dans un plasma chargé ou pour un ensemble de masses en interaction gravitationnelle.

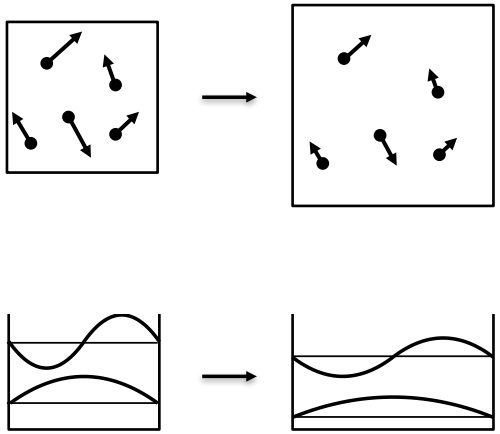


FIGURE VI.3. *Dilatation des longueurs par un facteur λ dans le cas classique (en haut) et quantique (en bas).*

la précédente apparaît quand l'énergie du système possède un comportement particulier lors d'une dilatation de toutes les longueurs du système (figure VI.3). Plus précisément, l'invariance d'échelle se produit si

$$\left.\begin{array}{l}\text{Longueurs : } \ell \to \lambda\ell \\ \text{Temps : } t \to \lambda^2 t\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \qquad \text{Énergie : } E \to \frac{1}{\lambda^2}E. \tag{VI.16}$$

Quand cette propriété est vérifiée, on peut écrire une équation d'état pour le fluide qui est une fonction de la seule variable μ/T et non plus de T et μ séparément. Il s'agit donc d'une simplification importante, puisqu'il suffit de connaître une fonction à une variable pour caractériser entièrement le comportement de ce fluide.

Dans ce paragraphe, nous allons expliquer comment prendre en compte cette dilatation des temps et des longueurs dans les deux formalismes classiques et quantiques. Nous allons en particulier montrer pourquoi le facteur d'échelle sur l'énergie doit être $1/\lambda^2$.

L'énergie du fluide homogène est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie d'interaction, qui s'écrivent en termes classiques

$$E = \sum_{j=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_j^2}{2m} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \tag{VI.17}$$

ou quantiques

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{\hbar^2}{2m}\int \boldsymbol{\nabla}\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\nabla}\hat{\Psi}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^d r \\ &+ \frac{1}{2}\iint V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\,\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r}')\,\hat{\Psi}(\boldsymbol{r}')\,\hat{\Psi}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^d r\,\mathrm{d}^d r'.\end{aligned} \tag{VI.18}$$

Dans cette dernière expression, la variable d représente la dimension d'espace et $\hat{\Psi}(\boldsymbol{r})$ est l'opérateur destruction d'une particule au point $\boldsymbol{r}$:

$$\hat{\Psi}(\boldsymbol{r}) = \sum_\alpha \psi_\alpha(\boldsymbol{r})\,\hat{a}_\alpha, \tag{VI.19}$$

avec $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$ une base orthonormée et $\hat{a}_\alpha$ l'opérateur destruction d'une particule dans l'état ψ_α. Par exemple, pour un mouvement quantique 1D dans une boîte entre $x = 0$ et $x = L$ (figure VI.3), l'indice α est un entier $n > 0$ et

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{VI.20}$$

Pour le terme d'énergie cinétique E_{cin}, on vérifie immédiatement que le facteur d'échelle $1/\lambda^2$ est bien présent. En point de vue classique, on a en effet

$$\left.\begin{array}{l}\text{Longueurs : } \ell \to \lambda\ell \\ \text{Temps : } t \to \lambda^2 t\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v} \to \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{v} \qquad E_{\text{cin}} \to \frac{1}{\lambda^2}E_{\text{cin}} \tag{VI.21}$$

En point de vue quantique, la dilatation des longueurs $\ell \to \lambda\ell$ conduit au changement de base orthonormée de l'espace de Hilbert [2]

$$\psi_\alpha(\boldsymbol{r}) \to \tilde{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\lambda^{d/2}}\psi_\alpha\left(\frac{\boldsymbol{r}}{\lambda}\right). \tag{VI.23}$$

2. Pour les fonctions de base du puits carré 1D données en (VI.20) et représentées en figure VI.3, on a ainsi :

$$L \to \lambda L : \qquad \tilde{\psi}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{\lambda L}\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\psi_n(x/\lambda). \tag{VI.22}$$

On vérifie alors que l'opérateur énergie cinétique

$$\hat{H}_{\rm cin} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\alpha,\beta} \hat{a}^\dagger_\alpha \hat{a}_\beta \int \boldsymbol{\nabla}\psi^*_\alpha(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi_\beta(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}^d r \tag{VI.24}$$

est bien modifié comme

$$\hat{H}_{\rm cin} \to \frac{1}{\lambda^2} \hat{H}_{\rm cin}. \tag{VI.25}$$

L'invariance d'échelle recherchée en (VI.16) se produira donc si l'énergie d'interaction vérifie elle aussi

$$\text{classique :} \qquad E_{\rm inter.} \to \frac{1}{\lambda^2} E_{\rm inter.} \tag{VI.26}$$

$$\text{quantique :} \qquad \hat{H}_{\rm inter.} \to \frac{1}{\lambda^2} \hat{H}_{\rm inter.} \tag{VI.27}$$

1-3 Conséquences d'une loi d'échelle pour l'énergie

À la section suivante (§ 1-4), nous passerons en revue quelques exemples de fluides vérifiant la loi d'échelle sur l'énergie donnée en (VI.16). Auparavant, nous allons examiner les conséquences sur l'équation d'état du fluide de cette loi d'échelle, quand elle existe.

Supposons donc que la relation (VI.16) est vérifiée et plaçons-nous pour commencer dans le cadre de la physique classique. Le poids d'une configuration donnée de positions et de vitesses avec N particules fait intervenir

$$\mathcal{P}(N; \{\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{p}_j\}) \;\propto\; \exp\left[-\frac{E(N; \{\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{p}_j\}) - \mu N}{k_{\rm B} T} \right]. \tag{VI.28}$$

Les quantités physiques à l'équilibre thermodynamique sont évaluées en calculant leur valeur moyenne avec cette distribution de probabilité.

Considérons une quantité physique $\mathcal{F}(N; \{\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{p}_j\})$ intervenant dans l'équation d'état du fluide. Ce peut être par exemple l'énergie ou la densité. Calculons la moyenne $\bar{\mathcal{F}}(T, \mu)$ à l'équilibre thermodynamique :

$$\bar{\mathcal{F}}(T, \mu) = \sum_N \int \mathcal{P}(N; \{\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{p}_j\})\, \mathcal{F}(N; \{\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{p}_j\}) \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}^d r_j\, \mathrm{d}^d p_j. \tag{VI.29}$$

Supposons de plus que la quantité physique $\mathcal{F}(N; \{\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{p}_j\})$ possède elle-même une loi d'échelle caractérisée par l'exposant ν dans l'opération de dilatation des longueurs et des temps :

$$\mathcal{F}(N; \{\lambda \boldsymbol{r}_j, \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{p}_j\}) = \frac{1}{\lambda^{2\nu}}\, \mathcal{F}(N; \{\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{p}_j\}). \tag{VI.30}$$

Par exemple, on a $\nu = d/2$ si on prend pour $\mathcal{F}$ la densité spatiale à d dimensions

$$\rho^{(d)}(\boldsymbol{r}) = \sum_{j=1}^{N} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j). \tag{VI.31}$$

puisque $\delta(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}\delta(x)$ pour chaque dimension d'espace.

Si on fait sur T et μ la transformation d'échelle

$$T \to \frac{1}{\lambda^2} T, \qquad \mu \to \frac{1}{\lambda^2}\mu, \tag{VI.32}$$

on peut alors vérifier qu'une loi d'échelle s'applique également à $\bar{\mathcal{F}}(T, \mu)$. Il suffit pour cela de faire le changement de variables

$$\boldsymbol{r}'_j = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{r}_j, \qquad \boldsymbol{p}'_j = \lambda \boldsymbol{p}_j \tag{VI.33}$$

dans l'intégrale (VI.29) définissant $\mathcal{F}(T, \mu)$ et d'utiliser

$$E(N; \{\lambda \boldsymbol{r}'_j, \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{p}'_j\}) = \frac{1}{\lambda^2} E(N; \{\boldsymbol{r}'_j, \boldsymbol{p}'_j\}). \tag{VI.34}$$

Le poids de Boltzmann $\mathcal{P}$ défini en (VI.28) reste alors inchangé et on obtient pour la quantité thermodynamique $\bar{\mathcal{F}}$

$$\bar{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{\lambda^2}T, \frac{1}{\lambda^2}\mu\right) = \frac{1}{\lambda^{2\nu}}\, \bar{\mathcal{F}}(T, \mu). \tag{VI.35}$$

En choisissant $\lambda^2 = T$, on en déduit immédiatement que $\bar{\mathcal{F}}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{\mathcal{F}}(T, \mu) = (k_{\rm B}T)^\nu\, f\left(\frac{\mu}{k_{\rm B}T}\right). \tag{VI.36}$$

Cette preuve s'étend au niveau quantique, une démonstration possible – calquée sur la démonstration classique – consistant à passer par le formalisme de l'intégrale de chemin avec l'action $\mathcal{S} = \int_t \int_{\boldsymbol{r}} \mathcal{L}$ et la densité de lagrangien $\mathcal{L} = \mathrm{i}\hbar\, \psi^* \partial_t \psi + \frac{\hbar^2}{2m} |\boldsymbol{\nabla}\psi|^2 + \mathcal{L}_{\rm inter.}$.

Exemple : densité dans l'espace des phases. Cette quantité sans dimension est définie comme

$$\mathcal{D} = \rho^{(d)} \lambda_T^d \qquad \text{avec} \quad \lambda_T \propto T^{-1/2}. \tag{VI.37}$$

Nous avons vu en (VI.31) que l'exposant ν est égal à $d/2$ pour la densité spatiale $\rho^{(d)}$; on en déduit que

$$\mathcal{D} = \mathcal{G}\left(\frac{\mu}{k_{\mathrm{B}}T}\right), \tag{VI.38}$$

ce qui est l'invariance d'échelle recherchée pour cette équation d'état.

1-4 Fluides invariants d'échelle

Le gaz parfait. Parmi les fluides invariants d'échelle, c'est-à-dire présentant la loi d'échelle (VI.16), le plus simple est sans doute le gaz parfait. Puisque l'énergie d'interaction est nulle dans ce cas et que l'énergie cinétique vérifie (VI.21-VI.25), on est certain que l'équation d'état de ce gaz donnant la densité dans l'espace des phases ne sera une fonction que de la seule variable $\mu/k_{\mathrm{B}}T$. Cette invariance d'échelle était bien présente dans les résultats que nous avions trouvés au chapitre 2, puisque nous avions obtenu la relation

$$\mathcal{D} = \mathrm{Li}_{d/2}\left(\mathrm{e}^{\mu/k_{\mathrm{B}}T}\right). \tag{VI.39}$$

Fluide avec des interactions en $1/r^2$. Il est immédiat de vérifier que si le potentiel $V(\boldsymbol{r})$ décrivant les interactions binaires s'écrit [LANDAU & LIFSHITZ (1987), § 35] :

$$V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) = \frac{V_0}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^2}, \tag{VI.40}$$

alors la contrainte (VI.26) sur l'énergie d'interaction est satisfaite. Nous n'étudierons pas ici ce type d'interactions, signalons simplement qu'elles sont à la base de nombreuses études de physique mathématique et de théorie statistique des champs, avec les modèles de Calogero–Sutherland – Moser.

Le gaz de Fermi unitaire à trois dimensions. Considérons un gaz de Fermi à deux composantes $\uparrow$ et $\downarrow$, à température suffisamment basse pour que les interactions entre particules de même spin $\uparrow\uparrow$ ou $\downarrow\downarrow$, qui ne se produisent que pour des ondes partielles de moment cinétique supérieur à 1, soient négligeables. Les seules interactions présentes se produisent dans l'onde s (moment cinétique nul) entre les deux composantes $\uparrow\downarrow$. Elles se décrivent par l'amplitude de diffusion dépendant du moment relatif k entre les deux atomes entrant en collision,

$$f(k) = \frac{-a}{1 + \mathrm{i}ka}, \tag{VI.41}$$

où a est la longueur de diffusion associée à cette interaction.

Dans la situation « normale » où a prend une valeur finie et non nulle, les interactions dans un gaz ultra-froid sont bien décrites par la limite $k \to 0$ de (VI.41), c'est-à-dire $f(k) \approx -a$. La longueur de diffusion introduit alors une échelle d'énergie naturelle dans le problème,

$$\epsilon = \frac{\hbar^2}{ma^2}, \tag{VI.42}$$

de sorte que l'équation d'état peut s'écrire, en absence d'autre échelle de longueur pertinente

$$\mathcal{D} = \mathcal{F}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\epsilon}, \frac{\mu}{\epsilon}\right). \tag{VI.43}$$

Dans cette écriture, on a tiré parti du fait que $\mathcal{D}$ étant sans dimension, on doit pouvoir l'écrire en terme de deux combinaisons possibles également sans dimension, obtenues à partir des trois énergies intervenant dans le problème $k_{\mathrm{B}}T$, μ et ϵ.

Grâce à des résonances de diffusion (résonances de Fano–Feshbach), on peut faire varier la longueur de diffusion a et la rendre infinie, auquel cas l'amplitude de diffusion prend sa valeur maximale :

$$f(k) = \frac{\mathrm{i}}{k} \tag{VI.44}$$

correspondant au régime unitaire [pour une revue, voir par exemple INGUSCIO, KETTERLE et al. (2008) et ZWERGER (2011)]. Dans ce régime, il n'y a plus d'échelle de longueur a associée aux interactions, donc plus

d'échelle d'énergie ϵ. Le seul moyen d'exprimer la grandeur sans dimension $\mathcal{D}$ en fonction des deux énergies $k_{\rm B}T$ et μ est donc de ne faire intervenir que le rapport de ces deux quantités, ce qui conduit de nouveau à une équation d'état invariante d'échelle du type écrit en (VI.38).

Notons que le caractère fermionique des particules est essentiel pour ce raisonnement. Pour des bosons, l'étude du problème à trois corps montre que des états liés du type de ceux prédits par EFIMOV (1971) apparaissent. L'émergence de ces états vient introduire une nouvelle échelle de longueur et d'énergie dans le problème, ce qui empêche l'obtention de l'invariance d'échelle. Cette brisure de l'invariance d'échelle peut d'ailleurs être vue comme une « anomalie quantique », semblable à celle que nous allons rencontrer un peu plus loin quand nous aurons à régulariser le potentiel de contact. Pour les fermions en revanche, WERNER & CASTIN (2006b) ont montré rigoureusement que le processus d'Efimov est absent, au moins si ces fermions sont de masse égale.

Le gaz de Bose à 2D en interaction faible ($\tilde{g} \lesssim 1$). Dans ce cours, nous avons traité les interactions entre particules par une interaction de contact

$$V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) = \frac{\hbar^2}{m}\,\tilde{g}\,\delta^{(2)}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j). \tag{VI.45}$$

C'est ce qui nous a permis, dans le cadre de la description de l'état du gaz par un champ classique $\psi(\boldsymbol{r})$, de simplifier le terme d'interaction :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\iint V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\;\psi^*(\boldsymbol{r})\,\psi^*(\boldsymbol{r}')\,\psi(\boldsymbol{r}')\,\psi(\boldsymbol{r})\;\mathrm{d}^2r\,\mathrm{d}^2r' \\ \rightarrow\quad &\frac{\hbar^2}{2m}\,\tilde{g}\int |\psi(\boldsymbol{r})|^4\,\mathrm{d}^2r. \end{aligned} \tag{VI.46}$$

Or la relation déjà mentionnée $\delta(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}\delta(x)$ pour chaque dimension d'espace entraîne qu'à deux dimensions, le potentiel de contact vérifie la loi d'échelle recherchée :

$$E_{\rm inter.} \rightarrow \frac{1}{\lambda^2}E_{\rm inter.} \tag{VI.47}$$

On s'attend donc là aussi à ce que la densité dans l'espace des phases soit une fonction de la seule variable sans dimension $\mu/k_{\rm B}T$, comme indiqué en (VI.38). Dans la section qui suit, nous allons montrer que cette invariance d'échelle est effectivement bien vérifiée expérimentalement dans la zone de validité de l'approche "champ classique". Nous étudierons ensuite dans les sections 3 et 4 la brisure possible de cette invariance, liée au fait que le potentiel de contact à deux dimensions (VI.45) est singulier et qu'il faut le régulariser pour décrire correctement l'interaction quantique entre atomes.

2 Mesures de l'équation d'état d'un gaz 2D

2-1 Approximation de densité locale

Les premières mesures précises de l'équation d'état d'un gaz atomique à deux dimensions ont été faites en 2011 par les groupes de Chicago et de l'ENS (HUNG, ZHANG et al. 2011 ; HA, HUNG et al. 2013 ; YEFSAH, DESBUQUOIS et al. 2011). Ces expériences ont été menées dans un piège harmonique dans le plan xy créant le potentiel isotrope

$$V_{\rm trap}(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2, \qquad \boldsymbol{r} = (x,y). \tag{VI.48}$$

On varie le nombre d'atomes N et la température T du nuage, et on mesure la densité spatiale $\rho(\boldsymbol{r})$ par une technique standard d'absorption d'un faisceau sonde résonant.

Le lien avec l'équation d'état d'un gaz uniforme repose sur l'approximation de densité locale, que nous avons déjà eu l'occasion de présenter. Pourvu que la densité $\rho(\boldsymbol{r})$ varie lentement à l'échelle des paramètres microscopiques du gaz (longueur d'onde thermique, libre parcours moyen, longueur de cicatrisation), l'état du gaz au voisinage d'un point $\boldsymbol{r}$ est le même que celui d'un gaz uniforme de même température et de potentiel chimique

$$\mu_{\rm loc}(r) = \mu - V(r), \tag{VI.49}$$

où μ est le potentiel chimique du nuage piégé.

Pour déterminer la température T et le potentiel chimique μ du nuage, on fait un ajustement de la distribution de densité dans les ailes du nuage par la loi connue pour un gaz très dilué. Si on néglige complètement les interactions, cette loi est celle du gaz de Bose idéal à deux dimensions (*cf.*

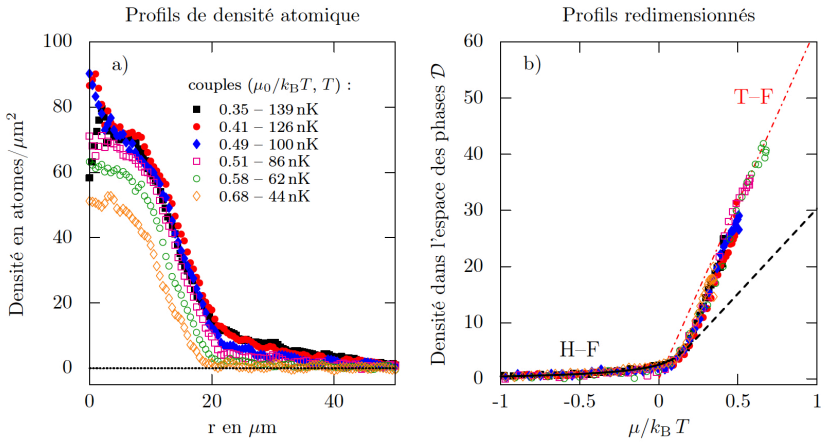


FIGURE VI.4. *Vérification de l'invariance d'échelle pour un gaz 2D de ^{87}Rb en interaction relativement faible, $\tilde{g} = 0.1$. Les profils de densité $\rho(r)$ mesurés dans un potentiel $V(r)$ se regroupent sur une courbe unique si on trace la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D}(r) = \rho(r)\lambda_T^2$ en fonction de $\mu_{\rm loc}(r)/k_BT$. Les deux régimes Hartree–Fock (HF) et Thomas–Fermi (TF) correspondent respectivement au cas faiblement et fortement dégénérés. Figure extraite de la thèse de Tarik* YEFSAH *(2011).*

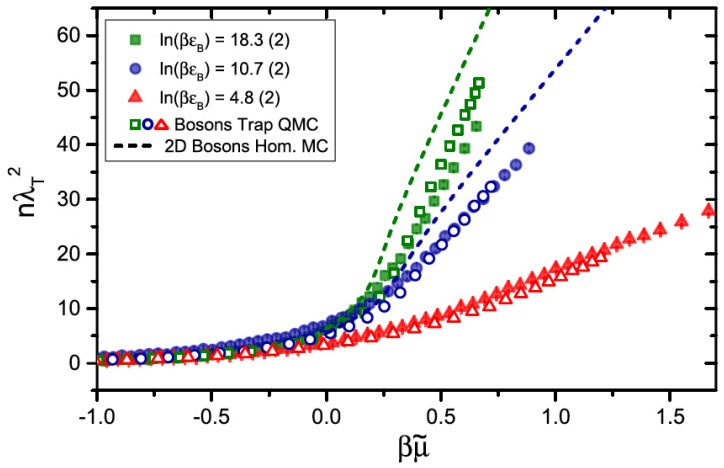


FIGURE VI.5. *Symboles fermés : équations d'état mesurées pour un gaz de molécules $^6Li_2$ avec un paramètre d'interaction $\tilde{g}$ = 0.60 (carrés), 1.07 (cercles), 2.75 (triangles). Les lignes pointillées donnent la prédiction obtenue par simulation de champ classique (*PROKOF'EV & SVISTUNOV *2002). Les symboles ouverts donnent le résultat d'une simulation de Monte Carlo quantique. Figure extraite de* BOETTCHER, BAYHA *et al. (2016).*

chapitre 2) :

$$\rho(\boldsymbol{r}) = -\lambda_T^{-2}\ \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_{\rm loc}(r)/k_BT}\right) \qquad \text{avec} \quad \lambda_T^{-2} \propto T, \tag{VI.50}$$

l'ajustement se faisant simultanément sur les deux paramètres T et μ. On peut raffiner cet ajustement en incluant les interactions entre atomes décrites à l'approximation de Hartree–Fock [chapitre 5, § 2.2 et HADZIBABIC & DALIBARD (2011)].

Une fois T et μ déterminés, la vérification de l'invariance d'échelle et l'équation d'état du fluide sont obtenues en reportant sur une même figure tous les profils de densité dans l'espace des phases $\mathcal{D}(r) = \rho(r)\lambda_T^2$. Plus précisément, on trace les courbes $\mathcal{D}(r)$ obtenues pour différents couples (μ, T) en fonction du même paramètre $\mu_{\rm loc}(r)/k_BT$. Si l'invariance d'échelle est vérifiée, on s'attend à ce que tous ces profils se regroupent sur une seule courbe, correspondant à un paramètre d'interaction $\tilde{g}$ donné.

C'est ce que l'on vérifie sur la figure VI.4, obtenue avec un gaz 2D d'atomes de rubidium. On a tracé également la prédiction obtenue à partir de simulations de champs classiques faite par PROKOF'EV & SVISTUNOV (2002). On constate un excellent accord sur toute la gamme des valeurs μ/k_BT, s'étendant depuis la région non-dégénérée, quasi-classique (régime Hartree-Fock), jusqu'au régime fortement dégénéré (Thomas–Fermi) où les excitations thermiques sont très faibles et où l'équation d'état s'écrit simplement [3]

$$\mu = \frac{\hbar^2}{m}\,\tilde{g}\,\rho \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{D} = \frac{2\pi}{\tilde{g}}\,\frac{\mu}{k_BT}. \tag{VI.51}$$

3. La réduction des fluctuations de densité est implicitement prise en compte dans cette expression. Si ces fluctuations de densité étaient présentes et telles que $\langle\rho^2\rangle = 2\,(\langle\rho\rangle)^2$ (chapitre 3, § 3.1), on aurait $\mu = 2\frac{\hbar^2}{m}\tilde{g}\rho$ ou encore $\mathcal{D} = \frac{\pi}{\tilde{g}}\frac{\mu}{k_BT}$, ce qui correspond à la courbe tiretée (régime Hartree–Fock) de la figure VI.4 .

Ce type d'expérience a été repris récemment par le groupe d'Heidelberg pour un gaz de molécules $^6Li_2$ au voisinage d'une résonance de Feshbach (BOETTCHER, BAYHA et al. 2016) [voir aussi des résultats de même nature par le groupe de Chicago (HA, HUNG et al. 2013) et par le groupe de Melbourne (FENECH, DYKE et al. 2016)]. Cela permet d'atteindre des paramètres d'interaction $\tilde{g}$ nettement supérieurs et de rechercher des déviations par rapport à la prédiction obtenue avec des champs classiques. Les résultats de BOETTCHER, BAYHA et al. (2016) sont reportés sur la figure VI.5. L'accord avec les prédictions de champ classique est relativement satisfaisant pour $\tilde{g} = 0.60$ et il se dégrade (en valeur relative) pour $\tilde{g} = 1.07$. Le paramètre en abscisse de cette figure est $\mu/k_{\rm B}T$, mais ces courbes ont été obtenues pour une seule température, de l'ordre de 60 nK. L'invariance d'échelle n'est donc pas testée de manière directe dans cette expérience.

2-2 Liens entre quantités thermodynamiques

L'invariance d'échelle d'un fluide amène avec elle toute une série de relations entre quantités thermodynamiques qui auraient autrement été indépendantes. Ce point a été exploré initialement par HO (2004) dans le cadre du gaz de Fermi unitaire à trois dimensions. Dans ce paragraphe, nous allons nous concentrer plutôt sur le gaz de Bose bi-dimensionnel.

Notre point de départ sera deux relations de Maxwell déduites de la différentielle du grand potentiel $\mathrm{d}\Omega = -S\,\mathrm{d}T - N\,\mathrm{d}\mu - P\,\mathrm{d}V$:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_{T,\mu} \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\mu,V} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,\mu}. \tag{VI.52}$$

Notons que nous continuons à utiliser la notation V pour désigner la taille du système, alors qu'il ne s'agit pas à proprement parler d'un volume mais d'une aire. De même, nous utilisons la dénomination "pression" pour la variable P, qui en toute rigueur a la dimension d'une tension superficielle.

Considérons d'abord la première de ces relations et utilisons la loi d'échelle homogène vue en § 1-1, valable pour des interactions à courte portée :

$$\left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_{T,\mu} = \frac{N}{V} = \rho. \tag{VI.53}$$

Du fait de l'invariance d'échelle, nous savons que la densité dans l'espace des phases $\rho\lambda_T^2$ est une fonction de $\mu/k_{\rm B}T$, et donc que la densité spatiale ρ peut s'écrire comme $k_{\rm B}T$ fois une fonction de μ/T :

$$\rho(\mu, T) = k_{\rm B}T\, g'\left(\frac{\mu}{k_{\rm B}T}\right). \tag{VI.54}$$

Ici, g' représente la dérivée d'une fonction g, la raison d'être de cette écriture apparaîtra dans la ligne qui suit.

L'intégration de

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \rho(\mu, T) \tag{VI.55}$$

nous indique que la pression s'écrit

$$P(\mu, T) = (k_{\rm B}T)^2\, g\left(\frac{\mu}{k_{\rm B}T}\right). \tag{VI.56}$$

Passons maintenant à la seconde relation de Maxwell écrite en (VI.52). Comme nous l'avons fait pour le nombre de particules en (VI.53), nous pouvons simplifier le membre de droite pour un système avec des interactions à courte portée en introduisant l'entropie par unité de surface S/V :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,\mu} = \frac{S}{V}. \tag{VI.57}$$

En injectant l'expression (VI.56) pour la pression, nous en déduisons

$$\frac{S}{V} = \frac{2P - \mu\rho}{T}. \tag{VI.58}$$

Cette relation a été utilisée par YEFSAH, DESBUQUOIS et al. (2011) pour déterminer l'entropie du gaz sur une grande plage de valeurs de $\mu/k_{\rm B}T$, avec des valeurs aussi basses que $0.06\,k_{\rm B}$ par particule pour les échantillons les plus froids.

Une dernière relation utile consiste à relier pression et énergie par unité de surface E/V. En utilisant le fait que le grand potentiel

$$\Omega = E - TS - \mu N \tag{VI.59}$$

est égal (toujours pour des interactions à suffisamment courte portée) à $-PV$, on trouve en injectant le résultat (VI.58) :

$$E = PV. \tag{VI.60}$$

Un résultat similaire (avec un coefficient numérique différent du fait du changement de dimensionnalité) avait été obtenu par HO (2004) pour un fluide 3D.

2-3 Les méthodes "sans ajustement"

L'existence de l'invariance d'échelle offre une voie alternative à l'analyse des profils de densité dans un piège et l'obtention de l'équation d'état du fluide. Cette méthode a été mise au point par le groupe du MIT pour un gaz tri-dimensionnel de fermions à la limite unitaire KU, SOMMER et al. (2012). Elle a ensuite été adaptée au cas bi-dimensionnel par le groupe de l'ENS (DESBUQUOIS, YEFSAH et al. 2014).

Nous ne rentrerons pas dans les détails de cette méthode qui tire parti de l'approximation de densité locale et nous renvoyons le lecteur à la thèse de DESBUQUOIS (2013) dans laquelle elle est détaillée. Elle permet d'éviter la détermination de la température et du potentiel chimique de chaque réalisation de l'expérience, ce qui élimine une source importante d'erreurs systématiques. Cette méthode repose sur le choix judicieux de deux variables thermodynamiques sans dimension, qui ne nécessitent pas d'assigner une température et un potentiel chimique à chaque image, ni de connaître la détectivité du système experimental. Ces données sont déterminées *a posteriori*, en utilisant un point de référence pour lequel l'état du gaz est bien connu.

Comme expliqué par DESBUQUOIS, YEFSAH et al. (2014), il y en principe une infinité de couples de variables sans dimension qui peuvent être choisies. En pratique, comme ces variables passent la prise de dérivée de grandeurs expérimentales, le choix est restreint ; KU, SOMMER et al. (2012) et DESBUQUOIS, YEFSAH et al. (2014) introduisent une compressibilité réduite et une pression réduite :

$$\tilde{\kappa} = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}V_{\mathrm{trap}}} \qquad \tilde{P} = \frac{m}{\hbar^2\rho^2}\int_{V_{\mathrm{trap}}}^{+\infty} \rho(V_{\mathrm{trap}})\,\mathrm{d}V_{\mathrm{trap}}. \tag{VI.61}$$

qui se calculent pour chaque image du gaz donnant $\rho(\boldsymbol{r})$, connaissant le potentiel de piégeage $V_{\mathrm{trap}}(\boldsymbol{r})$. En reprenant les notations de la section précédente, on constate que $\tilde{\kappa}$ et $\tilde{P}$ sont proportionnels respectivement aux fonctions g'' et $g/(g')^2$.

L'intérêt de paramétrer la densité spatiale par le potentiel du piège V_{trap} réside dans l'approximation de densité locale : cela revient à paramétrer par le potentiel chimique μ_{loc} en utilisant $\mu_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{r}) = \mu - V_{\mathrm{trap}}(\boldsymbol{r})$. On obtient ainsi une courbe paramétrée dans le plan $(\tilde{\kappa}, \tilde{P})$

$$\tilde{\kappa}(V_{\mathrm{trap}}),\ \tilde{P}(V_{\mathrm{trap}}) \tag{VI.62}$$

sur laquelle tous les points de mesure doivent s'accumuler et qui constitue en elle-même une version de l'équation d'état. Le retour vers une équation d'état plus "traditionnelle", par exemple la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D}$ en fonction de $\mu/k_{\mathrm{B}}T$, se fait en manipulant les relations thermodynamiques vues au paragraphe précédent.

2-4 Comportement universel autour de T_c

L'invariance d'échelle (approchée) que nous avons étudiée jusqu'ici portait sur l'ensemble du régime du fluide dimensionnel, depuis la région faiblement dégénérée où $\mu/k_{\mathrm{B}}T$ est grand en valeur absolue et négatif jusqu'à la région fortement dégénérée où $\mu/k_{\mathrm{B}}T$ est positif et grand devant 1, en passant par la zone critique. Pour chaque valeur du paramètre d'interaction $\tilde{g}$, nous obtenons une fonction $G(\mu/k_{\mathrm{B}}T)$ qui permet de déterminer l'ensemble des grandeurs thermodynamiques du fluide.

En revanche, nous n'avons pas cherché à connecter deux fonctions G différentes obtenues pour deux valeurs de $\tilde{g}$. Une telle connexion n'est d'ailleurs *a priori* pas possible, sauf si on se limite au voisinage du point critique. Dans cette région, une universalité supplémentaire apparaît (PROKOF'EV & SVISTUNOV 2002). Elle indique que l'écart d'une quantité physique à sa valeur critique, par exemple $\mathcal{D} - \mathcal{D}_c$ pour la densité dans l'espace des phases, doit s'exprimer comme une fonction de la seule variable

$$\frac{1}{\tilde{g}}\left[\frac{\mu}{k_{\mathrm{B}}T} - \left(\frac{\mu}{k_{\mathrm{B}}T}\right)_c\right]. \tag{VI.63}$$

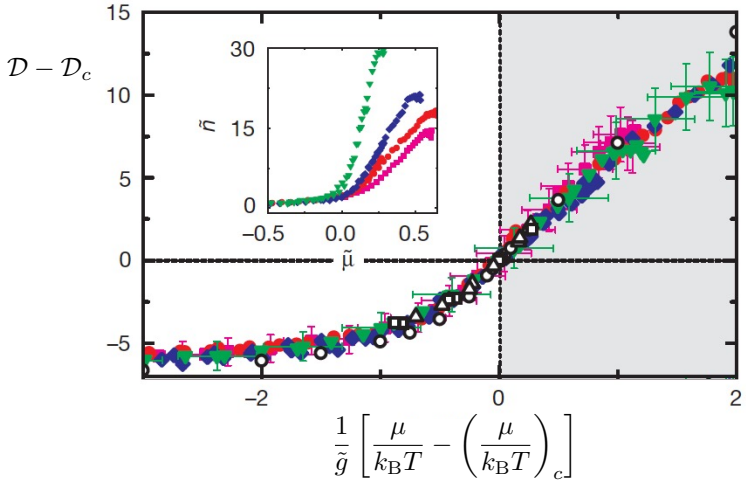


FIGURE VI.6. *Ecart entre la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D}$ et sa valeur critique $\mathcal{D}_c$, en fonction du paramètre "universel" défini en (VI.63). Le paramètre $\tilde{g}$ vaut 0.05 (triangles verts), 0.13 (losanges bleus), 0.19 (cercles rouges) and 0.26 (carrés magenta). L'insert représente la variation de $\mathcal{D}$ en fonction de $\mu/k_B T$. Ces mesures sont faites sur un gaz de césium au voisinage d'une résonance de Feshbach. Figure extraite de* HUNG, ZHANG *et al. (2011).*

Cette prédiction a été testée avec succès par le groupe de Chicago. HUNG, ZHANG et al. (2011) ont étudié le voisinage du point critique pour des paramètres d'interaction variant de 0.05 à 0.26 (figure VI.6). Ils ont montré que les variations de la quantité $\mathcal{D} - \mathcal{D}_c$ peuvent effectivement se superposer quand on les trace en fonction de la variable (VI.63).

3 Le potentiel delta à 2D

L'invariance d'échelle que nous venons d'étudier est une propriété remarquable des gaz 2D ; elle est directement liée à la possibilité de modéliser le potentiel d'interaction entre deux atomes $U(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$ par une distribution de Dirac, avec $\delta^{(2D)}(\lambda\,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\lambda^2}\delta^{(2D)}(\boldsymbol{r})$. Cette modélisation ne pose pas de problème particulier au niveau de la description en champ classique. En revanche, elle n'est pas tenable si on veut prendre en compte le caractère quantique du mouvement des atomes. Nous avons vu au chapitre 2 que le traitement quantique de la collision entre deux particules introduit une échelle de longueur, la longueur de diffusion à deux dimensions a_2. Or l'existence de cette longueur a pour effet immédiat de briser l'invariance d'échelle. Dans cette partie, nous allons brièvement revenir sur le problème de collision à deux dimensions, pour expliciter le problème lié à une interaction de contact. Nous allons adopter ici la procédure détaillée par HOLSTEIN (1993), qui consiste à partir d'une distribution de Dirac et à la régulariser [4] en mettant une coupure dans l'espace des impulsions à une valeur maximale Q.

3-1 État stationnaire de diffusion

Nous considérons ici une collision entre deux particules identiques de masse m en nous plaçant dans le référentiel de leur centre de masse. Comme expliqué au chapitre 2, cela revient à étudier le problème de la diffusion d'une particule de masse réduite $m_r = m/2$ par le potentiel $U(\boldsymbol{r})$. Considérons un état de diffusion $\psi(\boldsymbol{r})$ d'énergie positive

$$E \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} \tag{VI.64}$$

et écrivons $U(\boldsymbol{r})$ comme une distribution de Dirac d'amplitude $\hbar^2\tilde{g}/m$ comme nous l'avons fait dans les chapitres précédents :

$$U(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar^2}{m}\,\tilde{g}\,\delta^{(2D)}(\boldsymbol{r}). \tag{VI.65}$$

L'équation de Schrödinger indépendante du temps permet de déterminer la forme des états stationnaires de diffusion d'énergie E. Cette équation

4. La discussion d'autres méthodes de régularisation est présentée par exemple dans MEAD & GODINES (1991), CABO, LUCIO et al. (1998) et NYEO (2000). Il est par ailleurs possible d'implémenter une version spatialement discrétisée du problème qui permet d'éviter toute divergence, comme montré par MORA & CASTIN (2003) et CASTIN (2004). On peut enfin utiliser une famille de potentiels plus élaborés, les Λ potentiels, comme expliqué dans OLSHANII & PRICOUPENKO (2002), PRICOUPENKO (2004) et PRICOUPENKO & OLSHANII (2007) (voir aussi TAN (2005)).

s'écrit

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi(\boldsymbol{r}) = \tilde{g}\,\delta(\boldsymbol{r})\,\psi(\boldsymbol{r}). \tag{VI.66}$$

Nous souhaitons déterminer la forme des états stationnaires de diffusion $\psi(\boldsymbol{r})$ et montrer pourquoi l'amplitude de diffusion contient un terme susceptible de briser l'invariance d'échelle.

Passons cette équation en point de vue de Fourier en introduisant la transformée $\phi(\boldsymbol{q})$ de $\psi(\boldsymbol{r})$:

$$\phi(\boldsymbol{q}) = \int \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\,\psi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^2 r \qquad \psi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{e}^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\,\phi(\boldsymbol{q})\,\mathrm{d}^2 q \tag{VI.67}$$

ce qui donne

$$(q^2 - k^2)\,\phi(\boldsymbol{q}) = -\tilde{g}\,\psi(0). \tag{VI.68}$$

Puisqu'on s'intéresse à un problème de diffusion, la solution de cette équation s'obtient en ajoutant l'onde plane incidente $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ à la solution particulière proportionnelle à $\tilde{g}$:

$$\phi(\boldsymbol{q}) = (2\pi)^2\,\delta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k}) \;-\; \frac{\tilde{g}\,\psi(0)}{q^2 - k^2 - \mathrm{i}\varepsilon}. \tag{VI.69}$$

Notons que nous avons ajouté le facteur de convergence $\mathrm{i}\varepsilon$ à l'énergie $\propto k^2$ de l'état recherché, car nous recherchons l'état stationnaire de diffusion avec une onde cylindrique sortante.

Supposons pour l'instant connue la valeur de $\tilde{g}\psi(0)$. La transformée de Fourier 2D inverse de la fonction $1/(q^2 - k^2 - \mathrm{i}\epsilon)$ est proportionnelle à la *fonction de Hankel de première espèce :*

$$H_0^{(1)}(kr) = -\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}}{q^2 - k^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}^2 q, \tag{VI.70}$$

cette fonction étant elle-même directement reliée aux fonctions de Bessel de première et deuxième espèce, J_0 et H_0, rencontrées au chapitre 2 :

$$H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + \mathrm{i}Y_0(x). \tag{VI.71}$$

Le comportement asymptotique de $H_0^{(1)}(kr)$ aux grands r est

$$H_0^{(1)}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\pi/4)} \tag{VI.72}$$

qui est bien celui d'une onde cylindrique sortante. L'état stationnaire de diffusion (VI.69) s'écrit donc dans l'espace des positions

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \;-\; \frac{\mathrm{i}}{4}\,\tilde{g}\psi(0)\;H_0^{(1)}(kr). \tag{VI.73}$$

On retrouve donc un problème de diffusion similaire à celui traité au chapitre 2 avec l'amplitude de diffusion

$$f(k) = \tilde{g}\psi(0). \tag{VI.74}$$

3-2 Nécessité d'une coupure

Pour caractériser entièrement la diffusion par le potentiel $\tilde{g}\delta(\boldsymbol{r})$, il nous reste à évaluer $\tilde{g}\psi(0)$. Pour cela, repartons de (VI.69) et remarquons que l'auto-cohérence du modèle nécessite d'imposer

$$\psi(0) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \phi(\boldsymbol{q})\,\mathrm{d}^2 q = 1 \;-\; \frac{\tilde{g}\,\psi(0)}{(2\pi)^2}\int \frac{1}{q^2 - k^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}^2 q. \tag{VI.75}$$

La nécessité d'imposer une coupure dans l'espace des impulsions apparaît alors immédiatement, puisque l'intégrale qui précède diverge à 2D (alors qu'elle ne pose pas de problème à 1D). Avec la coupure, l'intégrale se calcule en utilisant [5] :

$$\int_0^Q \frac{2q}{q^2 - k^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}q = 2\ln(Q/k) \;+\; \mathrm{i}\pi \tag{VI.77}$$

où nous avons négligé une contribution en $1/Q^2$. Nous obtenons donc

$$\tilde{g}\psi(0) = f(k) = \frac{1}{\dfrac{1}{\tilde{g}} + \dfrac{1}{2\pi}\ln(Q/k) + \dfrac{\mathrm{i}}{4}}, \tag{VI.78}$$

5. On rappelle que

$$\frac{1}{x - x_0 - \mathrm{i}\epsilon} = \mathcal{PP}\left(\frac{1}{x - x_0}\right) + \mathrm{i}\pi\delta(x - x_0). \tag{VI.76}$$

ce qui correspond à la structure trouvée au chapitre 2 pour l'amplitude de diffusion [6]

$$f(k) = \frac{1}{\dfrac{1}{2\pi}\ln(1/ka_2) + \dfrac{\mathrm{i}}{4}}, \tag{VI.79}$$

avec la longueur de diffusion

$$a_2 = \frac{\mathrm{e}^{-2\pi/\tilde{g}}}{Q}, \tag{VI.80}$$

qui dépend à la fois du paramètre sans dimension $\tilde{g}$ et de la coupure Q.

Dans le problème du gaz 2D traité par champ classique, nous avons utilisé le fait qu'un potentiel de contact $\tilde{g}\delta(\boldsymbol{r})$ pouvait se décrire par une amplitude de diffusion $f(k)$ constante

$$\text{champ classique :} \qquad \frac{1}{f(k)} \approx \frac{1}{\tilde{g}}. \tag{VI.81}$$

Quand on prend en compte le caractère quantique du mouvement des particules, on voit qu'au niveau du problème à deux corps, cette approximation n'est pas possible *stricto sensu*. En particulier, contrairement à ce qui se produit pour le cas 3D [*cf.* eq. (VI.41)], l'amplitude $f(k)$ n'admet pas de limite finie quand $k \to 0$ dans le cas bi-dimensionnel.

En résumé, nous trouvons pour le potentiel de contact $\frac{\hbar^2}{m}\tilde{g}\delta(\boldsymbol{r})$:

— qu'il est nécessaire d'introduire une coupure Q dans l'espace des impulsions ;

— que cette coupure modifie l'amplitude de diffusion $f(k)$:

$$\frac{1}{f(k)} \approx \frac{1}{\tilde{g}} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{f(k)} \approx \frac{1}{\tilde{g}} + \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{Q}{k}\right) \tag{VI.82}$$

où l'on a gardé ici uniquement les termes réels (dominants) dans $1/f(k)$;

— que cette coupure fait émerger une longueur de diffusion à deux dimensions a_2, la modification de l'amplitude de diffusion s'écrivant alors :

$$\frac{1}{f(k)} \approx \frac{1}{\tilde{g}} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{f(k)} \approx \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{ka_2}\right), \tag{VI.83}$$

où $a_2 = \frac{1}{Q}\mathrm{e}^{-2\pi/\tilde{g}}$.

Comme nous l'avons indiqué plus haut, la présence de cette échelle de longueur vient briser l'invariance d'échelle que nous avions trouvé dans le formalisme du champ classique : les interactions quantiques à deux dimensions ne peuvent pas se décrire avec un nombre sans dimension $\tilde{g}$ indépendant des échelles d'énergie en jeu. En particulier, l'équation d'état du gaz prend désormais la forme générique suivante (RANÇON & DUPUIS 2012) :

$$\rho\lambda_T^2 = \mathcal{F}\left[\frac{\mu}{k_{\mathrm{B}}T},\ \tilde{g}(\mu)\right]. \tag{VI.84}$$

Nous allons maintenant examiner sur le cas simple $T = 0$ la structure de cette équation d'état.

3-3 Equation d'état à température nulle

Dans ce paragraphe, nous discutons brièvement une première manifestation de la brisure de l'invariance d'échelle, qui se manifeste sur l'équation d'état du gaz de Bose 2D à $T = 0$. L'écriture de cette équation d'état a fait l'objet de nombreuses publications depuis les travaux initiaux de SCHICK (1971) et POPOV (1972). Notons que dans ce cas, le théorème de Mermin–Wagner ne s'applique plus et le gaz peut présenter un véritable ordre à longue portée avec une fraction condensée importante.

Dans le cadre de la théorie de champ classique, l'équation d'état du gaz 2D à $T = 0$ est simplement (*cf.* chapitre 5, équation 12) :

$$\mu = \frac{\hbar^2}{m}\,\tilde{g}\,\rho \qquad \longleftrightarrow \qquad \rho = \frac{m\mu}{\hbar^2}\,\frac{1}{\tilde{g}}. \tag{VI.85}$$

Cette relation linéaire entre densité spatiale ρ et potentiel chimique μ est inévitable dans le cadre d'une équation d'état invariante d'échelle, dans la limite $T \to 0$. En effet, nous avons vu que l'invariance d'échelle entraîne

6. Pour simplifier l'écriture, nous négligeons ici certaines corrections logarithmiques d'ordre unité, comme le coefficient $\eta = 0.89$ qui apparaissait dans l'équation (106) du chapitre 2.

que la densité dans l'espace des phases est de manière générale une fonction de $\mu/k_{\rm B}T$ seulement, dont on déduit :

$$\mathcal{D} = \mathcal{G}\left(\frac{\mu}{k_{\rm B}T}\right) \qquad \longrightarrow \qquad \rho \propto T\,\mathcal{G}\left(\frac{\mu}{k_{\rm B}T}\right). \tag{VI.86}$$

Pour qu'une limite $T \to 0$ existe pour la densité spatiale ρ dans cette dernière relation, il faut que le terme dominant de $\mathcal{G}(x)$ quand $x \to \infty$ soit linéaire en x et on en déduit alors immédiatement $\rho \propto \mu$.

La brisure de l'invariance d'échelle par les effets quantiques vus plus haut va venir modifier ce résultat très simple. On peut montrer de manière générale que la relation entre ρ et μ fait intervenir l'amplitude de diffusion $f(k)$ pour des collisions de très bas vecteur d'onde, qui sont les seules pertinentes dans ce régime (POPOV 1972). La substitution de l'amplitude de diffusion "classique" $\tilde{g}$ par l'amplitude de diffusion "quantique" (VI.83) conduit alors à une expression du type

$$\rho = \frac{m\mu}{2\pi\hbar^2}\,\ln\left(\frac{1}{k_* a_2}\right), \tag{VI.87}$$

où nous avons introduit une échelle "naturelle" de vecteur d'onde k_* qu'il s'agit maintenant d'expliciter. Nous allons pour cela nous appuyer sur la synthèse faite par MORA & CASTIN (2009), dont nous allons énoncer les principaux résultats [voir aussi ASTRAKHARCHIK, BORONAT et al. (2009)]. On pourra consulter également les articles plus récents de MASHAYEKHI, BERNIER et al. (2013) et SALASNICH (2017) où des corrections supplémentaires sont prises en compte.

Partant d'interactions caractérisées par la longueur de diffusion a_2, on cherche à faire un développement de l'expression des différentes quantités physiques du gaz à température nulle en puissances du paramètre

$$\epsilon = \frac{1}{\ln(E_2/\mu)} \qquad \text{avec} \quad E_2 = \frac{\hbar^2}{m a_2^2}. \tag{VI.88}$$

Ce paramètre est effectivement petit devant 1 si on prend une limite basse densité pour laquelle $0 < \mu \ll E_2$. MORA & CASTIN (2009) calculent en particulier le grand potentiel qu'ils écrivent sous la forme :

$$\frac{\Omega(\mu)}{L^2} = -\frac{m\mu^2}{8\pi\hbar^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + \alpha_0 + \alpha_1\epsilon + \ldots\right]. \tag{VI.89}$$

et pour lequel ils calculent explicitement les premiers coefficients du développement α_0 et α_1.

On déduit de cette expression la densité spatiale :

$$\rho = \frac{N}{L^2} = -\frac{1}{L^2}\,\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_{T,L^2} \tag{VI.90}$$

ce qui donne à l'ordre le plus bas en ϵ

$$\rho = \frac{m\mu}{4\pi\hbar^2}\,\ln\left(\frac{E_2}{\mu}\right). \tag{VI.91}$$

Il s'agit bien de la forme annoncée en (VI.87), en posant

$$\frac{\hbar^2 k_*^2}{m} = \mu. \tag{VI.92}$$

C'est donc la valeur du potentiel chimique qui vient donner l'échelle pertinente de vecteur d'onde k_* à insérer dans l'amplitude de diffusion et dans l'équation d'état.

3-4 Le cas pratique d'une expérience d'atomes froids

Considérons maintenant le cas pratique d'un gaz bi-dimensionnel obtenu en appliquant un fort potentiel de confinement dans la direction z. Nous supposons comme d'habitude que ce potentiel est harmonique de pulsation ω_z. Nous avons donné au chapitre 2 l'expression de la longueur de diffusion à 2D[7] :

$$a_2 \;\approx\; a_{\rm oh}\,{\rm e}^{-2\pi/\tilde{g}}. \tag{VI.93}$$

Dans cette expression, $a_{\rm oh} = (\hbar/m\omega_z)^{1/2}$ représente l'extension de l'état fondamental du mouvement selon la direction z. On trouve alors en utilisant (VI.91)

$$\rho \approx \frac{m\mu}{\hbar^2}\left[\frac{1}{\tilde{g}} + \frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{\mu}{\hbar\omega_z}\right)\right]. \tag{VI.94}$$

7. Comme plus haut dans ce chapitre et pour simplifier la discussion, nous négligeons ici un coefficient multiplicatif d'ordre unité, présent dans l'équation (110) du chapitre 2 mais sans importance pour la discussion présente.

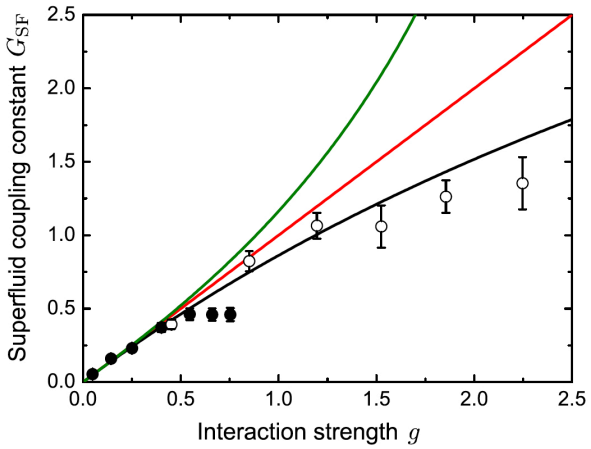


FIGURE VI.7. *Paramètre $G = m/(\hbar^2\kappa)$, caractérisant le lien entre densité ρ et potentiel chimique μ à très basse température pour un gaz 2D d'atomes de césium. La théorie de champ classique prédit $G = \tilde{g}$ (ligne droite rouge). La ligne noire continue représente une prédiction basée sur la théorie de Ginzburg–Landau (SACHDEV & DEMLER 2004). Les symboles ouverts ont été obtenus pour un gaz évoluant dans un réseau optique opérant dans un régime où son effet est essentiellement une renormalisation de la masse et de la force des interactions. Figure extraite de* HA, HUNG *et al. (2013).*

Dans la plupart des expériences d'atomes froids, potentiel chimique μ et énergie de confinement $\hbar\omega_z$ ne diffèrent pas par plusieurs ordres de grandeurs, de sorte que le deuxième terme du crochet figurant ci-dessus est généralement notablement plus petit que 1. Si le paramètre d'interaction $\tilde{g}$ est lui-même plus petit que 1, le terme dominant dans (VI.94) est $1/\tilde{g}$, et la théorie de champ classique s'applique.

L'expérience menée à Chicago par HA, HUNG et al. (2013) sur des atomes de césium dans un réseau optique a toutefois permis de sonder le régime $T \approx 0$ en présence de fortes interactions, avec le paramètre $\tilde{g}$ dépassant 2. À partir de la compressibilité $\kappa = \frac{\partial\rho}{\partial\mu}$ du gaz superfluide à température très basse, HA, HUNG et al. (2013) définisse le paramètre $G = m/(\hbar^2\kappa)$. Les valeurs mesurées pour ce paramètre sont représentées sur la figure VI.7. Elles montrent une déviation notable par rapport à la prédiction de la théorie de champ classique $G = \tilde{g}$ pour les grandes valeurs de $\tilde{g}$.

4 Le mode de respiration d'un gaz piégé

Pour mettre en évidence l'éventuelle invariance d'échelle d'un gaz bidimensionnel, PITAEVSKII & ROSCH (1997) ont proposé d'étudier le mode de respiration de ce gaz quand on le confine dans un piège harmonique isotrope, $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ avec $r^2 = x^2 + y^2$. Ce mode de respiration, encore appelé mode monopolaire, consiste en une dilatation puis une contraction isotrope du gaz. En présence de l'invariance d'échelle, il doit présenter les propriétés suivantes :

— Il se fait à la fréquence 2ω, sans aucune modification liée aux interactions.

— Il ne présente pas d'amortissement.

— Ces propriétés sont valables quelle que soit l'amplitude d'excitation du mode (pas nécessairement faible).

Un ensemble de propriétés aussi simples en font évidemment un candidat de choix pour étudier précisément l'invariance d'échelle et son éventuelle brisure du fait de la régularisation du potentiel en $\delta(\boldsymbol{r})$. Signalons par ailleurs que ces propriétés ont été étendues à un autre fluide invariant d'échelle, le gaz de Fermi unitaire 3D, par WERNER & CASTIN (2006a).

Dans cette section, nous allons d'abord expliquer l'origine des propriétés que nous venons de mentionner en prenant successivement deux points de vue. Le premier, très concret, consistera à étudier l'évolution dans le temps du champ classique $\psi(\boldsymbol{r}, t)$. Le second, plus formel, sera basé sur une algèbre d'opérateurs. Nous aborderons ensuite l'anomalie quantique concernant ce mode, c'est-à-dire la perte de la symétrie qui lui est associée lors du passage vers une description quantique de l'oscillation.

4-1 Point de vue ondulatoire

Considérons un champ classique $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ décrivant un fluide 2D évoluant dans un piège harmonique isotrope, avec l'interaction de contact dé-

crite par le paramètre $\tilde{g}$. L'équation d'évolution déduite de la fonctionnelle d'énergie de Gross–Pitaevskii s'écrit [8]

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\psi}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \;+\; \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\,\psi(\boldsymbol{r},t) \;+\; \frac{\hbar^2}{m}\,\tilde{g}\,|\psi(\boldsymbol{r},t)|^2\,\psi(\boldsymbol{r},t). \quad \text{(VI.95)}$$

Partons d'une solution stationnaire $\psi_0(\boldsymbol{r})$ associée au potentiel chimique μ :

$$\mu\,\psi_0(\boldsymbol{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_0 \;+\; \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\,\psi_0(\boldsymbol{r}) \;+\; \frac{\hbar^2}{m}\,\tilde{g}\,|\psi_0(\boldsymbol{r})|^2\,\psi_0(\boldsymbol{r}). \quad \text{(VI.96)}$$

On peut alors vérifier explicitement que l'on peut fabriquer toute une classe de fonctions solutions de l'équation dépendant du temps (VI.95) en posant :

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(t)}}{\lambda(t)}\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(t)\,r^2}\;\psi_0\left(\frac{\boldsymbol{r}}{\lambda(t)}\right) \quad \text{(VI.97)}$$

où les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ s'expriment en fonction de la troisième fonction $\lambda(t)$

$$\alpha(t) = -\frac{\mu}{\hbar}\int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{\lambda^2(t')}, \qquad \beta(t) = \frac{m}{2\hbar}\,\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}, \quad \text{(VI.98)}$$

et où cette troisième fonction $\lambda(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{\lambda}(t) = \omega^2\left[\frac{1}{\lambda^3(t)} - \lambda(t)\right]. \quad \text{(VI.99)}$$

Les solutions de cette dernière équation sont

$$\lambda(t) = \left[\sinh(\eta)\cos(2\omega t+\varphi) \;+\; \cosh(\eta)\right]^{1/2} \quad \text{(VI.100)}$$

où l'amplitude η et la phase φ sont arbitraires. Ces fonctions $\lambda(t)$ sont périodiques en temps de période π/ω ; chacune correspond à un mode de respiration avec le facteur d'échelle $\lambda(t)$ puisque la densité spatiale déduite de (VI.97) vérifie

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\lambda^2(t)}\;\rho_0\left(\frac{\boldsymbol{r}}{\lambda(t)}\right). \quad \text{(VI.101)}$$

8. Le $\dot{}$ signifie ici et dans ce qui suit une dérivée par rapport au temps.

Comparaison avec le cas 3D. L'existence d'une loi d'échelle dans l'évolution d'un gaz quantique a également été montrée dans le cas 3D par CASTIN & DUM (1996) et KAGAN, SURKOV et al. (1996). Les relations que l'on déduit dans ce cas sont notamment très commodes pour déterminer le comportement d'un condensat de Bose–Einstein quand on coupe le piège qui le confine. Toutefois, il s'agit dans le cas 3D de relations approchées, obtenues en supposant que l'énergie cinétique est petite devant les autres énergies en jeu, interaction et piégeage. Dans le cas 2D au contraire, le fait que la loi d'échelle soit la même pour l'énergie cinétique et pour l'énergie d'interaction entraîne que la fonction $\psi(\boldsymbol{r},t)$ écrite en (VI.97) est une solution exacte de l'équation de Gross–Pitaevskii, quelle que soit l'importance relative des différentes contributions à l'énergie du système.

4-2 Point de vue algébrique

La méthode ondulatoire décrite plus haut permet de déterminer explicitement la classe de fonctions correspondant au mode de respiration 2D, mais elle ne révèle pas la symétrie cachée derrière la dégénérescence correspondant à toutes ces fonctions oscillant à la même fréquence 2ω. Pour mettre en évidence cette symétrie, PITAEVSKII & ROSCH (1997) ont introduit trois opérateurs appropriés au problème et ils ont montré que ces opérateurs formaient une algèbre fermée. La dégénérescence recherchée s'en déduit alors simplement.

Partant des trois contributions à l'hamiltonien du système

$$\hat{H}_{\rm cin} = \sum_j \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_j^2}{2m} \qquad \hat{H}_{\rm int} = \sum_{i<j} U\left(\hat{\boldsymbol{r}}_i - \hat{\boldsymbol{r}}_j\right) \qquad \hat{H}_{\rm trap} = \sum_j \frac{1}{2}m\omega^2\hat{\boldsymbol{r}}_j^2 \quad \text{(VI.102)}$$

les trois opérateurs utiles sont :

$$\hat{L}_1 \;=\; \frac{1}{2\omega}\left(\hat{H}_{\rm cin} + \hat{H}_{\rm int} - \hat{H}_{\rm trap}\right), \quad \text{(VI.103)}$$

$$\hat{L}_2 \;=\; \frac{1}{4}\sum_j \left(\hat{r}_j\cdot\hat{p}_j + \hat{p}_j\cdot\hat{r}_j\right), \quad \text{(VI.104)}$$

$$\hat{L}_3 \;=\; \frac{1}{2\omega}\left(\hat{H}_{\rm cin} + \hat{H}_{\rm int} + \hat{H}_{\rm trap}\right). \quad \text{(VI.105)}$$

On remarquera que $\hat{L}_3$ n'est autre que l'hamiltonien total $\hat{H}$ du système, au facteur $1/2\omega$ près.

Si le potentiel d'interaction $U(\boldsymbol{r})$ satisfait la loi d'échelle $U(\lambda\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\lambda^2}U(\boldsymbol{r})$, alors on peut vérifier[9] que l'on a les trois relations de commutation

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = -\mathrm{i}\hbar\hat{L}_3, \qquad [\hat{L}_2, \hat{L}_3] = \mathrm{i}\hbar\hat{L}_1, \qquad [\hat{L}_3, \hat{L}_1] = \mathrm{i}\hbar\hat{L}_2. \tag{VI.106}$$

S'il n'y avait pas le signe $-$ dans la première relation, on reconnaîtrait les équations caractérisant l'opérateur moment cinétique dans l'espace à trois dimensions et on serait donc en présence de l'algèbre de Lie du groupe des rotation SO(3). Avec ce signe $-$, l'algèbre de Lie décrite ici est celle du groupe de Lorentz en 2+1 dimensions, correspondant au groupe SO(2,1).

Cette algèbre fermée à trois opérateurs permet de déduire une série de propriétés importantes concernant les états propres du fluide. Comme pour l'algèbre du moment cinétique, introduisons les deux opérateurs

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_1 \pm \mathrm{i}\hat{L}_2. \tag{VI.107}$$

On vérifie immédiatement les relations de commutation

$$[\hat{L}_3, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\ \hat{L}_\pm \tag{VI.108}$$

dont on déduit que si l'on se donne un état propre $|\psi\rangle$ de $\hat{L}_3$ (donc de $\hat{H}$), on peut engendrer une série d'autres états propres en faisant agir $\hat{L}_\pm$ sur $|\psi\rangle$. En particulier, si E est la valeur propre associée à $|\psi\rangle$ pour $\hat{H}$, alors $E + 2\hbar\omega$ sera associée à $\hat{L}_+|\psi\rangle$. La "tour" d'états d'énergie $E + n\,2\hbar\omega$ avec $n \in \mathbb{N}$ correspond au mode monopolaire d'amplitude (liée au nombre de quanta n) quelconque que nous avons trouvé au paragraphe précédent.

4-3 Brisure de l'invariance d'échelle

Le raisonnement algébrique qui précède utilise de manière explicite la loi d'échelle du potentiel d'interaction $U(\lambda\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\lambda^2}U(\boldsymbol{r})$. Dans la mesure où cette loi d'échelle cesse d'être vérifiée quand on régularise le potentiel de contact à 2D, on s'attend à ce que les propriétés trouvées par PITAEVSKII & ROSCH (1997) soient également invalidées par cette procédure de régularisation.

Les conséquences de la brisure d'invariance d'échelle ont été étudiées en détail par OLSHANII, PERRIN et al. (2010) et HU & LIANG (2011) pour des bosons et par HOFMANN (2012) pour des fermions. Nous n'allons pas reprendre ici le détail de ces articles et nous indiquons simplement les résultats principaux. Le point essentiel est que l'algèbre des trois opérateurs cesse d'être fermée et les commutateurs (VI.106) font maintenant intervenir le terme supplémentaire proportionnel à

$$a_2\frac{\partial\hat{H}}{\partial a_2} \tag{VI.109}$$

qui ne s'exprime pas en termes des trois opérateurs $\hat{L}_j$. Pour le cas d'un gaz de Bose 2D fortement confiné dans la troisième direction par un potentiel harmonique, OLSHANII, PERRIN et al. (2010) ont montré qu'un traitement perturbatif du terme "anormal" (VI.109) conduisait pour un mouvement de faible amplitude à un déplacement en fréquence du mode monopolaire

$$\frac{\delta\omega_{\mathrm{monop.}}}{2\omega} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\ \frac{a}{a_{\mathrm{oh}}}. \tag{VI.110}$$

Comme le rapport entre la longueur de diffusion à trois dimensions a et l'extension de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique a_{oh} est en général petit devant 1, ce déplacement est très faible et n'a –à notre connaissance– pas encore été mesuré. L'utilisation d'une résonance de Feshbach pourrait permettre d'augmenter a , donc l'importance de cette correction. Pour un gaz de fermions dans le régime du *cross-over* BEC–BCS, un résultat similaire a été obtenu par HOFMANN (2012), qui relie par ailleurs son résultat aux propriétés du contact de Tan.

4-4 Études expérimentales

Sur des bosons (^{87}Rb), la première étude en relation avec le mode monopolaire de PITAEVSKII & ROSCH (1997) a été faite CHEVY, BRETIN et al. (2001) à ParisVI.8. Il ne s'agissait pas à strictement parler d'un gaz 2D, mais plutôt d'un gaz en forme de cigare très allongé. Cette étude est néanmoins

9. On utilise notamment la propriété $(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla})U = -2U$.

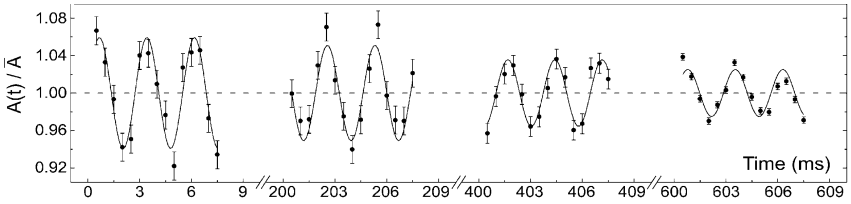


FIGURE VI.8. *Oscillation temporelle de l'aire transverse d'un gaz 3D de rubidium confiné dans un piège « cigare ». L'oscillation se fait à une fréquence égale (à la précision de mesure près) au double de la fréquence transverse du piège. Ce mode d'oscillation n'est que très faiblement amorti (facteur de qualité* > 2000*). Figure extraite de* CHEVY, BRETIN *et al. (2001).*

pertinente du fait du découplage effectif entre les degrés de liberté transverses du cigare (ceux affectés par le mode monopolaire) et le degré de liberté longitudinal. CHEVY, BRETIN et al. (2001) ont effectivement observé un mode monopolaire de très longue durée de vie, de fréquence égale à 2ω à la précision de mesure près ($3\ 10^{-3}$ en valeur relative).

Une expérience plus récente a été menée à Cambridge sur des fermions (^{40}K) dans une géométrie 2D par VOGT, FELD et al. (2012). Là aussi, le mode monopolaire a été observé avec une fréquence compatible avec la prédiction 2ω de champ classique (figure VI.9) et avec un très faible amortissement ($\Gamma/\omega \sim 0.05$). Ce résultat est plus surprenant que celui de Paris, car les chercheurs de Cambridge s'étaient placés au voisinage d'une résonance de Feshbach. On aurait donc pu s'attendre à ce que la régularisation du potentiel $\delta(\boldsymbol{r})$ joue un rôle important. Ce résultat « négatif » a été expliqué par TAYLOR & RANDERIA (2012) par le fait que le déplacement de la fréquence du mode monopolaire fait intervenir la quantité $2P - \rho\frac{\partial P}{\partial \rho}$, quantité qui se trouve être presque nulle du fait de la compensation entre ses deux termes. L'approche de TAYLOR & RANDERIA (2012) permet d'expliquer également le très faible amortissement observé à Cambridge.

Signalons pour finir que les corrections logarithmiques liées à la régularisation du potentiel de contact ont été vues dans des gaz de Fermi à 2D sur d'autres quantités, comme la mesure par spectroscopie radiofréquence de la position des états liés. Ces mesures faites au MIT par SOMMER, CHEUK et al. (2012) ont été analysées en termes d'anomalie quantique par

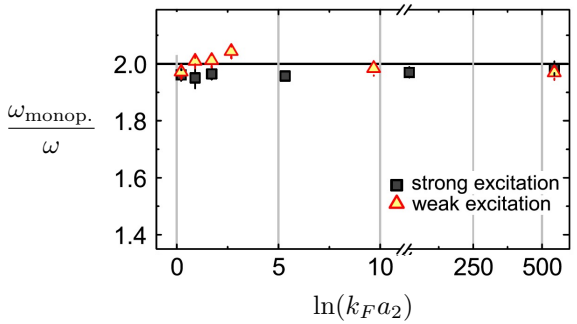


FIGURE VI.9. *Fréquence du mode monopolaire d'un gaz 2D de fermions (^{40}K) au voisinage d'une résonance de Feshbach. La longueur de diffusion a_2 est mesurée ici en unités du vecteur d'onde de Fermi k_F ($E_F = \hbar^2 k_F^2/2m \approx 5$ à 8 kHz$\times h$). On trouve que la fréquence du mode monopolaire reste très proche de la valeur prédite dans le cadre de l'invariance d'échelle, même quand la longueur de diffusion a_2 devient grande. Figure extraite de* VOGT, FELD *et al. (2012).*

LANGMACK, BARTH et al. (2012) et ZWERGER (2016).

Références

ADHIKARI, Sadhan K. (1986), « Quantum scattering in two dimensions », in *American Journal of Physics* **54**, p. 362-367.

AGNOLET, Glenn, DF MCQUEENEY & JD REPPY (1989), « Kosterlitz-Thouless transition in helium films », in *Physical Review B* **39**, p. 8934.

ALLARD, B., T. PLISSON, M. HOLZMANN, G. SALOMON, A. ASPECT, P. BOUYER & T. BOURDEL (2012), « Effect of disorder close to the superfluid transition in a two-dimensional Bose gas », in *Phys. Rev. A* **85** (3), p. 033602.

ALTMAN, Ehud, Lukas M SIEBERER, Leiming CHEN, Sebastian DIEHL & John TONER (2015), « Two-dimensional superfluidity of exciton polaritons requires strong anisotropy », in *Physical Review X* **5**, p. 011017.

AMBEGAOKAR, Vinay, B. I. HALPERIN, David R. NELSON & Eric D. SIGGIA (1978), « Dissipation in Two-Dimensional Superfluids », in *Phys. Rev. Lett.* **40** (12), p. 783-786.

AMO, Alberto & Jacqueline BLOCH (2016), « Exciton-polaritons in lattices : A non-linear photonic simulator », in *Comptes Rendus Physique* **17**, p. 934-945.

AMO, Alberto, Jérôme LEFRÈRE, Simon PIGEON, Claire ADRADOS, Cristiano CIUTI, Iacopo CARUSOTTO, Romuald HOUDRÉ, Elisabeth GIACOBINO & Alberto BRAMATI (2009), « Superfluidity of polaritons in semiconductor microcavities », in *Nature Physics* **5**, p. 805-810.

ARMIJO, Julien, Thibaut JACQMIN, Karen KHERUNTSYAN & Isabelle BOUCHOULE (2011), « Mapping out the quasicondensate transition through the dimensional crossover from one to three dimensions », in *Physical Review A* **83**, p. 021605.

ASHCROFT, N. W. & N. D. MERMIN (1976), *Solid State Physics*, New York : Holt, Rinehardt et Winston.

ASTRAKHARCHIK, G. E., J. BORONAT, J. CASULLERAS, I. L. KURBAKOV & Yu. E. LOZOVIK (2009), « Equation of state of a weakly interacting two-dimensional Bose gas studied at zero temperature by means of quantum Monte Carlo methods », in *Phys. Rev. A* **79**, p. 051602.

ASTRAKHARCHIK, G. E. & L. P. PITAEVSKII (2004), « Motion of a heavy impurity through a Bose-Einstein condensate », in *Phys. Rev. A* **70**, p. 013608.

BAGNATO, V., D. E. PRITCHARD & D. KLEPPNER (1987), « Bose–Einstein condensation in an external potential », in *Phys. Rev. A* **35**, p. 4354.

BAGNATO, V. S. & D. KLEPPNER (1991), « Bose–Einstein condensation in low-dimensional traps », in *Phys. Rev. A* **44**, p. 7439-7441.

BALIBAR, S & B CASTAING (1980), « Possible observation of the roughening transition in helium », in *Journal de Physique Lettres* **41**, p. 329-332.

BALILI, R, V HARTWELL, D SNOKE, L PFEIFFER & K WEST (2007), « Bose-Einstein condensation of microcavity polaritons in a trap », in *Science* **316**, p. 1007-1010.

BASTARD, Gerald & Joel SCHULMAN (1992), *Wave mechanics applied to semiconductor heterostructures*.

BEELER, MC, MEW REED, T HONG & SL ROLSTON (2012), « Disorder-driven loss of phase coherence in a quasi-2D cold atom system », in *New Journal of Physics* **14**, p. 073024.

BEREZINSKII, V. L. (1971), « Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional system possessing a continous symmetry group - II. quantum systems », in *Soviet Physics JETP* **34**, p. 610.

BISHOP, A.R., J.A. KRUMHANSL & S.E. TRULLINGER (1980), « Solitons in condensed matter : a paradigm », in *Physica D : Nonlinear Phenomena* **1**, p. 1-44.

BISHOP, D. J. & J. D. REPPY (1978), « Study of the Superfluid Transition in Two-Dimensional ^{4}He Films », in *Phys. Rev. Lett.* **40**, p. 1727-1730.

BISSET, R. N., M. J. DAVIS, T. P. SIMULA & P. B. BLAKIE (2009), « Quasi-condensation and coherence in the quasi-two-dimensional trapped Bose gas », in *Phys. Rev. A* **79**, p. 033626.

BLOCH, I., J. DALIBARD & W. ZWERGER (2008), « Many-body physics with ultracold gases », in *Rev. Mod. Phys* **80**, p. 885.

BOETTCHER, I., L. BAYHA, D. KEDAR, P. A. MURTHY, M. NEIDIG, M. G. RIES, A. N. WENZ, G. ZÜRN, S. JOCHIM & T. ENSS (2016), « Equation of State of Ultracold Fermions in the 2D BEC-BCS Crossover Region », in *Phys. Rev. Lett.* **116** (4), p. 045303.

BOETTCHER, Igor & Markus HOLZMANN (2016), « Quasi-long-range order in trapped two-dimensional Bose gases », in *Phys. Rev. A* **94** (1), p. 011602.

BOGOLIUBOV, NN (1962), in *Physik. Abhandl. Sowjetunion* **6**, p. 1-113-229.

BOURDEL, Thomas (2012), « Phase diagrams of two-dimensional and three-dimensional disordered Bose gases in the local density approximation », in *Phys. Rev. A* **86** (6), p. 063626.

BRAMWELL, S. T. & P. C. W. HOLDSWORTH (1994), « Magnetization : A characteristic of the Kosterlitz–Thouless–Berezinskii transition », in *Phys. Rev. B* **49**, p. 8811-8814.

CABO, A., J.L. LUCIO & H. MERCADO (1998), « On scale invariance and anomalies in quantum mechanics », in *American Journal of Physics* **66**, p. 240-246.

CARLEO, Giuseppe, Guilhem BOÉRIS, Markus HOLZMANN & Laurent SANCHEZ-PALENCIA (2013), « Universal Superfluid Transition and Transport Properties of Two-Dimensional Dirty Bosons », in *Phys. Rev. Lett.* **111** (5), p. 050406.

CARUSOTTO, Iacopo & Cristiano CIUTI (2013), « Quantum fluids of light », in *Rev. Mod. Phys.* **85** (1), p. 299-366.

CASTIN, Y (2001), « Bose-Einstein condensates in atomic gases : simple theoretical results », in *Coherent atomic matter waves (Les Houches Summer School 1999)*, sous la dir. de Kaiser R., Westbrook C. & David F., EDP Sciences et Springer-Verlag.

CASTIN, Y. (2004), « Simple theoretical tools for low dimension Bose gases », in *Journal de Physique IV, France* **116**, p. 87.

CASTIN, Y. & R. DUM (1996), « Bose–Einstein condensation in time dependent traps », in *Phys. Rev. Lett.* **77**, p. 5315.

CASTRO NETO, A. H., F. GUINEA, N. M. R. PERES, K. S. NOVOSELOV & A. K. GEIM (2009), « The electronic properties of graphene », in *Rev. Mod. Phys.* **81** (1), p. 109-162.

CAZALILLA, M. A., A. IUCCI & T. GIAMARCHI (2007), « Competition between vortex unbinding and tunneling in an optical lattice », in *Phys. Rev. A* **75**, p. 051603.

CHAIKIN, Paul M & Tom C LUBENSKY (2000), *Principles of condensed matter physics*, Cambridge university press.

CHERRORET, Nicolas, Tomasz KARPIUK, Benoît GRÉMAUD & Christian MINIATURA (2015), « Thermalization of matter waves in speckle potentials », in *Physical Review A* **92**, p. 063614.

CHEVY, F., V. BRETIN, P. ROSENBUSCH, K. W. MADISON & J. DALIBARD (2001), « Transverse Breathing Mode of an Elongated Bose–Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* **88**, p. 250402.

CHIOCCHETTA, Alessio & Iacopo CARUSOTTO (2013), « Non-equilibrium quasi-condensates in reduced dimensions », in *EPL (Europhysics Letters)* **102**, p. 67007.

CHIOCCHETTA, Alessio, Andrea GAMBASSI & Iacopo CARUSOTTO (2015), « Laser operation and Bose-Einstein condensation : analogies and differences », in *arXiv :1503.02816*.

CHOI, Jae-yoon, Sang Won SEO, Woo Jin KWON & Yong-il SHIN (2012), « Probing Phase Fluctuations in a 2D Degenerate Bose Gas by Free Expansion », in *Phys. Rev. Lett.* **109** (12), p. 125301.

CHOI, Jae-yoon, Sang Won SEO & Yong-il SHIN (2013), « Observation of thermally activated vortex pairs in a quasi-2D Bose gas », in *Physical review letters* **110**, p. 175302.

CHOMAZ, Lauriane, Laura CORMAN, Tom BIENAIMÉ, Rémi DESBUQUOIS, Christof WEITENBERG, Sylvain NASCIMBÈNE, Jérôme BEUGNON & Jean DALIBARD (2015), « Emergence of coherence via transverse condensation in a uniform quasi-two-dimensional Bose gas », in *Nature communications* **6**.

CLADÉ, P., C. RYU, A. RAMANATHAN, K. HELMERSON & W. D. PHILLIPS (2009), « Observation of a 2D Bose gas : from thermal to quasicondensate to superfluid », in *Phys. Rev. Lett.* **102**, p. 170401.

COHEN-TANNOUDJI, Claude & Cécile ROBILLIARD (2001), « Wave functions, relative phase and interference for atomic Bose–Einstein condensates », in *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IV-Physics* **2**, p. 445-477.

COMBESCOT, Monique, Odile BETBEDER-MATIBET & François DUBIN (2008), « The many-body physics of composite bosons », in *Physics Reports* **463**, p. 215-320.

CONNAUGHTON, Colm, Christophe JOSSERAND, Antonio PICOZZI, Yves POMEAU & Sergio RICA (2005), « Condensation of Classical Nonlinear Waves », in *Phys. Rev. Lett.* **95** (26), p. 263901.

DAMM, Tobias, Julian SCHMITT, Qi LIANG, David DUNG, Frank VEWINGER, Martin WEITZ & Jan KLAERS (2016), « Calorimetry of a Bose-Einstein-condensed photon gas », in *Nature communications* **7**.

DE GROOT, SR, GJ0039 HOOYMAN & CA TEN SELDAM (1950), « On the Bose-Einstein condensation », in *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **203**, p. 266-286.

DE ROSSI, Camilla, Romain DUBESSY, Karina MERLOTI, Mathieu de Goër de HERVE, Thomas BADR, Aurélien PERRIN, Laurent LONGCHAMBON & Hélène PERRIN (2016), « Probing superfluidity in a quasi two-dimensional Bose gas through its local dynamics », in *New Journal of Physics* **18**, p. 062001.

DESBUQUOIS, Rémi (2013), « Thermal and superfluid properties of the two-dimensional Bose gas », thèse de doct.Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.

DESBUQUOIS, Rémi, Lauriane CHOMAZ, Tarik YEFSAH, Julian LÉONARD, Jérôme BEUGNON, Christof WEITENBERG & Jean DALIBARD (2012), « Superfluid behaviour of a two-dimensional Bose gas », in *Nature Physics* **8**, p. 645-648.

DESBUQUOIS, Rémi, Tarik YEFSAH, Lauriane CHOMAZ, Christof WEITENBERG, Laura CORMAN, Sylvain NASCIMBÈNE & Jean DALIBARD (2014), « Determination of Scale-Invariant Equations of State without Fitting Parameters : Application to the Two-Dimensional Bose Gas Across the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless Transition », in *Phys. Rev. Lett.* **113**, p. 020404.

DEUTSCHLÄNDER, Sven, Patrick DILLMANN, Georg MARET & Peter KEIM (2015), « Kibble–Zurek mechanism in colloidal monolayers », in *Proceedings of the National Academy of Sciences* **112**, p. 6925-6930.

DEUTSCHLÄNDER, Sven, Antonio M PUERTAS, Georg MARET & Peter KEIM (2014), « Specific heat in two-dimensional melting », in *Physical review letters* **113**, p. 127801.

DRUTEN, N. J. van & W. KETTERLE (1997), « Two-step condensation of the ideal Bose gas in highly anisotropic traps », in *Phys. Rev. Lett.* **79**, p. 549-552.

EFIMOV, V (1971), « Weakly-bound states of three resonantly-interacting particles », in *Sov. J. Nucl. Phys* **12**, p. 101.

FASOLINO, Annalisa, JH LOS & Mikhail I KATSNELSON (2007), « Intrinsic ripples in graphene », in *Nature materials* **6**, p. 858-861.

FENECH, K., P. DYKE, T. PEPPLER, M. G. LINGHAM, S. HOINKA, H. HU & C. J. VALE (2016), « Thermodynamics of an Attractive 2D Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **116** (4), p. 045302.

FISHER, D. S. & P. C. HOHENBERG (1988), « Dilute Bose gas in two dimensions », in *Phys. Rev. B* **37**, p. 4936.

FLETCHER, Richard J., Martin ROBERT DE SAINT VINCENT, Jay MAN, Nir NAVON, Robert P. SMITH, Konrad G. H. VIEBAHN & Zoran HADZIBABIC (2015), « Connecting Berezinskii-Kosterlitz-Thouless and BEC Phase Transitions by Tuning Interactions in a Trapped Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **114** (25), p. 255302.

FOSTER, Christopher J., P. Blair BLAKIE & Matthew J. DAVIS (2010), « Vortex pairing in two-dimensional Bose gases », in *Phys. Rev. A* **81** (2), p. 023623.

GALLET, F, S BALIBAR & E ROLLEY (1987), « The roughening transition of crystal surfaces. II. experiments on static and dynamic properties near the first roughening transition of hcp 4He », in *Journal de Physique* **48**, p. 369-377.

GARDINER, Crispin & Peter ZOLLER (2004), *Quantum noise*, Springer Science & Business Media.

GIORGETTI, L., I. CARUSOTTO & Y. CASTIN (2007), « Semiclassical field method for the equilibrium Bose gas and application to thermal vortices in two dimensions », in *Phys. Rev. A* **76**, p. 013613.

GIORGINI, S, LP PITAEVSKII & S STRINGARI (1997), « Thermodynamics of a trapped Bose-condensed gas », in *Journal of Low Temperature Physics* **109**, p. 309-355.

GUÉRY-ODELIN, D. & S. STRINGARI (1999), « Scissors mode and superfluidity of a trapped Bose–Einstein condensed gas », in *Phys. Rev. Lett.* **83**, p. 4452.

HA, Li-Chung, Chen-Lung HUNG, Xibo ZHANG, Ulrich EISMANN, Shih-Kuang TUNG & Cheng CHIN (2013), « Strongly Interacting Two-Dimensional Bose Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **110** (14), p. 145302.

HADZIBABIC, Z. & J. DALIBARD (2011), « Two-dimensional Bose fluids : An atomic physics perspective », in *Rivista del Nuovo Cimento* **34**, p. 389.

HADZIBABIC, Z., P. KRÜGER, M. CHENEAU, B. BATTELIER & J. DALIBARD (2006), « Berezinskii–Kosterlitz–Thouless crossover in a trapped atomic gas », in *Nature* **441**, p. 1118-1121.

HALPERIN, B. I. & David R. NELSON (1978a), « Theory of Two-Dimensional Melting », in *Phys. Rev. Lett.* **41**, p. 121-124.
– (1978b), « Theory of Two-Dimensional Melting. », in *Phys. Rev. Lett.* **41** (7), p. 519-519.
HERBUT, Igor (2007), *A modern approach to critical phenomena*, Cambridge University Press.
HO, T. L. (2004), « Universal Thermodynamics of Degenerate Quantum Gases in the Unitarity Limit », in *Phys. Rev. Lett.* **92**, p. 090402.
HOFMANN, Johannes (2012), « Quantum Anomaly, Universal Relations, and Breathing Mode of a Two-Dimensional Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **108** (18), p. 185303.
HOHENBERG, P. C. (1967), « Existence of Long-Range Order in One and Two Dimensions », in *Phys. Rev.* **158**, p. 383.
HOLSTEIN, Barry R (1993), « Anomalies for pedestrians », in *American Journal of Physics* **61**, p. 142-147.
HOLZMANN, M., G. BAYM, J. P. BLAIZOT & F. LALOË (2007), « Superfluid transition of homogeneous and trapped two-dimensional Bose gases », in *P.N.A.S.* **104**, p. 1476.
HOLZMANN, M., M. CHEVALLIER & W. KRAUTH (2008), « Semiclassical theory of the quasi two-dimensional trapped gas », in *Europhys. Lett.* **82**, p. 30001.
HOLZMANN, M. & W. KRAUTH (2008), « Kosterlitz–Thouless transition of the quasi two-dimensional trapped Bose gas », in *Phys. Rev. Lett.* **100**, p. 190402.
HOLZMANN, Markus, Maguelonne CHEVALLIER & Werner KRAUTH (2010), « Universal correlations and coherence in quasi-two-dimensional trapped Bose gases », in *Phys. Rev. A* **81**, p. 043622.
HU, Ying & Zhaoxin LIANG (2011), « Visualization of Dimensional Effects in Collective Excitations of Optically Trapped Quasi-Two-Dimensional Bose Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **107** (11), p. 110401.
HUNG, Chen-Lung, Xibo ZHANG, Nathan GEMELKE & Cheng CHIN (2011), « Observation of scale invariance and universality in two-dimensional Bose gases », in *Nature* **470**, p. 236.
ILLING, Bernd, Sebastian FRITSCHI, Herbert KAISER, Christian L KLIX, Georg MARET & Peter KEIM (2017), « Mermin–Wagner fluctuations in 2D amorphous solids », in *Proceedings of the National Academy of Sciences* **114**, p. 1856-1861.
IMAMBEKOV, A., I. E. MAZETS, D. S. PETROV, V. GRITSEV, S. MANZ, S. HOFFERBERTH, T. SCHUMM, E. DEMLER & J. SCHMIEDMAYER (2009), « Density ripples in expanding low-dimensional gases as a probe of correlations », in *Phys. Rev. A* **80**, p. 033604.
INGUSCIO, M, W KETTERLE & C SALOMON, éd. (2008), *Ultra-cold Fermi Gases*, Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Course CLXIV, Varenna 2006, IOS Press.
JOSÉ, Jorge V (2013), *40 years of Berezinskii-Kosterlitz-Thouless theory*, World Scientific.
JOSÉ, Jorge V., Leo P. KADANOFF, Scott KIRKPATRICK & David R. NELSON (1977), « Renormalization, vortices, and symmetry-breaking perturbations in the two-dimensional planar model », in *Phys. Rev. B* **16**, p. 1217-1241.
KAGAN, Y., E. L. SURKOV & G. V. SHLYAPNIKOV (1996), « Evolution of a Bose gas under variations of the confining potential », in *Phys. Rev. A* **54**, R1753.
KAGAN, Y., B. V. SVISTUNOV & G. V. SHLYAPNIKOV (1987), « Influence on inelastic processes of the phase transition in a weakly collisional two-dimensional Bose gas », in *Sov. Phys. JETP* **66**, p. 314.
KAGAN, Yu., V. A. KASHURNIKOV, A. V. KRASAVIN, N. V. PROKOF'EV & B. V. SVISTUNOV (2000), « Quasicondensation in a two-dimensional interacting Bose gas », in *Phys. Lett. A* **61**, p. 043608.
KARDAR, Mehran (2007), *Statistical physics of fields*, Cambridge University Press.
KASPRZAK, J., M. RICHARD, S. KUNDERMANN, A. BAAS, P. JEAMBRUN et al. (2006), « Bose-Einstein condensation of exciton polaritons », in *Nature* **443**, p. 409-414.
KEIM, Peter, Georg MARET & Hans-Hennig von GRÜNBERG (2007), « Frank's constant in the hexatic phase », in *Physical Review E* **75**, p. 031402.
KETTERLE, W. & N. J. VANDRUTEN (1996), « Bose–Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions », in *Phys. Rev. A* **54**, p. 656-660.
KLAERS, Jan, Julian SCHMITT, T DAMM, F VEWINGER & M WEITZ (2011), « Bose–Einstein condensation of paraxial light », in *Applied Physics B : Lasers and Optics* **105**, p. 17-33.

KLAERS, Jan, Julian SCHMITT, Frank VEWINGER & Martin WEITZ (2010), « Bose-Einstein condensation of photons in an optical microcavity », in *Nature* **468**, p. 545-548.

KOSTERLITZ, J M (1974), « The critical properties of the two-dimensional xy model », in *Journal of Physics C : Solid State Physics* **7**, p. 1046-1060.

KOSTERLITZ, J. M. & D. J. THOULESS (1973), « Ordering, metastability and phase transitions in two dimensional systems », in *J. Phys. C : Solid State Physics* **6**, p. 1181.

KRINNER, Sebastian, David STADLER, Jakob MEINEKE, Jean-Philippe BRANTUT & Tilman ESSLINGER (2013), « Superfluidity with disorder in a thin film of quantum gas », in *Phys. Rev. Lett.* **110** (10), p. 100601.

KRÜGER, P., Z. HADZIBABIC & J. DALIBARD (2007), « Critical Point of an Interacting Two-Dimensional Atomic Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **99**, p. 040402.

KU, Mark JH, Ariel T SOMMER, Lawrence W CHEUK & Martin W ZWIERLEIN (2012), « Revealing the superfluid lambda transition in the universal thermodynamics of a unitary Fermi gas », in *Science* **335**, p. 563-567.

KWON, Woo Jin, Joon Hyun KIM, Sang Won SEO & Y. SHIN (2016), « Observation of von Kármán Vortex Street in an Atomic Superfluid Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **117** (24), p. 245301.

LANDAU, L. D. & E. M. LIFSHITZ (1987), *Quantum mechanics*, New York : Pergamon Press.

LANGMACK, Christian, Marcus BARTH, Wilhelm ZWERGER & Eric BRAATEN (2012), « Clock Shift in a Strongly Interacting Two-Dimensional Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **108** (6), p. 060402.

LEGGETT, A. J. (2006), *Quantum Liquids*, Oxford University Press.

LEVINSEN, Jesper, M PARISH et al. (2015), « Strongly interacting two-dimensional Fermi gases », in *Annual Review of Cold Atoms and Molecules : Volume 3* **3**, p. 1.

MA, Shang-Keng (1985), *Statistical Mechanics*, World Scientific.

MARAGO, OM, SA HOPKINS, J. ARLT, E. HODBY, G. HECHENBLAIKNER & CJ FOOT (2000), « Observation of the scissors mode and evidence for superfluidity of a trapped Bose-Einstein condensed gas », in *Physical review letters* **84**, p. 2056-2059.

MARELIC, Jakov & RA NYMAN (2015), « Experimental evidence for inhomogeneous pumping and energy-dependent effects in photon Bose-Einstein condensation », in *Physical Review A* **91**, p. 033813.

MARELIC, Jakov, Lydia F ZAJICZEK, Henry J HESTEN, Kon H LEUNG, Edward Y X ONG, Florian MINTERT & Robert A NYMAN (2016), « Spatiotemporal coherence of non-equilibrium multimode photon condensates », in *New Journal of Physics* **18**, p. 103012.

MASHAYEKHI, Mohammad S., Jean-Sébastien BERNIER, Dmitry BORZOV, Jun-Liang SONG & Fei ZHOU (2013), « Two-Dimensional Bose Gases near Resonance : Competing Two-Body and Three-Body Effects », in *Phys. Rev. Lett.* **110** (14), p. 145301.

MAZETS, Igor E. (2012), « Two-dimensional dynamics of expansion of a degenerate Bose gas », in *Phys. Rev. A* **86** (5), p. 055603.

MEAD, Lawrence R & John GODINES (1991), « An analytical example of renormalization in two-dimensional quantum mechanics », in *American Journal of Physics* **59**, p. 935-937.

MERMIN, N. D. (1968), « Crystalline Order in Two Dimensions », in *Phys. Rev.* **176** (1), p. 250-254.

– (1979), « Erratum : Crystalline order in two dimensions », in *Phys. Rev. B* **20** (11), p. 4762-4762.

– (2006), « Erratum : Erratum : Crystalline order in two dimensions [Phys. Rev. 176, 250 (1968)] [Phys. Rev. B 20, 4762 (1979)] », in *Phys. Rev. B* **74** (14), p. 149902.

MERMIN, N. D. & H. WAGNER (1966), « Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Models », in *Phys. Rev. Lett.* **17**, p. 1133.

MINNHAGEN, Petter & G. G. WARREN (1981), « Superfluid density of a two-dimensional fluid », in *Phys. Rev. B* **24**, p. 2526-2532.

MORA, C. & Y. CASTIN (2003), « Extension of Bogoliubov theory to quasi-condensates », in *Phys. Rev. A* **67**, p. 053615.

MORA, Christophe & Yvan CASTIN (2009), « Ground State Energy of the Two-Dimensional Weakly Interacting Bose Gas : First Correction Beyond Bogoliubov Theory », in *Phys. Rev. Lett.* **102**, p. 180404.

MUDRY, Christopher (2014), *Lecture notes on field theory in condensed matter physics*, World Scientific Publishing Co Inc.

MURTHY, P. A., I. BOETTCHER, L. BAYHA, M. HOLZMANN, D. KEDAR, M. NEIDIG, M. G. RIES, A. N. WENZ, G. ZÜRN & S. JOCHIM (2015), « Observation of the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless Phase Transition in an Ultracold Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **115** (1), p. 010401.

NELSON, D. R. & J. M. KOSTERLITZ (1977), « Universal Jump in the Superfluid Density of Two-Dimensional Superfluids », in *Phys. Rev. Lett.* **39**, p. 1201.
NELSON, David R (2002), *Defects and geometry in condensed matter physics*, Cambridge University Press.
NELSON, David R. & B. I. HALPERIN (1979), « Dislocation-mediated melting in two dimensions », in *Phys. Rev. B* **19**, p. 2457-2484.
NITSCHE, Wolfgang H, Na Young KIM, Georgios ROUMPOS, Christian SCHNEIDER, Martin KAMP, Sven HÖFLING, Alfred FORCHEL & Yoshihisa YAMAMOTO (2014), « Algebraic order and the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition in an exciton-polariton gas », in *Physical Review B* **90**, p. 205430.
NOZIÈRES, P. & D. PINES (1990), *The Theory of Quantum Liquids, Superfluid Bose Liquids*, Addison-Wesley.
NYEO, Su-Long (2000), « Regularization methods for delta-function potential in two-dimensional quantum mechanics », in *American Journal of Physics* **68**, p. 571-575.
OLSHANII, M. & L. PRICOUPENKO (2002), « Rigorous Approach to the Problem of Ultraviolet Divergencies in Dilute Bose Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **88**, p. 010402.
OLSHANII, Maxim, Hélène PERRIN & Vincent LORENT (2010), « Example of a Quantum Anomaly in the Physics of Ultracold Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **105**, p. 095302.
ONOFRIO, R., C. RAMAN, J. M. VOGELS, J. R. ABO-SHAEER, A. P. CHIKKATUR & W. KETTERLE (2000), « Observation of Superfluid Flow in a Bose–Einstein Condensed Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **85**, p. 2228-2231.
ONSAGER, Lars (1944), « Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition », in *Physical Review* **65**, p. 117.
OZAWA, Tomoki & Sandro STRINGARI (2014), « Discontinuities in the First and Second Sound Velocities at the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless Transition », in *Phys. Rev. Lett.* **112** (2), p. 025302.
PEIERLS, R. E. (1934), in *Helv. Phys. Acta* **7**, p. 81.
PEIERLS, R. E. (1935), « Quelques propriétés typiques des corps solides », in *Ann. Inst. Henri Poincaré* **5**, p. 177.
PETHICK, C.J. & H. SMITH (2008), *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases, Second Edition*, Cambridge University Press.
PETROV, D. S., D. M. GANGARDT & G. V. SHLYAPNIKOV (2004), « Low-dimensional trapped gases », in *J. Phys. IV* **116**, p. 5-44.
PETROV, D. S., M. HOLZMANN & G. V. SHLYAPNIKOV (2000), « Bose–Einstein Condensation in Quasi-2D Trapped Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **84**, p. 2551.
PETROV, D. S. & G. V. SHLYAPNIKOV (2001), « Interatomic collisions in a tightly confined Bose gas », in *Phys. Rev. A* **64**, p. 012706.
PICOZZI, Antonio, Josselin GARNIER, Tobias HANSSON, Pierre SURET, Stephane RANDOUX, Guy MILLOT & Demetrios N CHRISTODOULIDES (2014), « Optical wave turbulence : Towards a unified nonequilibrium thermodynamic formulation of statistical nonlinear optics », in *Physics Reports* **542**, p. 1-132.
PILATI, S., J. BORONAT, J. CASUELLERAS & S. GIORGINI (2005), « Quantum Monte Carlo simulation of a two-dimensional Bose gas », in *Phys. Rev. A* **71**, p. 023605.
PILATI, S., S. GIORGINI & N. PROKOF'EV (2008), « Critical Temperature of Interacting Bose Gases in Two and Three Dimensions », in *Phys. Rev. Lett.* **100** (14), p. 140405.
PITAEVSKII, L. & S. STRINGARI (2016), *Bose–Einstein Condensation and Superfluidity*, 2nd edition, Oxford : Oxford University Press.
PITAEVSKII, L. P. & A. ROSCH (1997), « Breathing mode and hidden symmetry of trapped atoms in two dimensions », in *Phys. Rev. A* **55**, R853.
POPOV, V. N. (1972), « On the theory of the superfluidity of two- and one-dimensional bose systems », in *Theoretical and Mathematical Physics* **11**, p. 565-573.
– (1987), *Functional Integrals and Collective Modes*, Cambridge : Cambridge University Press.
PRICOUPENKO, L. (2004), « Variational approach for the two-dimensional trapped Bose–Einstein condensate », in *Phys. Rev. A* **70**, p. 013601.
PRICOUPENKO, Ludovic & Maxim OLSHANII (2007), « Stability of two-dimensional Bose gases in the resonant regime », in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **40**, p. 2065.
PROKOF'EV, N. V., O. RUEBENACKER & B. V. SVISTUNOV (2001), « Critical Point of a Weakly Interacting Two-Dimensional Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **87**, p. 270402.
PROKOF'EV, N. V. & B. V. SVISTUNOV (2002), « Two-dimensional weakly interacting Bose gas in the fluctuation region », in *Phys. Rev. A* **66**, p. 043608.

RAMAN, C., M. KÖHL, R. ONOFRIO, D. S. DURFEE, C. E. KUKLEWICZ, Z. HADZIBABIC & W. KETTERLE (1999), « Evidence for a critical velocity in a Bose–Einstein condensed gas », in *Phys. Rev. Lett.* **83**, p. 2502-2505.

RANÇON, A & N DUPUIS (2012), « Universal thermodynamics of a two-dimensional Bose gas », in *Physical Review A* **85**, p. 063607.

ROUMPOS, Georgios, Michael LOHSE, Wolfgang H NITSCHE, Jonathan KEELING, Marzena Hanna SZYMAŃSKA, Peter B LITTLEWOOD, Andreas LÖFFLER, Sven HÖFLING, Lukas WORSCHECH, Alfred FORCHEL et al. (2012), « Power-law decay of the spatial correlation function in exciton-polariton condensates », in *Proceedings of the National Academy of Sciences* **109**, p. 6467-6472.

ROUMPOS, Georgios & Yoshihisa YAMAMOTO (2012), « The Berezinskii–Kosterlitz–Thouless Phase Transition in Exciton–Polariton Condensates », in *Exciton Polaritons in Microcavities*, Springer, , p. 85-146.

RUGWAY, Wu, AG MANNING, SS HODGMAN, RG DALL, AG TRUSCOTT, T LAMBERTON & Karen V KHERUNTSYAN (2013), « Observation of Transverse Bose-Einstein Condensation via Hanbury Brown–Twiss Correlations », in *Physical review letters* **111**, p. 093601.

SACHDEV, Subir & Eugene DEMLER (2004), « Competing orders in thermally fluctuating superconductors in two dimensions », in *Phys. Rev. B* **69** (14), p. 144504.

SAFONOV, A. I., S. A. VASILYEV, I. S. YASNIKOV, I. I. LUKASHEVICH & S. JAAKKOLA (1998), « Observation of Quasicondensate in Two-Dimensional Atomic Hydrogen », in *Phys. Rev. Lett.* **81**, p. 4545.

SALASNICH, L. (2017), « Nonuniversal Equation of State of the Two-Dimensional Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **118** (13), p. 130402.

SCHICK, M. (1971), « Two-Dimensional System of Hard-Core Bosons », in *Phys. Rev. A* **3**, p. 1067.

SCHMITT, Julian, Tobias DAMM, David DUNG, Frank VEWINGER, Jan KLAERS & Martin WEITZ (2014), « Observation of grand-canonical number statistics in a photon Bose-Einstein condensate », in *Physical review letters* **112**, p. 030401.

SCHMITT, Julian, Tobias DAMM, David DUNG, Christian WAHL, Frank VEWINGER, Jan KLAERS & Martin WEITZ (2016), « Spontaneous symmetry breaking and phase coherence of a photon Bose-Einstein condensate coupled to a reservoir », in *Physical review letters* **116**, p. 033604.

SCHOELZ, JK, P XU, V MEUNIER, P KUMAR, M NEEK-AMAL, PM THIBADO & FM PEETERS (2015), « Graphene ripples as a realization of a two-dimensional Ising model : A scanning tunneling microscope study », in *Physical Review B* **91**, p. 045413.

SCHWEIKHARD, V., S. TUNG & E. A. CORNELL (2007), « Vortex Proliferation in the Berezinskii–Kosterlitz–Thouless Regime on a Two-Dimensional Lattice of Bose–Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* **99**, p. 030401.

SEO, Sang Won, Jae-yoon CHOI & Yong-il SHIN (2014), « Scaling behavior of density fluctuations in an expanding quasi-two-dimensional degenerate Bose gas », in *Phys. Rev. A* **89** (4), p. 043606.

SINGH, V. P. & L. MATHEY (2014), « Noise correlations of two-dimensional Bose gases », in *Phys. Rev. A* **89** (5), p. 053612.

SINGH, Vijay Pal, Christof WEITENBERG, Jean DALIBARD & Ludwig MATHEY (2017), « Superfluidity and relaxation dynamics of a laser-stirred two-dimensional Bose gas », in *Phys. Rev. A* **95** (4), p. 043631.

SOMMER, Ariel T., Lawrence W. CHEUK, Mark J. H. KU, Waseem S. BAKR & Martin W. ZWIERLEIN (2012), « Evolution of Fermion Pairing from Three to Two Dimensions », in *Phys. Rev. Lett.* **108** (4), p. 045302.

SONDHI, S. L., S. M. GIRVIN, J. P. CARINI & D. SHAHAR (1997), « Continuous quantum phase transitions », in *Rev. Mod. Phys.* **69** (1), p. 315-333.

STRANDBURG, Katherine J. (1988), « Two-dimensional melting », in *Rev. Mod. Phys.* **60**, p. 161-207.

STRANDBURG, Katherine J, éd. (1992), *Bond-orientational order in condensed matter systems*, Springer Science & Business Media.

SUN, Can, Shu JIA, Christopher BARSI, Sergio RICA, Antonio PICOZZI & Jason W FLEISCHER (2012), « Observation of the kinetic condensation of classical waves », in *Nature Physics* **8**, p. 470-474.

SVISTUNOV, Boris V, Egor S BABAEV & Nikolay V PROKOF'EV (2015), *Superfluid states of matter*, Crc Press.

TAN, Shina (2005), « S-wave contact interaction problem : A simple description », in *arXiv preprint cond-mat/0505615*.

TAYLOR, Edward & Mohit RANDERIA (2012), « Apparent Low-Energy Scale Invariance in Two-Dimensional Fermi Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **109** (13), p. 135301.

THOMPSON-FLAGG, Rebecca C, Maria JB MOURA & M MARDER (2009), « Rippling of graphene », in *EPL (Europhysics Letters)* **85**, p. 46002.

THOULESS, D. J., M. KOHMOTO, M. P. NIGHTINGALE & M. den NIJS (1982), « Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential », in *Phys. Rev. Lett.* **49**, p. 405-408.

TUNG, S., G. LAMPORESI, D. LOBSER, L. XIA & E. A. CORNELL (2010), « Observation of the Presuperfluid Regime in a Two-Dimensional Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **105**, p. 230408.

VOGT, Enrico, Michael FELD, Bernd FRÖHLICH, Daniel PERTOT, Marco KOSCHORRECK & Michael KÖHL (2012), « Scale Invariance and Viscosity of a Two-Dimensional Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **108**, p. 070404.

WEIMER, Wolf, Kai MORGENER, Vijay Pal SINGH, Jonas SIEGL, Klaus HUECK, Niclas LUICK, Ludwig MATHEY & Henning MORITZ (2015), « Critical Velocity in the BEC-BCS Crossover », in *Phys. Rev. Lett.* **114** (9), p. 095301.

WERNER, Felix & Yvan CASTIN (2006a), « Unitary gas in an isotropic harmonic trap : Symmetry properties and applications », in *Phys. Rev. A* **74**, p. 053604.

WERNER, Félix & Yvan CASTIN (2006b), « Unitary Quantum Three-Body Problem in a Harmonic Trap », in *Phys. Rev. Lett.* **97** (15), p. 150401.

WERTZ, E., L. FERRIER, D. D. SOLNYSHKOV, R. JOHNE, D. SANVITTO et al. (nov. 2010), « Spontaneous formation and optical manipulation of extended polariton condensates », in *Nat Phys* **6**, p. 860-864.

WIERSCHEM, Keola & Efstratios MANOUSAKIS (2011), « Simulation of melting of two-dimensional Lennard-Jones solids », in *Phys. Rev. B* **83** (21), p. 214108.

WIGNER, E. (1932), « On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium », in *Phys. Rev.* **40** (5), p. 749-759.

WOLF, PE, S BALIBAR & F GALLET (1983), « Experimental Observation of a Third Roughening Transition on hcp He 4 Crystals », in *Physical review letters* **51**, p. 1366.

WOLF, PE, F GALLET, S BALIBAR, E ROLLEY & Ph NOZIERES (1985), « Crystal growth and crystal curvature near roughening transitions in hcp 4He », in *Journal de Physique* **46**, p. 1987-2007.

YEFSAH, T., R. DESBUQUOIS, L. CHOMAZ, K. J. GÜNTER & J. DALIBARD (2011), « Exploring the Thermodynamics of a Two-Dimensional Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **107**, p. 130401.

YEFSAH, Tarik (2011), « Thermodynamique du gaz de Bose à deux dimensions », thèse de doct.Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.

YOUNG, A. P. (1979), « Melting and the vector Coulomb gas in two dimensions », in *Phys. Rev. B* **19** (4), p. 1855-1866.

ZIMAN, John M (1960), *Electrons and phonons : the theory of transport phenomena in solids*, Oxford university press.

ZWERGER, Wilhelm, éd. (2011), *The BCS-BEC crossover and the unitary Fermi gas*, t. 836, Springer Science & Business Media.

– (2016), « Strongly interacting fermi gases », in *arXiv preprint arXiv :1608.00457*.