

Chapitre 5

Bandes topologiques et états de bord

Sommaire

1	Le modèle de Haldane	2
1-1	Nouveaux couplages, nouvelle topologie	2
1-2	Diagramme de phase	3
1-3	La version "mur de briques"	4
1-4	Liaisons fortes et courbure de Berry	6
1-5	Exemples pour le réseau mur de briques	7
2	Modulation temporelle et topologie	9
2-1	Les réseaux secoués	9
2-2	Hamiltonien effectif	10
2-3	Coefficients tunnel entre seconds voisins	11
2-4	Les résultats expérimentaux de Zurich	12
3	Les états de bord	14
3-1	La correspondance "cœur-bord"	14
3-2	L'exemple du réseau "mur de briques" : demi-plan	16
3-3	L'exemple du réseau "mur de briques" : ruban	18
3-4	Réservoir et transport quantifié	20
3-5	Guides d'onde et systèmes passifs	21
3-6	Effet Hall de spin	23

Le cours précédent a été consacré à l'établissement d'un critère pour qu'une bande d'énergie d'un réseau périodique à 2D puisse être considérée comme topologique. Ce critère est fondé sur le transport et directement inspiré de l'effet Hall : si cette bande est pleine, une force appliquée selon x doit créer un courant quantifié dans la direction orthogonale y . La quantification de ce courant fait intervenir le nombre de Chern \mathcal{C} de la bande considérée, que l'on calcule à partir de sa courbure de Berry Ω_q :

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\text{ZB}} \Omega_q d^2q. \quad (1)$$

Concevoir et réaliser des réseaux pour lesquels $\mathcal{C} \neq 0$ n'a rien d'évident. Tout d'abord, nous avons vu que pour des réseaux invariants par renversement du temps et par réflexion, la courbure de Berry Ω_q était nulle en tout point de la zone de Brillouin. Il faut donc briser au moins une de ces deux symétries. Nous avons également vu que si l'on conserve l'invariance par renversement du temps, alors $\Omega_q = -\Omega_{-q}$: l'intégrale de la courbure de Berry sur la zone de Brillouin reste nulle ; on peut avoir localement (dans l'espace des moments) une topologie non triviale si $\Omega_q \neq 0$, mais on n'obtient pas pour une bande pleine la conductance quantifiée recherchée.

Partant d'un réseau 2D simple de période a , décrit dans la limite des liaisons fortes avec des sauts entre premiers voisins, il faut donc briser son invariance par renversement du temps ; pour un problème sans spin, cela impose de réaliser des coefficients tunnels complexes. Deux voies peuvent être considérées pour cela :

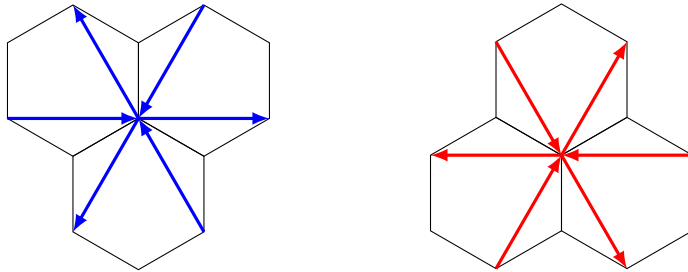


FIGURE 1. Les couplages tunnel entre seconds voisins dans le modèle de Haldane. À gauche, couplages aux six seconds voisins pour un site A , à droite pour un site B . Le sens de chaque flèche indique le signe de la phase transférée lors d'un saut tunnel, selon les convention de la figure 2. L'enroulement de phase à l'intérieur d'un hexagone est le même pour les sites A et B (figure 3).

- L'une consiste à transposer au réseau la géométrie de l'effet Hall, c'est-à-dire appliquer un champ magnétique uniforme sur ce réseau. Ce champ vient briser l'invariance par translation de période a et peut donner naissance à un spectre d'énergie très riche, avec un grand nombre de sous-bandes d'énergie (HOFSTADTER 1976), nous y reviendrons dans le cours suivant.
- L'autre voie, proposée par HALDANE (1988), consiste à garder la même cellule unité que le réseau initial, c'est-à-dire un modèle à deux bandes, tout en augmentant (légèrement) le nombre de couplages tunnel. C'est elle que nous allons explorer dans ce cours.

Une fois posés les principes du modèle de Haldane, nous verrons comment il a été implémenté en pratique avec des atomes froids dans une expérience menée par JOTZU, MESSER et al. (2014). Nous utiliserons ensuite ce modèle pour expliquer la correspondance cœur-bord (*bulk-edge*), c'est-à-dire l'apparition inévitable de canaux de bord à l'interface entre deux zones de topologie différentes. Nous terminerons par la mise en évidence expérimentale de ces canaux de bord sur des systèmes photoniques et nous dirons quelques mots de l'effet Hall de spin. Ce dernier peut être vu comme une généralisation de ces concepts topologiques à des problèmes invariants par renversement du temps, mais pour lesquels deux états de spin (ou de pseudo-spin) subissent des sorts opposés.

$$\textcircled{S_1} \longrightarrow \textcircled{S_2} : -J' (e^{+i\phi_0} |S_2\rangle \langle S_1| + \text{H.c.})$$

FIGURE 2. Convention de signe pour la phase accumulée lors d'un saut tunnel d'amplitude J' entre les sites S_1 et S_2 .

1 Le modèle de Haldane

Le modèle proposé par HALDANE (1988) est une extension du réseau hexagonal rencontré au cours précédent dans lequel un couplage supplémentaire entre seconds voisins (*next-to-nearest neighbors – NNN*) est ajouté. La cellule unité ne change pas et conserve deux sites, que nous noterons A et B comme précédemment. Avec ce modèle, Haldane a montré qu'une bande topologique, caractérisée par un nombre de Chern non nul, peut émerger en l'absence d'un champ magnétique uniforme (ou de moyenne spatiale non nulle). Il s'agit donc d'un problème fondamentalement différent de celui des niveaux de Landau et de leur version discrétisée, c'est-à-dire le modèle de Harper–Hofstadter, que nous rencontrerons au cours suivant.

1-1 Nouveaux couplages, nouvelle topologie

Nous avons vu au chapitre 4 que la condition nécessaire pour obtenir une bande topologique, avec un nombre de Chern non nul, était de briser l'invariance par renversement du temps. Dans le modèle de liaisons fortes que nous allons utiliser ici, cela signifie que certains éléments de matrice tunnel doivent être non réels¹.

Le modèle de Haldane consiste à conserver un élément de matrice réel J pour décrire les transitions $A \leftrightarrow B$ entre premiers voisins, et prendre un élément de matrice complexe $J' e^{\pm i\phi_0}$ pour décrire les transitions entre seconds voisins $A \leftrightarrow A$ et $B \leftrightarrow B$ (figures 1 et 2). Le choix du signe de la phase $\pm\phi_0$ est tel que sur un cycle au sein d'un hexagone parcouru dans le sens positif, on accumule la phase $+3\phi_0$ pour $A \rightarrow A \rightarrow A$ et $B \rightarrow B \rightarrow B$

^{1.} et bien sûr que leur phase complexe ne puisse pas être éliminée par un changement de jauge.

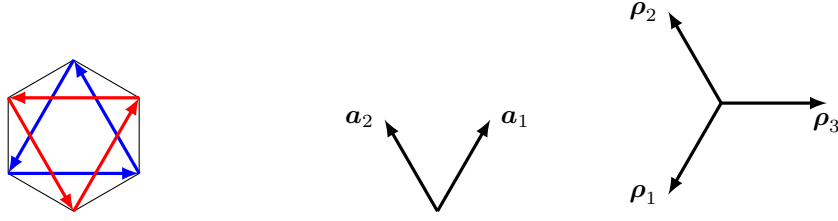


FIGURE 3. Gauche : liens entre second voisins à l'intérieur d'un hexagone donné dans le modèle de Haldane. Droite : les vecteurs utilisés pour paramétriser les sites et les liens du réseau.

(figure 3). On conserve également la possibilité de dissymétriser les sites A et B en leur donnant une énergie différente $\pm\Delta$.

Par rapport à l'hamiltonien de type graphène qui conduit à un spectre de bande avec des points de Dirac, on introduit donc deux éléments susceptibles d'ouvrir un gap au niveau de ces points : (i) l'énergie sur site $\pm\Delta$ déjà rencontrée au cours précédent et (ii) les couplages $A \leftrightarrow A$ et $B \leftrightarrow B$ proportionnels à $J'e^{\pm i\phi_0}$. Nous allons voir maintenant que ces deux éléments jouent des rôles antagonistes en ce qui concerne l'émergence d'une bande topologiquement non triviale.

1-2 Diagramme de phase

Puisque la périodicité du problème n'est pas modifiée par l'introduction des nouveaux couplages en J' , la cellule unité comporte toujours deux sites et l'hamiltonien périodique \hat{H}_q reste une matrice 2×2 que l'on peut décomposer en trois parties :

— L'énergie sur site $\pm\Delta$:

$$\hat{H}_{0,q} = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} = -\Delta \hat{\sigma}_z. \quad (2)$$

— Le couplage tunnel entre premiers voisins du réseau hexagonal

$$\hat{H}_{1,q} = -J \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_1} + e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_2} \\ 1 + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_1} + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

où les vecteurs \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 sont définis comme au chapitre précédent par (cf. figure 3)

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\sqrt{3}a}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\sqrt{3}a}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Ce couplage fait émerger des points de Dirac \mathbf{Q}_\pm correspondant à l'annulation de la fonction $1 + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_1} + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_2}$. On a pour $j = 1, 2$:

$$\cos(\mathbf{Q}_\pm \cdot \mathbf{a}_j) = -\frac{1}{2}, \quad \sin(\mathbf{Q}_\pm \cdot \mathbf{a}_1) = -\sin(\mathbf{Q}_\pm \cdot \mathbf{a}_2) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (5)$$

— Les couplages entre second voisins; chaque site A est couplé aux 6 autres sites A qui l'entourent et qui forment un hexagone régulier, et il en va de même pour les sites B . Introduisons les trois vecteurs $\boldsymbol{\rho}_\alpha$ avec $\alpha = 1, 2, 3$

$$\boldsymbol{\rho}_1 = -\mathbf{a}_1, \quad \boldsymbol{\rho}_2 = \mathbf{a}_2, \quad \boldsymbol{\rho}_3 = -(\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2), \quad (6)$$

représentés sur la figure 3. Avec la convention adoptée sur la figure 1, la fonction d'onde est multipliée par $e^{+i\phi_0}$ dans une transition $|A, \mathbf{r}\rangle \rightarrow |A, \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}_\alpha\rangle$ et par $e^{-i\phi_0}$ dans une transition $|A, \mathbf{r}\rangle \rightarrow |A, \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_\alpha\rangle$ (et inversement pour B).

En sommant ces six contributions, on arrive à (cf. appendice) :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{2,q} &= -2J' \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^3 \cos(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}_\alpha - \phi_0) & 0 \\ 0 & \sum_{\alpha=1}^3 \cos(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}_\alpha + \phi_0) \end{pmatrix} \\ &= -2J' \cos \phi_0 \mathcal{C}_q \hat{1} - 2J' \sin \phi_0 \mathcal{S}_q \hat{\sigma}_z \end{aligned} \quad (7)$$

où l'on a posé

$$\mathcal{C}_q = \sum_{\alpha=1}^3 \cos(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}_\alpha), \quad \mathcal{S}_q = \sum_{\alpha=1}^3 \sin(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}_\alpha). \quad (8)$$

L'hamiltonien total \hat{H}_q , somme des trois hamiltoniens $\hat{H}_{0,1,2}$, peut comme précédemment être mis sous la forme

$$\hat{H}_q = E_0(\mathbf{q}) \hat{1} - \mathbf{h}(\mathbf{q}) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (9)$$

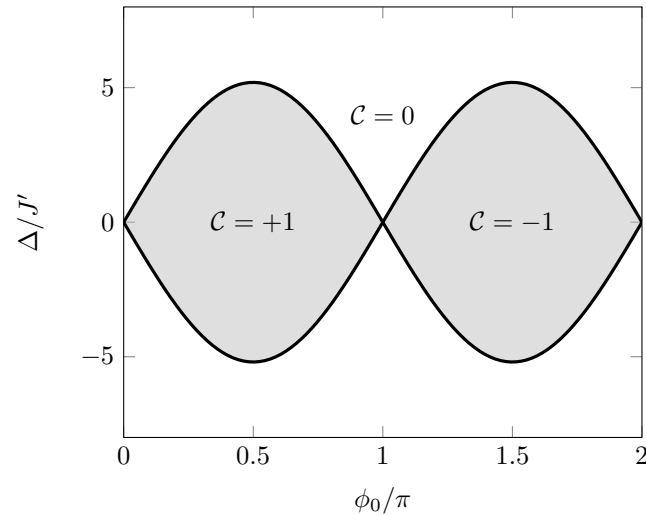


FIGURE 4. Diagramme de phase pour le modèle de Haldane. Les deux bandes sont topologiques quand le nombre d'enveloppement \mathcal{C} est non nul.

avec

$$h_x(\mathbf{q}) = J[1 + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2)] \quad (10)$$

$$h_y(\mathbf{q}) = J[\sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2)] \quad (11)$$

$$h_z(\mathbf{q}) = \Delta + 2J' \sin \phi_0 \mathcal{S}_q \quad (12)$$

Cet hamiltonien donne naissance aux deux bandes d'énergie

$$E_q^{(\pm)} = E_0(\mathbf{q}) \pm |\mathbf{h}(\mathbf{q})|. \quad (13)$$

Nous avons vu au chapitre précédent que ces deux bandes possèdent une topologie non triviale, caractérisée par un nombre de Chern non nul, si et seulement si le vecteur $\mathbf{n} \equiv \mathbf{h}/|\mathbf{h}|$ enveloppe complètement la sphère de Bloch quand \mathbf{q} varie dans l'ensemble de la zone de Brillouin. Quand c'est le cas, le nombre d'enveloppements

$$\mathcal{C} = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\text{ZB}} \mathbf{n} \cdot [(\partial_{q_x} \mathbf{n}) \times (\partial_{q_y} \mathbf{n})] dq_x dq_y. \quad (14)$$

est non nul.

Suivre l'ensemble des points atteints par $\mathbf{n}(\mathbf{q})$ sur cette sphère est faisable, mais quelque peu fastidieux, et nous nous intéresserons ici à la condition nécessaire suivante : les deux pôles (nord et sud) doivent certainement être atteints pour que la sphère soit recouverte. Or les pôles sont atteints quand la projection de \mathbf{h} dans le plan xy s'annule, c'est-à-dire aux deux points de Dirac \mathbf{Q}_{\pm} . Pour que chaque point de Dirac corresponde à un pôle différent, il faut que $h_z(\mathbf{Q}_+)$ et $h_z(\mathbf{Q}_-)$ soient de signes opposés. En utilisant le fait qu'aux points de Dirac, les trois quantités $\sin(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\rho}_j)$ sont égales entre elles et valent $\pm\sqrt{3}/2$, la condition d'atteinte des deux pôles s'écrit en utilisant (12) :

$$(\Delta + 3\sqrt{3}J' \sin \phi_0) (\Delta - 3\sqrt{3}J' \sin \phi_0) < 0 \quad (15)$$

ou encore

$$\frac{|\Delta|}{J'} < 3\sqrt{3} |\sin \phi_0|. \quad (16)$$

Un examen plus détaillé du problème montre que cette condition nécessaire est en fait suffisante : quand les deux pôles sont atteints, le vecteur \mathbf{n} enveloppe la sphère de Bloch quand \mathbf{q} balaye la zone de Brillouin avec le nombre d'enveloppements $\mathcal{C} = \pm 1$.

On arrive donc au diagramme de phase de la figure 4, avec deux lobes conduisant à une topologie non triviale, entourés par un domaine infini correspondant à $\mathcal{C} = 0$. Les nombres de Chern $\mathcal{C}^{(\pm)}$ des deux bandes sont opposés et $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(-)} = -\mathcal{C}^{(+)}$.

1-3 La version "mur de briques"

Le réseau de type "mur de briques", représenté sur la figure 5, s'obtient à partir d'un réseau carré de pas a en supprimant un lien horizontal sur deux, tout en gardant tous les liens verticaux. Il a initialement été proposé comme une alternative commode au réseau hexagonal, permettant de simplifier les calculs. Les vecteurs de base du réseau "mur de briques" dans l'espace réel

$$\mathbf{a}_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

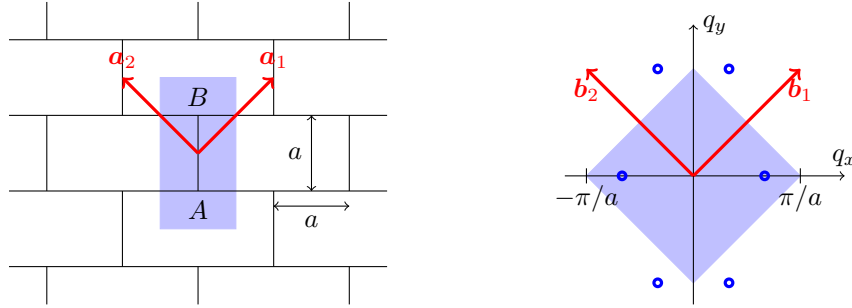


FIGURE 5. Le réseau "mur de briques" (à gauche) et sa zone de Brillouin (à droite); les points de Dirac sont indiqués par des cercles bleus. La cellule unité a pour aire $2a^2$ et la zone de Brillouin a pour aire $2\pi^2/a^2$.

sont en effet orthogonaux, de même que les vecteurs engendrant l'espace réciproque² :

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\pi}{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\pi}{a} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Tout comme pour le réseau hexagonal, la cellule unité comporte deux sites notés A et B sur la figure 5 qui peuvent avoir des énergies différentes $\pm\Delta$:

$$\hat{H}_{0,\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Si on limite l'effet tunnel aux sauts entre premiers voisins, l'hamiltonien s'écrit de la même façon qu'en (3) :

$$\hat{H}_{1,\mathbf{q}} = -J \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_1} + e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_2} \\ 1 + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_1} + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

et on obtient pour $\Delta = 0$ deux points de Dirac aux points d'annulation de $1 + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_1} + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_2}$. Ces points sont localisés en

$$q_x = 0, \quad q_y = \pm \frac{2\pi}{3a}. \quad (22)$$

² On adopte comme au chapitre précédent la définition

$$\mathbf{b}_1 = 2\pi \frac{\mathcal{R}\mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathcal{R}\mathbf{a}_2)}, \quad \mathbf{b}_2 = 2\pi \frac{\mathcal{R}\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_2 \cdot (\mathcal{R}\mathbf{a}_1)} \quad (18)$$

où \mathcal{R} désigne la rotation de $\pi/2$.

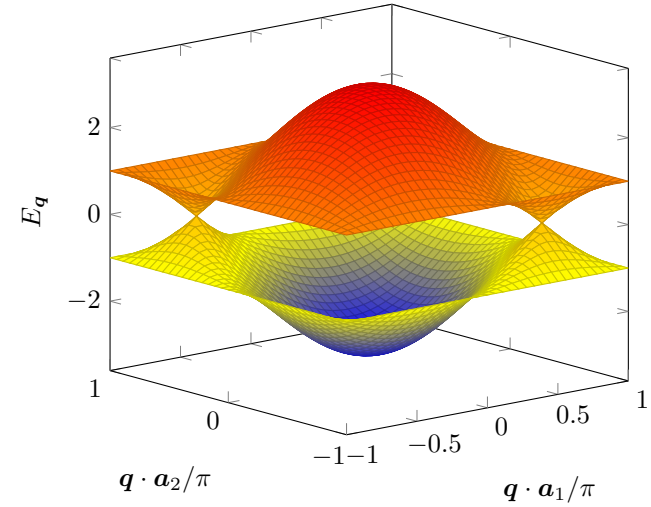


FIGURE 6. Structure de bande pour le réseau "mur de briques".

Ce réseau a acquis ses "lettres de noblesse" sur le plan expérimental avec les expériences de Zurich de TARRUELL, GREIF et al. (2012), qui ont montré comment le réaliser en pratique par une superposition d'ondes lumineuses stationnaires disposées selon des axes orthogonaux. Ces expériences ont été décrites et analysées dans le cours de 2012-13 et nous ne reviendrons pas dessus ici.

Comme pour le réseau hexagonal, on peut ouvrir un gap au niveau des points de Dirac et obtenir des bandes topologiquement non triviales en ajoutant un couplage entre seconds voisins comme indiqué sur la figure 7. Chaque site A ou B possède quatre seconds voisins, au lieu de six pour le réseau hexagonal. Avec les phases représentées sur la figure 7 et la convention précisée en figure 2, l'hamiltonien décrivant le couplage aux seconds voisins s'écrit (cf. appendice) :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{2,\mathbf{q}} &= -2J' \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^2 \cos(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}_\alpha - \phi_0) & 0 \\ 0 & \sum_{\alpha=1}^2 \cos(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}_\alpha + \phi_0) \end{pmatrix} \\ &= -2J' \cos \phi_0 \mathcal{C}_q \hat{1} - 2J' \sin \phi_0 \mathcal{S}_q \hat{\sigma}_z \end{aligned} \quad (23)$$

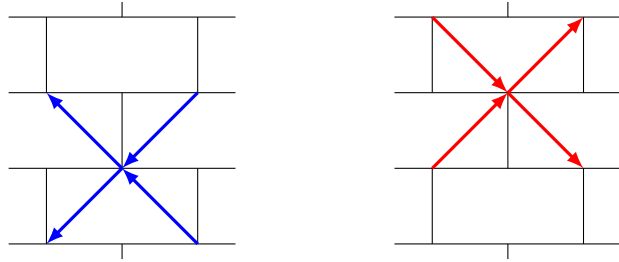


FIGURE 7. Couplage entre seconds voisins dans le réseau "mur de briques" pour un site A donné (à gauche) et pour un site B donné (à droite).

où l'on a introduit les vecteurs

$$\rho_1 = -\mathbf{a}_1, \quad \rho_2 = \mathbf{a}_2, \quad (24)$$

et où on a posé

$$\mathcal{C}_q = \sum_{\alpha=1}^2 \cos(\mathbf{q} \cdot \rho_\alpha), \quad \mathcal{S}_q = \sum_{\alpha=1}^2 \sin(\mathbf{q} \cdot \rho_\alpha). \quad (25)$$

La seule différence par rapport au modèle de Haldane original est que la somme sur l'indice α figurant dans (23-25) ne porte désormais que sur $\alpha = 1, 2$. Mis à part ce point, l'analyse de la topologie des bandes de ce réseau est en tout point similaire à ce que nous avons vu plus haut et on obtient un diagramme de phase semblable à celui de la figure 4, avec une région topologique définie par :

$$\frac{|\Delta|}{J'} < 2\sqrt{3} |\sin \phi_0|. \quad (26)$$

1-4 Liaisons fortes et courbure de Berry

Dans le cours précédent, nous avons montré pourquoi la courbure de Berry Ω_q apparaît comme un outil naturel pour caractériser le transport induit par une force \mathbf{F} dans une bande topologiquement non triviale. Nous avons traité la position des particules comme une variable \mathbf{r} continue, avec

les fonctions de Bloch

$$\psi_{\mathbf{q}}^{(j)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} u_{\mathbf{q}}^{(j)}(\mathbf{r}), \quad (27)$$

et un nombre *a priori* infini de bandes d'énergie, repérées par l'indice $j = 0, 1, 2, \dots$. L'action de la force \mathbf{F} était quant à elle décrite par le potentiel

$$\hat{V} = -\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{r}}. \quad (28)$$

L'approximation des liaisons fortes que nous utilisons ici vient apporter deux modifications à cette approche, l'une pratique, l'autre plus conceptuelle. La modification pratique vient du fait que le nombre de bandes est finie, ce qui fournit une relation simple entre les courbures de Berry des différentes bandes. La modification conceptuelle vient du fait que l'on discrétise la position des particules, ce qui peut amener une certaine ambiguïté dans l'écriture des potentiels comme en (28).

Commençons par rappeler une expression simple de la courbure de Berry, dont la preuve détaillée a été donnée dans le cours 2013-14 (chapitre 3). Partant d'une cellule unité à n sites (avec $n = 2$ pour le modèle de Haldane), l'hamiltonien périodique \hat{H}_q est une matrice $n \times n$ et on trouve donc n bandes d'énergie $E_q^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$, avec les états propres $|u_q^{(j)}\rangle$. On peut alors montrer que

$$\Omega_q^{(j)} = i \sum_{j' \neq j} \frac{\langle u_q^{(j)} | \nabla_q \hat{H}_q | u_q^{(j')} \rangle \times \langle u_q^{(j')} | \nabla_q \hat{H}_q | u_q^{(j)} \rangle}{(E_q^{(j)} - E_q^{(j')})^2}. \quad (29)$$

L'intérêt de ce résultat est qu'il fait intervenir le gradient par rapport à q de l'hamiltonien \hat{H}_q , qui est une fonction régulière, plutôt que le gradient des vecteurs propres $|u_q^{(j)}\rangle$ dont nous avons vu qu'il pouvait présenter des singularités.

Une fois ce résultat acquis, il est simple de montrer que la somme des n courbures de Berry

$$\sum_{j=1}^n \Omega_q^{(j)} \quad (30)$$

est nulle en tout moment q de la zone de Brillouin, car chaque couple (j, j') contribue deux fois à la somme, ces deux contributions étant égales en valeur absolue et de signes opposés. On en déduit que la somme des nombres

de Chern des n bandes d'énergie est également nulle :

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{C}^{(j)} = 0 \quad (31)$$

Ce résultat ne se généralise pas au cas infini : par exemple, pour une particule libre plongée dans un champ magnétique, les bandes d'énergie sont les niveaux de Landau qui ont tous le même nombre de Chern $|\mathcal{C}| = 1$.

Passons maintenant au deuxième point, qui porte sur l'ambiguïté résultant de notre discrétisation de la position. Nous allons raisonner sur une cellule unité à deux sites, mais la généralisation à n sites est immédiate. Nous avons choisi jusqu'à maintenant de paramétrer nos états de Bloch sous la forme

$$|\psi_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_j e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} (\alpha_{\mathbf{q}}|A_j\rangle + \beta_{\mathbf{q}}|B_j\rangle) \quad (32)$$

ce qui revient à assigner la même position \mathbf{r}_j aux deux sites A et B de la cellule j . Cela peut poser un problème quand on doit prendre en compte également la présence d'une force extérieure; en effet, le potentiel \hat{V} dont cette force dérive – qui est la version discrétisée de (28) – ne doit en principe pas prendre la même valeur sur les sites A et B d'une même cellule. Le remède est à première vue simple : il suffit "d'encoder" la position de chaque site A ou B dans une cellule donnée en écrivant les fonctions de Bloch plutôt sous la forme :

$$|\psi_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_j \left(e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_j+\mathbf{R}_A)} \tilde{\alpha}_{\mathbf{q}}|A_j\rangle + e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_j+\mathbf{R}_B)} \tilde{\beta}_{\mathbf{q}}|B_j\rangle \right) \quad (33)$$

et d'utiliser le même encodage dans l'expression de \hat{V} . Dans (33), les vecteurs $\mathbf{R}_{A,B}$ représentent les décalages des sites A et B par rapport au centre \mathbf{r}_j de leur cellule. Les coefficients $\tilde{\alpha}_{\mathbf{q}}$ et $\tilde{\beta}_{\mathbf{q}}$ se déduisent de $\alpha_{\mathbf{q}}$ et $\beta_{\mathbf{q}}$ par la transformation unitaire très simple

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{\mathbf{q}} \\ \tilde{\beta}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \hat{U}_{\mathbf{q}} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{q}} \\ \beta_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \hat{U}_{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_A} & 0 \\ 0 & e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_B} \end{pmatrix} \quad (34)$$

et l'hamiltonien permettant de les déterminer est

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = \hat{U}_{\mathbf{q}} \hat{H}_{\mathbf{q}} \hat{U}_{\mathbf{q}}^\dagger. \quad (35)$$

Le désavantage de ce nouvel hamiltonien $\hat{H}_{\mathbf{q}}$ est qu'il n'est plus périodique sur le réseau réciproque, contrairement à l'hamiltonien de départ $\hat{H}_{\mathbf{q}}$, car l'opérateur $\hat{U}_{\mathbf{q}}$ ne l'est pas :

$$\hat{H}_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} = \hat{H}_{\mathbf{q}} \quad \text{mais} \quad \hat{H}_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} \neq \hat{H}_{\mathbf{q}}. \quad (36)$$

Il est donc plus délicat d'utiliser les résultats du théorème adiabatique quand on effectue un trajet $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} + \mathbf{Q}$ dans la zone de Brillouin. C'est pourquoi nous avons préféré utiliser jusqu'ici l'hamiltonien $\hat{H}_{\mathbf{q}}$ "sans encodage de la position".

En revanche, pour les problèmes liés au transport, en particulier aux mesures locales dans l'espace des moments, il est préférable d'utiliser l'expression (33) des états de Bloch et donc \hat{H} car l'action d'une force est plus facile à prendre en compte. Or il est important de noter que la courbure de Berry *n'est pas invariante* dans le changement

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} \longrightarrow \hat{H}_{\mathbf{q}}. \quad (37)$$

Il ne s'agit en effet pas d'un simple changement de jauge, mais d'une transformation unitaire plus générale³. Une "mesure expérimentale de la courbure de Berry" comme nous en décrivons dans ce cours suppose en fait un protocole expérimental qui passe par un choix précis de l'écriture des états de Bloch (32) ou (33), qu'il faut préciser pour donner un sens non ambigu aux résultats. Le passage de l'une à l'autre des conventions est bien entendu possible et l'on pourra consulter l'appendice D de COOPER, DALIBARD et al. (2018) pour plus de détails.

Notons pour finir que la caractérisation topologique en terme de nombre de Chern n'est fort heureusement pas modifiée par le passage de (32) à (33); les courbures de Berry $\Omega_{\mathbf{q}}$ et $\tilde{\Omega}_{\mathbf{q}}$ peuvent différer, mais on pourra vérifier qu'elles ont la même intégrale sur la zone de Brillouin.

1-5 Exemples pour le réseau mur de briques

À titre d'exemple, nous avons tracé sur les figures 8 et 9 (haut) la courbure de Berry $\Omega_{\mathbf{q}}$ de la bande fondamentale calculée pour le réseau "mur

3. Un changement de jauge revient à multiplier les coefficients α, β par une même quantité $e^{i\chi_{\mathbf{q}}}$, ce qui n'est pas le cas de la transformation (34).

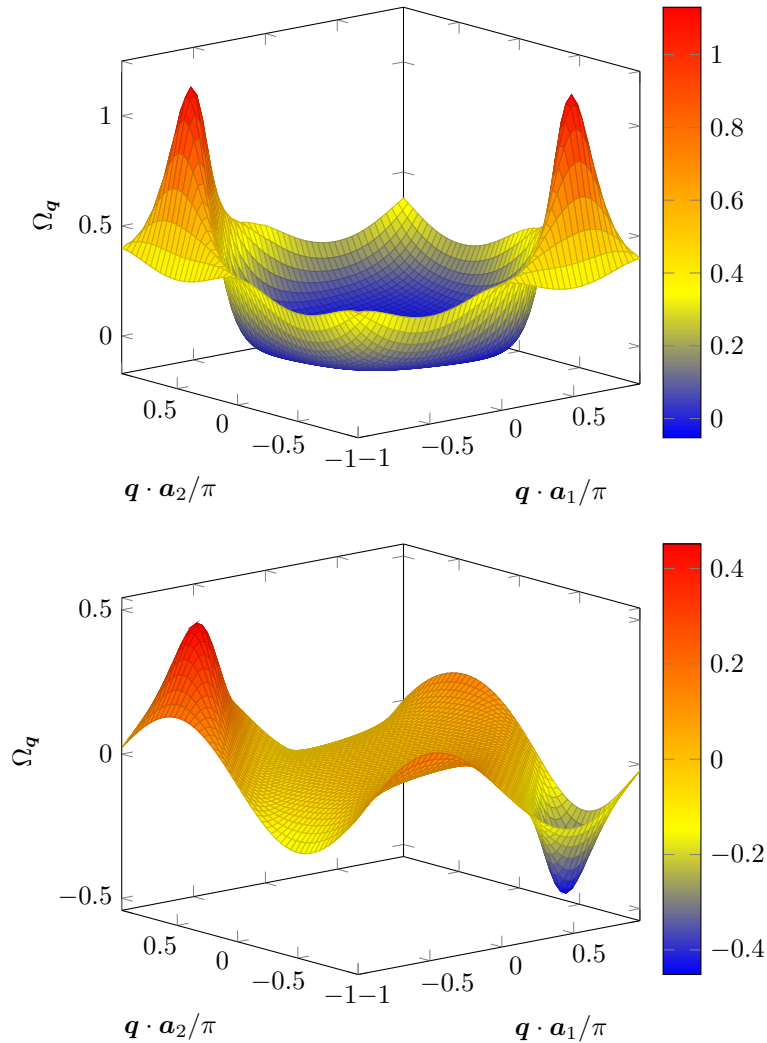


FIGURE 8. Courbure de Berry $\Omega_{\mathbf{q}}$ pour la bande inférieure du réseau "mur de briques", avec les états de Bloch (32) "sans encodage de la position". Haut : bande topologique, avec un couplage aux seconds voisins $J' = 0.2 J$, $\phi_0 = \pi/2$ et $\Delta = 0$. Le nombre de Chern correspondant (intégrale de $\Omega_{\mathbf{q}}$ divisée par 2π) est égal à 1. Bas : bande non topologique, avec $J' = 0$, $\Delta = J$. Dans ce cas invariant par renversement du temps, on a $\Omega_{\mathbf{q}} = -\Omega_{-\mathbf{q}}$ et l'intégrale sur la zone de Brillouin est nulle, donc $C = 0$.

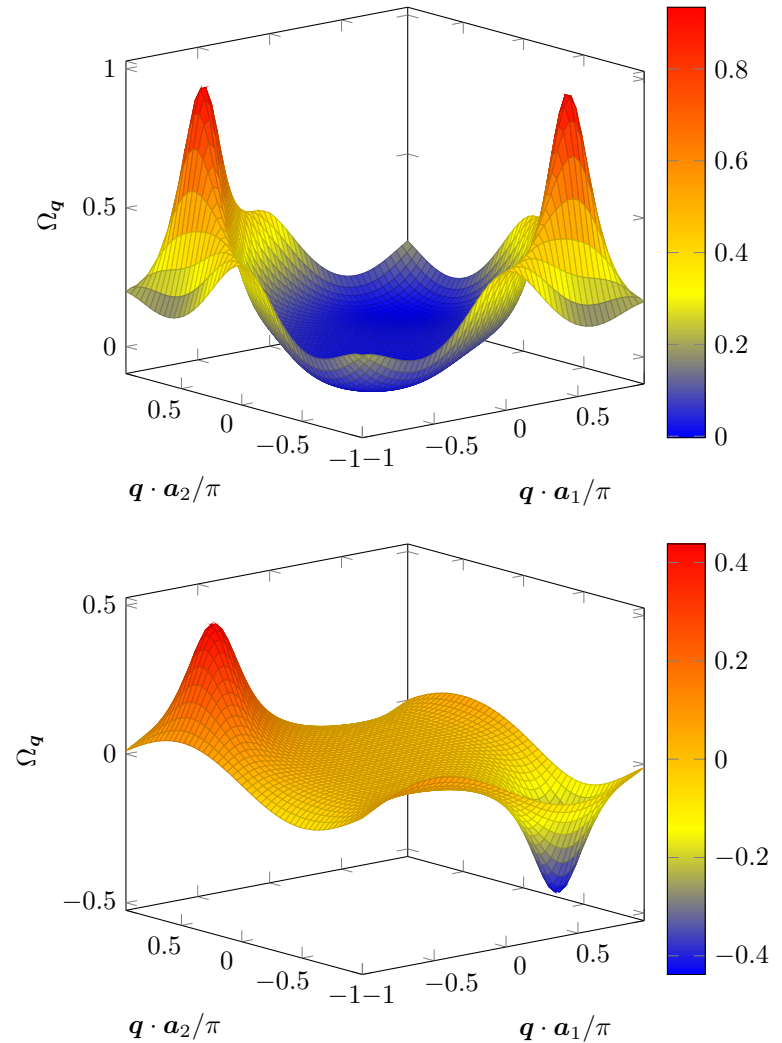


FIGURE 9. Courbure de Berry $\Omega_{\mathbf{q}}$ pour la bande inférieure du réseau "mur de briques", avec les états de Bloch (33) "avec encodage de la position". Haut : bande topologique, avec un couplage aux seconds voisins $J' = 0.2 J$, $\phi_0 = \pi/2$ et $\Delta = 0$. Le nombre de Chern correspondant (intégrale de $\Omega_{\mathbf{q}}$ divisée par 2π) est égal à 1. Bas : bande non topologique, avec $J' = 0$, $\Delta = J$. Dans ce cas invariant par renversement du temps, on a $\Omega_{\mathbf{q}} = -\Omega_{-\mathbf{q}}$ et l'intégrale sur la zone de Brillouin est nulle, donc $C = 0$.

de briques" pour des paramètres situés au centre de la région topologique : $J' = 0.2J$, $\phi_0 = \pi/2$ et $\Delta = 0$. Ce calcul a été fait dans la version (32) de l'écriture des états de Bloch, c'est-à-dire sans encodage de la position pour la figure 8 (resp. avec encodage de la position pour la figure 9). On constate dans les deux cas que cette courbure prend des valeurs significativement différentes de 0 autour de la position des (ex-)points de Dirac. On vérifie par ailleurs dans les deux cas que l'intégrale de Ω_q sur la zone de Brillouin est égale à 2π , correspondant à un nombre de Chern $\mathcal{C} = 1$. Les figures 8 et 9 (bas) sont obtenues pour des paramètres situés dans la région non topologique $J' = 0$, $\Delta = J$; la courbure de Berry a alors une intégrale nulle sur la zone de Brillouin, soit $\mathcal{C} = 0$.

2 Modulation temporelle et topologie

Nous abordons maintenant la description de la réalisation expérimentale du modèle de Haldane avec des atomes froids, réalisée par JOTZU, MESSER et al. (2014). Son principe est de partir d'un réseau bi-partite de type "mur de briques" avec ses deux points de Dirac, et de lever la dégénérescence en ces points pour obtenir deux bandes disjointes et topologiques.

Comme nous l'avons vu, la méthode la plus simple pour lever la dégénérescence dans ce type de réseau consiste à donner des énergies différentes $\pm\Delta$ aux deux sites A et B , mais elle ne conduit pas à des bandes topologiques, puisqu'on ne brise pas l'invariance par renversement du temps. La courbure de Berry aux deux points de Dirac prend des valeurs opposées, et son intégrale sur la zone de Brillouin reste nulle [figures 8 ou 9 (bas)].

Pour obtenir deux bandes topologiques, il faut donc "rectifier" la courbure de Berry, c'est-à-dire ouvrir le gap aux points de Dirac tout en s'assurant que la courbure de Berry résultante possède le même signe en ces deux points [figures 8 ou 9 (haut)]. Ce résultat peut être obtenu en modulant dans le temps les paramètres du réseau : c'est le principe des "réseaux secoués", qui permettent de briser l'invariance par renversement du temps et que nous allons maintenant décrire. Notons que cette approche a d'abord été proposée en physique de la matière condensée par OKA & AOKI (2009), qui suggéraient d'éclairer une feuille de graphène avec de la

lumière polarisée circulairement pour ouvrir un gap topologiquement non trivial au niveau des points de Dirac (voir aussi GU, FERTIG et al. (2011)).

2-1 Les réseaux secoués

Une méthode très commode pour obtenir des coefficients tunnels complexes dans un réseau optique consiste à moduler dans le temps certains paramètres du réseau, puis à chercher l'hamiltonien effectif, indépendant du temps, qui en résulte. Pour un réseau dans la limite des liaisons fortes, une modulation relativement simple à implémenter est un déplacement global ρ_t de l'ensemble des sites du réseau. Pour un système 2D, ce déplacement peut être fait de manière chirale en prenant par exemple un mouvement circulaire uniforme pour ρ_t , ce qui permet d'obtenir des phases non triviales pour les coefficients tunnel.

Partons d'un réseau optique décrit dans l'approximation des liaisons fortes, avec des sites localisés aux points \mathbf{r}_α . Quand le réseau est immobile dans un référentiel galiléen ($\rho = 0$), l'hamiltonien décrivant le mouvement d'une particule dans ce réseau s'écrit

$$\hat{H}_{\text{immobile}} = \sum_{\alpha} E_{\alpha} \hat{P}_{\alpha} - \sum_{\alpha, \beta} J_{\alpha, \beta}^{(0)} |\mathbf{r}_{\alpha}\rangle \langle \mathbf{r}_{\beta}| \quad (38)$$

avec $\hat{P}_{\alpha} = |\mathbf{r}_{\alpha}\rangle \langle \mathbf{r}_{\alpha}|$. Les coefficients $J_{\alpha, \beta}^{(0)}$ sont réels et positifs. Quand l'ensemble du réseau bouge, la manière la plus simple pour décrire la dynamique du système est de se placer dans le référentiel accéléré lié au réseau. Dans ce référentiel, le mouvement du réseau se décrit comme une force d'inertie

$$\mathbf{F}_t = -m\dot{\rho}_t, \quad (39)$$

et l'hamiltonien décrivant le mouvement de la particule est alors

$$\hat{H}_t = \hat{H}_{\text{immobile}} - \mathbf{F}_t \cdot \hat{\mathbf{r}}, \quad (40)$$

où $\hat{\mathbf{r}}$ est l'opérateur position dans ce modèle de liaisons fortes :

$$\hat{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \hat{P}_{\alpha}. \quad (41)$$

Le terme additionnel dans (40) provenant du mouvement du réseau est proportionnel à l'accélération du réseau, soit $\sim \omega^2 \rho_0$ pour un mouvement sinusoïdal d'amplitude ρ_0 et de pulsation ω . Or nous allons étudier ici la limite des grands ω (en comparaison des pulsations de Bohr du problème) et nous souhaitons simultanément traiter ce terme additionnel comme une perturbation. La forme (40) se prête donc mal à ce développement perturbatif et nous allons commencer par "abaisser le degré" en ω de la perturbation en utilisant une transformation unitaire exacte.

Cette transformation unitaire a en fait déjà été rencontrée au chapitre précédent. On introduit

$$\hat{U}_t = \exp[-i \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_t] \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_t = \frac{1}{\hbar} \int^t \mathbf{F}_{t'} dt' = -\frac{m}{\hbar} \dot{\mathbf{r}}_t, \quad (42)$$

et on obtient le nouvel hamiltonien après transformation :

$$\hat{H}_t = \hat{U}_t \hat{H}_t \hat{U}_t^\dagger + i\hbar \frac{d\hat{U}_t}{dt} \hat{U}_t^\dagger. \quad (43)$$

Dans le cas présent, la partie $E_\alpha \hat{P}_\alpha$ correspondant à l'énergie sur site dans (38) commute avec l'opérateur unitaire \hat{U}_t et est donc inchangée. Pour les termes décrivant le saut d'un site β à un site α , on trouve

$$\hat{U}_t |\mathbf{r}_\alpha\rangle \langle \mathbf{r}_\beta| \hat{U}_t^\dagger = e^{im(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \cdot \dot{\mathbf{r}} / \hbar} |\mathbf{r}_\alpha\rangle \langle \mathbf{r}_\beta| \quad (44)$$

de sorte que l'hamiltonien de la particule dans le référentiel du réseau et après transformation unitaire s'écrit

$$\hat{H}_t = \sum_\alpha E_\alpha \hat{P}_\alpha - \sum_{\alpha, \beta} J_{\alpha, \beta}(t) |\mathbf{r}_\alpha\rangle \langle \mathbf{r}_\beta|. \quad (45)$$

La prise en compte du mouvement global du réseau se fait alors par une modulation dans le temps des coefficients tunnel :

$$J_{\alpha, \beta}(t) = J_{\alpha, \beta}^{(0)} e^{im(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \cdot \dot{\mathbf{r}} / \hbar} \quad (46)$$

On notera que la dépendance en temps intervient ici via la vitesse du réseau, et non plus l'accélération comme en (40). Ceci correspond à l'abaissement de degré en ω mentionné plus haut. Plus précisément, pour un couplage entre sites distants typiquement de $\lambda/2$, où λ est la longueur d'onde

lumineuse servant à créer le réseau, l'argument de l'exponentielle est de l'ordre de

$$K_0 = \frac{m\lambda\omega\rho_0}{2\hbar} = \pi^2 \frac{\rho_0}{\lambda} \frac{\hbar\omega}{E_r}, \quad (47)$$

quantité qui est choisie ~ 0.8 dans les expériences de JOTZU, MESSER et al. (2014).

2-2 Hamiltonien effectif

Le traitement d'un hamiltonien variant périodiquement en temps est en général compliqué et on doit recourir à une approche numérique utilisant la méthode de Floquet pour décrire de manière précise la dynamique sous-jacente. Toutefois, quand la fréquence de modulation ω de l'hamiltonien est grande devant les fréquences de Bohr du système (ici la largeur et l'écart entre bandes d'énergie de $\hat{H}_{\text{immobile}}$), on peut utiliser un développement en puissances de $1/\omega$ pour obtenir les composantes les plus importantes de la dynamique.

Nous ne détaillerons pas ici l'ensemble du formalisme conduisant à cet hamiltonien effectif et nous renvoyons le lecteur par exemple⁴ à l'article de GOLDMAN & DALIBARD (2014), qui détaille sa dérivation ainsi que les termes additionnels décrivant le micro-mouvement associé aux oscillations rapides de l'hamiltonien. Le résultat principal est le suivant : partant d'un hamiltonien périodique en temps représenté par ses composantes de Fourier $\hat{H}^{(n)}$:

$$\hat{H}_t = \hat{H}^{(0)} + \sum_{n>0} \left(\hat{H}^{(n)} e^{in\omega t} + \hat{H}^{(-n)} e^{-in\omega t} \right), \quad (48)$$

l'hamiltonien effectif *indépendant du temps* s'écrit :

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}^{(0)} + \frac{1}{\hbar\omega} \sum_{n>0} \frac{1}{n} \left[\hat{H}^{(n)}, \hat{H}^{(-n)} \right] + \mathcal{O}(1/\omega^2). \quad (49)$$

La procédure à suivre pour obtenir \hat{H}_{eff} est donc bien définie. Partant de l'expression de \hat{H}_t dans laquelle la dépendance en temps provient de la

4. On pourra également consulter les articles précurseurs de AVAN, COHEN-TANNOUJJI et al. (1976) et RAHAV, GILARY et al. (2003), ainsi que BUKOV, D'ALESSIO et al. (2015) et ECKARDT (2017).

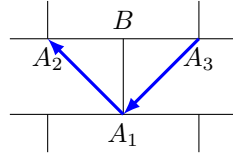


FIGURE 10. Un site B et ses trois voisins A_α , $\alpha = 1, 2, 3$, avec les couplages induits par la vibration du réseau.

modulation des coefficients tunnels, on décompose ces coefficients tunnel en série de Fourier en utilisant

$$e^{iz \sin(\omega t)} = \sum_n \mathcal{J}_n(z) e^{in\omega t} \quad (50)$$

où $\mathcal{J}_n(z)$ est la fonction de Bessel d'ordre n , ce qui conduit aux composantes $\hat{H}^{(n)}$ de l'hamiltonien. Nous allons maintenant mettre en œuvre cette procédure pour le réseau "mur de briques".

2-3 Coefficients tunnel entre seconds voisins

Nous souhaitons appliquer le résultat général (49), valable à l'ordre 1 inclus en $1/\omega$, au réseau mur de briques. Pour simplifier l'algèbre, nous allons nous concentrer sur une cellule donnée, plus précisément sur le site B de cette cellule que nous prendrons localisé en $\mathbf{r} = 0$. Ce site est couplé par effet tunnel aux trois sites A qui l'entourent : le site A_1 appartenant à la même cellule et situé en $\mathbf{r}_1 = -a \mathbf{u}_x$, et les sites A_2 et A_3 situés en $\mathbf{r}_{2,3} = \pm a \mathbf{u}_y$ (figure 10).

En absence de modulation du réseau, la partie de l'hamiltonien qui fait intervenir le site B considéré s'écrit

$$-J \left(\sum_{\alpha=1,2,3} |A_\alpha\rangle\langle B| \right) + \text{H.c.} \quad (51)$$

Supposons que le réseau est secoué selon le mouvement elliptique

$$\dot{\rho}_t = v_{0,x} \sin(\omega t + \varphi_x) \mathbf{u}_x + v_{0,y} \sin(\omega t + \varphi_y) \mathbf{u}_y, \quad (52)$$

de sorte que l'hamiltonien correspondant aux sauts tunnel s'écrit, après passage dans le référentiel du réseau et transformation unitaire :

$$\begin{aligned} \hat{\hat{H}}_t = & -J \left\{ e^{-i\kappa_y \sin(\omega t + \varphi_y)} |A_1\rangle\langle B| + e^{-i\kappa_x \sin(\omega t + \varphi_x)} |A_2\rangle\langle B| \right. \\ & \left. + e^{+i\kappa_x \sin(\omega t + \varphi_x)} |A_3\rangle\langle B| \right\} + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (53)$$

où l'on a posé $\kappa_{x/y} = mav_{0,x/y}/\hbar$. La décomposition en série de Fourier de ces coefficients donne alors⁵

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(n)} = & -J \mathcal{J}_n(\kappa_y) e^{in\varphi_y} [|B\rangle\langle A_1| + (-1)^n |A_1\rangle\langle B|] \\ & - J \mathcal{J}_n(\kappa_x) e^{in\varphi_x} [|B\rangle\langle A_2| + (-1)^n |A_2\rangle\langle B| + |A_3\rangle\langle B| + (-1)^n |B\rangle\langle A_3|] \end{aligned} \quad (54)$$

Comme nous l'avons écrit plus haut, le paramètre $\kappa_{x/y}$ dans l'expérience de Zurich est de l'ordre de 1, ce qui entraîne que seules les deux premières fonctions de Bessel \mathcal{J}_0 et \mathcal{J}_1 prennent des valeurs significatives. Prenons à partir de maintenant

$$\kappa_x = \kappa_y \equiv \kappa \quad (55)$$

pour simplifier les notations. Le terme $n = 0$ associé à $\mathcal{J}_0(\kappa)$ correspond à une renormalisation du coefficient tunnel entre premiers voisins :

$$J \longrightarrow \bar{J} = J \mathcal{J}_0(\kappa). \quad (56)$$

Le terme correspondant à $n = 1$ a pour contribution

$$\frac{1}{\hbar\omega} \left[\hat{H}^{(1)}, \hat{H}^{(-1)} \right] \quad (57)$$

qui se calcule explicitement en mettant $\hat{H}^{(\pm 1)}$ sous la forme

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(+1)} &= +J \mathcal{J}_1(\kappa) \left(e^{+i\varphi_y} \hat{O}_1 + e^{+i\varphi_x} \hat{O}_{23} \right) \\ \hat{H}^{(-1)} &= -J \mathcal{J}_1(\kappa) \left(e^{-i\varphi_y} \hat{O}_1 + e^{-i\varphi_x} \hat{O}_{23} \right) \end{aligned} \quad (58)$$

où nous avons introduit les opérateurs

$$\begin{aligned} \hat{O}_1 &= |A_1\rangle\langle B| - |B\rangle\langle A_1| \\ \hat{O}_{23} &= |A_2\rangle\langle B| - |B\rangle\langle A_2| - |A_3\rangle\langle B| + |B\rangle\langle A_3| \end{aligned} \quad (59)$$

5. On remarquera que $\hat{H}^{(n)}$ n'est pas hermitien, mais vérifie $(\hat{H}^{(n)})^\dagger = \hat{H}^{(-n)}$.

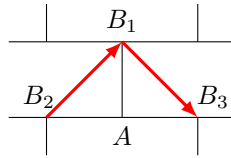


FIGURE 11. Un site A et ses trois voisins B_α , $\alpha = 1, 2, 3$, ainsi que les couplages induits par la vibration du réseau.

Le commutateur recherché vaut alors :

$$\left[\hat{H}^{(1)}, \hat{H}^{(-1)} \right] = -i 2J^2 \mathcal{J}_1^2(\kappa) \sin(\varphi_y - \varphi_x) [\hat{O}_1, \hat{O}_{23}] \quad (60)$$

ce qui fait apparaître dans l'hamiltonien effectif le couplage désiré entre seconds voisins

$$- \bar{J}' \left(e^{+i\pi/2} |A_2\rangle \langle A_1| + e^{+i\pi/2} |A_1\rangle \langle A_3| \right) + \text{H.c.} \quad (61)$$

avec

$$\bar{J}' = 2 \frac{J^2}{\hbar\omega} \mathcal{J}_1^2(\kappa) \sin(\varphi_y - \varphi_x) \quad (62)$$

Ce couplage est maximal pour un mouvement circulaire du réseau ($\varphi_y - \varphi_x = \pm\pi/2$) et s'annule pour un mouvement linéaire. Quelle que soit la valeur de $\varphi_y - \varphi_x$, il correspond à un facteur de phase $e^{\pm i\pi/2}$ pour les liens entre seconds voisins $A - A$, comme représenté sur la figure 10. L'amplitude J' est par construction petite devant l'amplitude tunnel initiale J entre premiers voisins, puisque nous avons supposé $J \ll \hbar\omega$ pour notre développement.

On peut bien sûr faire un traitement identique pour trouver le couplage entre seconds voisins $B - B$. En isolant par la pensée un site A entouré de ses trois voisins B immédiats, on arrive aux couplages indiqués sur la figure 11 :

$$- \bar{J}' \left(e^{+i\pi/2} |B_1\rangle \langle B_2| + e^{+i\pi/2} |B_3\rangle \langle B_1| \right) + \text{H.c.}, \quad (63)$$

qui correspondent bien au choix fait dans la première partie de ce chapitre. On pourra se convaincre qu'à cet ordre du calcul en $1/\omega$, il n'y a pas couplage à plus longue distance qui apparaît entre les différents sites du réseau "mur de briques".

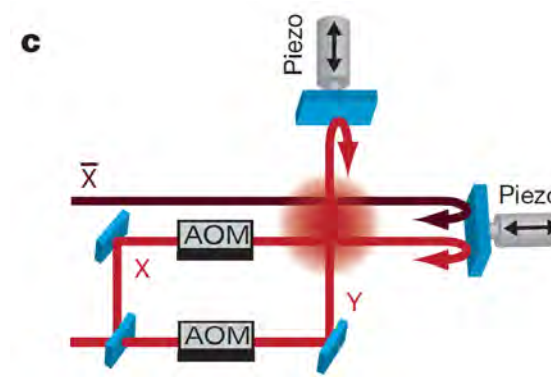


FIGURE 12. Schéma expérimental utilisé par JOTZU, MESSER et al. (2014) pour réaliser un réseau "mur de briques" oscillant, de manière à obtenir deux bandes topologiquement non triviales.

2-4 Les résultats expérimentaux de Zurich

L'expérience de JOTZU, MESSER et al. (2014) a été menée avec des atomes fermioniques de ^{40}K polarisés en spin. Ces atomes évoluent dans un réseau 2D correspondant à un "mur de briques" légèrement déformé, obtenu en superposant deux ondes stationnaires le long de l'axe x et une onde stationnaire le long de y (figure 12). L'écart en énergie $\pm\Delta$ est contrôlé en ajustant la position relative des deux ondes stationnaires le long de l'axe x . Le confinement le long de l'axe z est un piège harmonique faible, de sorte que l'expérience est effectivement menée avec des tubes d'atomes parallèles à l'axe z .

Les atomes sont d'abord préparés dans la bande fondamentale du réseau statique, puis la modulation est branchée en un temps de 20 ms. Cette modulation est obtenue en faisant vibrer les miroirs de réflexion grâce à des actuateurs piézo-électriques, en combinaison avec des modulateurs acousto-optiques situés en amont. Ceci permet de réaliser le déplacement global ρ_t souhaité pour le réseau.

Une fois la dégénérescence levée aux points de Dirac, JOTZU, MESSER et al. (2014) ont mesuré le signe de la courbure de Berry en ces points. Pour cela, ils ont préparé un paquet d'ondes au centre de la zone de Brillouin,

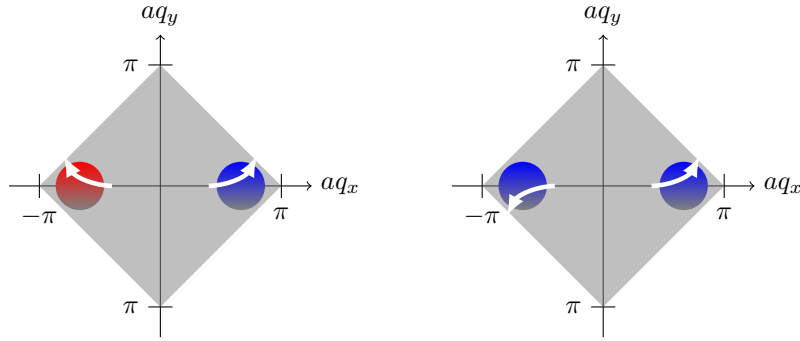


FIGURE 13. Principe de la mesure de la courbure de Berry aux niveaux des points de Dirac. Si le gap est ouvert sans briser l'invariance par renversement du temps (figure de gauche), les courbures de Berry aux deux points de Dirac sont opposées et la déflexion d'un paquet d'ondes en ces points se fera avec des sens opposés. Au contraire, pour des bandes topologiques, on peut avoir des déflexions égales en ces deux points (figure de droite).

puis utilisé la technique des oscillations de Bloch. Plus précisément, ils ont appliqué une force \mathbf{F} qui a fait évoluer ce paquet d'ondes vers un des deux points de Dirac. Nous avons établi dans le cours précédent les équations du mouvement correspondantes :

$$\hbar \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{F} \quad (64)$$

$$\hbar \mathbf{v}_{\mathbf{q}} = \nabla E_{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega}_{\mathbf{q}} \times \mathbf{F} \quad (65)$$

La première équation indique que le moment \mathbf{q} évolue dans la direction de la force \mathbf{F} . Dans la seconde équation, le terme en $\nabla E_{\mathbf{q}}$ ne joue pas de rôle après intégration sur une période de Bloch ; le terme $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{q}} \times \mathbf{F}$ est au contraire essentiel : il va causer une déflexion de la vitesse du paquet d'ondes dans une direction perpendiculaire à \mathbf{F} et le signe de cette déflexion nous renseigne directement sur le signe de la courbure de Berry $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{q}}$.

Limitons-nous pour commencer aux deux cas limites (cf. figures 4 et 13) :

- $\Delta \neq 0, J' = 0$, ce qui doit correspondre à des bandes non-topologiques, puisqu'on brise l'invariance par réflexion, mais pas l'in-

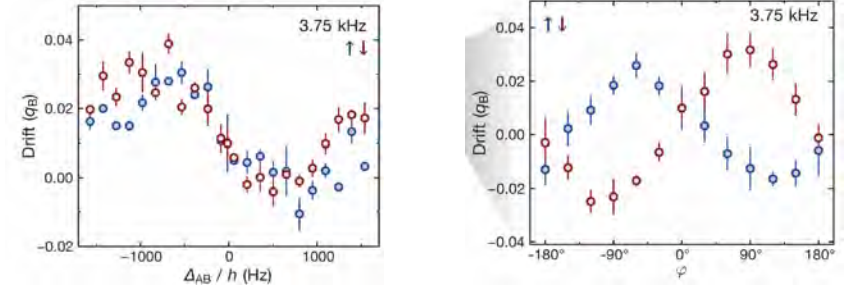


FIGURE 14. Déplacement du centre de masse du nuage après passage sur un des deux points de Dirac. Un déplacement identique pour les deux points de Dirac signifie une courbure de Berry de signe opposé (cf. figure 13). La figure de gauche correspond au cas non topologique : $\phi_0 = 0$ et on varie Δ . La figure de droite correspond au cas topologique : $\Delta = 0$ et on varie $\varphi_x - \varphi_y$, donc J' . Figures extraites de JOTZU, MESSER et al. (2014).

variance par renversement du temps. On doit donc avoir $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{Q}_-} = -\mathbf{\Omega}_{\mathbf{Q}_+}$, ce qui veut dire que les paquets d'ondes tournent en sens opposé aux deux points de Dirac, l'un dans le sens direct et l'autre dans le sens rétrograde.

- $\Delta = 0, J' \neq 0$, ce qui doit au contraire conduire à des bandes topologiques. La courbure de Berry doit alors prendre la même valeur aux deux points de Dirac, et les deux paquets d'ondes doivent tourner dans le même sens.

Les résultats de JOTZU, MESSER et al. (2014) ont confirmé ces prédictions (figure 14). La force \mathbf{F} , créée par un gradient de champ magnétique, peut être appliquée dans un sens ou dans l'autre (points bleus et points rouges de cette figure) pour aller sonder les deux points de Dirac. On observe bien une déflexion qui reflète une courbure des trajectoires identique aux deux points de Dirac dans le cas topologique : la courbure de Berry a effectivement été "rectifiée".

JOTZU, MESSER et al. (2014) ont ensuite exploré de manière systématique l'espace des paramètres Δ, J' et reconstruit un diagramme de phase qui reproduit celui attendu pour le modèle de Haldane, avec deux "lobes topologiques" entourés d'une région normale (figure 15).

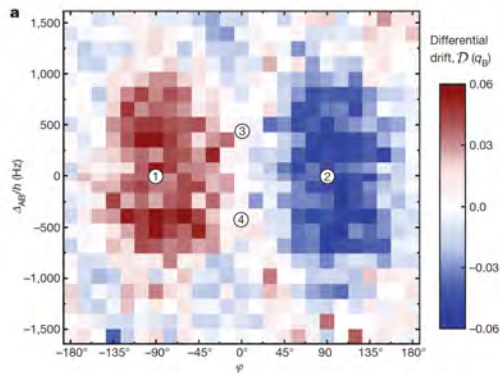


FIGURE 15. Diagramme de phase reconstruit à partir des expériences de déflexion aux points de Dirac, à comparer avec la prédiction théorique de la figure 4. Figure extraite de JOTZU, MESSER et al. (2014).

3 Les états de bord

Nous abordons maintenant un aspect essentiel de la topologie des bandes d'énergie, les états de bord qui apparaissent à la jonction entre deux phases de topologie différentes. Nous avons déjà rencontré ces états dans les problèmes 1D et nous allons justifier de manière qualitative leur existence à deux dimensions. Une discussion plus rigoureuse pourra être trouvée par exemple dans l'article de HATSUGAI (1993). Nous donnerons ensuite des exemples concrets en utilisant le réseau ⁶ "mur de briques" et nous terminerons par la description d'expériences récentes menées en photonique mettant en évidence ces états de bord de manière très claire.

3-1 La correspondance "cœur-bord"

Nous avons déjà rencontré au chapitre 2 les états de bord dans le cadre de notre étude de chaînes périodiques à une dimension. Rappelons brièvement

6. Les arguments que nous allons développer sont bien adaptés au cas des réseaux décrits dans un modèle de liaisons fortes, avec un nombre n fini de bandes avec $\sum_{j=1}^n C^{(j)} = 0$. Le cas des niveaux de Landau avec un nombre infini de bandes ayant toutes le nombre de Chern $C = 1$ doit être traité différemment (voir par exemple le cours 2013-14 et ses références).

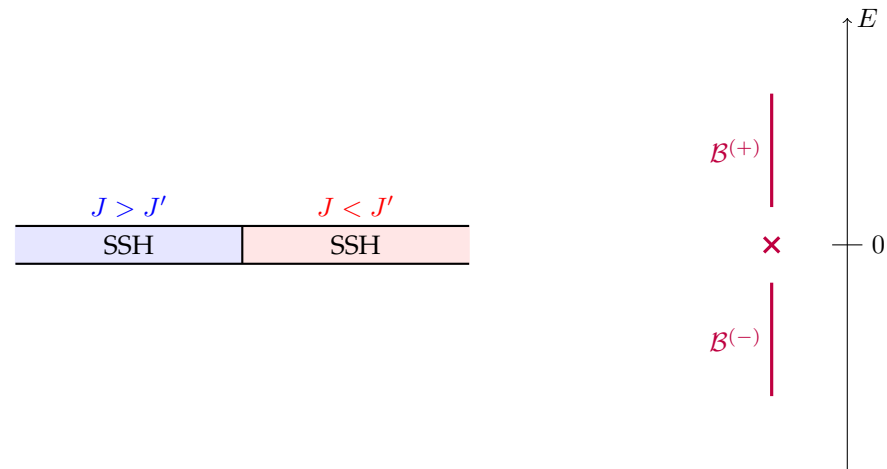


FIGURE 16. Apparition d'un état de bord dans une géométrie unidimensionnelle, au point de contact entre deux chaînes SSH de topologies différentes. L'énergie $E = 0$ de cet état est située dans le gap entre les deux bandes d'énergie bulk $B^{(\pm)}$.

vement le résultat : quand on connecte deux variantes topologiquement différentes d'un réseau, par exemple le réseau SSH, un état discret apparaît à l'intérieur du gap en énergie qui existe pour une chaîne infinie. Cet état est localisé spatialement autour du point où les deux demi-chaînes se touchent (figure 16). Une particule préparée dans cet état y reste donc indéfiniment.

A deux dimensions, la jonction entre deux réseaux de topologie différente se fait le long d'une ou plusieurs lignes, le cas géométriquement le plus simple correspondant à deux demi-plans de natures différentes, séparés par l'axe $y = 0$. On peut avoir par exemple le vide (topologiquement trivial) dans la partie $y > 0$ et un matériau topologiquement non trivial dans la partie $y < 0$.

Nous allons voir qu'il apparaît également dans ce cas des états de bord, ou plus exactement un canal de bord. Ce canal comprend une infinité d'états, localisés au voisinage de l'axe $y = 0$ et se propageant le long de l'axe x . Chaque état est caractérisé par son moment q_x et son énergie $E(q_x)$.

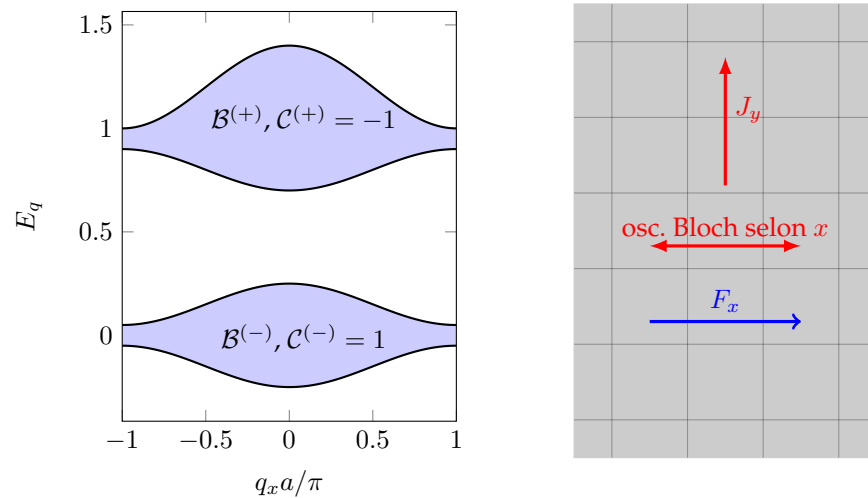


FIGURE 17. Matériau 2D topologique à deux bandes $\mathcal{B}^{(\pm)}$. Ce matériau est supposé sans bord (il recouvre tout le plan ou occupe une région $L_x \times L_y$ avec des conditions aux limites périodiques). La bande $\mathcal{B}^{(-)}$ est supposée pleine et l'autre vide. Une force appliquée le long de l'axe x induit une oscillation de Bloch le long de l'axe x ainsi qu'une densité de courant quantifié J_y le long de l'axe y .

Pour être plus précis, considérons un matériau topologique à deux bandes, avec une bande fondamentale $E_q^{(-)}$ caractérisée par un nombre de Chern non nul $\mathcal{C}^{(-)}$ (et donc $\mathcal{C}^{(+)} = -\mathcal{C}^{(-)}$). Ces bandes sont représentées sur la figure 17 quand l'indice q_x varie dans la zone de Brillouin. Nous supposons la bande fondamentale remplie et la bande excitée vide, soit une particule par cellule du réseau. Si ce matériau remplit l'espace entier, on sait qu'une force appliquée le long de l'axe x va induire un phénomène d'oscillation de Bloch le long de l'axe x , ainsi qu'un courant quantifié le long de l'axe y . Plus précisément, en une période de Bloch, l'indice q_x va décrire toute la zone de Brillouin et un courant de $\mathcal{C}^{(-)}$ particules/unité va circuler le long de l'axe y , par exemple vers les y positifs si l'on a choisi le sens de la force F_x de manière appropriée.

Supposons maintenant que ce même matériau ne remplit que le demi-espace $y < 0$ (figure 18). On perd donc la périodicité en y , mais on conserve

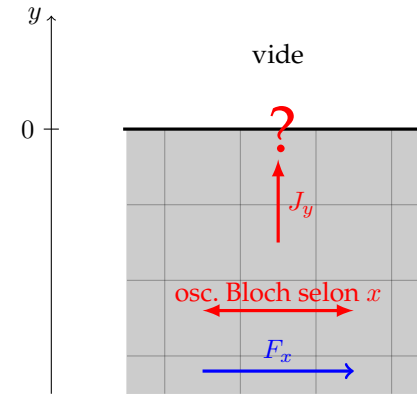


FIGURE 18. Matériau avec une bande fondamentale topologique comme en figure 17, mais n'occupant qu'un demi-espace. Que devient le courant J_y à l'interface ?

la périodicité en x . La composante q_x du vecteur de Bloch reste donc un "bon nombre quantique", et on peut continuer à tracer les énergies des états en fonction de q_x . Pour le cœur du matériau situé loin de l'interface dans la zone $y < 0$, on s'attend à retrouver le même diagramme énergétique que pour le cas initial, de sorte qu'au moins une partie de la figure 17 reste valable. Examinons toutefois ce qui se produit quand on applique la force F_x . On s'attend à ce qu'au cœur du matériau, le phénomène des oscillations de Bloch continue à se produire le long de la direction x et qu'un courant soit généré dans le sens des y positifs. Mais il y a un problème quand les particules arrivent en $y = 0$: elles ne peuvent pas passer du côté $y > 0$ (le vide) et elles ne peuvent pas non plus s'accumuler sur cette ligne⁷. Comment résoudre ce paradoxe ?

Ce sont les canaux de bord qui vont venir à notre secours. S'il y a dans le diagramme énergétique $\mathcal{C}^{(-)}$ lignes qui connectent la bande considérée et la bande supérieure, on va pouvoir envoyer par ce "détour" $\mathcal{C}^{(-)}$ particules vers la bande supérieure lors de chaque oscillation de Bloch, pour chaque cellule unité. Cela compense exactement l'arrivée du courant quantifié à la

7. Si on a affaire à des fermions, on peut invoquer directement le principe de Pauli, mais le résultat est le même pour des bosons : deux états initialement orthogonaux (localisés en (x, y_1) et (x, y_2)) doivent rester orthogonaux au cours d'une évolution unitaire.

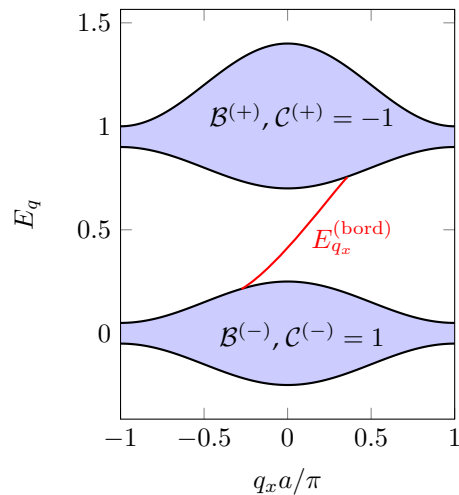


FIGURE 19. Diagramme énergétique typique pour un matériau ne remplissant qu'un demi-espace et topologiquement non trivial (ici $C^{(-)} = 1$). Le moment q_x reste un "bon nombre quantique" et on retrouve les mêmes bandes que pour l'espace entier (figure 17). On trouve en plus un état de bord, indiqué en rouge, d'énergie $E_{q_x}^{(\text{bord})}$. Ce canal permet "d'évacuer" vers la bande supérieure les particules qui arrivent au voisinage de l'axe $y = 0$ du fait du transport qui se produit au sein du cœur du matériau lorsqu'on applique une force parallèle à sa frontière.

frontière $y = 0$. Une fois dans la bande supérieure, l'action de la force F_x est inversée et les particules partent vers $y = -\infty$.

On a ici une illustration simple du principe de correspondance "cœur-bord" (*bulk-edge*). La figure 19 illustre ce principe pour le cas $C^{(-)} = 1$, avec donc un seul canal de bord, caractérisé par l'énergie $E_{q_x}^{(\text{bord})}$ et la vitesse de groupe $v_x = \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dq_x} E_{q_x}^{(\text{bord})}$. La robustesse de cet état de bord apparaît de manière presque évidente sur ce dessin : il s'agit d'un lien qui doit nécessairement relier deux bandes d'énergie distinctes. Si on déforme de manière modérée les paramètres du réseau, ce lien ne peut pas disparaître ; le seul moyen de s'en débarrasser est de faire en sorte que les bandes se touchent puis se séparent de nouveau. Si la bande fondamentale devient topologiquement triviale lors de cette opération, le canal de bord disparaît.

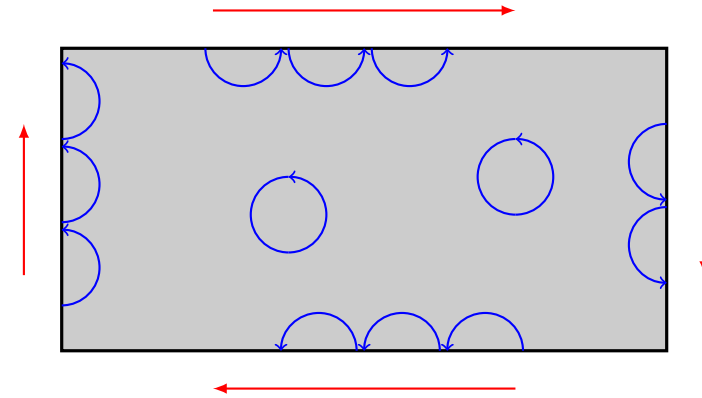


FIGURE 20. Interprétation des états de bord dans le cas de particules chargées placées dans un champ magnétique uniforme, perpendiculaire au plan (situation de l'effet Hall quantique entier).

Une représentation imagée de ces états de bord est souvent proposée dans le cadre de l'effet Hall quantique. On considère un gaz 2D d'électrons dans un champ magnétique perpendiculaire au plan. Dans ce cas, les bandes d'énergie sont les niveaux de Landau et elles ont toutes un nombre de Chern de 1, ce qui fait que l'on s'attend effectivement à la présence d'états de bord. Dans le cœur du matériau, une représentation classique du mouvement d'un électron correspond à une trajectoire cyclotron circulaire. Il n'y a donc aucun transport. En revanche, ces trajectoires sont interrompues quand l'électron touche le bord de l'échantillon et on obtient une orbite "sautante" (*skipping orbit*) qui correspond bien à un déplacement le long de la frontière. Cette image simple ne se généralise toutefois pas aisément au cas général d'une bande topologique, contrairement au raisonnement ci-dessus fondé sur les oscillations de Bloch.

3-2 L'exemple du réseau "mur de briques" : demi-plan

Pour rendre cette discussion plus quantitative, nous avons représenté sur les figures 22 et 23 les énergies propres E_{q_x} pour un demi-plan couvert par un réseau mur de briques, comme représenté sur le schéma 21. La figure 22 est obtenue dans le cas topologique, pour $\Delta = 0$, $\phi_0 = \pi/2$. La

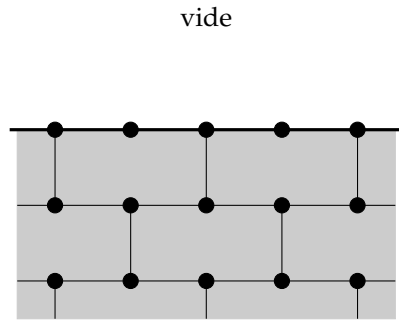


FIGURE 21. Réseau "mur de briques" couvrant le demi-plan $y < 0$. Nous n'avons pas représenté les couplages aux seconds voisins responsables de l'apparition de propriétés topologiques.

figure 23 correspond au contraire au cas normal $\Delta = J, \phi_0 = 0$. Dans les deux cas, on a aussi indiqué dans la partie supérieure de la figure le diagramme énergétique obtenu pour un plan entier, donc sans état de bord.

Ces deux diagrammes confirment l'intuition que nous avons développée plus haut. On voit tout d'abord que le diagramme d'énergie "bulk" (les bandes) sont inchangées quand on passe du plan entier au demi-plan. Dans le cas topologique, un canal de bord apparaît, correspondant à la branche $E_{q_x}^{(\text{bord})}$ qui joint les deux bandes d'énergie $\mathcal{B}^{(\pm)}$. Dans le cas non topologique, il y a également des branches d'états de bords visibles, mais elles ne connectent pas les deux bandes $\mathcal{B}^{(+)}$ et $\mathcal{B}^{(-)}$. Ces branches n'ont donc pas de robustesse topologique et elles peuvent disparaître quand on déforme le réseau. Elles dépendent également fortement de la manière selon laquelle on découpe l'interface matériau–vide. Ce point a été étudié en détail pour le graphène, voir par exemple le livre de BERNEVIG & HUGHES (2013) et les références qu'il indique.

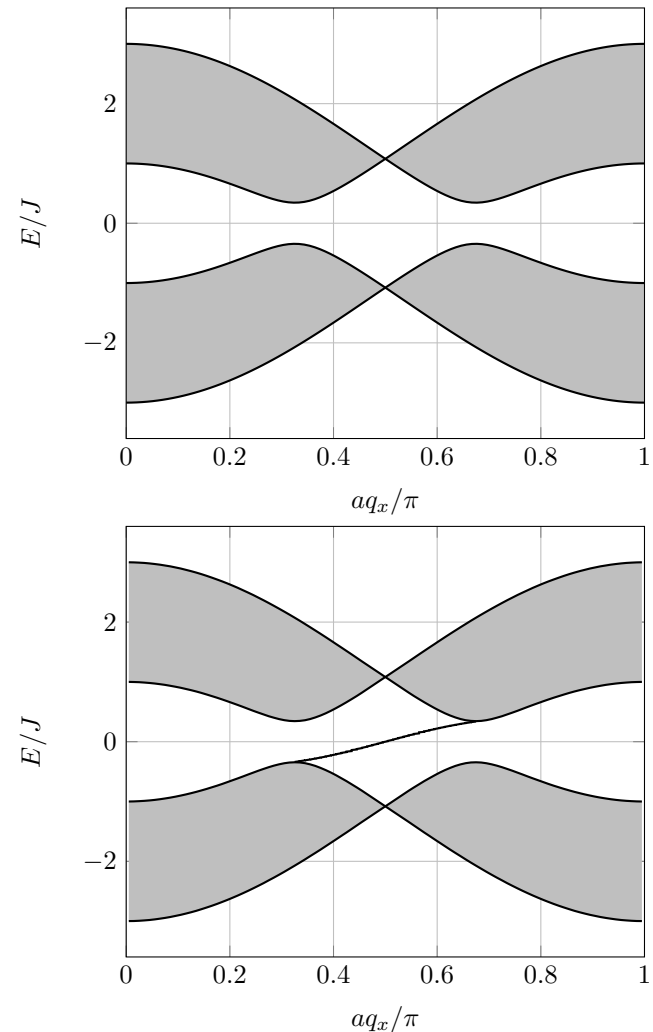


FIGURE 22. Énergies E_{q_x} pour un réseau "mur de briques" dans le cas topologique $J' = J/10, \Delta = 0, \phi_0 = \pi/2$. Haut : plan entier. Bas : demi-plan avec la présence d'un état de bord.

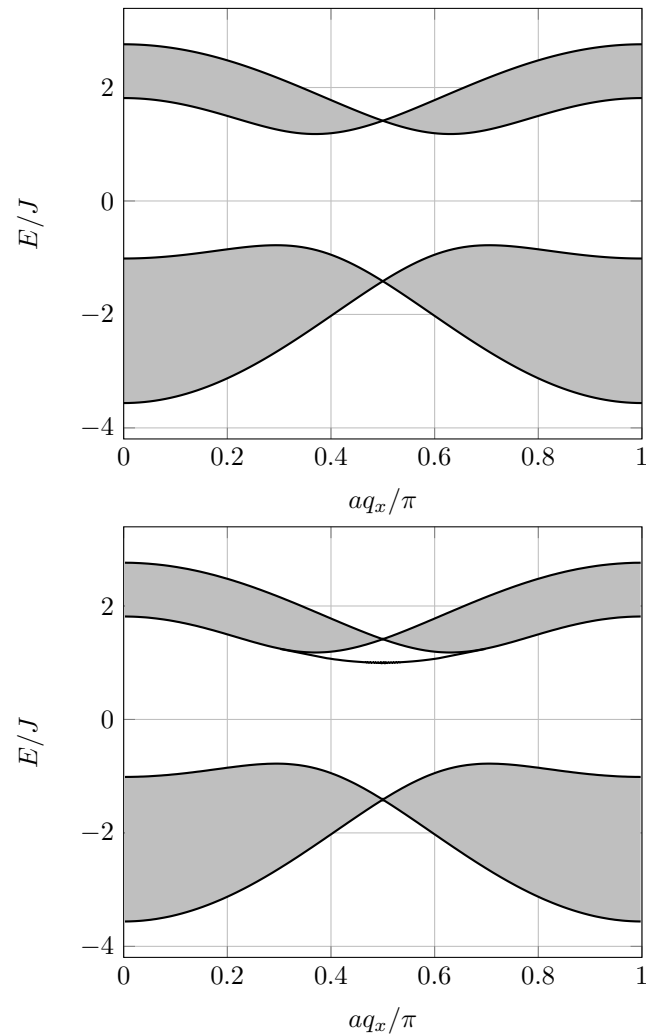


FIGURE 23. Énergies E_{q_x} pour un réseau "mur de briques" dans le cas non topologique $J' = J/10$, $\Delta = J$, $\phi_0 = 0$. Haut : plan entier. Bas : demi-plan.

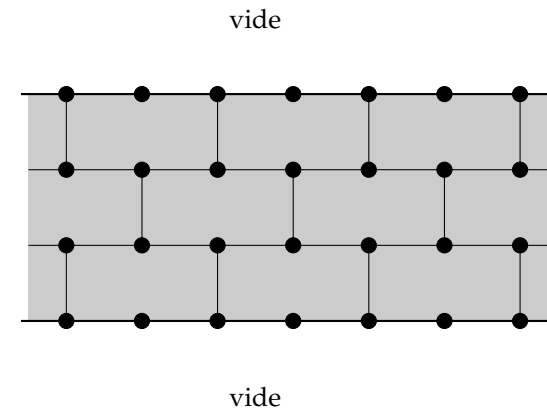


FIGURE 24. Ruban formé avec le réseau mur de briques, infini dans la direction x et comportant n_y lignes dans la direction y (ici $n_y = 4$). On peut prendre des conditions aux limites ouvertes selon y ou des conditions aux limites périodiques en identifiant la ligne 1 avec la ligne $n_y + 1$.

3-3 L'exemple du réseau "mur de briques" : ruban

L'exemple du demi-plan que nous avons développé ci-dessus a l'avantage d'être très proche du système infini dont nous sommes partis, mais il ne permet pas de suivre de manière individuelle la variation des énergies des différents états. Pour y remédier, il est utile de s'intéresser également à la géométrie d'un ruban infini dans une direction, x par exemple, et ne comportant qu'un nombre fini n_y de lignes dans l'autre direction (figure 24).

Pour chercher les états propres de ce système, on peut toujours utiliser le théorème de Bloch selon la direction x . Pour chaque valeur de q_x , on a un problème aux valeurs propres pour un hamiltonien de taille $(2n_y) \times (2n_y)$ que l'on diagonalise numériquement. En reprenant les mêmes paramètres qu'au paragraphe précédent, on retrouve dans le cas topologique des ca-

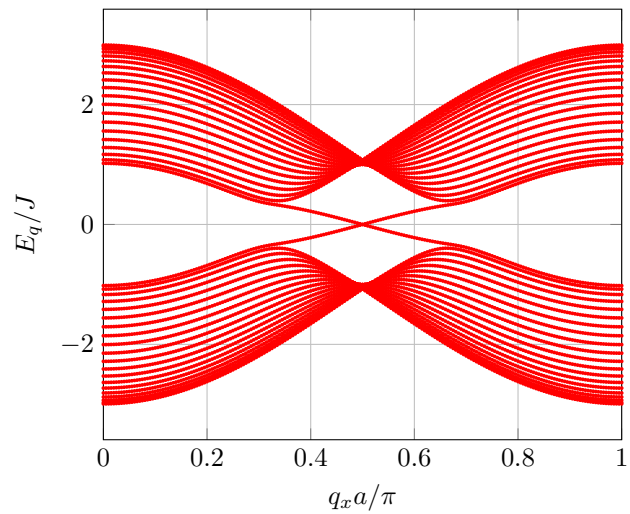
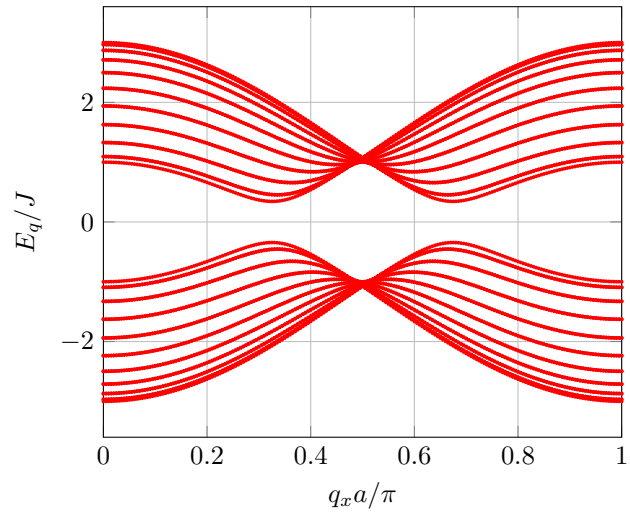


FIGURE 25. Réseau "mur de briques" avec un ruban de $n_y = 20$ lignes, cas topologique : $J' = J/10$, $\Delta = 0$, $\phi_0 = \pi/2$. Haut : conditions aux limites périodiques selon y . Bas : conditions aux limites ouvertes.

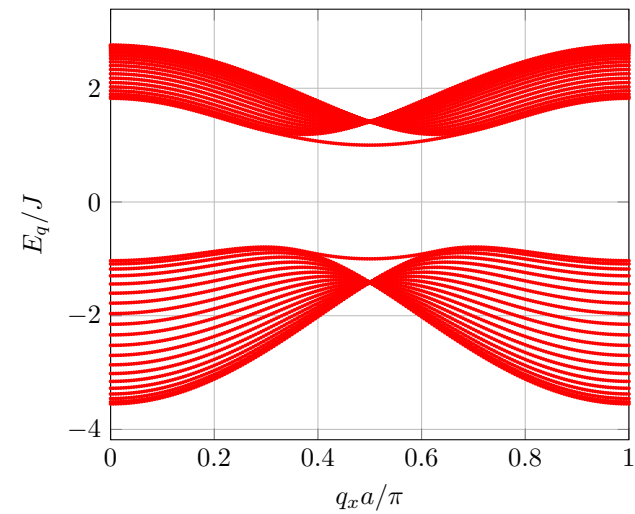
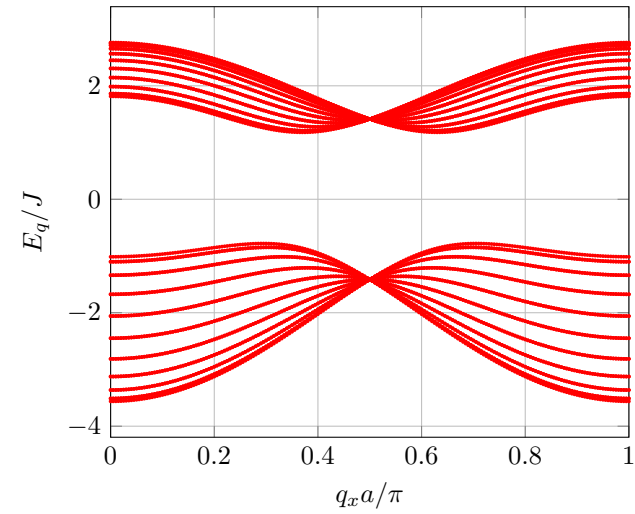


FIGURE 26. Réseau "mur de briques" avec un ruban de $n_y = 20$ lignes, cas non topologique : $J' = J/10$, $\Delta = J$, $\phi_0 = 0$. Haut : conditions aux limites périodiques selon y . Bas : conditions aux limites ouvertes.

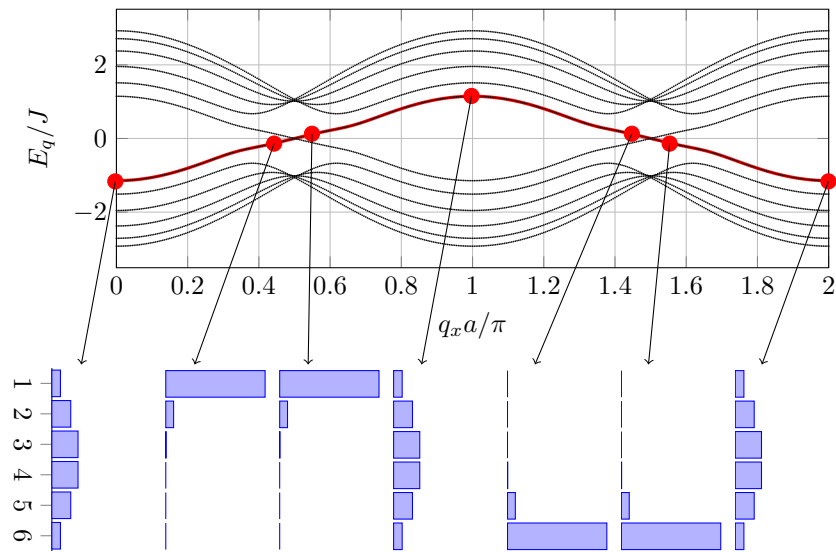


FIGURE 27. Haut : représentation avec une zone de Brillouin étendue des états propres d'un ruban du réseau "mur de briques". On a choisi $n_y = 6$ lignes et on s'est placé dans la même situation topologique que sur la figure 25, $J' = J/10$, $\Delta = 0$, $\phi_0 = \pi/2$. Bas : la population du canal de bord sur les $n_y = 6$ lignes est indiquée pour quelques valeurs de l'indice q_x .

naux de bord reliant les deux bandes d'énergie (figure 25, bas). Notons que l'on a maintenant deux canaux de bord au lieu d'un, puisqu'il y a un canal se propageant sur le haut du ruban, et un canal se propageant sur le bas. Pour une valeur de q_x donnée, les vitesses de groupe de ces deux canaux $v_x = \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dq_x} E_{q_x}^{(\text{bord})}$ sont égales en valeur absolue, et de signe opposé.

Dans le cas non topologique (figure 26, bas), cette étude faite avec le ruban confirme également les résultats obtenus avec le demi-plan : pas d'états de bord connectant les deux bandes d'énergie, mais des états nouveaux au voisinage de chacune des bandes. Notons que ces canaux de bord, topologiques ou non, disparaissent quand on prend des conditions aux limites périodiques entre les deux bords du ruban, comme attendu (cf. haut des figures 25 et 26).

Pour compléter notre description de ces canaux de bord, nous avons représenté sur la figure 27 les énergies d'un ruban de $n_y = 6$ lignes seulement, ce qui permet de suivre facilement chaque niveau d'énergie. Nous avons choisi une représentation de zone de Brillouin étendue, ce qui permet de visualiser ce qui se passe dans une oscillation de Bloch. Considérons par exemple une particule préparée à $t = 0$ dans l'état surligné en rouge avec le moment $q_x = 0$. Cet état est un état de cœur (*bulk*), puisque sa population est plutôt concentrée sur les lignes centrales du ruban. En présence d'une force F_x , le moment q_x va augmenter selon la loi $q_x = F_x t / \hbar$ et la particule va suivre l'état surligné si la force F n'est pas trop grande. Quand $q_x a \sim \pi/2$, cet état est devenu un état de bord, localisé essentiellement sur le haut du ruban. Pour $q_x a \sim \pi$, la particule est de nouveau localisée vers le centre du ruban, mais elle est passée dans la bande d'énergie supérieure. Elle redescend ensuite vers la bande inférieure, cette fois-ci en étant localisée sur le bas du ruban pour $q_x a \sim 3\pi/2$. Elle revient enfin à son état initial (à une phase près) pour $q_x a = 2\pi$. Ce comportement confirme l'argument que nous avons développé un peu plus haut pour un demi-plan.

3-4 Réservoir et transport quantifié

Les arguments développés ci-dessus permettent d'expliquer la quantification du transport sur un cas concret, quand le ruban est couplé à un réservoir imposant son potentiel chimique μ . Plus précisément, supposons que μ est situé dans le gap qui sépare la bande fondamentale de la bande excitée. Considérons un ruban de taille finie L_x selon x , comportant $n_x = L_x/a$ sites avec des conditions aux limites périodiques selon cet axe. Le moment q_x est donc quantifié et peut prendre une des n_x valeurs

$$q_x = \frac{\pi}{a} \left(-1 + \frac{2j_x}{n_x} \right) \quad \text{avec } j_x = 1, \dots, n_x. \quad (66)$$

Supposons la bande fondamentale pleine jusqu'à la valeur μ (figure 28, haut) et appliquons une force F_x le long de l'axe x . L'équation du mouvement $\hbar \dot{q}_x = F_x$ nous indique que la période des oscillations de Bloch, c'est-à-dire le temps nécessaire pour parcourir la zone de Brillouin de lar-

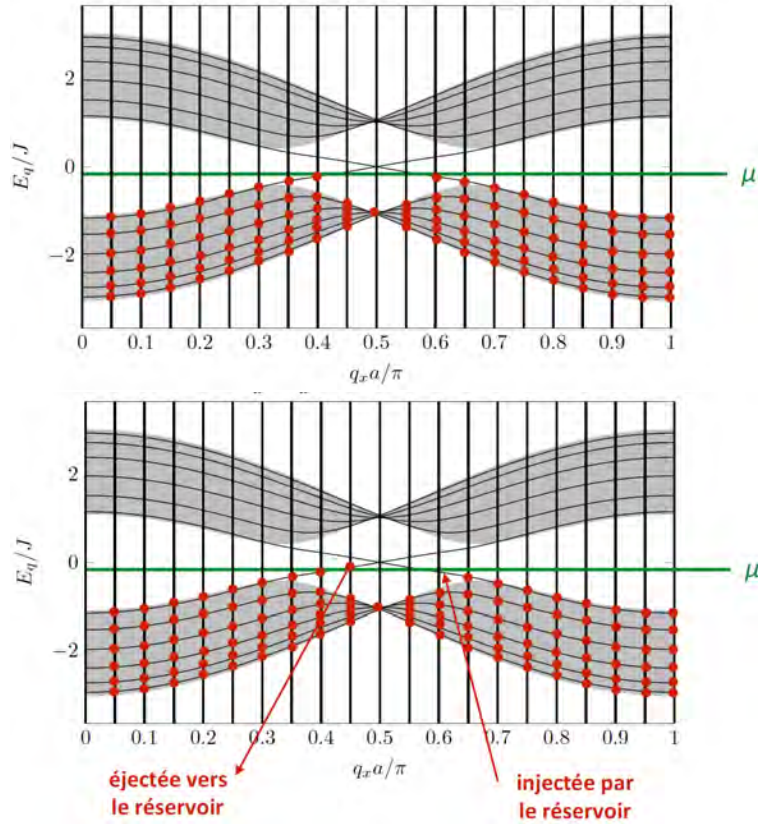


FIGURE 28. Quantification du courant quand un réservoir impose son potentiel chimique μ . Haut : on considère un ruban de taille finie $L_x = n_x a$ selon x avec des conditions aux limites périodiques selon cet axe, de sorte que les moments q_x sont quantifiés. Bas : on applique une force F_x le long de l'axe x créant une oscillation de Bloch de période t_B . En un temps $\delta t = t_B/n_x$, chaque moment a augmenté d'un quantum, de sorte que le réservoir doit faire passer une particule du haut du ruban vers le bas du ruban pour maintenir l'équilibre.

geur $2\pi/a$, est $t_B = 2\pi\hbar/(Fa)$. En un temps

$$\delta t = \frac{t_B}{n_x} = \frac{2\pi\hbar}{F_x L_x}, \quad (67)$$

tous les moments se sont donc décalés d'un quantum $2\pi/L_x$ vers la droite. Une particule sur le canal de bord montant est donc passée au dessus de μ et il manque une particule sur un état en dessous de μ sur le canal de bord descendant. Le rôle du réservoir est de rétablir l'équilibre, ce qui revient à transférer une particule localisée en haut du ruban vers le bas de ce ruban, le reste des particules se réajustant à l'intérieur de la bande fondamentale. Cela crée un courant selon la direction y , et la densité de courant correspondante est

$$J_y = \frac{1/\delta t}{L_x} = \frac{F_x}{2\pi\hbar}, \quad (68)$$

soit une conductivité

$$\sigma_{yx} = \frac{J_y}{F_x} = \frac{1}{h}. \quad (69)$$

Cette conductivité est bien quantifiée en unité de $1/h$ avec un nombre quantique $\mathcal{C} = 1$, correspondant au fait qu'il n'y a qu'un seul canal de bord montant.

3-5 Guides d'onde et systèmes passifs

Une belle illustration de l'existence d'états de bords dans un modèle de type Haldane a été fournie par RECHTSMAN, ZEUNER et al. (2013a). Il s'agit d'expériences menées avec une série de guides d'onde parallèles comme sur la figure 29. Ces guides d'onde sont gravés par laser dans de la silice d'indice $n_0 = 1.45$ et ils correspondent à une légère augmentation de l'indice local $\Delta n(\mathbf{r}) \sim 10^{-3}$. Dans le plan transverse, ces guides d'onde sont arrangés de manière à former un réseau hexagonal. La propagation de la lumière le long de l'axe des guides se fait avec un nombre d'onde k_0 et elle joue le rôle du temps qui figurait les problèmes 2D que nous avons traités jusqu'ici. On peut ainsi écrire une équation pour le champ électrique $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ qui est formellement identique à celle d'une particule massive évoluant à deux dimensions :

$$i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{1}{2k_0} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0 \Delta n(\mathbf{r})}{n_0} \mathcal{E} \quad (70)$$

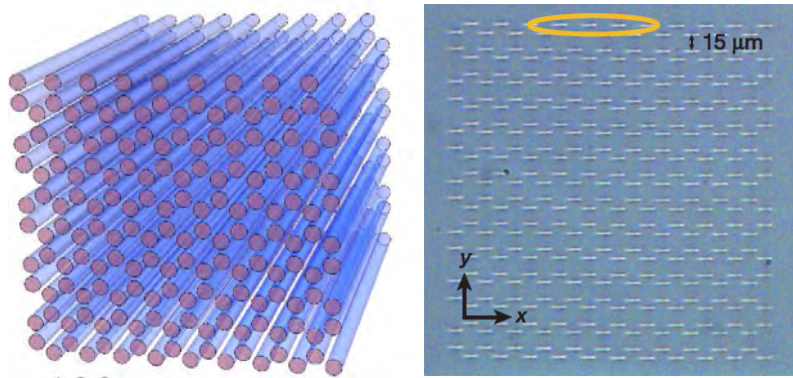


FIGURE 29. Série de guides d'onde parallèles formant un réseau hexagonal de côté $a = 15 \mu\text{m}$. La longueur de propagation est de 10 cm. Chaque guide est elliptique avec pour grand et petit axes 11 et $4 \mu\text{m}$. Gauche : figure extraite de RECHTSMAN, ZEUNER et al. (2013b). Droite : figure extraite de RECHTSMAN, ZEUNER et al. (2013a).

Plus précisément, chaque guide d'onde ne contient qu'un mode transverse et la lumière peut passer d'un guide au guide voisin du fait du couplage par onde évanescente. On réalise ainsi une situation très proche du régime de Hubbard et du modèle des liaisons fortes pour décrire le mouvement d'une particule sur un réseau. En particulier, pour un réseau infini, la dynamique du champ électrique $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ dans le plan xy au fur et à mesure de la progression le long de l'axe z est bien décrite par des bandes d'énergie $E(q_x, q_y)$.

Pour passer du réseau hexagonal simple au modèle de Haldane, la modulation temporelle étudiée plus haut est implémentée ici en donnant une forme hélicoïdale aux guides d'onde, avec environ 20 tours d'hélice sur la distance de propagation totale de 10 cm (figure 30a). Comme expliqué ci dessus, cela confère aux bandes d'énergie $E(q_x, q_y)$ un caractère topologique et donne naissance à des états de bord pour un échantillon de taille finie. En l'occurrence, RECHTSMAN, ZEUNER et al. (2013a) ont travaillé avec des échantillons de section carrée, comportant de une à quelques centaines de guides d'onde. Pour sonder ces états de bord, ils ont injecté de la lumière sur un côté du carré et mesuré la distribution de la lumière en sortie,

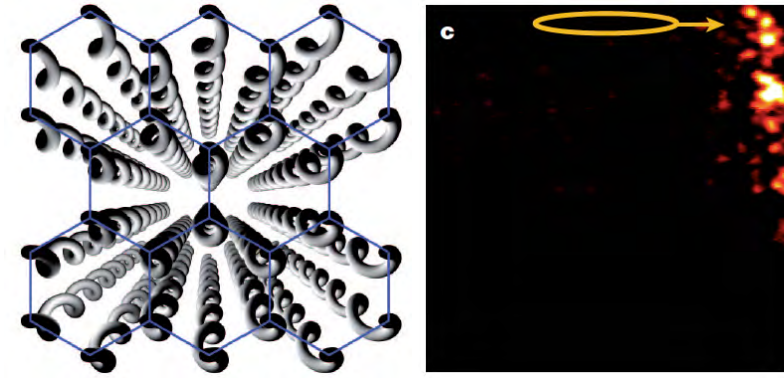


FIGURE 30. Gauche : guides d'onde torsadés, permettant d'implémenter la modulation temporelle étudiée dans ce chapitre et conduisant à des bandes topologiques. Droite : états de bord observés pour un rayon de l'hélice égal à $8 \mu\text{m}$. Figures extraites de RECHTSMAN, ZEUNER et al. (2013a).

après propagation sur 10 cm.

Un exemple typique est représenté sur la figure 30b, avec deux caractéristiques importantes :

- La lumière n'a pratiquement pas diffusé vers le cœur de l'échantillon.
- La lumière a progressé le long du bord de manière chirale, en longeant la frontière de l'échantillon dans le sens des aiguilles d'une montre.
- Cet état de bord chirale est robuste : même au passage sur le coin supérieur droit de l'échantillon, il n'y a pratiquement pas eu de réflexion; la lumière a ensuite longé vers le bas le bord droit de l'échantillon.

Dans leur article, RECHTSMAN, ZEUNER et al. (2013a) ont procédé à des tests complémentaires pour vérifier la pertinence du modèle, comme l'influence du rayon de courbure de l'hélice, ou encore le rôle de défauts volontairement ajoutés sur le bord de l'échantillon.

3-6 Effet Hall de spin

Nous nous sommes concentrés dans ce chapitre sur la méthode la plus simple pour créer des bandes d'énergie de topologie non triviale : nous avons considéré une particule sans spin et nous nous sommes placés dans une situation où l'invariance par renversement du temps était brisée. Cela permet d'obtenir une courbure de Berry telle que $\Omega_{-q} \neq -\Omega_q$ et donc une intégrale non nulle pour cette courbure de Berry (*i.e.* un nombre de Chern $C \neq 0$).

À partir de 2005, on a commencé à réaliser qu'il était également possible d'obtenir une topologie non triviale pour des problèmes invariants par renversement du temps, pourvu que l'on tire parti d'un degré de liberté de spin \uparrow et \downarrow (ou de pseudo-spin) (KANE & MELE 2005a; KANE & MELE 2005b; BERNEVIG, HUGHES et al. 2006). L'idée de base est de réaliser une situation où les nombres de Chern C_\uparrow et C_\downarrow prennent des valeurs égales en valeur absolue, mais de signes opposés. Il y a toujours $|C|$ canaux de bord par spin; ces canaux circulent dans des sens opposés, ce qui est bien compatible avec l'invariance par renversement du temps. La première mise en évidence expérimentale de l'effet Hall de spin a été décrite par KÖNIG, WIEDMANN et al. (2007).

Nous n'allons pas reprendre ici l'algèbre correspondant à la description de cet effet Hall de spin, qui est voisine de ce que nous avons rencontré jusqu'ici – avec la complication due à l'existence de deux états internes pour les particules au lieu d'un. Signalons simplement que la robustesse des états de bords est assurée s'il ne peut pas y avoir de diffusion depuis le canal \uparrow vers le canal \downarrow , et réciproquement. Pour des fermions, l'invariance par renversement du temps⁸ garantit une protection topologique en empêchant l'hybridation entre ces deux canaux et donc la rétro-diffusion sur d'éventuels défauts. Pour des bosons, en particulier pour des photons, cette protection n'existe pas de manière aussi forte, même si des versions plus faibles ont été analysées (WU & HU 2015).

Une expérience récente menée au JQI de l'Université du Maryland a permis de mettre en évidence ces canaux de bords pour des photons individuels (BARIK, KARASAHIN et al. 2018). On part de nouveau d'un matériau formé de cellules hexagonales, en l'occurrence un cristal photonique

8. valable en l'absence d'impuretés magnétiques

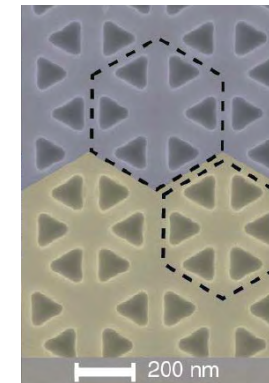


FIGURE 31. Figure extraite de BARIK, KARASAHIN et al. (2018).

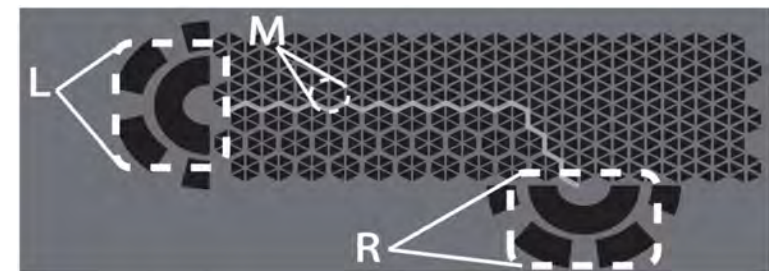


FIGURE 32. Figure extraite de BARIK, KARASAHIN et al. (2018)

(membrane de GaAs de $0.16 \mu\text{m}$ d'épaisseur) dans lequel on découpe des ensembles de 6 triangles équilatéraux comme sur la figure 31. On réalise deux phases topologiquement distinctes en

- poussant les trous triangulaires vers l'extérieur de chaque hexagone, comme sur la partie supérieure de la figure 31;
- poussant les trous triangulaires vers l'intérieur de chaque hexagone, comme sur la partie inférieure de la figure 31;

A la frontière entre deux zones correspondant à ces phases (figure 32), on s'attend à voir apparaître des courants de bord. Plus précisément, on s'intéresse dans cette expérience à la propagation d'un champ électromagnétique, avec le champ magnétique perpendiculaire au plan des hexa-

gonés et le champ électrique dans le plan. Le pseudo-spin correspond à la polarisation de ce champ électrique : les deux canaux de bord σ^- ou σ^+ .

La lumière est injectée dans ce matériau grâce à des boîtes quantiques placées au sein même de la membrane de GaAs. On éclaire une zone précise de l'échantillon de façon à n'exciter que les boîtes de cette zone (50 boîtes/ μm^2). Un champ magnétique important (9 Tesla) lève la dégénérescence entre les polarisations σ_{\pm} , ce qui permet de déterminer la polarisation d'un photon détecté en mesurant sa longueur d'onde. Ainsi sur la figure 32, on éclaire la zone M et on détecte les photons dans les zones L (left) et R (right). On vérifie qu'il y a bien une relation bi-univoque entre la polarisation du photon et le sens du canal de bord (figure 33). On vérifie également la robustesse (relative) de ces canaux de bord. Les photons ont réussi à "prendre le virage" de la frontière entre les deux régions. Une analyse de la distribution temporelle des photons (la fonction de corrélation d'intensité $g^2(\tau)$) montre le caractère "particulaire" de cette propagation par canaux de bord, le dégroupement des photons émis par une boîte quantique restant vérifié au niveau des détecteurs.

Ce type de dispositif, protégé topologiquement, permet d'envisager des applications nouvelles en terme d'intrication quantique entre émetteurs, ainsi que la construction de portes logiques quantiques intégrées [voir par exemple LODAHL, MAHMOODIAN et al. (2017) et AMO (2018)]

Appendice : les couplages aux second voisins

Modèle de Haldane

Avec la convention de la figure 2, les couplages du site A de la cellule r_j à ses six seconds voisins s'écrivent pour le modèle de Haldane :

$$-J' \sum_{\alpha=1}^3 \left(e^{+i\phi_0} |A, r_j\rangle \langle A, r_j - \rho_\alpha| + e^{-i\phi_0} |A, r_j\rangle \langle A, r_j + \rho_\alpha| \right) + \text{H.c.} \quad (71)$$

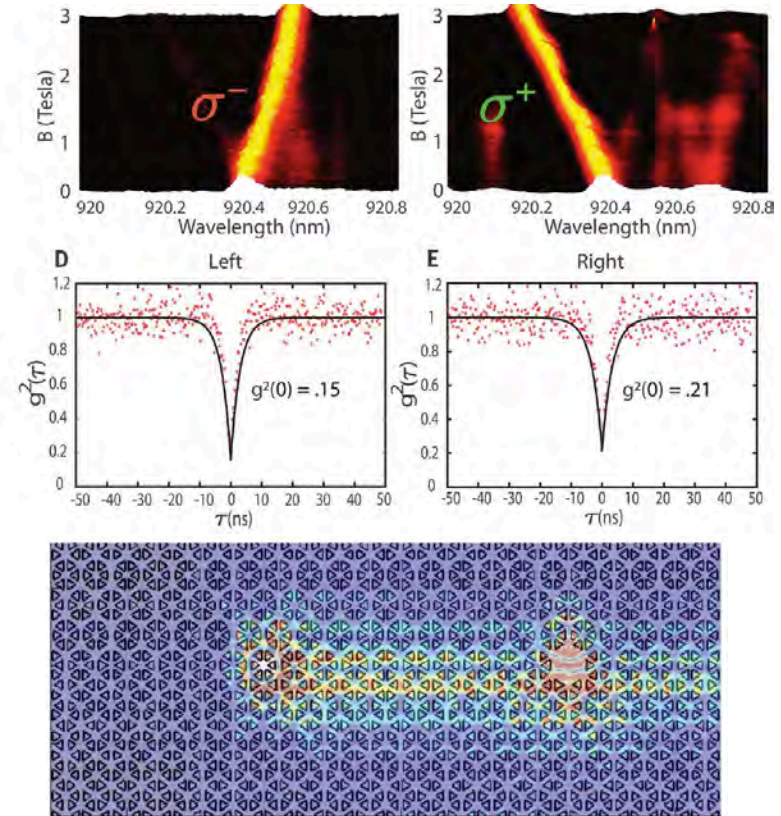


FIGURE 33. Figure extraite de BARIK, KARSAHIN et al. (2018)

et pour le site B de cette même cellule :

$$-J' \sum_{\alpha=1}^3 (e^{-i\phi_0} |B, \mathbf{r}_j\rangle \langle B, \mathbf{r}_j - \boldsymbol{\rho}_\alpha| + e^{+i\phi_0} |B, \mathbf{r}_j\rangle \langle B, \mathbf{r}_j + \boldsymbol{\rho}_\alpha|) + \text{H.c.} \quad (72)$$

Partant de la fonction de Bloch

$$|\psi_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_{\mathbf{j}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} (\alpha_{\mathbf{q}} |A, \mathbf{r}_j\rangle + \beta_{\mathbf{q}} |B, \mathbf{r}_j\rangle), \quad (73)$$

écrivons l'équation aux valeurs propres pour l'hamiltonien

$$\hat{H}|\psi_{\mathbf{q}}\rangle = E_{\mathbf{q}} |\psi_{\mathbf{q}}\rangle \Rightarrow \langle A, \mathbf{r}_j | \hat{H} |\psi_{\mathbf{q}}\rangle = E_{\mathbf{q}} \langle A, \mathbf{r}_j | \psi_{\mathbf{q}}\rangle \quad (74)$$

ce qui donne pour le couplage aux seconds voisins

$$-J' \alpha_{\mathbf{q}} \sum_{\alpha=1}^3 (e^{+i\phi_0} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_j - \boldsymbol{\rho}_\alpha)} + e^{-i\phi_0} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_j + \boldsymbol{\rho}_\alpha)}) = E_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} \quad (75)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\mathbf{q},AA} &= -J' \sum_{\alpha=1}^3 (e^{+i(\phi_0 - \mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}_\alpha)} + e^{i(-\phi_0 + \mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}_\alpha)}) \\ &= -2J' \sum_{\alpha=1}^3 \cos(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}_\alpha - \phi_0). \end{aligned} \quad (76)$$

Le passage de $\hat{H}_{\mathbf{q},AA}$ à $\hat{H}_{\mathbf{q},BB}$ se fait en changeant ϕ_0 en $-\phi_0$ [cf. (71-72)].

Le mur de briques

En parallèle avec ce que nous avons fait pour le réseau hexagonal, introduisons les deux vecteurs $\boldsymbol{\rho}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$:

$$\boldsymbol{\rho}_1 = -\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho}_2 = \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (77)$$

La convention de la figure 2 que nous avons adoptée pour déterminer la phase associée à un lien tunnel donne donc pour le choix représenté en

figure 7 :

$$-J' \sum_{\alpha=1}^2 (e^{+i\phi_0} |A, \mathbf{r}_j\rangle \langle A, \mathbf{r}_j - \boldsymbol{\rho}_\alpha| + e^{-i\phi_0} |A, \mathbf{r}_j\rangle \langle A, \mathbf{r}_j + \boldsymbol{\rho}_\alpha|) + \text{H.c.} \quad (78)$$

L'algèbre est ensuite identique à celle qui précède pour le modèle de Haldane [cf. eq. (76)], la seule différence étant que la somme sur α va de 1 à 2 (au lieu de 1 à 3).

Références

- AMO, Alberto (2018), « When quantum optics meets topology », in *Science* **359**, p. 638–639.
- AVAN, P, C COHEN-TANNOUDI, J DUPONT-ROC & C FABRE (1976), « Effect of high-frequency irradiation on dynamical properties of weakly bound electrons », in *Journal de Physique* **37**, 993–1009.
- BARIK, Sabyasachi, Aziz KARASAHIN, Christopher FLOWER, Tao CAI, Hirokazu MIYAKE, Wade DEGOTTARDI, Mohammad HAFEZI & Edo WAKS (2018), « A topological quantum optics interface », in *Science* **359**, p. 666–668.
- BERNEVIG, B Andrei & Taylor L HUGHES (2013), *Topological insulators and topological superconductors*, Princeton University Press.
- BERNEVIG, B Andrei, Taylor L HUGHES & Shou-Cheng ZHANG (2006), « Quantum spin Hall effect and topological phase transition in HgTe quantum wells », in *Science* **314**, p. 1757–1761.
- BUKOV, Marin, Luca D'ALESSIO & Anatoli POLKOVNIKOV (2015), « Universal high-frequency behavior of periodically driven systems : from dynamical stabilization to Floquet engineering », in *Advances in Physics* **64**, p. 139–226.
- COOPER, NR, J DALIBARD & IB SPIELMAN (2018), « Topological Bands for Ultracold Atoms », in *arXiv :1803.00249*.
- ECKARDT, André (2017), « Colloquium : Atomic quantum gases in periodically driven optical lattices », in *Rev. Mod. Phys.* **89** (1), p. 011004.
- GOLDMAN, N. & J. DALIBARD (2014), « Periodically Driven Quantum Systems : Effective Hamiltonians and Engineered Gauge Fields », in *Phys. Rev. X* **4** (3), p. 031027.

- GU, Zhenghao, H. A. FERTIG, Daniel P. AROVAS & Assa AUERBACH (2011), « Floquet Spectrum and Transport through an Irradiated Graphene Ribbon », in *Phys. Rev. Lett.* **107** (21), p. 216601.
- HALDANE, F. D. M. (1988), « Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels : Condensed-Matter Realization of the "Parity Anomaly" », in *Phys. Rev. Lett.* **61**, p. 2015–2018.
- HATSUGAI, Yasuhiro (1993), « Chern number and edge states in the integer quantum Hall effect », in *Phys. Rev. Lett.* **71**, p. 3697–3700.
- HOFSTADTER, D. R. (1976), « Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields », in *Phys. Rev. B* **14**, p. 2239–2249.
- JOTZU, G., M. MESSER, R. DESBUQUOIS, M. LEBRAT, T. UEHLINGER, D. GREIF & T. ESSLINGER (2014), « Experimental realization of the topological Haldane model with ultracold fermions », in *Nature* **515**, p. 237–240.
- KANE, Charles L & Eugene J MELE (2005a), « Quantum spin Hall effect in graphene », in *Physical review letters* **95**, p. 226801.
- (2005b), « Z₂ topological order and the quantum spin Hall effect », in *Physical review letters* **95**, p. 146802.
- KÖNIG, Markus, Steffen WIEDMANN, Christoph BRÜNE, Andreas ROTH, Hartmut BUHMANN, Laurens W MOLENKAMP, Xiao-Liang QI & Shou-Cheng ZHANG (2007), « Quantum spin Hall insulator state in HgTe quantum wells », in *Science* **318**, p. 766–770.
- LODAHL, Peter, Sahand MAHMOODIAN, Søren STOBBE, Arno RAUSCHENBEUTEL, Philipp SCHNEEWEISS, Jürgen VOLZ, Hannes PICHLER & Peter ZOLLER (2017), « Chiral quantum optics », in *Nature* **541**, p. 473.
- OKA, Takashi & Hideo AOKI (2009), « Photovoltaic Hall effect in graphene », in *Phys. Rev. B* **79** (8), p. 081406.
- RAHAV, Saar, Ido GILARY & Shmuel FISHMAN (2003), « Effective Hamiltonians for periodically driven systems », in *Phys. Rev. A* **68** (1), p. 013820.
- RECHTSMAN, Mikael C, Julia M ZEUNER, Yonatan PLOTNIK, Yaakov LUMER, Daniel PODOLSKY, Felix DREISOW, Stefan NOLTE, Mordechai SEGEV & Alexander SZAMEIT (2013a), « Photonic Floquet topological insulators », in *Nature* **496**, p. 196.
- RECHTSMAN, Mikael C, Julia M ZEUNER, Andreas TÜNNERMANN, Stefan NOLTE, Mordechai SEGEV & Alexander SZAMEIT (2013b), « Strain-induced pseudomagnetic field and photonic Landau levels in dielectric structures », in *Nature Photonics* **7**, p. 153.
- TARRUELL, Leticia, Daniel GREIF, Thomas UEHLINGER, Gregor JOTZU & Tilman ESSLINGER (2012), « Creating, moving and merging Dirac points with a Fermi gas in a tunable honeycomb lattice », in *Nature* **483**, p. 302.
- WU, Long-Hua & Xiao HU (2015), « Scheme for achieving a topological photonic crystal by using dielectric material », in *Physical review letters* **114**, p. 223901.