

Chapitre 4

L'effet Efimov pour un système léger-lourd-lourd

Sommaire

1	L'effet Efimov pour $a = \infty$	3
1-1	Le collapse de Thomas	3
1-2	Le cas des bosons : onde s	4
1-3	Le paramètre à trois corps R_0	6
1-4	Le cas des fermions polarisés : onde p	6
2	Autour de la résonance : $a < 0$ ou $a > 0$	6
2-1	Le cas $a < 0$ et les états borroméens	6
2-2	Le cas $a > 0$ et la compétition dimère-trimère	9
2-3	Courbes complètes	11
3	Expériences sur le cas léger-lourd-lourd	13
3-1	Expériences sur les mélanges de gaz atomiques	13
3-2	Résonance de Fano-Feshbach pour ${}^6\text{Li}$ - ${}^{133}\text{Cs}$	13
3-3	La formation de trimères du côté $a < 0$	14
3-4	Discussions et prolongements	16
4	Les trimères universels de Kartavtsev-Malykh	18
4-1	Retour sur le cas des fermions	18
4-2	Approche Born-Oppenheimer	18
4-3	Résultats de Kartavtsev-Malykh et prolongements	19

Dans ce chapitre, nous continuons notre étude du problème à trois corps, composé de deux particules lourdes de masse M et d'une particule légère de masse m (figure 1). Comme au chapitre précédent, nous supposons que les particules lourdes n'interagissent pas entre elles, en dehors d'un potentiel de cœur dur qui les empêche de s'approcher à une distance inférieure à R_0 . L'interaction mM est décrite par les conditions aux limites de Bethe-Peierls pour une longueur de diffusion a , qui peut être positive, négative, ou encore infinie pour le cas résonant.

Au chapitre précédent, nous avons supposé que les particules lourdes étaient au repos en $\pm R/2$ et nous avons déterminé les états d'énergie possibles de la particule légère, en particulier son état fondamental d'énergie $E(R) \leq 0$. Nous allons maintenant nous intéresser à la dynamique des particules lourdes en nous plaçant dans le cadre de l'approximation de Born-Oppenheimer (EFIMOV 1973; FONSECA, REDISH et al. 1979); cela signifie que nous considérons que ces deux particules lourdes évoluent dans le potentiel effectif :

$$V(R) = E(R) \quad \text{si } R > R_0 \quad (1)$$

$$V(R) = +\infty \quad \text{si } R < R_0 \quad (2)$$

où le cœur dur en R_0 (avec $R_0 \ll |a|$) empêche la "chute sur le centre" qui peut se produire pour un potentiel en $1/R^2$ (cf. chapitres 1 et 2). Nous allons voir que les deux particules lourdes peuvent ainsi se lier l'une à l'autre grâce à l'échange de la particule légère : le fait que cette particule légère puisse sauter d'un atome lourd à l'autre crée en effet une interaction

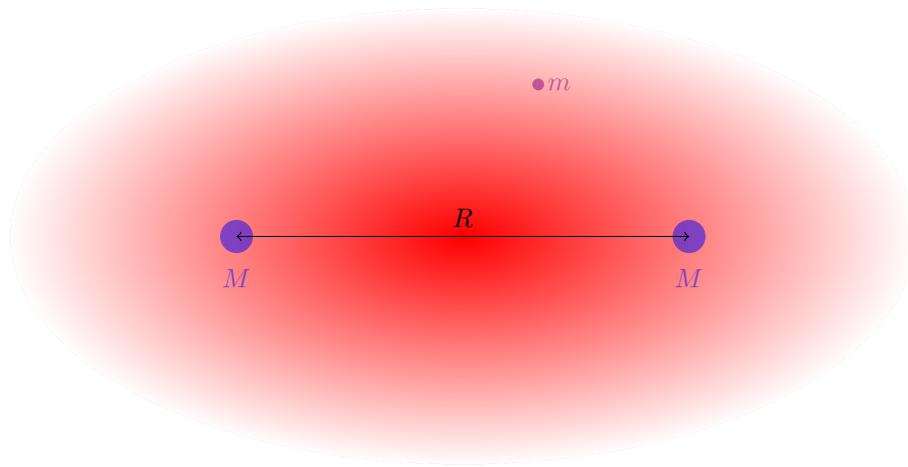


FIGURE 1. Le problème mMM étudié dans ce chapitre. L'interaction MM est supposée entièrement due à la présence de la particule légère, en dehors d'une interaction de cœur dur qui empêche les deux particules lourdes de s'approcher de moins de R_0 l'une de l'autre.

effective attractive entre ces deux atomes lourds.

L'approximation de Born-Oppenheimer repose sur l'inégalité $m \ll M$, qui entraîne que l'échelle de temps associée au mouvement de la particule légère est beaucoup plus courte que celle associée aux atomes lourds. Cela assure que la particule légère suit adiabatiquement le mouvement des particules lourdes. Par rapport à l'approximation adiabatique standard, on fait dans l'approximation de Born-Oppenheimer l'hypothèse supplémentaire que l'on peut négliger le rôle des potentiels géométriques scalaire et vectoriel (ce dernier étant notamment à l'origine de la phase de Berry). Nous reviendrons sur le rôle de ces potentiels au chapitre 6, quand nous analyserons l'origine du "paramètre à trois corps", qui généralise la notion de cœur dur quand les trois particules sont identiques.

Rappelons les principaux résultats du chapitre précédent concernant l'énergie $E(R)$ de l'état fondamental de la particule légère, selon la valeur de la longueur de diffusion a (figure 2) :

- Dans le cas $a = \pm\infty$, l'énergie $E(R)$ varie comme $1/R^2$, avec un coeffi-

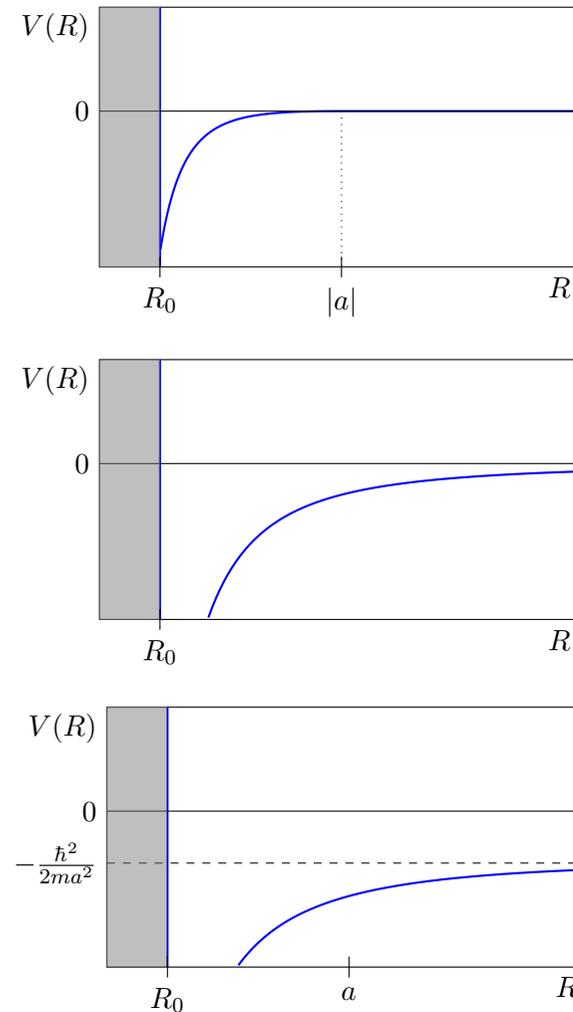


FIGURE 2. Les trois cas possibles pour le potentiel effectif $V(R)$ généré entre les deux particules lourdes par échange de la particule légère [Eqs. (1-2)]. Haut : cas $a < 0$, pour lequel $V(R)$ est strictement nul pour $R > |a|$ [Eq. (4)]. Milieu : cas résonant $a = \pm\infty$ conduisant à $V(R) \propto 1/R^2$ en dehors du cœur dur [Eq. (3)]. Bas : cas $a > 0$, pour lequel le dimère lié mM d'énergie $-\hbar^2/2ma^2$ existe [Eq. (5)].

cient qui fait intervenir la racine de l'équation transcendante $x = e^{-x}$. Cette racine est notée $\Omega \approx 0.567\,143$ et on a trouvé

$$a = \pm\infty : \quad E(R) = -\frac{\hbar^2 \Omega^2}{2mR^2}. \quad (3)$$

— Pour une longueur de diffusion $a < 0$, l'énergie $E(R)$ est strictement nulle pour $R \geq |a|$. En dessous de cette valeur, elle est donnée par

$$a < 0, \quad R < |a| : \quad E(R) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{|a|} - \frac{W(e^{R/|a|})}{R} \right]^2 \quad (4)$$

où $W(x)$ est la fonction de Lambert, solution de $We^W = x$. Rappelons qu'il n'y a pas de dimère lié mM dans ce cas pour une interaction mM décrite par le pseudo-potentiel (*i.e.* par les conditions aux limites de Bethe–Peierls).

— Pour une longueur de diffusion $a > 0$, nous avons montré pour l'orbitale liante que

$$a > 0 : \quad E(R) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{a} + \frac{W(e^{-R/a})}{R} \right]^2. \quad (5)$$

En particulier, pour $R \rightarrow +\infty$, on retrouve l'énergie du dimère lié mM :

$$E_{\text{dim}} = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}. \quad (6)$$

Rappelons que la condition $m \ll M$ entraîne que la masse réduite du système mM est voisine de m .

Pour analyser le mouvement des deux corps de masse M , nous nous plaçons comme toujours dans le référentiel de leur centre de masse et nous nous intéressons à la dynamique de la particule relative de coordonnées \mathbf{R} , de masse réduite $M/2$, et soumise au potentiel $V(R)$ défini en (1-2). Ce potentiel étant invariant par rotation, on cherche une base propre commune à l'hamiltonien, à \hat{L}^2 et à \hat{L}_z . La partie angulaire est donnée par une harmonique sphérique et l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde radiale réduite $u(R) = R\psi(R)$ s'écrit, pour une longueur de diffusion a donnée :

$$-\frac{\hbar^2}{M} u''(R) + \left(V(R) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{MR^2} \right) u(R) = \mathcal{E} u(R). \quad (7)$$

Nous allons nous intéresser aux possibles états liés, d'énergie $\mathcal{E} < 0$. Rappelons que si les particules lourdes sont des bosons (resp. fermions) polarisés, seuls les canaux de ℓ pair (resp. impair) sont autorisés. Si ces particules sont discernables, par leur état de spin par exemple, il n'y a pas de contrainte sur ℓ .

En pratique, puisque nous nous intéressons principalement à l'état fondamental du système (à M/m et a fixés), nous allons nous concentrer sur les états $\ell = 0$ pour des bosons et $\ell = 1$ pour des fermions polarisés, les autres canaux de moment cinétique correspondant à une énergie minimale notablement plus élevée.

1 L'effet Efimov pour $a = \infty$

1-1 Le collapse de Thomas

L'article de THOMAS (1935) constitue une des toutes premières applications de la physique quantique au problème à trois corps, en l'occurrence dans un contexte de physique nucléaire. Thomas s'intéressait à la stabilité du noyau de tritium (1 proton, 2 neutrons) et il a montré que l'énergie de l'état fondamental de ce système ne pouvait pas s'écrire uniquement en fonction de la longueur de diffusion $p-n$, mais qu'il devait faire intervenir nécessairement la portée finie des forces nucléaires.

Nous n'allons pas reproduire ici l'intégralité du raisonnement de Thomas, qui est relativement complexe. Nous allons nous limiter au cas de deux particules lourdes de masse M , supposées être des bosons sans spin et n'interagissant pas l'une avec l'autre. La particule légère de masse m interagit de manière résonante avec chaque particule lourde.

Comme nous avons déjà eu l'occasion de le mentionner, une manière simple de décrire l'interaction quasi-résonante entre deux particules (ici mM) consiste à prendre un puits de potentiel carré $V(r)$ de profondeur V_0 et de portée b , et à se placer au voisinage du seuil d'apparition du premier état lié :

$$k_0 b \approx \frac{\pi}{2} \quad \text{avec} \quad k_0 = \sqrt{2mV_0}/\hbar. \quad (8)$$

La limite d'un potentiel de portée nulle et de longueur de diffusion fixée

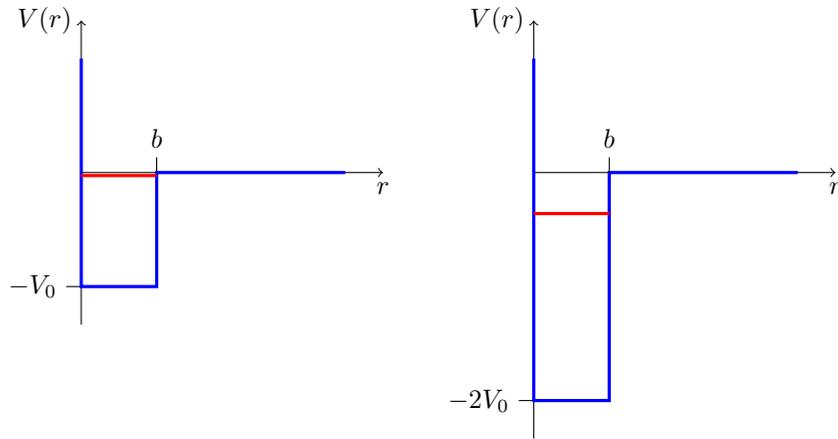


FIGURE 3. Gauche : puits de potentiel carré au seuil d'apparition du premier état lié, avec $k_0 b \approx \pi/2$, $k_0 = \sqrt{2mV_0}/\hbar$. Droite : puits de potentiel de même portée b , mais de profondeur double. Ce puits admet un état lié d'énergie $\propto V_0$.

(conditions aux limites de Bethe–Peierls) est alors obtenue en prenant $b \rightarrow 0$ et $(V_0, k_0) \rightarrow \infty$ tout en maintenant

$$a = b - \frac{\tan(k_0 b)}{k_0} \quad (9)$$

constante (cours 2020-21, chap. III, §3.1). Rappelons de nouveau qu'on prend ici $m \ll M$, ce qui entraîne que la masse réduite de la paire est à peu près égale à m (ce n'était pas le cas pour le problème considéré par Thomas).

Si on met les deux particules lourdes au même point de l'espace (c'est possible puisqu'on a supposé qu'elles n'interagissent pas, on oublie donc le cœur dur en R_0 pour un instant), le potentiel ressenti par la particule légère est doublé : $V(r) \rightarrow 2V(r)$, c'est-à-dire un potentiel de portée b et de profondeur $2V_0$. Ce potentiel admet alors un état lié d'énergie proportionnelle à $-V_0$ (en fait $\approx -0.36 V_0$, figure 3), de sorte que son énergie va tendre vers $-\infty$ quand on va prendre la limite d'un potentiel de portée nulle : c'est le résultat obtenu par Thomas.

Il faut donc prendre en compte la portée du potentiel (ou un autre "paramètre à trois corps") pour que le problème ne soit pas singulier. Dans ce qui va suivre, c'est le rayon R_0 du potentiel de cœur dur entre les deux particules lourdes qui va jouer ce rôle.

1-2 Le cas des bosons : onde s

Nous revenons maintenant au problème à trois corps décrit dans le cadre de l'approximation de Born–Oppenheimer, en nous concentrant ici sur le cas le plus "spectaculaire", celui où la longueur de diffusion a est infinie, c'est-à-dire où l'état lié du dimère mM est sur le point d'apparaître.

Dans ce cas, le potentiel $V(R)$ à prendre en compte a été donné en (3). Il est attractif et varie comme $1/R^2$ à toutes les échelles de longueur. Pour un canal de moment cinétique non nul, il faut lui ajouter le potentiel centrifuge $V_{\text{centrif}}(R) = \hbar^2 \ell(\ell+1)/MR^2$ [cf. (7)]. En reprenant les notations des chapitres 1 et 2 avec ici $g = -\hbar^2 \Omega^2/2m$, l'ensemble s'écrit

$$R > R_0 : \quad V_{\text{tot}}(R) = V(R) + V_{\text{centrif}}(R) = \alpha \frac{\hbar^2}{MR^2} \quad (10)$$

avec

$$\alpha = -\frac{M}{2m} \Omega^2 + \ell(\ell+1) \quad (11)$$

Comme ce potentiel varie comme $1/R^2$ pour des distances arbitrairement grandes, nous pouvons donc reprendre telles quelles les conclusions du chapitre 2 :

— Il peut exister un état d'énergie négative dans le canal de moment cinétique ℓ si $\alpha < -1/4$, c'est-à-dire :

$$\text{état lié si :} \quad \frac{M}{2m} \Omega^2 > \ell(\ell+1) + \frac{1}{4} = \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2. \quad (12)$$

Intéressons-nous au canal $\ell = 0$ qui conduit aux états d'énergie la plus basse possible. En utilisant $\Omega^2 \approx 0.322$, cette condition se réécrit $M/m > 1.6$, condition qui est évidemment remplie ici puisqu'on a supposé $M \gg m$ pour utiliser l'approche de Born–Oppenheimer. Il

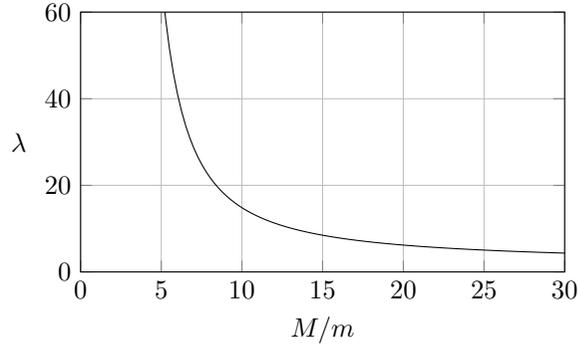


FIGURE 4. Variation du paramètre d'échelle avec le rapport de masse M/m , calculé dans le cadre de l'approximation de Born–Oppenheimer. Pour une comparaison avec le résultat exact, voir par exemple PETROV (2012).

y a donc toujours au moins un état lié à trois corps dans le cas de particules lourdes bosoniques.

- La régularisation de $V(R)$ à courte distance est assurée par l'hypothèse d'un potentiel de cœur dur au rayon R_0 entre les deux particules lourdes. Pour fixer les idées, nous pouvons prendre R_0 de l'ordre du rayon de van der Waals R_{vdW} . En réalité, les deux atomes lourds peuvent s'approcher l'un de l'autre à des distances plus courtes que cela, mais la physique en jeu dépasse alors celle de l'universalité que nous cherchons à décrire ici en modélisant les interactions mM par le pseudo-potentiel.
- Une fois cette régularisation effectuée, on peut trouver l'état fondamental du mouvement des deux particules lourdes. Au dessus de cet état fondamental, on va trouver une infinité d'états liés dont les énergies formeront en bonne approximation (d'autant meilleure que l'on s'approche de la limite de dissociation) une suite géométrique de raison $1/\lambda^2$ avec pour $\ell = 0$:

$$\lambda = e^{\pi/|s_0|} \quad \text{avec} \quad s_0 = \left(\alpha + \frac{1}{4}\right)^{1/2} \in i\mathbb{R} \quad (13)$$

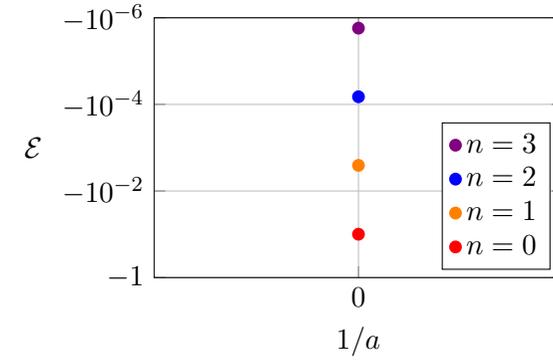


FIGURE 5. Cas résonnant : positions des énergies \mathcal{E} des premiers états liés du trimère mMM pour $a = \infty$ et $M/m = 20$, correspondant à peu près au rapport $M(^{133}\text{Cs})/m(^6\text{Li}) = 22.2$. Les énergies (exprimées en unité de \hbar^2/MR_0^2) forment en très bonne approximation une progression géométrique de raison $e^{-2\pi/|s_0|} \approx 1/38$ ($|s_0| \approx 1.7$).

ou encore

$$\lambda = e^{\pi/|s_0|} \quad \text{avec} \quad |s_0| = \left(\frac{M}{2m}\Omega^2 - \frac{1}{4}\right)^{1/2} \quad (14)$$

La variation du paramètre d'échelle λ avec M/m est tracé en figure 4.

On arrive ainsi à la conclusion trouvée initialement par Efimov : alors que le potentiel à deux corps n'admet pas d'états liés ($a = \infty$), on peut produire une infinité d'états liés à trois corps, ces états étant reliés les uns aux autres par une invariance d'échelle. Nous avons tracé sur la figure 5 la position des quatre premiers états liés dans le cas $M/m = 20$, $\ell = 0$, correspondant à peu près à la situation rencontrée expérimentalement pour un mélange de ^6Li et ^{133}Cs . On vérifie bien la loi d'échelle $\mathcal{E}_n/\mathcal{E}_{n+1} \approx e^{2\pi/|s_0|} \approx 38$ avec $|s_0| \approx 1.7$ pour ce rapport M/m .

1-3 Le paramètre à trois corps R_0

Nous avons introduit ci-dessus la longueur R_0 , que nous avons assimilée à un cœur dur empêchant les deux particules lourdes de s'approcher arbitrairement près l'une de l'autre. L'introduction d'un tel paramètre est nécessaire dans le problème à trois corps pour assurer la régularité de la solution.

Ce paramètre additionnel par rapport à la longueur de diffusion à deux corps est appelé de manière générique *paramètre à trois corps*. Nous conserverons ici cette dénomination, même si dans le cas qui nous intéresse, il s'agit plutôt d'une propriété du système binaire MM . La détermination précise de ce paramètre pour le cas mMM a été menée par WANG, WANG et al. (2012), en utilisant des potentiels de Lennard-Jones pour modéliser les interactions mM et MM . Ces auteurs ont dégagé une universalité pour ce paramètre en le reliant au rayon de van der Waals R_{vdW} pour l'interaction MM [voir également l'article de ZHAO, HAN et al. (2019), qui propose un résultat simple dans le cas d'une résonance pour a_{MM}]. Nous reviendrons sur l'origine physique de cette universalité au chapitre 6 en considérant le cas de trois particules identiques.

1-4 Le cas des fermions polarisés : onde p

Pour des fermions polarisés, le nombre quantique ℓ associé au moment cinétique ne peut prendre que des valeurs impaires. L'état d'énergie le plus bas est obtenu pour le canal $\ell = 1$ et la condition (12) s'écrit alors $\frac{M}{2m}\Omega^2 > \frac{9}{4}$ ou encore :

$$\boxed{\text{Fermions polarisés en onde } p : \quad \frac{M}{m} > 14.0} \quad (15)$$

Il s'agit d'une contrainte forte qui réduit considérablement le choix des espèces atomiques utilisables. Un triplet candidat possible est $^{171}\text{Yb}-^{171}\text{Yb}-^6\text{Li}$ conduisant à $M/m = 28.5$ (KHRAMOV, HANSEN et al. 2014). Notons que nous avons obtenu le résultat (15) de manière analytique en utilisant l'approximation de Born–Oppenheimer. Un traitement numérique exact, du type de celui que nous aborderons au chapitre suivant, conduit à une limite très voisine : $M/m = 13.606\,966$ (KARTAVTSEV & MALYKH 2007).

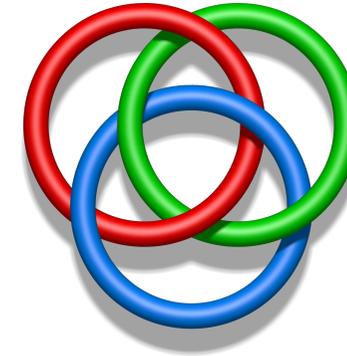


FIGURE 6. Anneaux borroméens : ces trois anneaux ne peuvent être détachés par une déformation continue, mais l'ouverture d'un des cercles libère également les deux autres (Figure : Wikipedia).

Les autres canaux de moment cinétique $\ell \geq 2$ ne sont pas utilisables en pratique, à moins de modifier artificiellement la masse d'une espèce atomique en la confinant dans un réseau optique par exemple.

2 Autour de la résonance : $a < 0$ ou $a > 0$

2-1 Le cas $a < 0$ et les états borroméens

Passons maintenant au cas où la longueur de diffusion caractérisant l'interaction mM est négative. Dans le modèle du pseudo-potentiel, cela signifie que bien qu'attractive, cette interaction est trop faible pour lier le dimère mM . Nous allons voir maintenant que si $|a|$ est assez grande, c'est-à-dire si $1/a$ n'est pas trop loin de 0, on peut malgré tout observer des états liés du trimère, c'est-à-dire des états à trois corps d'énergie \mathcal{E} négative.

Cette situation est souvent qualifiée de borroméenne à l'image des anneaux représentés sur la figure 6. Les trois particules mises ensemble peuvent former un édifice stable, mais une paire quelconque de deux particules ne peut en revanche former un état lié.

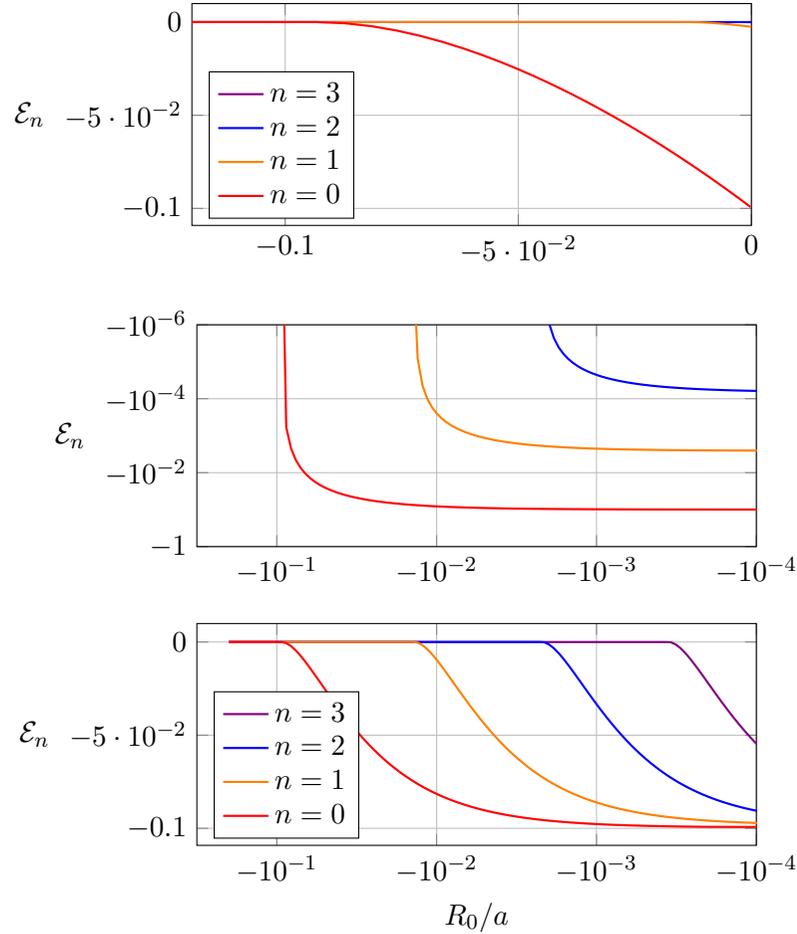


FIGURE 7. Cas borroméen ($a < 0$) : variation des énergies $\mathcal{E}_n(a)$ des premiers états liés du trimère mMM en fonction de la longueur de diffusion a , supposée ici négative, pour $M/m = 20$. Les mêmes données sont tracées en coordonnées lin-lin (haut), log-log (milieu) et semi-log (bas). Les énergies sont exprimées en unité de \hbar^2/MR_0^2 . Pour améliorer la lisibilité du tracé du bas, l'énergie du niveau n a été multipliée par λ^{2n} avec $\lambda = e^{\pi/|s_0|} \approx 6.2$.

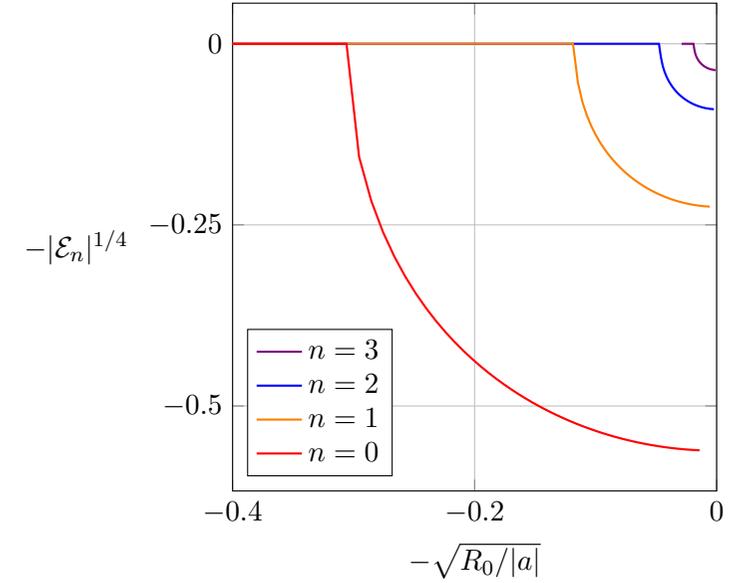


FIGURE 8. Cas borroméen ($a < 0$) : variation de $|\mathcal{E}_n|^{1/4}$ avec $\sqrt{R_0/|a|}$ pour $M/m = 20$. L'énergie est exprimée en unité de \hbar^2/MR_0^2 .

Pour simplifier l'analyse, nous allons nous concentrer dans ce qui suit sur le cas des bosons, en nous limitant au canal de moment cinétique $\ell = 0$. Nous avons rappelé en introduction le potentiel $V(R)$ dans ce cas [cf. (4)] et ce potentiel est tracé sur la figure 2. Nous détaillons sur la figure 7 le résultat d'une recherche numérique des états propres u_n et des énergies propres associées \mathcal{E}_n de l'équation de Schrödinger radiale (7) pour un moment cinétique $\ell = 0$ et $M/m = 20$.

Plus précisément, nous traçons en coordonnées linéaires ou logarithmiques la variation avec $1/a$ de l'énergie du niveau fondamental $n = 0$ et des trois premiers états excités $n = 1, 2, 3$. Une conclusion immédiate visible sur cette figure est que le trimère mMM n'est pas toujours stable. Pour $R_0/a < -0.093$, c'est-à-dire $|a| < 10.8 R_0$, il n'y a aucun état lié mMM . Le premier état lié $n = 0$ apparaît pour $a \approx -10.8 R_0$ et il reste l'unique solution jusqu'à $a \approx -72.5 R_0$, valeur pour laquelle un premier

état lié excité ($n = 1$) apparaît également. Un deuxième état excité apparaît pour $a \approx -455 R_0$ et ainsi de suite. Plus on se rapproche de la limite résonante $|a| = +\infty$, plus le nombre d'états liés est important. Plutôt que l'énergie, on peut préférer tracer le module du nombre d'onde $\kappa = \sqrt{M|\mathcal{E}|}/\hbar$ en fonction de R_0/a , ce qui est fait en figure 8 (on trace en fait $\sqrt{\kappa} \propto |\mathcal{E}|^{1/4}$ en fonction de $\sqrt{1/a}$ pour "écraser" un peu plus les courbes et mieux distinguer plusieurs branches).

Un examen attentif de la figure 7 fait apparaître une symétrie d'échelle (homothétie) pour différentes quantités. On retrouve par exemple la loi d'échelle $\mathcal{E}_{n-1}/\mathcal{E}_n \approx 38$ quand $|a| \rightarrow \infty$, déjà obtenue au paragraphe précédent pour cette valeur de M/m . Mais on constate également une homothétie sur les valeurs critiques $a_-^{(n)}$ auxquelles les différents états liés apparaissent, avec $a_-^{(n)}/a_-^{(n-1)} \approx 6.2$. Nous allons chercher à rendre compte de ces symétries d'échelle et montrer le résultat général :

$$\boxed{\mathcal{E}_{n-1}(a) = \lambda^2 \mathcal{E}_n(\lambda a) \quad \text{avec} \quad \lambda = e^{\pi/|s_0|}} \quad (16)$$

Les deux homothéties mentionnées ci-dessus s'en déduiront en prenant les cas particuliers $|a| = +\infty$ pour la première, et $\mathcal{E}_n = 0$ pour la seconde (rappelons que pour le rapport de masse M/m choisi pour la figure 7, on a $|s_0| \approx 1.72$ et $\lambda \approx 6.2$).

Nous allons maintenant expliquer l'origine de ces deux homothéties. Les arguments utilisés sont voisins de ceux développés au chapitre 2, mais ils nécessitent un léger aménagement du fait que le potentiel n'est pas proportionnel à $1/R^2$ jusqu'à $R = \infty$.

Pour progresser, nous remarquons tout d'abord que dans le domaine $x = R/|a| \ll 1$, la fonction de Lambert vaut $W(e^{R/|a|}) \approx W(1) = \Omega$ et l'expression¹ de $E(R; a)$ se simplifie en

$$R_0 < R \ll |a| : \quad E(R; a) \approx -\Omega^2 \frac{\hbar^2}{2mR^2}. \quad (17)$$

Dans ce domaine, on retrouve donc à peu près le même potentiel que pour $|a| = \infty$. Les états mMM fortement liés dans ce potentiel, c'est-à-dire ceux tels que $|\mathcal{E}| \gg \hbar^2/ma^2$, ne seront pas beaucoup affectés par la coupure

1. Nous écrivons explicitement la dépendance des quantités E, V, u_n vis-à-vis de la longueur de diffusion a car cette dépendance va jouer un rôle important dans ce qui suit.

du potentiel pour $R > a$. En revanche, on s'attend à ce que tous les états faiblement liés du cas résonnant, d'énergie $|\mathcal{E}| \lesssim \hbar^2/ma^2$, disparaissent du fait de cette coupure. On comprend donc qu'il reste un nombre fini d'états liés mMM (au lieu de l'infinité d'états trouvés pour $|a| = +\infty$).

Rappelons également que la fonction d'onde radiale réduite $u_n(R)$ de tous les états s'annule pour $R = R_0 \ll |a|$. D'après ce que nous avons vu au chapitre 2, nous savons que pour un état suffisamment excité (en pratique $n = 2$ ou 3 suffit), cette fonction d'onde s'annule également au point $R \approx \lambda R_0$ avec $\lambda = e^{\pi/|s_0|}$, pourvu que ce point reste lui-même bien inférieur à $|a|$.

Nous pouvons alors effectuer le raisonnement suivant. Partons du $n^{\text{ième}}$ état propre (avec $n > 0$) pour la longueur de diffusion a , dont la fonction d'onde radiale réduite u_n vérifie l'équation de Schrödinger pour $\ell = 0$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{M} \frac{d^2}{dR^2} + V(R; a) \right] u_n(R; a) = \mathcal{E}_n(a) u_n(R; a). \quad (18)$$

Considérons le problème aux valeurs propres pour la longueur de diffusion a/λ et intéressons-nous à la fonction

$$\begin{aligned} R > R_0 & : & v(R) &= u_n(\lambda R; a), \\ R < R_0 & : & v(R) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Comme nous l'avons signalé, cette fonction s'annule en R_0 puisque u_n possède un nœud (approximativement) en λR_0 : elle est donc éligible comme fonction d'onde pour notre problème; plus précisément, si $u_n(R; a)$ possède n nœuds dans l'intervalle $]R_0, +\infty[$, la fonction $v(R)$ possèdera $n - 1$ nœuds sur ce même intervalle. Par ailleurs, en utilisant la propriété du potentiel $V(R; a)$ déduite de l'expression (4) faisant intervenir la fonction de Lambert $W(e^{R/|a|})$:

$$R > R_0 : \quad V(\lambda R; a) = \frac{1}{\lambda^2} V\left(R; \frac{a}{\lambda}\right), \quad (20)$$

on constate que $v(R)$ vérifie l'équation aux valeurs propres :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{M} \frac{d^2}{dR^2} + V\left(R; \frac{a}{\lambda}\right) \right] v(R) = \lambda^2 \mathcal{E}_n(a) v(R). \quad (21)$$

La fonction $v(R)$ est donc solution de l'équation de Schrödinger radiale pour la longueur de diffusion a/λ avec la valeur propre $\lambda^2 \mathcal{E}_n(a)$ et elle satisfait la condition aux limites $v(R_0) = 0$. Comme cette fonction possède $n - 1$ nœuds sur l'intervalle $]R_0, +\infty[$, on en déduit qu'elle est proportionnelle à $u_{n-1}(R; a/\lambda)$ et que l'on a la relation entre les énergies propres :

$$\mathcal{E}_{n-1}(a/\lambda) = \lambda^2 \mathcal{E}_n(a), \quad (22)$$

ce qui constitue le résultat annoncé en (16).

Pour vérifier cette loi d'échelle, nous avons repris les énergies $\mathcal{E}_n(a)$ déjà montrées en figure 7 et nous les avons retracées en figure 9 sous la forme $[x = \lambda^n R_0/a, y = \lambda^{2n} \mathcal{E}_n(a)]$. On constate que cette loi est remarquablement bien vérifiée : les tracés pour $n = 2$ et $n = 3$ sont quasiment indiscernables, et le tracé $n = 1$ en est très proche. Seul l'état fondamental $n = 0$ présente une différence notable mais comme nous l'avons signalé dans ce qui précède, on ne s'attendait pas à ce que la loi d'échelle fonctionne de manière précise pour lui.

Une conséquence immédiate de cette loi d'échelle est obtenue pour les points d'apparition $a_-^{(n)}$ des trimères, pour lesquels \mathcal{E}_n s'annule. On trouve la loi d'échelle

$$a_-^{(n)} = \lambda a_-^{(n-1)}, \quad (23)$$

une relation que l'on avait pressentie sur la figure 7. Nous verrons que cette relation est testable expérimentalement et constitue une signature forte de l'universalité de la physique d'Efimov.

2-2 Le cas $a > 0$ et la compétition dimère-trimère

Nous passons maintenant à la branche $a > 0$ pour laquelle nous savons qu'il existe un état lié du dimère mM , d'énergie $E_{\text{dim}} = -\hbar^2/2ma^2$. Pour qu'un état lié à trois corps soit stable, il ne suffit donc pas que son énergie soit négative, contrairement à ce que nous avons utilisé pour $a < 0$. Il faut que son énergie soit inférieure à E_{dim} , sinon il est préférable sur le plan énergétique de casser le trimère pour former un dimère mM d'un côté, et une particule M au repos loin du dimère.

Pour analyser le problème de la formation d'un état lié à trois corps mMM dans le cadre de l'approximation de Born-Oppenheimer, nous pou-

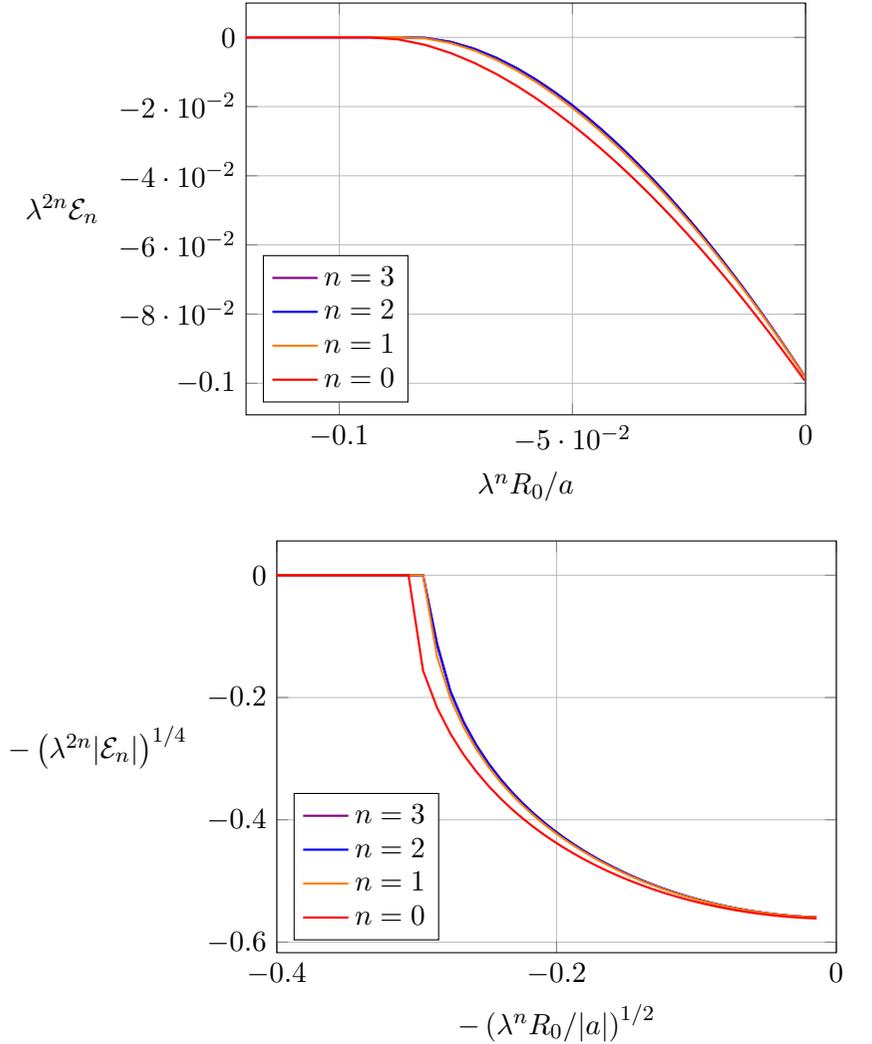


FIGURE 9. Vérification de la loi d'échelle (16) pour des longueurs de diffusion $a < 0$. Le calcul est fait pour $M/m = 20$ et les énergies sont exprimées en unité de \hbar^2/MR_0^2 .

vons suivre une démarche très voisine de celle utilisée pour $a < 0$. Pour commencer, nous remarquons que le potentiel d'interaction mM donné en (5) peut toujours se mettre sous la forme :

$$R < R_0 : V(R) = +\infty \quad (24)$$

$$R_0 < R : V(R) = -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \mathcal{F}(R/a) \quad (25)$$

avec :

$$\mathcal{F}(x) = [W(e^{-x}) + x]^2. \quad (26)$$

Quand $R \rightarrow +\infty$, le potentiel $V(R)$ (tracé sur la figure 2) tend vers E_{dim} . On retrouve donc bien que le trimère lié, pour être l'état fondamental du système à trois corps, doit avoir une énergie inférieure à E_{dim} . Par ailleurs, la différence $V(R) - E_{\text{dim}}$ varie comme $e^{-R/a}$ quand R augmente, de sorte que le potentiel susceptible de lier le dimère est de portée finie, de l'ordre de a : on sait d'emblée qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini d'états liés dans un tel potentiel.

Le résultat de la recherche numérique des états liés mMM dans le cadre de l'approximation de Born–Oppenheimer est montré en figure 10. Il confirme l'existence d'un nombre fini (ou nul) d'états pour toute valeur de $a > 0$. Pour $a = 100 R_0$ par exemple, on trouve quatre états liés ($n = 0, 1, 2, 3$), d'énergie $\mathcal{E}_n < E_{\text{dim}}$. Cela signifie que si on avait préparé un trimère dans un état d'énergie \mathcal{E}_n avec $n > 3$ au point $|a| = +\infty$, puis ramené adiabatiquement a à la valeur $100 R_0$, ce trimère se serait dissocié pour donner un dimère mM et un atome M libre.

Pour interpréter les résultats montrés en figure 10, nous remarquons que la démonstration de la loi d'échelle (16),

$$\mathcal{E}_{n-1}(a) = \lambda^2 \mathcal{E}_n(\lambda a) \quad \text{pour } n \text{ assez grand}, \quad (27)$$

que nous avons faite dans le cas $a < 0$ en §2-1 reste valable dans le cas $a > 0$ puisque la forme générique (24,25) du potentiel est inchangée. En fait, puisque la grandeur pertinente est ici l'écart entre \mathcal{E}_n et l'énergie du dimère, nous réécrivons cette loi sous la forme :

$$\boxed{\mathcal{E}_{n-1}(a) - E_{\text{dim}}(a) = \lambda^2 [\mathcal{E}_n(\lambda a) - E_{\text{dim}}(\lambda a)]} \quad \text{pour } n \text{ assez grand} \quad (28)$$

Cette réécriture est possible car $E_{\text{dim}}(a) \propto 1/a^2$ dans le modèle du pseudo-potential utilisé ici. Le test de cette loi d'échelle est représenté sur la figure

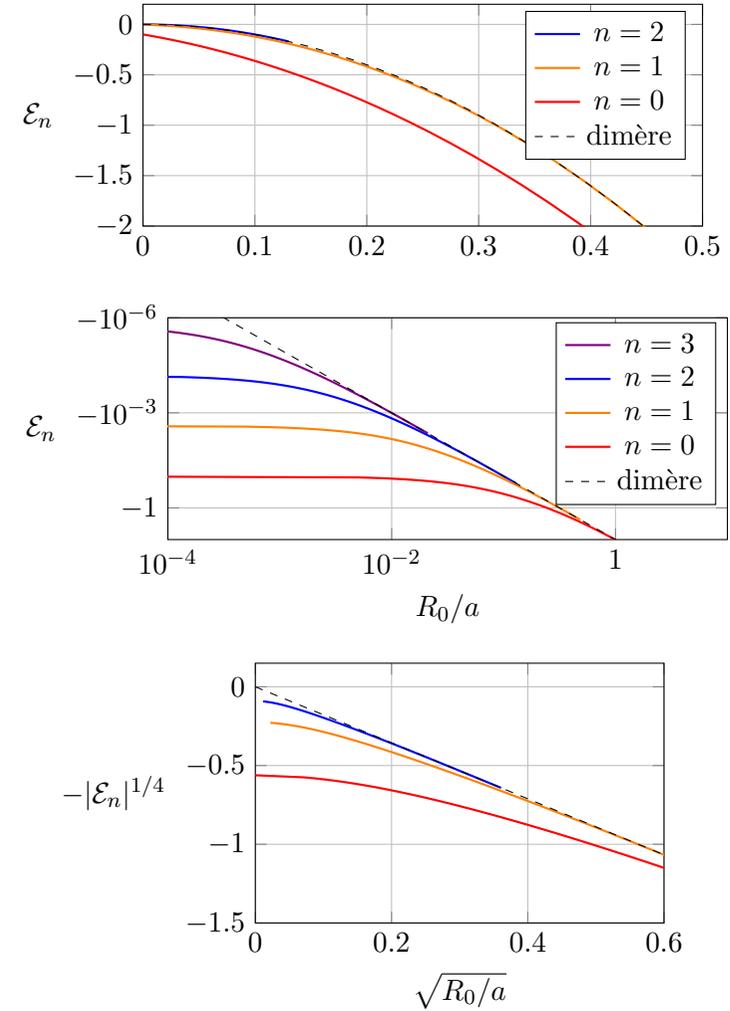


FIGURE 10. Compétition dimère—trimère pour $a > 0$: variation des énergies $\mathcal{E}_n(a)$ des premiers états liés du trimère mMM en fonction de la longueur de diffusion a , supposée ici positive, pour $M/m = 20$. Les mêmes données sont tracées avec différents systèmes de coordonnées. Les énergies sont exprimées en unité de \hbar^2/MR_0^2 . L'énergie du dimère est $-\frac{\hbar^2}{2ma^2} = -\frac{M}{2m} \frac{R_0^2}{a^2} \frac{\hbar^2}{MR_0^2}$.

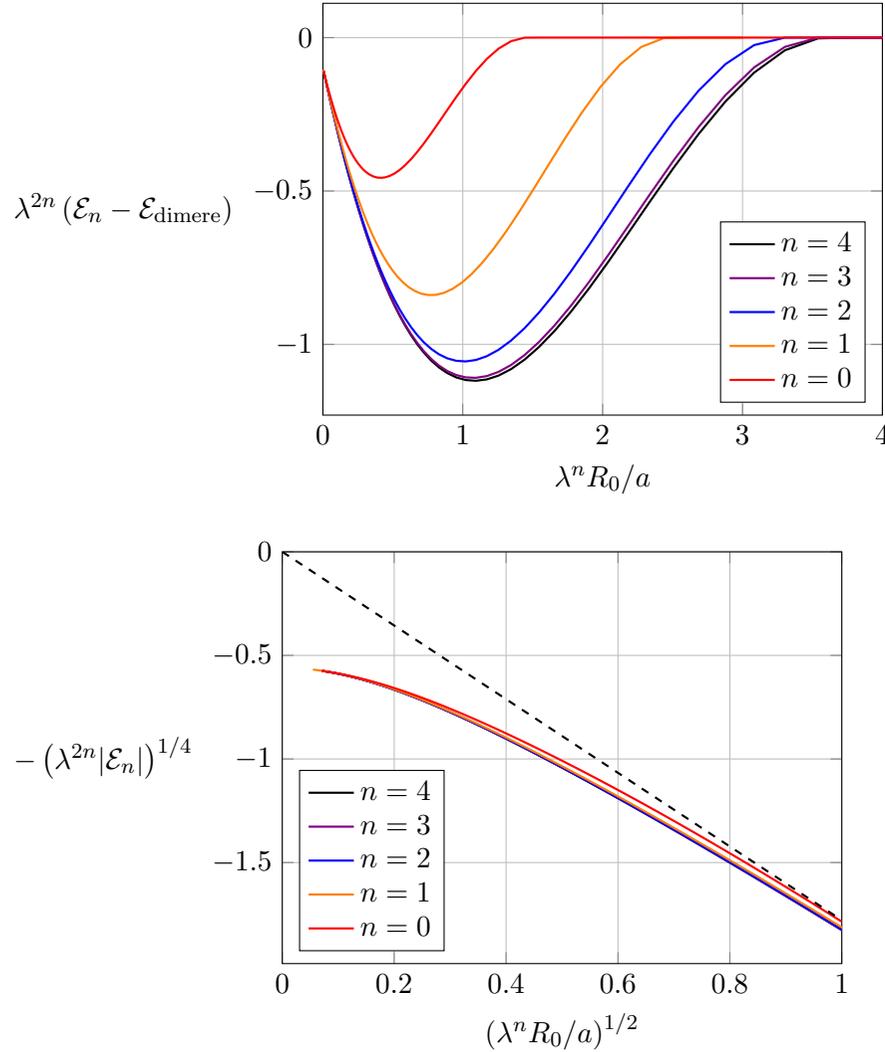


FIGURE 11. Vérification de la loi d'échelle (28) pour des longueurs de diffusion $a > 0$. Le calcul est fait pour $M/m = 20$ et les énergies sont exprimées en unité de \hbar^2/MR_0^2 .

11. On constate que cette loi est effectivement bien vérifiée pour n assez grand, mais qu'elle ne fonctionne pas pour $n = 0, 1, 2$, contrairement au cas $a < 0$ (cf. figure 9). Or, nous verrons en §3 qu'il est difficile d'observer en pratique des états mMM pour un nombre quantique n au delà de 2. Cette loi d'échelle du côté $a > 0$ est donc moins pertinente sur le plan expérimental que son équivalent pour $a < 0$.

Notation. Dans ce qui suit, nous noterons (en suivant la tradition) $a_*^{(n)}$ la valeur (positive) de la longueur de diffusion a pour laquelle l'énergie du $n^{\text{ième}}$ trimère est égale à celle du dimère mM . Tout comme la valeur $a_-^{(n)}$, cette quantité $a_*^{(n)}$ est une fonction de R_0 . On pourrait se demander pourquoi la notation $a_+^{(n)}$ n'a pas été utilisée pour désigner ce point de rencontre entre l'énergie du trimère et celle du dimère. La raison en est que cette notation $a_+^{(n)}$ est plutôt utilisée pour désigner un minimum du taux de pertes à trois corps (également du côté $a > 0$ de la résonance), comme nous le verrons au chapitre 6.

2-3 Courbes complètes

Pour faire la synthèse de ce que nous avons trouvé des deux côtés $a < 0$ et $a > 0$ de la résonance $|a| = +\infty$, nous avons regroupé sur la figure 12 les résultats déjà montrés séparément. Ces courbes sont présentées en échelle logarithmique avec un axe x un peu particulier puisqu'il représente $-\ln(R_0/|a|)$ du côté $a < 0$, et $+\ln(R_0/a)$ du côté $a > 0$. Le gap entre $R_0/a = -10^{-5}$ et $R_0/a = +10^{-5}$, qui devrait être en toute rigueur infini pour de "vraies" coordonnées logarithmiques, a été remplacé par un segment de longueur finie. Ces mêmes données sont tracées en coordonnées linéaires sur la figure 13.

On vérifiera sur la figure 12 le resserrement des niveaux quand le rapport M/m augmente. Ce resserrement est dû à la diminution du facteur d'échelle $\lambda = e^{2\pi/|s_0|}$ avec $|s_0| \approx \Omega\sqrt{M/2m}$ [cf. eq. (14)].

On notera par ailleurs que les points remarquables signalés de part et d'autre de la résonance, $a_-^{(n)}$ et $a_*^{(n)}$, sont chacun proportionnels à R_0 et à λ^{-n} , où λ dépend du rapport M/m . On trouve par exemple (cf. figures 9 et

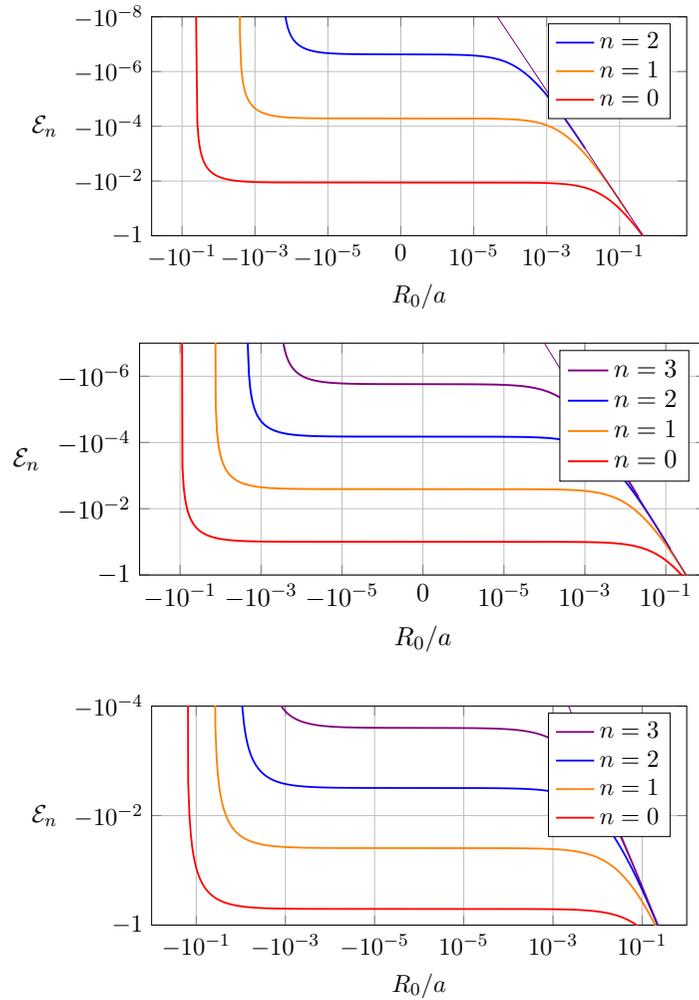


FIGURE 12. Variation des énergies $\mathcal{E}_n(a)$ des premiers états liés du trimère mMM en fonction de la longueur de diffusion a , pour $M/m = 10$ (haut), 20 (milieu) et 40 (bas). Les données sont tracées en coordonnées log-log (voir le texte pour la description précise de l'axe des abscisses). Les énergies sont exprimées en unité de \hbar^2/MR_0^2 .

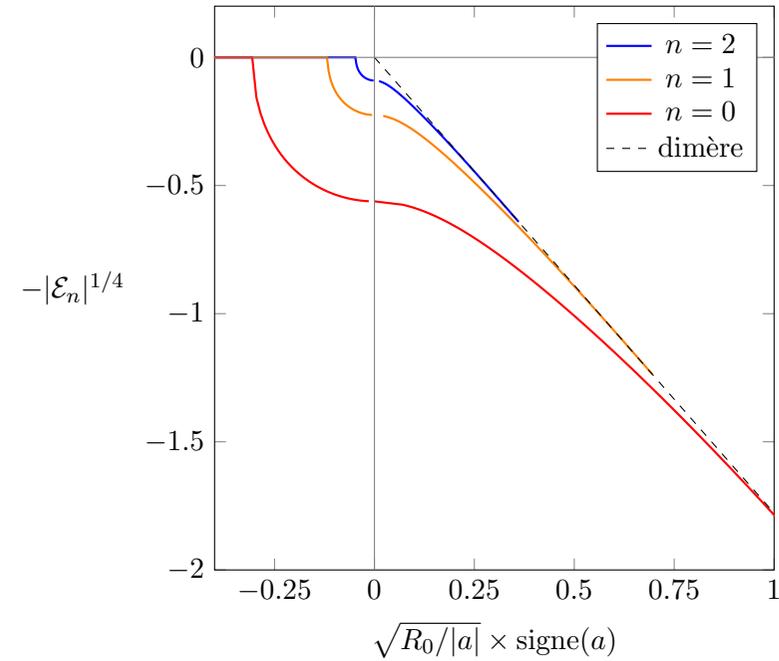


FIGURE 13. Variation de $-|\mathcal{E}_n|^{1/4}$ avec $\sqrt{R_0/|a|}$ pour les premiers états liés du trimère mMM ($M/m = 20$).

11) :

$$\frac{M}{m} = 20 : \quad \lambda^n \frac{R_0}{a_-^{(n)}} \approx -0.0815 \quad \lambda^n \frac{R_0}{a_*^{(n)}} \approx -3.540 \quad (29)$$

dont on déduit :

$$\frac{M}{m} = 20 : \quad \frac{a_-^{(n)}}{a_*^{(n)}} \approx -43 \quad \text{pour } n \geq 3. \quad (30)$$

La vérification du lien entre ces paramètres a_- et a_* correspondant aux deux côtés de la résonance $|a| = +\infty$ constitue un test très important de l'universalité de l'effet Efimov. HELFRICH, HAMMER et al. (2010) ont étudié

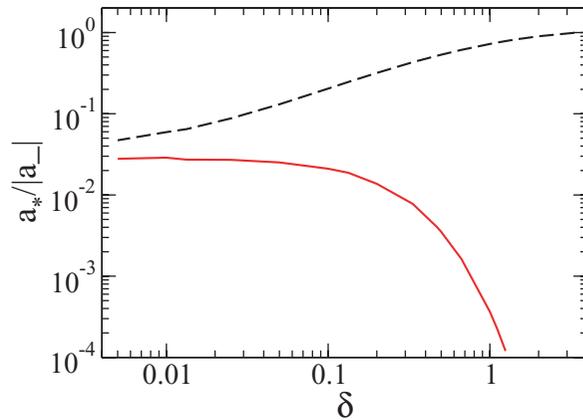


FIGURE 14. Courbe continue rouge : variation du rapport $a_*/|a_-|$ (pour n assez grand) avec le rapport de masse $\delta \equiv m/M$. Pour $m/M = 1/20$, on trouve $a_*/|a_-| \sim 1/40$ [cf. (30)]. Courbe tiretée noire : rapport $a_*^{(n+1)}/|a_-^{(n)}|$. Figure extraite de HELFRICH, HAMMER et al. (2010).

la variation de ce rapport avec M/m et nous avons reporté leur résultat en figure 14.

3 Expériences sur le cas léger-lourd-lourd

3-1 Expériences sur les mélanges de gaz atomiques

Les premières manifestations de la physique d'Efimov dans les gaz d'atomes froids ont été observées par KRAEMER, MARK et al. (2006) sur un gaz de césium. Il s'agissait d'un système homonucléaire, dont la description théorique est plus compliquée que celle du système mMM considéré jusqu'ici. Nous repoussons donc la description des résultats de KRAEMER, MARK et al. (2006) au chapitre 6 et nous allons nous concentrer ici sur des expériences plus récentes, menées à Heidelberg (PIRES, ULMANIS et al. 2014), puis à Chicago (TUNG, JIMÉNEZ-GARCÍA et al. 2014), dans lesquelles trois branches de trimères ont été observées, avec (approximativement) le

rapport d'échelle attendu.

Notons qu'en plus des expériences de Heidelberg et Chicago que nous allons regarder en détail, d'autres mélanges ont été étudiés à la recherche d'une physique liée à l'universalité découverte par Efimov :

- BARONTINI, WEBER et al. (2009) [voir aussi BARONTINI, WEBER et al. (2010)] ont publié des résultats tendant à prouver la formation de trimères K-K-Rb et K-Rb-Rb liée à une physique "efimovienne" du côté $a < 0$ ($a_- \stackrel{?}{=} -246(14) a_0$). Ils ont étudié pour cela un mélange de ^{41}K et ^{87}Rb (résonance de Fano-Feshbach à 38.4 G). Ils ont également décrit une possible résonance à trois corps du côté $a > 0$ ($a_* \stackrel{?}{=} 667(1) a_0$).
- BLOOM, HU et al. (2013) ont étudié un mélange très voisin (^{40}K et ^{87}Rb), mais ils n'ont observé aucune résonance côté $a < 0$ qui aurait pu être attribué à un effet Efimov [voir aussi HU, BLOOM et al. (2014)]. Du côté $a > 0$, ils ont observé un processus efimovien dans la relaxation mM en collision avec M , correspondant à $a_* = 230(10) a_0$, mais ce pic n'était pas à la position de la résonance annoncée par BARONTINI, WEBER et al. (2009) [voir également les travaux plus récents de WACKER, JØRGENSEN et al. (2016) et KATO, WANG et al. 2017].
- WILLIAMS, HAZLETT et al. (2009) ont observé un pic dans le signal de recombinaison à trois corps dans un gaz de ^6Li avec trois composantes de spin également peuplées. Ce même système a été utilisé par LOMPE, OTTENSTEIN et al. 2010 pour mettre en évidence des trimères d'Efimov formés par photoassociation.
- MAIER, EISELE et al. (2015) ont étudié un mélange ^7Li - ^{87}Rb et ont mis en évidence une résonance attribuable à un effet Efimov.

3-2 Résonance de Fano-Feshbach pour ^6Li - ^{133}Cs

Les expériences de Heidelberg et de Chicago ont été menées avec un mélange d'atomes de césium dans le rôle de la particule lourde ($M = 133$) et de lithium dans le rôle de la particule légère ($m = 6$), soit un rapport de masse $M/m = 22.2$. Ce système présente plusieurs résonances de Feshbach pour le problème à deux corps mM . Les deux groupes se sont placés à un

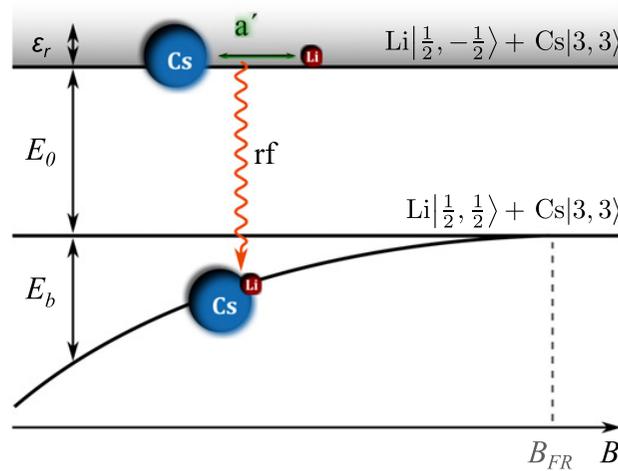


FIGURE 15. Photoassociation de dimères mM dans un mélange de ${}^6\text{Li}$ et ${}^{133}\text{Cs}$. Figure extraite de ULMANIS, HÄFNER et al. (2015).

champ magnétique voisin de 840 Gauss, pour lequel une résonance large se produit.

L'étude détaillée des paramètres de cette résonance est décrite par ULMANIS, HÄFNER et al. (2015). Elle est fondée sur une technique de photoassociation des dimères, comme représenté sur la figure 15. On mesure l'énergie de liaison de dimère en fonction du champ magnétique, cette énergie devant s'annuler à la résonance. Au voisinage de la résonance, du côté $a > 0$, cette énergie est en bonne approximation donnée par $-\hbar^2/2m_r a^2$, où $m_r \approx 5.7$ est la masse réduite du système à deux corps. Le résultat expérimental pour la mesure de cette énergie de liaison est montré en figure 16, avec la prédiction simple $-\hbar^2/2m_r a^2$ ainsi que le résultat d'un modèle plus sophistiqué prenant en compte plusieurs canaux de collision couplés. Le résultat pour la longueur de diffusion mM se met sous la forme "traditionnelle" :

$$a = a_{\text{bg}} \left(1 - \frac{\Delta}{B - B_{\text{res}}} \right) \quad (31)$$

avec $a_{\text{bg}} = -29.4 a_0$, $\Delta = -58.21 \text{ G}$ et $B_{\text{res}} = 842.829 \text{ G}$.

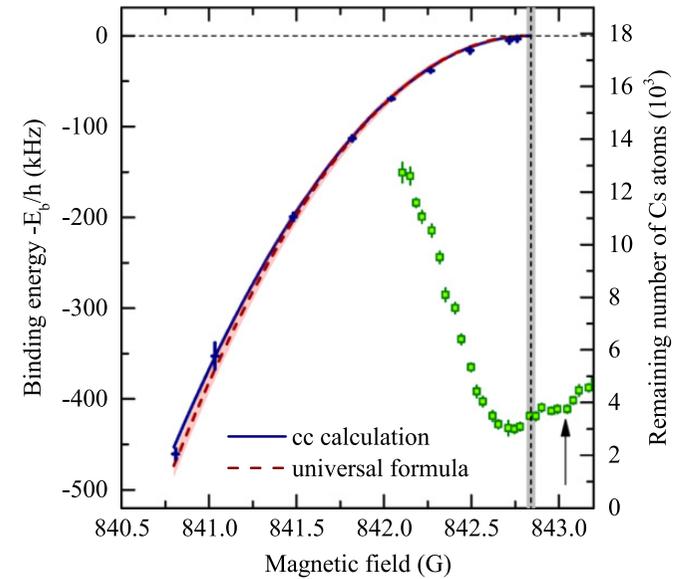


FIGURE 16. Croix bleues : Energie de liaison des dimères mM dans un mélange de ${}^6\text{Li}$ et de ${}^{133}\text{Cs}$. Carrés verts : signal de pertes d'atomes de Cs. La bande verticale grisée donne la position de la résonance et son incertitude ($B_{\text{res}} = 842.829 \text{ G}$). Figure extraite de ULMANIS, HÄFNER et al. (2015).

ULMANIS, HÄFNER et al. (2015) montrent également sur la figure 16 la mesure de la perte d'atomes de Cs au voisinage de la résonance et ils concluent que ces deux mesures sont en relativement bon accord l'une avec l'autre, la mesure basée sur la photoassociation donnant des résultats dix fois plus précis.

3-3 La formation de trimères du côté $a < 0$

Les deux expériences de 2014 menées à Heidelberg et à Chicago se sont concentrées sur le côté $a < 0$ de la résonance (c'est-à-dire $B > B_{\text{res}}$). Le principe en est simple : quand la longueur de diffusion est voisine d'un des seuils $a_{-}^{(n)}$ correspondant à l'apparition d'un trimère (figure 17), on ob-

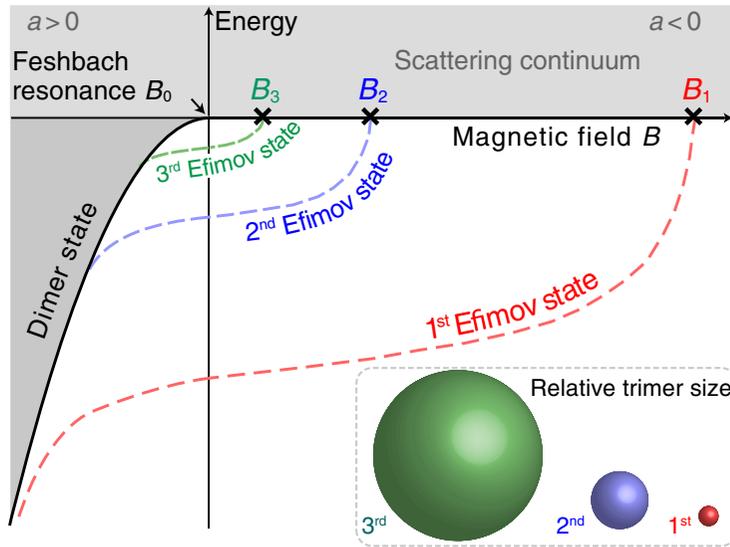


FIGURE 17. Principe de la détection de trimères d'Efimov : on cherche les champs magnétiques B_j pour lesquels la longueur de diffusion est négative et égale à une des valeurs seuils $a_{-}^{(n)}$ pour l'apparition d'un trimère. Noter que l'axe x est orienté dans le sens des champs magnétiques croissants, et donc des valeurs de $1/a$ décroissantes, ce qui est l'opposé de la convention utilisée dans les figures 7, 10 et 12. Figure extraite de TUNG, JIMÉNEZ-GARCÍA et al. (2014).

serve une perte importante d'atomes liée à la recombinaison à trois corps : les trois atomes se couplent temporairement pour former un état d'Efimov, qui se désintègre ensuite pour former un dimère fortement lié et un atome isolé. L'énergie relâchée par la formation du dimère est convertie en énergie cinétique des deux partenaires, qui s'échappent du piège (D'INCAO & ESRY 2005; D'INCAO & ESRY 2006b). Nous détaillerons la description théorique du processus de recombinaison plus tard dans ce cours; dans ce qui suit, nous nous contenterons d'admettre que ce processus est maximal quand a est voisin d'un des $a_{-}^{(n)}$.

Plusieurs signaux typiques de pertes sont représentés sur la figure 18. Cette figure, correspondant à des données du groupe de Chicago, montre

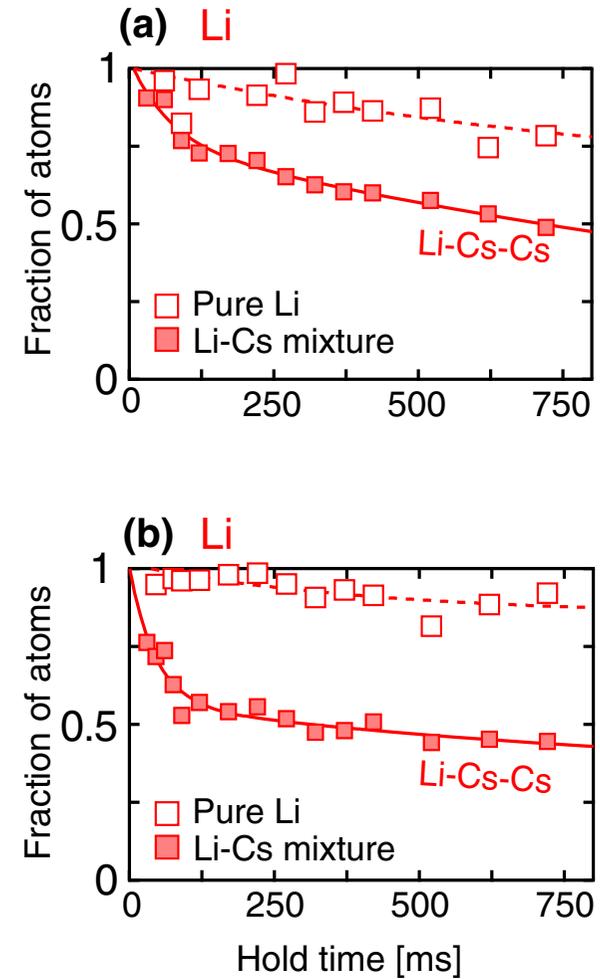


FIGURE 18. Décroissance du nombre d'atomes d'un piège optique contenant initialement 20 000 à 30 000 atomes de ${}^6\text{Li}$ et (pour les symboles pleins) 40 000 à 50 000 atomes de ${}^{133}\text{Cs}$. La température du nuage est de l'ordre de 350 nK. Haut : $B = 848.0\text{ G}$, relativement loin de la résonance pour $a_{\text{Li Cs}}$, Bas : $B = 842.7\text{ G}$, proche de résonance. Figure extraite de TUNG, JIMÉNEZ-GARCÍA et al. (2014).

la décroissance du nombre d'atomes de Lithium pour deux valeurs du champ magnétique : $B = 848.0$ G pour la figure du haut (donc relativement loin de résonance), $B = 842.7$ G pour la figure du bas (donc très proche de la résonance). Ces données ont été obtenues pour un gaz de lithium pur (symboles évidés) et pour un mélange lithium-césium (symboles pleins). Les données pour le lithium pur sont quasiment indépendantes de la valeur de B alors que celles pour le mélange montrent une augmentation spectaculaire du taux de décroissance aux temps courts pour les données acquises près de la résonance.

Notons que les pertes d'atomes de césium sont toujours très significatives dans ce domaine de champ magnétique, indépendamment de la présence d'atomes de lithium. Cela vient du fait que la longueur de diffusion Cs-Cs est négative et de grande valeur absolue : $|a_{Cs-Cs}| > 1000 a_0$.

Quand on trace le nombre d'atomes de lithium restant dans le piège au bout d'un temps τ donné en fonction du champ magnétique (donc de la longueur de diffusion a_{Li-Cs}), on observe trois résonances successives correspondant aux trois valeurs de B_j montrées en figure 17. Nous montrons en figure 19 les données obtenues à Chicago.

L'analyse détaillée des données expérimentales de Heidelberg et de Chicago a été faite par ULMANIS, HÄFNER et al. (2015), grâce à la détermination précise de la position de la résonance de Fano-Feshbach pour a_{Li-Cs} faite à partir de la figure 16. La table 4.1 résume le résultat de cette analyse. La valeur universelle attendue pour le rapport $a_-^{(n)}/a_-^{(n-1)}$ [cf. eq.(23)] est $\lambda = 4.9$ (BRAATEN & HAMMER 2006; D'INCAO & ESRV 2006a). Notons que cette valeur est obtenue grâce à un calcul numérique complet du problème à trois corps (tout en continuant à négliger l'interaction mM). La valeur approchée déduite du traitement Born-Oppenheimer décrit plus haut est de $\lambda_{BO} = 5.6$.

3-4 Discussions et prolongements

Dans le traitement qui précède, nous avons négligé complètement l'interaction entre les deux atomes lourds. Cette approximation est valable pour certains mélanges (Li-Rb par exemple), mais est très discutable pour le mélange Li-Cs étudié à Heidelberg et à Chicago. La longueur de diffu-

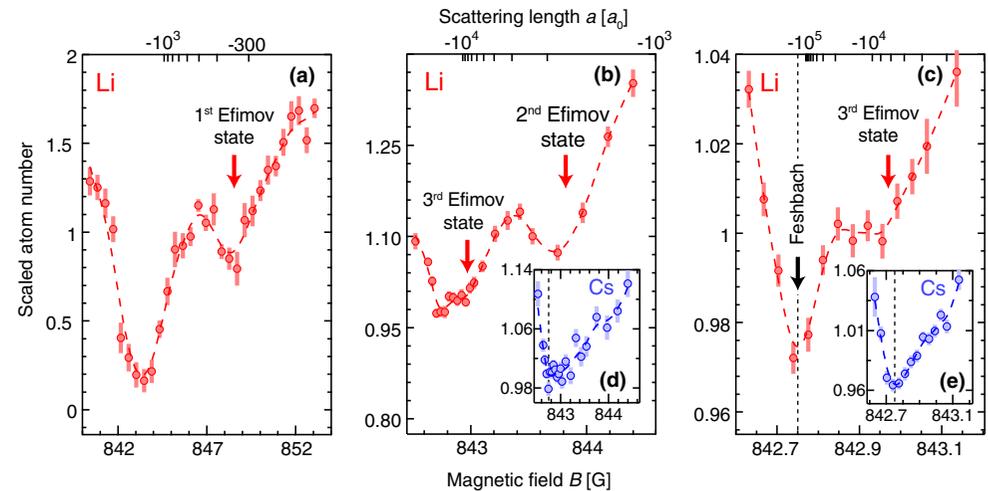


FIGURE 19. Variation du nombre d'atomes de lithium dans le piège optique après un temps d'attente τ , avec $\tau = 225$ ms pour la figure de gauche ($T = 800$ nK) et $\tau = 115$ ms pour les deux autres ($T = 360$ nK pour la figure du milieu et $T = 270$ nK pour la figure de droite). Figure extraite de TUNG, JIMÉNEZ-GARCÍA et al. (2014)

sion Cs-Cs est en effet grande en valeur absolue ($> 1000 a_0$) sur toute la plage de champ magnétique explorée autour de la résonance à 843 G.

Ce problème a été abordé en détail par PETROV & WERNER (2015) [voir aussi WANG, WANG et al. (2012) et MIKKELSEN, JENSEN et al. (2015)] qui ont comparé les deux cas limites $a_{MM} = 0$ et $a_{MM} = \infty$. Le résultat obtenu est remarquable : les paramètres à la base de la loi d'échelle de Efimov, $|s_0|$ et $\lambda = e^{\pi/|s_0|}$, ne varient que très peu entre les deux cas. PETROV & WERNER (2015) trouvent :

$$a_{mM} = \infty, a_{MM} = 0 : \quad |s_0| = 1.98277, \lambda = 4.87661 \quad (32)$$

et [voir aussi YAMASHITA, BELLOTTI et al. (2013)]

$$a_{mM} = \infty, a_{MM} = \infty : \quad |s_0| = 2.00308, \lambda = 4.79887. \quad (33)$$

En revanche, PETROV & WERNER (2015) montrent que le taux de pertes à

i	Magnetic field (G)	$a_-^{(i)} (10^3 a_0)$	$a_-^{(i)}/a_-^{(i-1)}$
0 (ground)	848.90 (6)(3) ^a	-0.311 (3)(1)(1)	—
1	843.85 (1)(3) ^a	-1.71 (2)(5)(4)	5.48 (7)(16)(10)
2	843.03 (5)(3) ^a	-8.54 (2.12)(1.27)(97)	5.00 (1.24)(76)(46)
0	848.55 (12)(3) ^b	-0.329 (6)(2)(1)	—
1	843.82 (4)(3) ^b	-1.76 (7)(5)(4)	5.35 (24)(16)(10)
2	842.97 (3)(3) ^b	-12.2 (2.6)(2.6)(1.9)	6.93 (1.50)(1.48)(97)

TABLE 4.1. Valeurs du champ magnétique mesurées à Heidelberg (a) et à Chicago (b) pour l'apparition des trimères d'Efimov dans un mélange ${}^6\text{Li}-{}^{133}\text{Cs}$, du côté $a < 0$ de la résonance. Les rapports de $a_-^{(i)}/a_-^{(i-1)}$ qu'on en déduit sont proches de la valeur "universelle" attendue. Table tirée de ULMANIS, HÄFNER et al. (2015).

trois corps est considérablement augmenté dans le cas du mélange Li-Cs par le fait que les interactions MM sont quasi-résonnantes (cf. figure 20).

PETROV & WERNER (2015) ont également étudié théoriquement l'effet de la température sur le signal de pertes à trois corps. Un résultat typique, comparant les cas $T = 0$ et $T = 400$ nK est représenté en figure 20. On voit qu'une température non nulle tend à lisser les résonances du signal de pertes, et peut également les déplacer par rapport au cas $T = 0$. Des résultats similaires ont été obtenus indépendamment par MIKKELSEN, JENSEN et al. (2015). Dans l'article de ULMANIS, HÄFNER et al. (2016a), le groupe de Heidelberg présente des données expérimentales prises à plus basse température (120 nK) que dans les expériences initiales de 2014, et qui confirment les tendances que nous venons de décrire.

Après les publications expérimentales des groupes de Heidelberg et de Chicago, l'étude de l'effet Efimov mMM a fait l'objet de nombreuses études théoriques, notamment pour aller au delà de la description des interactions en terme de potentiel de contact. Les effets de portée finie ont été étudiés notamment par ZINNER & NYGAARD (2015), ACHARYA, JI et al. (2016) et WU, HAN et al. (2016).

ULMANIS, HÄFNER et al. (2016b) ont ajouté une mesure intéressante concernant le mélange Li-Cs en reprenant les expériences initiales autour

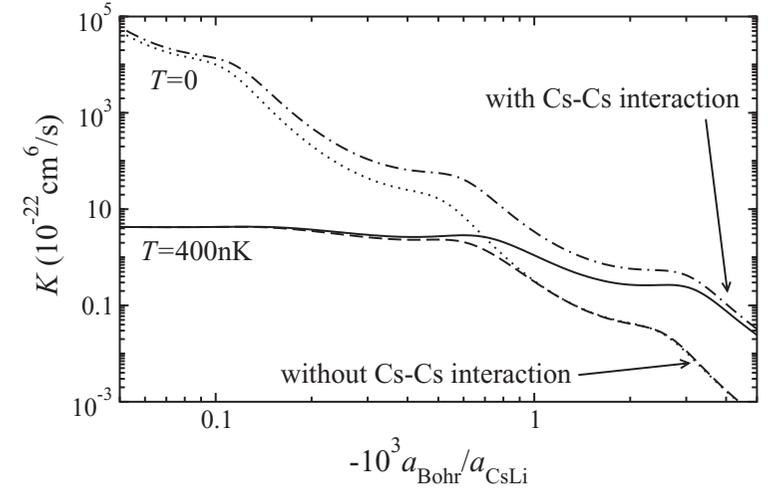


FIGURE 20. Variation du taux de pertes à trois corps dans un mélange Li – Cs, avec et sans interaction Cs – Cs, et pour deux températures différentes $T = 0$ et $T = 400$ nK. Figure extraite de PETROV & WERNER (2015) (voir cet article pour les paramètres du calcul).

d'une autre résonance de Feshbach située autour de $B = 889$ G. Dans ces conditions, la longueur de diffusion $a_{\text{CsCs}} = 190 a_0$ est positive, ce qui signifie que des dimères faiblement liés Cs_2 peuvent jouer un rôle significatif. Cela conduit à la disparition de la résonance pour l'état d'Efimov fondamental et à une modification du facteur d'échelle qui devient $\lambda = 4.0 (3)$ [voir également HÄFNER, ULMANIS et al. (2017)]. Un traitement théorique détaillé de la relaxation à trois corps dans cette configuration, en particulier de la forme de raie susceptible d'apparaître (profil de Fano), a été proposé par GIANNAKEAS & GREENE (2018), puis par GIANNAKEAS & GREENE (2021).

Les deux résonances de Feshbach mentionnées jusqu'ici pour le couple Li-Cs (843 G et 889 G) sont des résonances larges, pour lesquelles la description de l'interaction en terme d'une longueur de diffusion (sans contribution significative de la portée effective) est appropriée. JOHANSEN, DESALVO et al. (2017) ont comparé les résultats obtenus pour la résonance

à 889 G et une autre résonance, beaucoup plus étroite² à 893 G. Une des principales conclusions de cette étude est un déplacement très significatif de la position de la résonance par rapport à la prédiction "naïve". Une analyse théorique complémentaire d'une résonance étroite pour le problème Li-Cs-Cs a été proposée récemment par LI, YUDKIN et al. (2022).

4 Les trimères universels de Kartavtsev-Malykh

4-1 Retour sur le cas des fermions

Nous revenons maintenant au cas où les particules lourdes sont des fermions polarisés, de sorte que leurs états accessibles doivent faire intervenir uniquement les moments cinétiques relatifs impairs.

Comme nous l'avons indiqué en § 1-4, quand on se place à résonance, c'est-à-dire $a = \pm\infty$, deux cas sont possibles pour une interaction mM de portée nulle :

- Pour M/m plus grand que la valeur critique 13.606 966... , une infinité d'états peuvent apparaître pour l'onde $\ell = 1$ dans le potentiel en α/R^2 ($\alpha < 0$) qui émerge du problème. Comme pour les bosons, on doit introduire un paramètre à trois corps, en l'occurrence le cœur dur en R_0 pour notre approche, pour empêcher la "chute vers le centre" et assurer que le système admet un état fondamental d'énergie négative finie. Au dessus de cet état fondamental, on trouve une infinité d'états liés, avec des énergies formant en très bonne approximation une suite géométrique $E_{n+1} = E_n/\lambda^2$.
- Pour M/m plus petit que la valeur critique 13.606 966... , aucun état lié à trois corps n'existe pour $a = \pm\infty$.

Après un travail précurseur de PETROV (2003) portant sur la recombinaison à trois corps dans ces systèmes, KARTAVTSEV & MALYKH (2007) ont repris ce problème en se plaçant du côté $a > 0$ de la résonance et ils ont montré que l'interaction effective résultant de l'échange de la particule légère [décrite par le potentiel (5) dans le cadre de l'approximation

² Les paramètres caractérisant ces résonances sont $s_{\text{res}} = 0.66$ pour $B = 843$ G et 889 G et $s_{\text{res}} = 0.05$ pour $B = 893$ G (cf. cours 2020-21, chap. VI).

de Born–Oppenheimer] pouvait donner naissance à des trimères liés pour un rapport de masse inférieur à la valeur critique 13.6. Ces trimères sont qualifiés d'universels car il n'est pas indispensable d'introduire un paramètre à trois corps pour définir leur énergie (nous reviendrons sur ce point en § 4-3). Celle-ci est fonction uniquement de la longueur de diffusion a caractérisant l'interaction mM (pour rappel, toute interaction MM est négligée ici).

Rappelons par ailleurs que nous faisons ici l'hypothèse d'une interaction mM caractérisée seulement par la valeur de la longueur de diffusion a , qui correspond en pratique au cas d'une résonance de Fano–Feshbach large. Le cas d'une résonance étroite avec $1/a = 0$ est abordé par CASTIN & TIGNONE (2011).

4-2 Approche Born–Oppenheimer

Sur le plan semi-quantitatif, le résultat de KARTAVTSEV & MALYKH (2007) peut être retrouvé par l'approche Born–Oppenheimer que nous avons suivie jusqu'ici. Nous nous plaçons dans le cas d'un rapport de masse inférieur à la valeur critique du cas $a = \infty$ [i.e. $M/m < 14.0$ pour le traitement Born–Oppenheimer, cf. (15)] et nous posons la question suivante : peut-il y avoir un état lié dans le potentiel effectif créé par la particule légère auquel on doit ajouter la barrière centrifuge pour l'onde $\ell = 1$? Rappelons l'expression de ce potentiel total pour $a < 0$

$$\begin{aligned} a < 0, R < |a| : \quad & V_{\text{tot}}(R) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{|a|} - \frac{W(e^{R/|a|})}{R} \right]^2 + \frac{2\hbar^2}{MR^2} \\ a < 0, R > |a| : \quad & V_{\text{tot}}(R) = \frac{2\hbar^2}{MR^2} \end{aligned} \quad (34)$$

et pour $a > 0$:

$$a > 0 : \quad V_{\text{tot}}(R) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{a} + \frac{W(e^{-R/a})}{R} \right]^2 + \frac{2\hbar^2}{MR^2}. \quad (35)$$

Pour $a < 0$, ce potentiel est tracé en figure 21 pour différentes valeurs de M/m . C'est une fonction toujours décroissante de R , ce qui exclut l'existence d'un état lié dans ce potentiel. Remarquons que ce potentiel est de

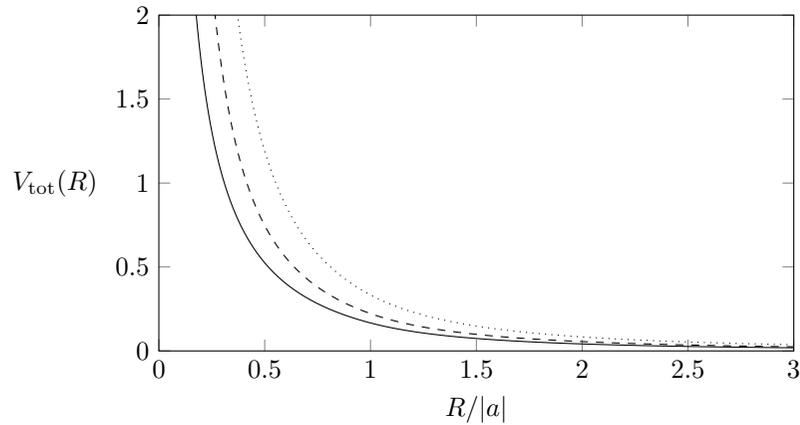


FIGURE 21. Potentiel total (en unités de \hbar^2/ma^2) pour le canal $\ell = 1$ dans le cas $a < 0$. Calcul effectué avec l'approximation de Born–Oppenheimer. De haut en bas, $M/m = 6, 9, 12$.

toute façon toujours supérieur au potentiel obtenu dans le cas $a = \pm\infty$ pour la même valeur du rapport M/m . Dans la mesure où l'on sait qu'il n'y a pas d'état lié dans le cas $a = \pm\infty$, il ne peut pas y en avoir non plus dans le cas $a < 0$.

La situation intéressante est obtenue pour $a > 0$. Comme on le voit sur la figure 22, le potentiel $V_{\text{tot}}(R)$ n'est pas toujours une fonction monotone de R . Il peut admettre un minimum absolu quand le rapport M/m dépasse ~ 7 , tout en gardant une limite $V_{\text{tot}}(R) \rightarrow +\infty$ quand $R \rightarrow 0$. Quand $R \rightarrow \infty$, le potentiel $V_{\text{tot}}(R)$ tend vers $-\hbar^2/(2ma^2)$, qui correspond à l'énergie du dimère mM quand il est loin de l'autre particule de masse M .

Cette forme du potentiel pour $a > 0$ ouvre la possibilité d'obtenir des états liés, c'est-à-dire des états dont l'énergie sera strictement inférieure à l'énergie du dimère $-\hbar^2/(2ma^2)$. Il est possible d'utiliser l'approche de Born–Oppenheimer pour déterminer le seuil sur M/m au dessus duquel un tel état lié apparaît. Toutefois le résultat est très sensible à la forme du potentiel et il est plus sûr d'utiliser une méthode numérique précise, comme l'ont fait KARTAVTSEV & MALYKH (2007).

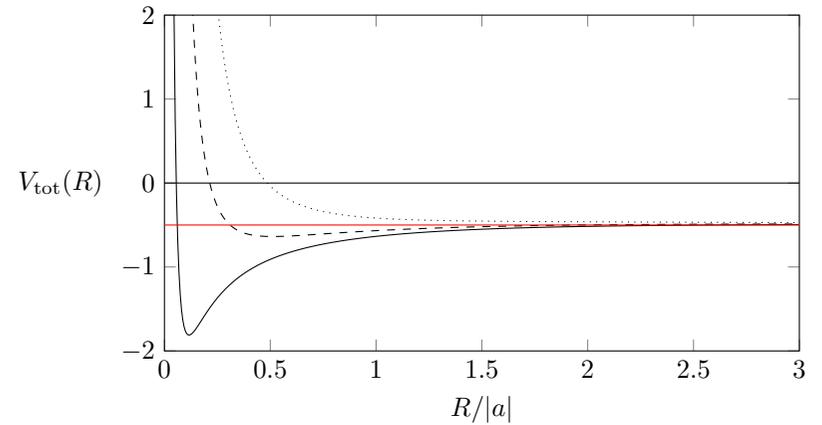


FIGURE 22. Potentiel total (en unités de \hbar^2/ma^2) pour le canal $\ell = 1$ dans le cas $a > 0$. Calcul effectué avec l'approximation de Born–Oppenheimer. De haut en bas, $M/m = 5, 8, 11$.

Notons que même lorsque le seuil d'existence d'un état lié n'est pas atteint, la forme non monotone du potentiel, avec un minimum local susceptible d'abriter un état quasi-lié, peut donner naissance à une résonance de diffusion. Ce phénomène a été observé par JAG, ZACCANTI et al. (2014) pour un mélange ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ (rapport de masse $M/m = 6.7$).

4-3 Résultats de Kartavtsev-Malykh et prolongements

KARTAVTSEV & MALYKH (2007) ont utilisé un traitement du problème à trois corps voisin de ce que nous verrons dans le chapitre suivant, passant par la résolution des équations hyper-radiales [voir également PETROV (2003)]. Pour le cas $a > 0$, ils sont arrivés aux conclusions suivantes quand les particules M sont des fermions polarisés :

- Pour $M/m < \lambda_1 = 8.173$, il n'y a pas d'état lié pour le problème mMM .
- Pour $\lambda_1 = 8.173 < M/m < \lambda_2 = 12.917$, il y a (en absence de para-

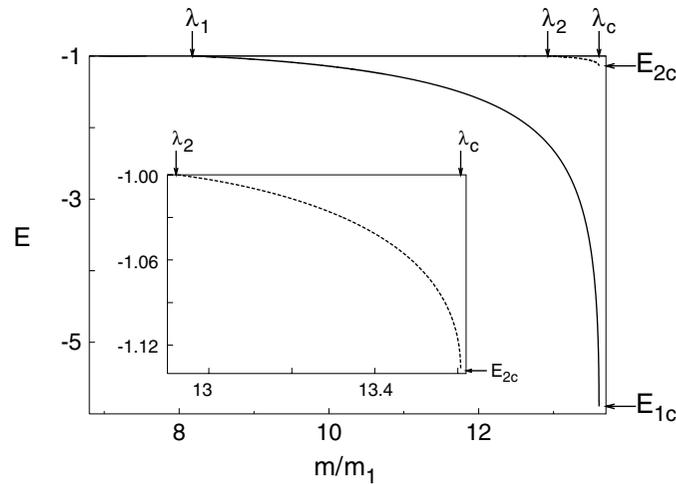


FIGURE 23. Energies des états liés "universels" pour le problème mMM dans le cas où les particules M sont des fermions polarisés sans interaction et où la longueur de diffusion a caractérisant l'interaction mM est positive. Les énergies E sont mesurées en unité de $\hbar^2/(2m_r a^2)$ et l'abscisse est le rapport M/m (noté ici m/m_1). Figure extraite de KARTAVTSEV & MALYKH (2007).

mètre à trois corps complémentaire, voir §4-3) un et un seul état lié dont l'énergie s'écrit $\alpha_1 \hbar^2/(2m_r a^2)$, avec le coefficient sans dimension α_1 tracé en figure 23 et $m_r = mM/(m + M)$.

- Pour $\lambda_2 = 12.917 < M/m < \lambda_c = 13.607$, il y a deux états liés dont les énergies s'écrivent $\alpha_j \hbar^2/(2m_r a^2)$, avec les coefficients α_j , $j = 1, 2$ tracés en figure 23.
- Pour $13.607 < M/m$, il peut y avoir un nombre arbitrairement élevé d'états liés quand $1/a \rightarrow 0_+$: c'est l'effet Efimov. La détermination de l'énergie de ces états liés nécessite l'introduction d'un coefficient à trois corps, par exemple le rayon de cœur dur R_0 .

Le ou les états trouvés dans la plage $8.173 < M/m < 13.607$ possèdent un moment cinétique total $L = 1$. Ils sont qualifiés d'universels puisque leur énergie ne dépend que du problème à deux corps mM et ne nécessite pas l'introduction d'un paramètre supplémentaire lié au problème à trois

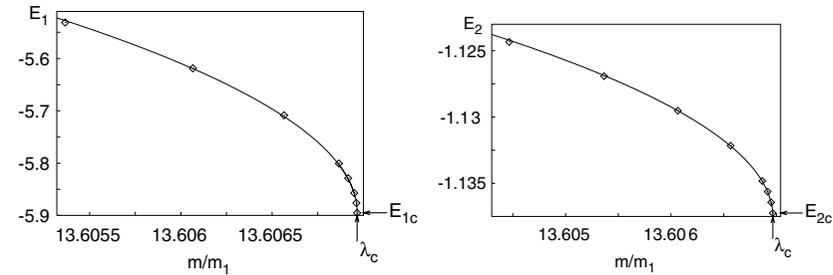


FIGURE 24. Légende similaire à la figure 23. Figure extraite de KARTAVTSEV & MALYKH (2007).

corps. Un agrandissement du comportement de l'énergie de ces états au voisinage du point critique λ_c est montré en figure 24.

A ce jour, les trimères de Kartavtsev-Malykh n'ont pas été observés expérimentalement. Comme indiqué par ENDO, GARCÍA-GARCÍA et al. (2016), un système bien adapté pourrait être un mélange de ${}^6\text{Li}$ et de ${}^{53}\text{Cr}$, tous deux fermioniques avec $M/m = 8.8$.

Remarque sur l'absence de paramètre à trois corps. Pour $M/m > 8.619$, KARTAVTSEV & MALYKH (2016) ont montré que pour le modèle de portée nulle utilisé ici, il y a une ambiguïté dans la définition de la fonction d'onde à trois particules, car deux solutions indépendantes, chacune de carré sommable, sont disponibles. Cette ambiguïté est déjà présente dans le problème à un corps dans le potentiel en $1/R^2$. Nous avons vu que l'équation $u''(R) - \frac{\alpha}{R^2}u(R) = 0$ admet deux solutions $u(R) = R^{s+1}$ avec $s_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}$. Pour $-1/4 < \alpha < 3/4$, ces deux solutions sont acceptables sur le simple critère d'intégrabilité en $R = 0$.

KARTAVTSEV & MALYKH (2016) ont alors introduit un paramètre supplémentaire que nous noterons B_3 , pour fixer l'amplitude de la solution s_- , divergente en $R = 0$, par rapport à la solution s_+ , convergente en $R = 0$. L'article initial de KARTAVTSEV & MALYKH (2007), dont nous avons décrit les résultats ci-dessus, correspondait au choix implicite $B_3 = 0$. Les spectres attendus quand on prend en compte des valeurs non nulles de

B_3 sont donnés par KARTAVTSEV & MALYKH (2016), un troisième trimère pouvant apparaître dans un petit domaine de paramètres.

Ce problème a été repris par ENDO, NAIDON et al. (2012), puis plus récemment par NAIDON, PRICOUPENKO et al. (2022) avec un potentiel V_{mM} de portée b non nulle. Dans ce modèle, NAIDON, PRICOUPENKO et al. (2022) ont montré que la limite de portée nulle pour V_{mM} conduit de manière naturelle au choix $B_3 = 0$, donc aux résultats de KARTAVTSEV & MALYKH (2007).

ENDO, NAIDON et al. (2012) ont montré l'existence d'une transition continue (*crossover*) vers des trimères non-universels quand on varie le paramètre a/b . Cette approche fondée sur un potentiel mM de portée non nulle permet par ailleurs de préciser les conditions où les trimères de Kartavtsev-Malykh peuvent être observés et elle conduit à une plage très étroite pour les longueurs de diffusion appropriées : $a \gtrsim 100b$ (NAIDON, PRICOUPENKO et al. 2022). NAIDON, PRICOUPENKO et al. (2022) ont également pris en compte une éventuelle interaction directe³ MM en onde p et ils ont montré qu'elle pouvait conduire à la formation de trimères additionnels, potentiellement plus faciles à observer.

Signalons enfin que ENDO, GARCÍA-GARCÍA et al. (2016) ont montré que l'interaction entre trimères de Kartavtsev-Malykh est répulsive à basse énergie : il est donc envisageable de former avec eux une phase stable de type liquide de Fermi si la particule m est elle-même un fermion, pourvu que $M/m \lesssim 9.5$. BLUME (2012) a en effet trouvé qu'au delà de cette valeur, la formation d'un tétramère $mMMM$ (lui aussi universel) peut devenir favorable d'un point de vue énergétique.

3. Le problème de trois fermions identiques et polarisés, interagissant uniquement en onde p , a été traité par JONA-LASINIO, PRICOUPENKO et al. (2008).

Références

- ACHARYA, Bijaya, Chen JI & Lucas PLATTER (2016), « Effective-field-theory analysis of Efimov physics in heteronuclear mixtures of ultracold atomic gases », in *Physical Review A* **94**, p. 032702.
- BARONTINI, G, C WEBER, F RABATTI, J CATANI, G THALHAMMER, M INGUSCIO & F MINARDI (2009), « Observation of heteronuclear atomic Efimov resonances », in *Physical Review Letters* **103**, p. 043201.
- (2010), « Erratum : observation of heteronuclear atomic Efimov resonances [Phys. Rev. Lett. 103, 043201 (2009)] », in *Physical Review Letters* **104**, p. 059901.
- BLOOM, Ruth S, Ming-Guang HU, Tyler D CUMBY & Deborah S JIN (2013), « Tests of universal three-body physics in an ultracold Bose-Fermi mixture », in *Physical Review Letters* **111**, p. 105301.
- BLUME, D (2012), « Universal four-body states in heavy-light mixtures with a positive scattering length », in *Physical Review Letters* **109**, p. 230404.
- BRAATEN, Eric & H.-W. HAMMER (2006), « Universality in few-body systems with large scattering length », in *Physics Reports* **428**, p. 259-390.
- CASTIN, Yvan & Edoardo TIGNONE (2011), « Trimers in the resonant (2 + 1)-fermion problem on a narrow Feshbach resonance : Crossover from Efimovian to hydrogenoid spectrum », in *Physical Review A* **84**, p. 062704.
- D'INCAO, JP & BD ESRY (2005), « Scattering length scaling laws for ultracold three-body collisions », in *Physical Review Letters* **94**, p. 213201.
- (2006a), « Enhancing the observability of the Efimov effect in ultracold atomic gas mixtures », in *Physical Review A* **73**, p. 030703.
- (2006b), « Mass dependence of ultracold three-body collision rates », in *Physical Review A* **73**, p. 030702.
- EFIMOV, V. (1973), « Energy levels of three resonantly interacting particles », in *Nuclear Physics A* **210**, p. 157-188.
- ENDO, Shimpei, Antonio M GARCÍA-GARCÍA & Pascal NAIDON (2016), « Universal clusters as building blocks of stable quantum matter », in *Physical Review A* **93**, p. 053611.
- ENDO, Shimpei, Pascal NAIDON & Masahito UEDA (2012), « Crossover trimers connecting continuous and discrete scaling regimes », in *Physical Review A* **86**, p. 062703.
- FONSECA, Antonio C., Edward F. REDISH & P.E. SHANLEY (1979), « Efimov effect in an analytically solvable model », in *Nuclear Physics A* **320**, p. 273-288.

- GIANNAKEAS, Panagiotis & Chris H GREENE (2018), « Ultracold heteronuclear three-body systems : How diabaticity limits the universality of recombination into shallow dimers », in *Physical Review Letters* **120**, p. 023401.
- (2021), « Asymmetric lineshapes of Efimov resonances in mass-imbalanced ultracold gases », in *Atoms* **9**, p. 110.
- HÄFNER, Stephan, Juris ULMANIS, Eva D KUHNLE, Yujun WANG, Chris H GREENE & Matthias WEIDEMÜLLER (2017), « Role of the intraspecies scattering length in the Efimov scenario with large mass difference », in *Physical Review A* **95**, p. 062708.
- HELFRICH, K, H-W HAMMER & DS PETROV (2010), « Three-body problem in heteronuclear mixtures with resonant interspecies interaction », in *Physical Review A* **81**, p. 042715.
- HU, Ming-Guang, Ruth S BLOOM, Deborah S JIN & Jonathan M GOLDWIN (2014), « Avalanche-mechanism loss at an atom-molecule Efimov resonance », in *Physical Review A* **90**, p. 013619.
- JAG, Michael, Matteo ZACCANTI, Marko CETINA, Rianne S LOUS, Florian SCHRECK, Rudolf GRIMM, Dmitry S PETROV & Jesper LEVINSSEN (2014), « Observation of a strong atom-dimer attraction in a mass-imbalanced Fermi-Fermi mixture », in *Physical Review Letters* **112**, p. 075302.
- JOHANSEN, Jacob, BJ DESALVO, Krutik PATEL & Cheng CHIN (2017), « Testing universality of Efimov physics across broad and narrow Feshbach resonances », in *Nature Physics* **13**, p. 731-735.
- JONA-LASINIO, M., L. PRICOUPENKO & Y. CASTIN (2008), « Three fully polarized fermions close to a p -wave Feshbach resonance », in *Physical Review A* **77**, p. 043611.
- KARTAVTSEV, OI & AV MALYKH (2007), « Low-energy three-body dynamics in binary quantum gases », in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **40**, p. 1429.
- (2016), « Universal description of three two-component fermions », in *EPL (Europhysics Letters)* **115**, p. 36005.
- KATO, K., Yujun WANG, J. KOBAYASHI, P. S. JULIENNE & S. INOUE (2017), « Isotopic Shift of Atom-Dimer Efimov Resonances in K-Rb Mixtures : Critical Effect of Multichannel Feshbach Physics », in *Physical Review Letters* **118**, p. 163401.
- KHRAMOV, Alexander, Anders HANSEN, William DOWD, Richard J ROY, Constantinos MAKRIDES, Alexander PETROV, Svetlana KOTOCHIGOVA & Subhadeep GUPTA (2014), « Ultracold heteronuclear mixture of ground and excited state atoms », in *Physical Review Letters* **112**, p. 033201.
- KRAEMER, Tobias, Manfred MARK, Philipp WALDBURGER, Johann G DANZL, Cheng CHIN, Bastian ENGESER, Almar D LANGE, Karl PILCH, Antti JAAKKOLA, H-C NÄGERL et al. (2006), « Evidence for Efimov quantum states in an ultracold gas of caesium atoms », in *Nature* **440**, p. 315-318.
- LI, Ang, Yaakov YUDKIN, Paul S JULIENNE & Lev KHAYKOVICH (2022), « Efimov resonance position near a narrow Feshbach resonance in a Li 6-Cs 133 mixture », in *Physical Review A* **105**, p. 053304.
- LOMPE, Thomas, Timo B OTTENSTEIN, Friedhelm SERWANE, Andre N WENZ, Gerhard ZÜRN & Selim JOCHIM (2010), « Radio-frequency association of Efimov trimers », in *Science* **330**, p. 940-944.
- MAIER, RAW, M EISELE, E TIEMANN & C ZIMMERMANN (2015), « Efimov resonance and three-body parameter in a lithium-rubidium mixture », in *Physical Review Letters* **115**, p. 043201.
- MIKKELSEN, M, AS JENSEN, DV FEDOROV & NT ZINNER (2015), « Three-body recombination of two-component cold atomic gases into deep dimers in an optical model », in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **48**, p. 085301.
- NAIDON, Pascal, Ludovic PRICOUPENKO & Christiane SCHMICKLER (2022), « Shallow trimers of two identical fermions and one particle in resonant regimes », in *SciPost Physics* **12**, p. 185.
- PETROV, D. S. (2003), « Three-body problem in Fermi gases with short-range interparticle interaction », in *Physical Review A* **67**, p. 010703.
- (2012), « The few-atom problem », in *Many-Body Physics With Ultracold Gases (Les Houches 2010) Lecture Notes of the Les Houches Summer School* **94**, p. 109-160.
- PETROV, D. S. & F. WERNER (2015), « Three-body recombination in heteronuclear mixtures at finite temperature », in *Physical Review A* **92**, p. 022704.
- PIRES, R., J. ULMANIS, S. HÄFNER, M. REPP, A. ARIAS, E.D. KUHNLE & M. WEIDEMÜLLER (2014), « Observation of Efimov Resonances in a Mixture with Extreme Mass Imbalance », in *Physical Review Letters* **112**, p. 250404.
- THOMAS, L. H. (1935), « The Interaction Between a Neutron and a Proton and the Structure of ^3H », in *Physical Review* **47**, p. 903-909.

- TUNG, Shih-Kuang, Karina JIMÉNEZ-GARCÍA, Jacob JOHANSEN, Colin V. PARKER & Cheng CHIN (2014), « Geometric Scaling of Efimov States in a Li 6 - Cs 133 Mixture », in *Physical Review Letters* **113**, p. 240402.
- ULMANIS, J, S HÄFNER, R PIRES, ED KUHNLE, M WEIDEMÜLLER & Eberhard TIEMANN (2015), « Universality of weakly bound dimers and Efimov trimers close to Li–Cs Feshbach resonances », in *New Journal of Physics* **17**, p. 055009.
- ULMANIS, J, S HÄFNER, R PIRES, Felix WERNER, DS PETROV, ED KUHNLE & M WEIDEMÜLLER (2016a), « Universal three-body recombination and Efimov resonances in an ultracold Li-Cs mixture », in *Physical Review A* **93**, p. 022707.
- ULMANIS, Juris, Stephan HÄFNER, Rico PIRES, Eva D KUHNLE, Yujun WANG, Chris H GREENE & Matthias WEIDEMÜLLER (2016b), « Heteronuclear Efimov scenario with positive intraspecies scattering length », in *Physical Review Letters* **117**, p. 153201.
- WACKER, LJ, NB JØRGENSEN, D BIRKMOSE, N WINTER, M MIKKELSEN, J SHERSON, N ZINNER & Jan J ARLT (2016), « Universal three-body physics in ultracold KRb mixtures », in *Physical Review Letters* **117**, p. 163201.
- WANG, Yujun, Jia WANG, JP D'INCAO & Chris H GREENE (2012), « Universal three-body parameter in heteronuclear atomic systems », in *Physical Review Letters* **109**, p. 243201.
- WILLIAMS, JR, EL HAZLETT, JH HUCKANS, RW STITES, Y ZHANG & KM O'HARA (2009), « Evidence for an excited-state Efimov trimer in a three-component Fermi gas », in *Physical Review Letters* **103**, p. 130404.
- WU, Meng-Shan, Hui-Li HAN & Ting-Yun SHI (2016), « Universalities for the Efimov-favored system with finite-range interactions », in *Physical Review A* **93**, p. 062507.
- YAMASHITA, Marcelo Takeshi, FF BELLOTTI, T FEDERICO, DV FEDOROV, AS JENSEN & NT ZINNER (2013), « Single-particle momentum distributions of Efimov states in mixed-species systems », in *Physical Review A* **87**, p. 062702.
- ZHAO, Cai-Yun, Hui-Li HAN, Meng-Shan WU & Ting-Yun SHI (2019), « Universal three-body parameter of heavy-heavy-light systems with a negative intraspecies scattering length », in *Physical Review A* **100**, p. 052702.
- ZINNER, NT & NG NYGAARD (2015), « Efimov States in Li–Cs Mixtures within a Minimal Model », in *Few-Body Systems* **56**, p. 125-131.