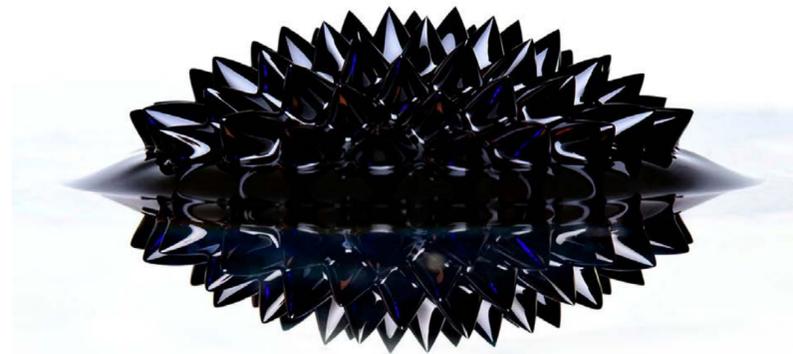


Interactions magnétiques entre atomes froids: gouttelettes quantiques et états supersolides



<http://pro.college-de-france.fr/jean.dalibard/index.html>

image : wikipedia, G.F. Maxwell

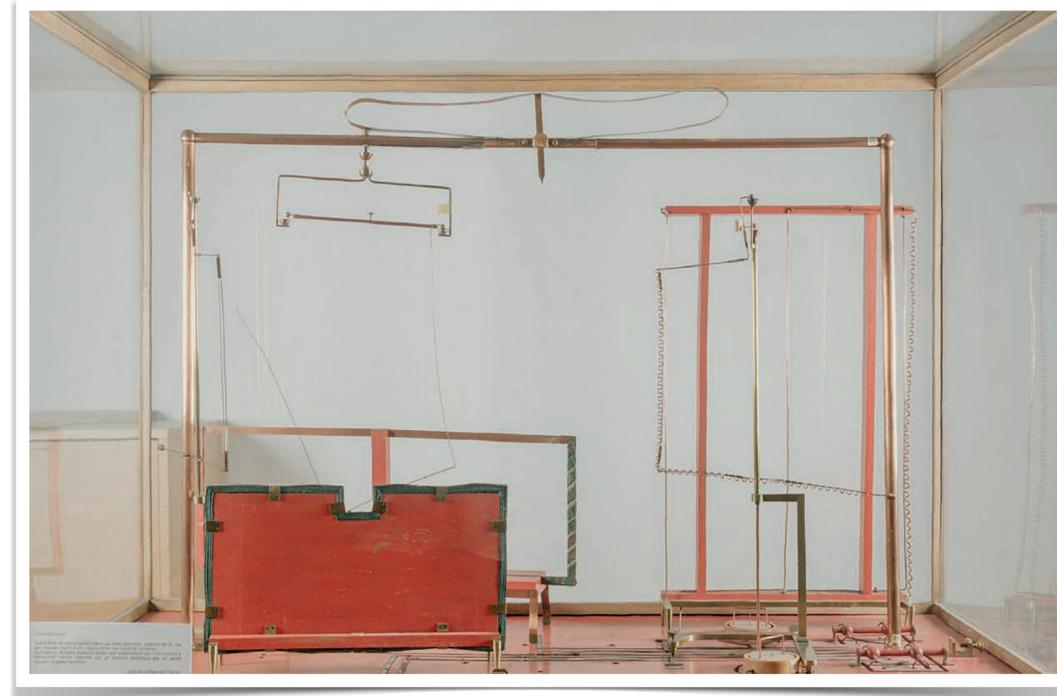


COLLÈGE
DE FRANCE
— 1530 —

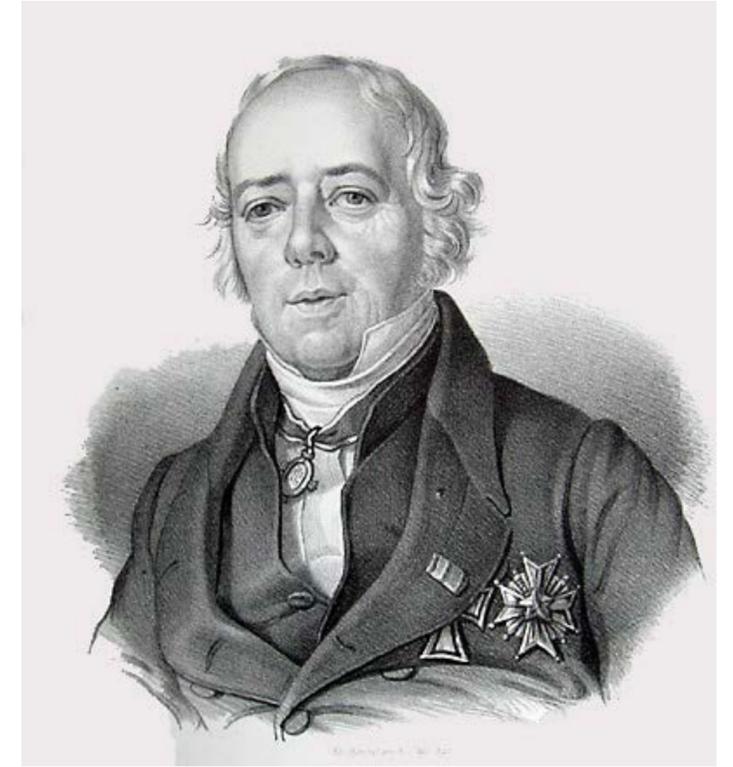
La recherche sur le magnétisme



Ampère



La table d'Ampère au Collège de France



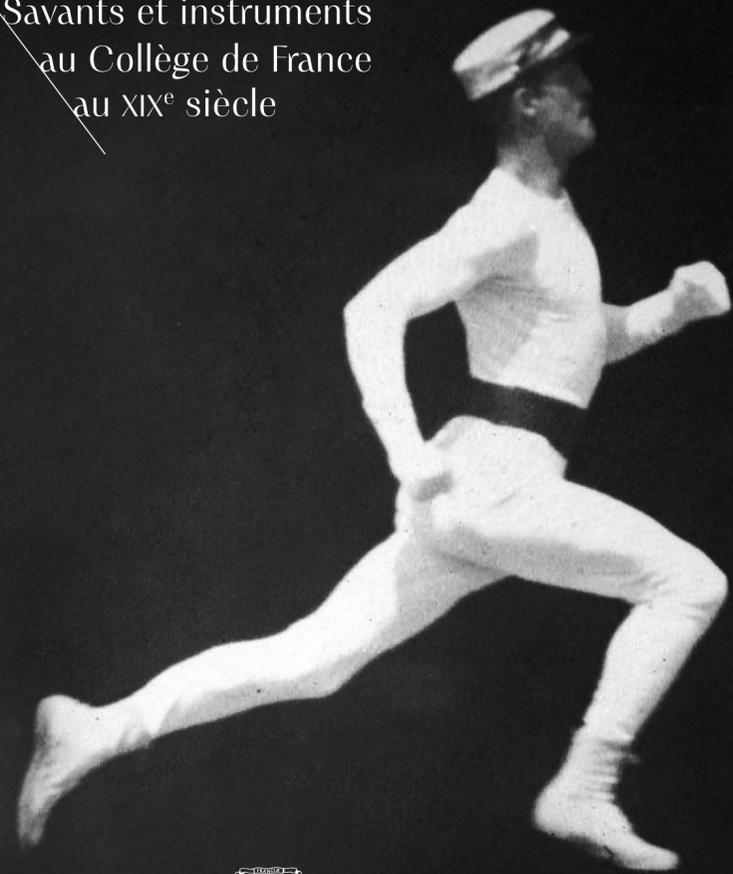
Ørsted

+ Faraday,..., Maxwell : exemple d'une théorie physique unifiée, l'électromagnétisme

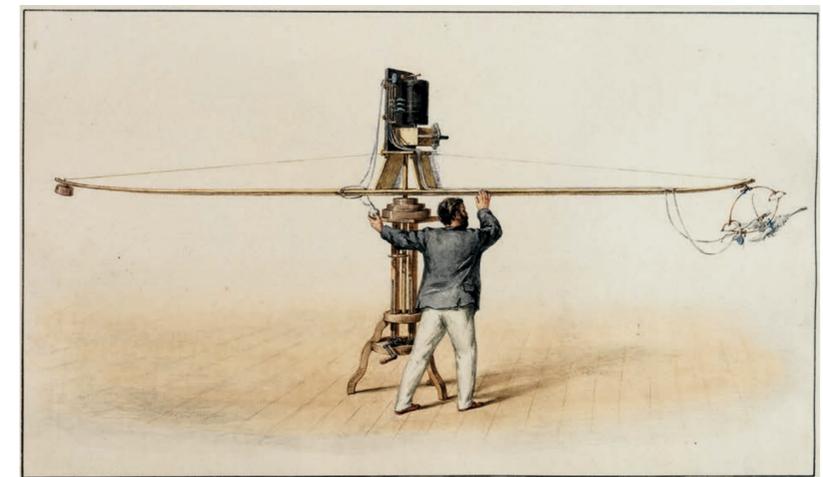
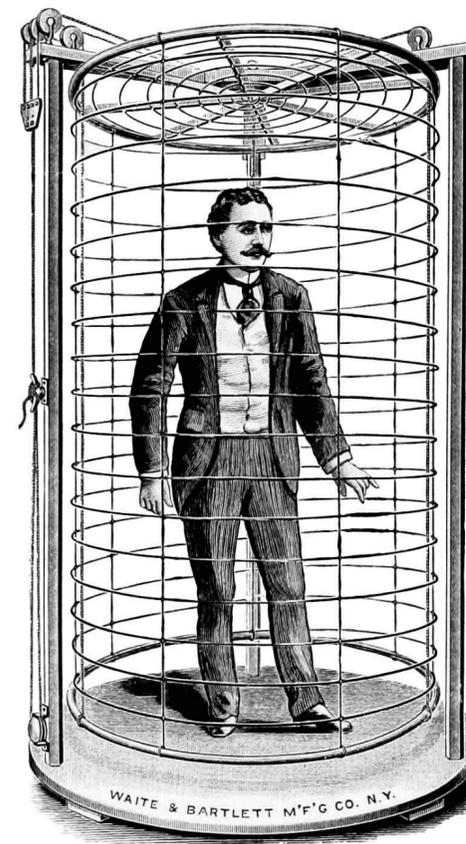
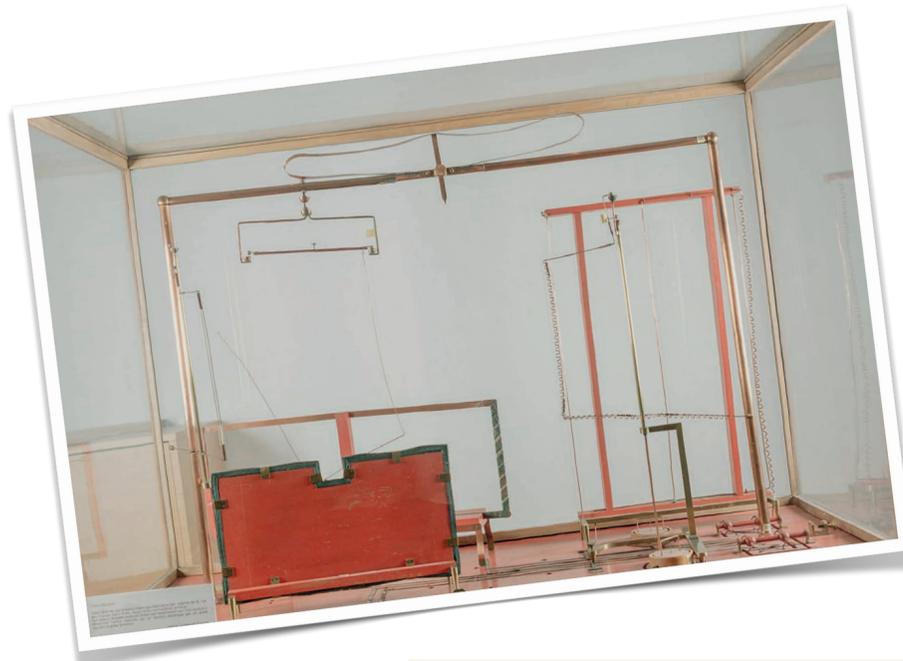
Parenthèse : une exposition à venir au Collège de France (25 avril)

À bras- le-corps!

Savants et instruments
au Collège de France
au XIX^e siècle

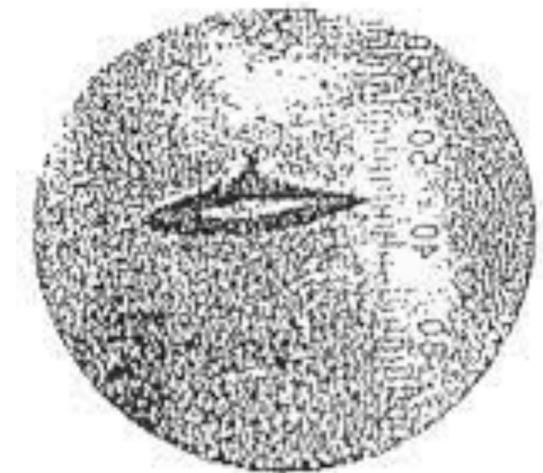
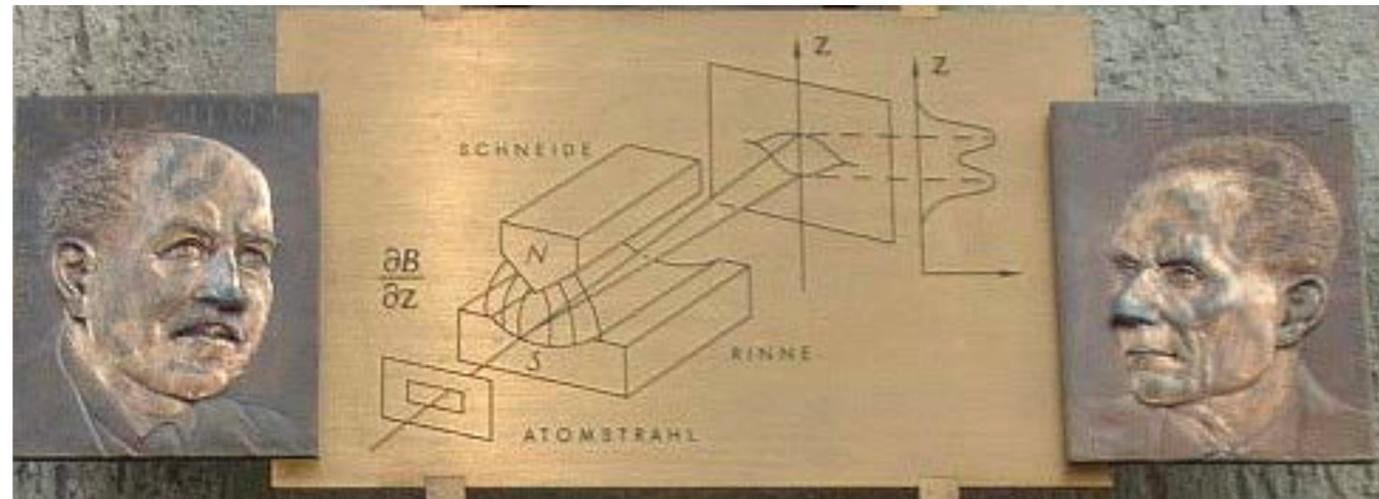


COLLÈGE
DE FRANCE
— EDITIONS —

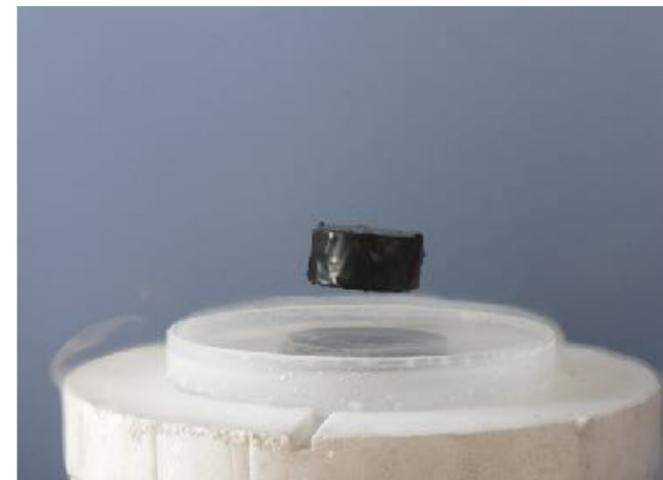


Magnétisme et physique quantique

L'étude des propriétés magnétiques d'un atome ou d'un électron a joué un rôle central dans l'émergence de la notion de spin : expérience de Stern et Gerlach



Magnétisme et supraconductivité :
effet Meissner et lévitation d'aimants



Magnétisme et gaz quantiques d'atomes froids

Autour de 2000, démarrage d'une activité théorique et expérimentale autour de gaz d'atomes de chrome

Pourquoi le chrome ?

Le moment magnétique μ est 6 fois plus grand que pour les atomes alcalins

⇒ L'énergie d'interaction magnétique correspondante est 36 fois plus grande

Emergence de structures spatiales qui rappellent celles des matériaux ferrofluides classiques !

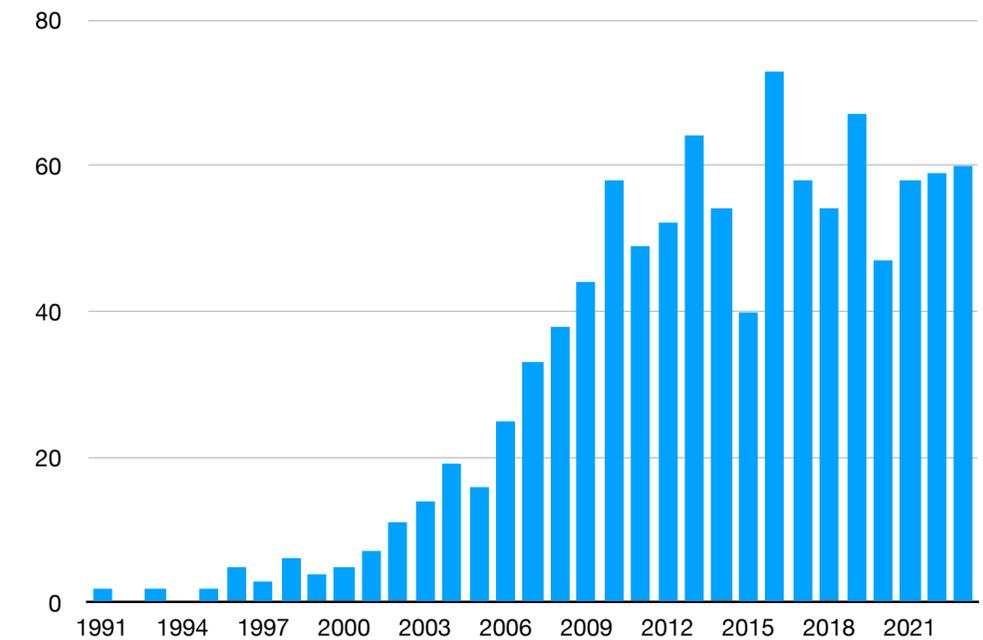


Magnétisme et gaz quantiques d'atomes froids (2)

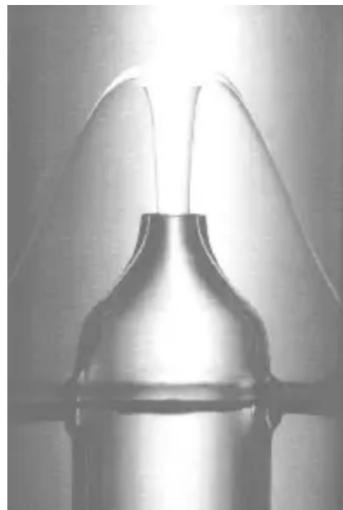
Nombre de publications annuelles avec les mots clés

"dipolar atomic gas" ou "dipolar Bose Einstein condensate" ou "dipolar supersolid"

dans leur titre ou résumé (source: Web of Science, février 2024)

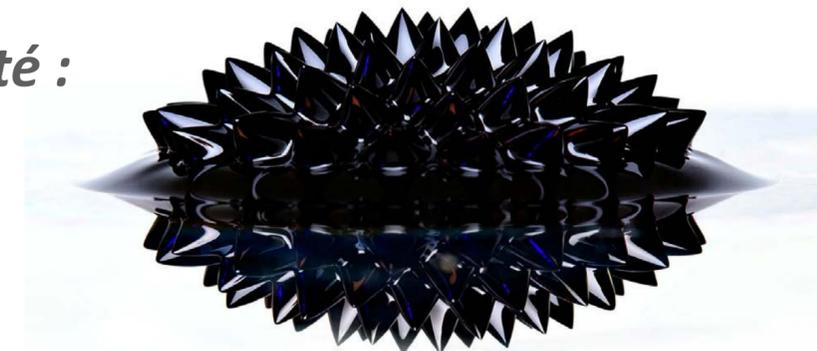


A partir de ≈ 2010 , nouvelles plateformes expérimentales avec des atomes lanthanides : dysprosium, erbium, thulium



Nouvelles questions abordées, par exemple celle concernant la supersolidité :

Peut-on faire co-exister l'ordre superfluide et l'ordre spatial ?



Plan du cours

Cours 1 : L'interaction dipolaire

Un peu d'électro et de magnétostatique...

Cours 2 : Condensat de Bose-Einstein dipolaire à l'équilibre

Peut-il implorer sous l'effet des forces magnétiques ?

Cours 3 : Excitations d'un condensat dipolaire

Spectre en roton-maxon, semblable à celui trouvé pour l'hélium liquide

Cours 4 : Etats liquides vs. états gazeux

Importance des effets quantiques au-delà du champ moyen

Cours 5 et 6 : La supersolidité

Aujourd'hui : Frequency comb interferometry

Nathalie Picqué

Max-Born Institute for Nonlinear Optics and Short Pulse Spectroscopy and Humboldt University, Berlin, Allemagne

8 mars : Bose Enhanced Chemical Reactions in Atom-Molecule Bose-Einstein Condensates

Cheng Chin

James Franck institute, Enrico Fermi institute, Department of Physics, University of Chicago, USA

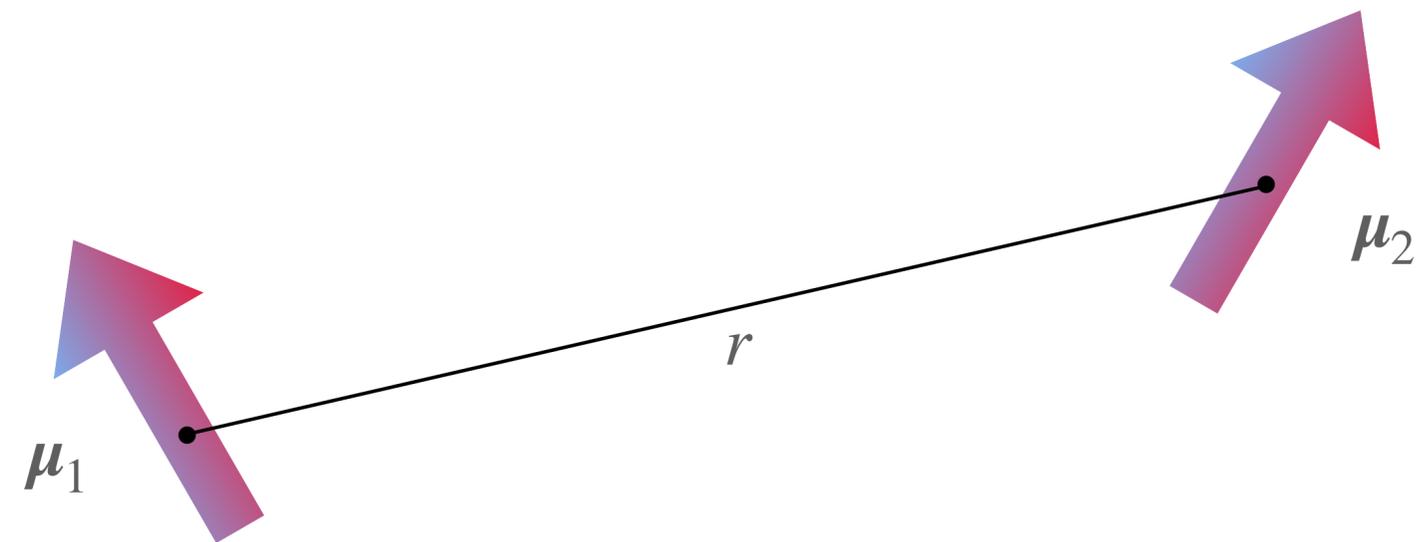
15 mars : Ultracold fermion mixtures with tunable interactions: polarons and the quest for novel superfluids

Rudolf Grimm

University of Innsbruck and IQOQI, Austrian Academy of Sciences, Autriche

5 avril : Colloque “*Rydberg atoms and quantum simulation*”, co-organisé avec Michel Brune

Cours 1 : L'interaction dipolaire



Buts de ce cours

Mise en place du formalisme classique

Electrostatique et magnétostatique

Dipôles électriques et dipôles magnétiques en physique quantique

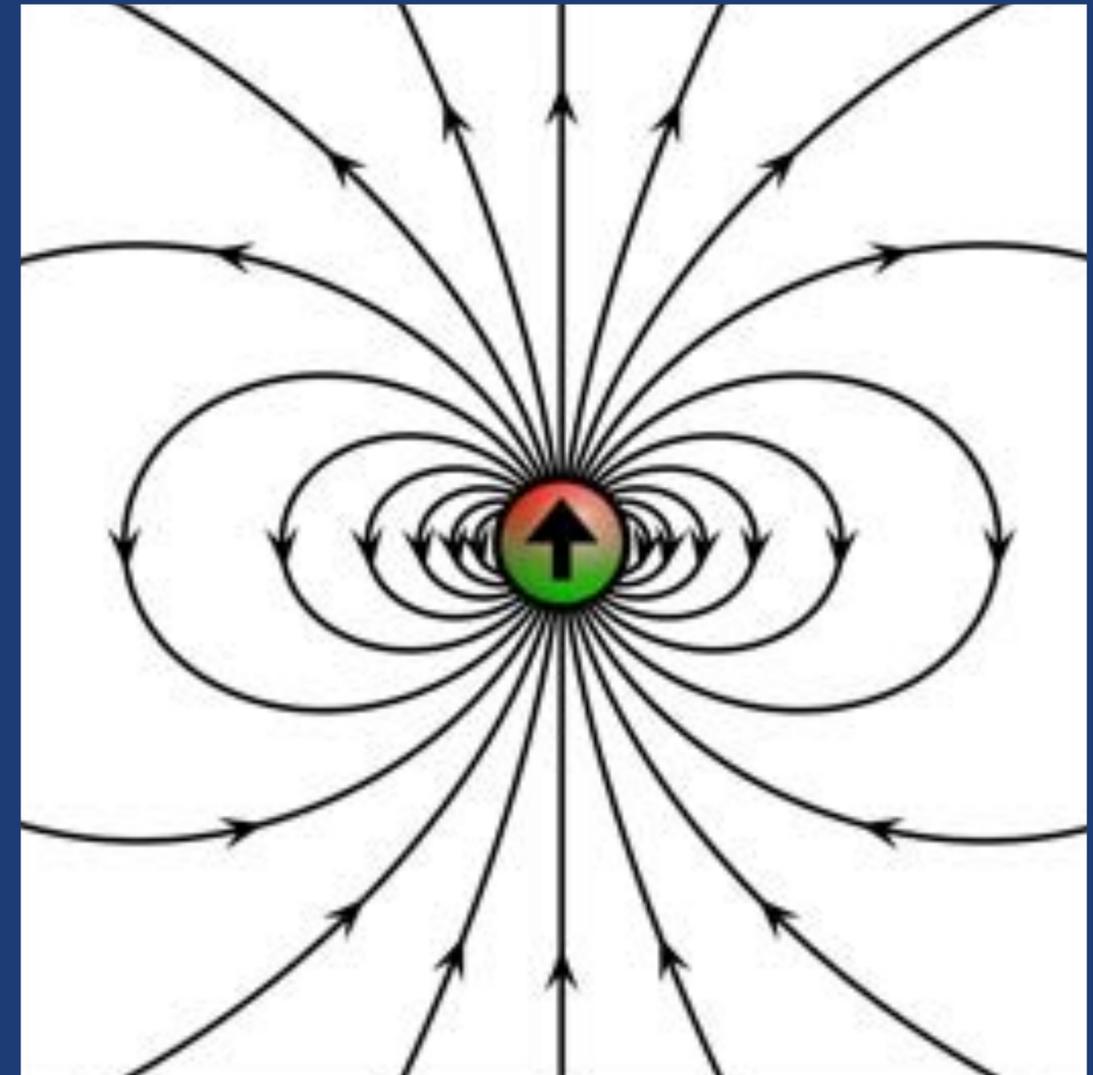
Ordres de grandeur et mesures

Une première application : bouclier micro-onde et condensat de Bose-Einstein moléculaire

1.

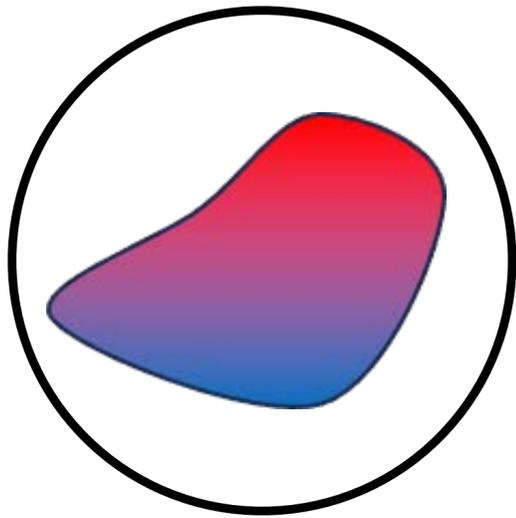
Dipôles en électromagnétisme classique

- Définition d'un dipôle
- Potentiel et champ créé par un dipôle électrique ou magnétique



Le champ créé par un dipôle en son emplacement

On considère une distribution de charge localisée dans une région finie de l'espace



On prend une sphère de volume $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$ englobant cette distribution et on définit le champ moyenné sur la sphère : $\mathbf{E}_{\text{moy}} = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3r$

Théorème (cf. appendice des notes de cours) : $\mathbf{E}_{\text{moy}} = -\frac{\mathbf{d}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$

Difficulté immédiate : si on prend $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\mathbf{d} - 3\frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} \right]$ avec \mathbf{d} parallèle à l'axe z , on a

$$E_z(\mathbf{r}) = \frac{-d}{4\pi\epsilon_0 r^3} [1 - 3 \cos^2 \theta] \quad \text{et} \quad \int_0^\pi (1 - 3 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_{\text{moy}} = 0 ???$$

Le champ créé par un dipôle en son emplacement (2)

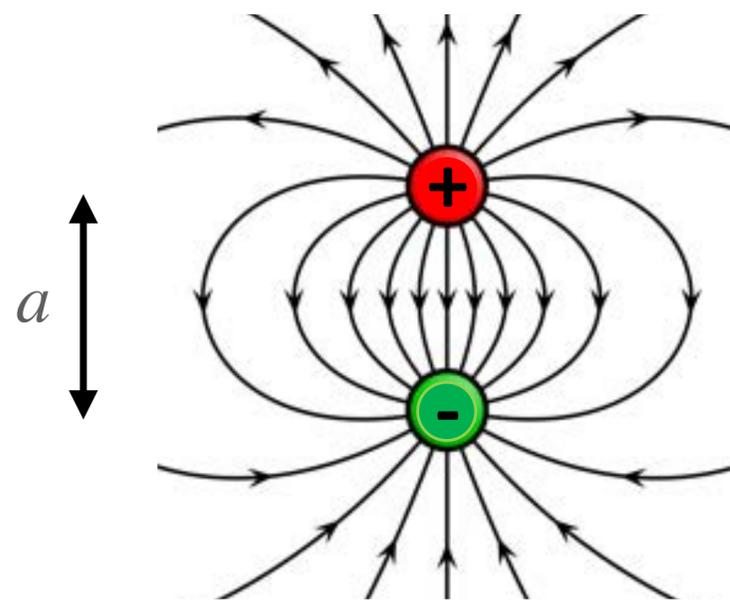
Il faut ajouter à l'expression précédente du champ une composante en distribution de Dirac

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\mathbf{d} - 3 \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2} \right] - \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{d} \delta(\mathbf{r})$$

Origine physique : on revient à la définition de la limite ponctuelle d'un dipôle

Sur un volume de l'ordre de a^3 entre les deux dipôles, il règne un champ

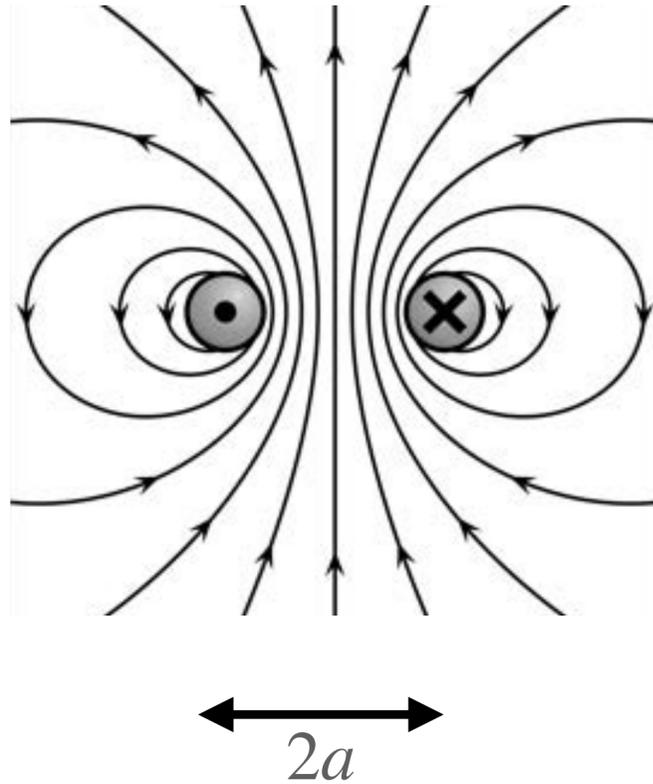
$$E_z \sim \frac{-q}{\epsilon_0 a^2} = \frac{-d}{\epsilon_0 a^3} \quad \text{avec } d = qa$$



Cette contribution en Dirac joue un rôle important pour le calcul de l'indice de réfraction d'un diélectrique : formule de Lorenz-Lorentz (Clausius-Mossotti)

Le cas d'un dipôle magnétique

spire de courant de rayon a vue en coupe



Sur un volume de l'ordre de a^3 , on a

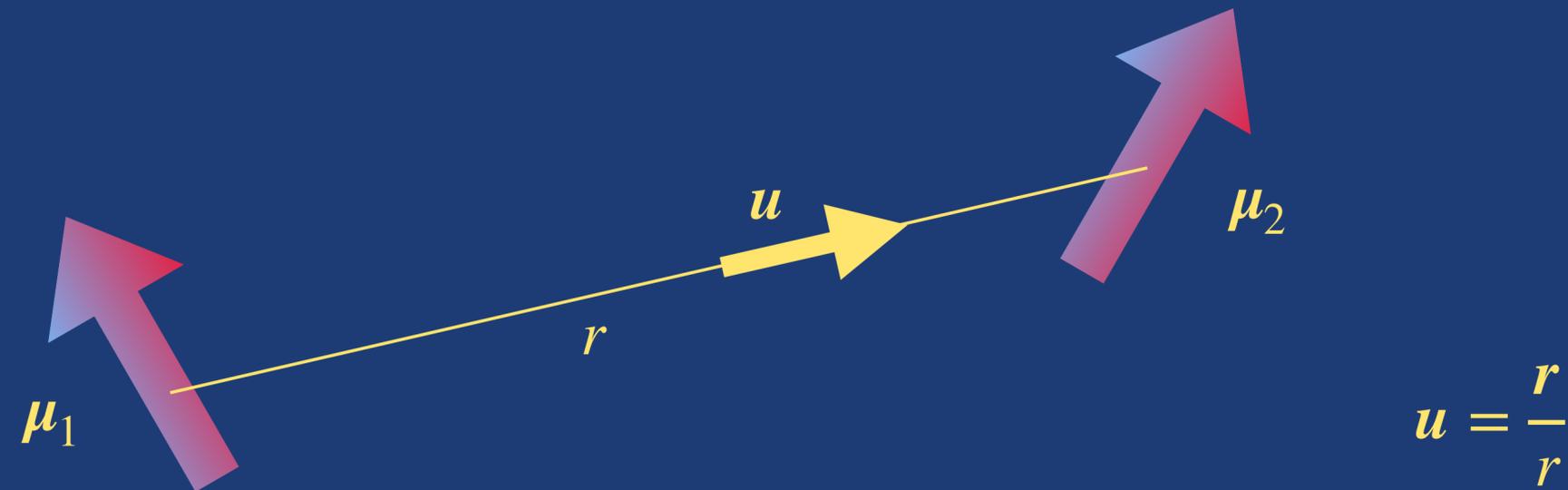
$$B \propto \frac{\mu_0 I}{a} = \frac{\mu_0 a^2 I}{a^3} \quad \text{avec le moment magnétique } \mu = \pi a^2 I$$

Là aussi, une composante en distribution de Dirac

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{-\mu_0}{4\pi r^3} \left[\boldsymbol{\mu} - 3 \frac{(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2} \right] + \frac{2\mu_0}{3} \boldsymbol{\mu} \delta(\mathbf{r})$$

Cette contribution en Dirac joue un rôle important pour le calcul de l'interaction hyperfine, c'est-à-dire l'interaction magnétique entre noyau atomique et électrons

Energie d'interaction entre deux dipôles



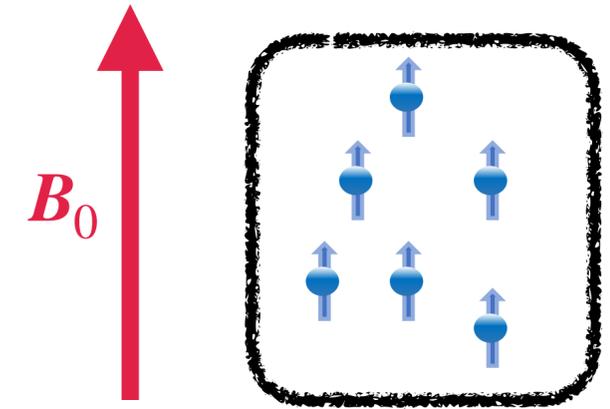
Cas magnétique :
$$\mathcal{E}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [\mu_1 \cdot \mu_2 - 3(\mu_1 \cdot u)(\mu_2 \cdot u)]$$

Dipôles alignés et interaction anisotrope

Dans ce cours, nous supposerons que les dipôles sont plongés dans un champ magnétique extérieur B_0

Energie d'interaction pour un dipôle μ : $E = -\mu \cdot B_0$

L'état d'énergie minimale correspond aux dipôles alignés avec B_0



L'énergie d'interaction entre deux dipôles dépend de l'orientation du vecteur unitaire $u = \frac{r}{r}$ qui les joint

$u \perp \mu_{i,j}$  $\mathcal{E}_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu^2}{r^3}$

repulsive

$u \parallel \mu_{i,j}$  $\mathcal{E}_{ij} = -2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu^2}{r^3}$

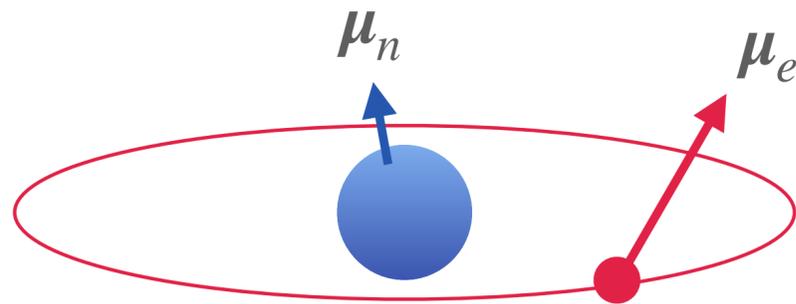
attractive

2.

Dipôles en physique quantique

Dipôle magnétique d'un atome "simple"

Atome d'hydrogène ou atome alcalin (un électron célibataire): 3 sources possibles de moment magnétique



- Boucle de courant de moment cinétique orbital L
- Spin de l'électron S
- Spin du noyau I

- Dans l'état fondamental (état s), le moment cinétique orbital L est nul

- Moment cinétique lié au spin $S = 1/2$ de l'électron : $\frac{q}{m_e} \times \frac{\hbar}{2} = \mu_B$, magnéton de Bohr

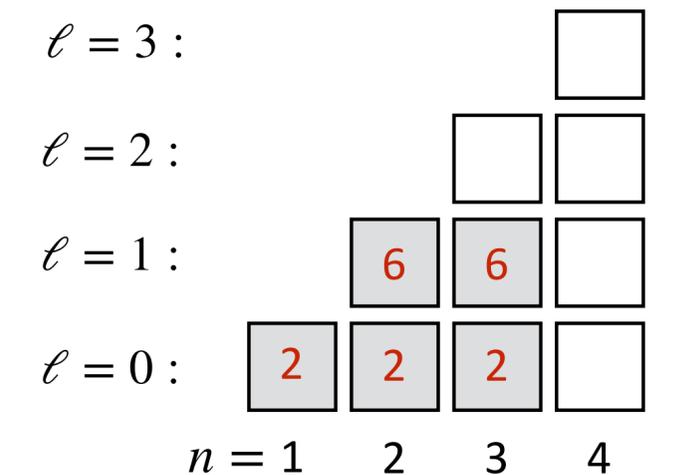
- Moment cinétique lié au spin I du noyau $\propto \frac{q\hbar}{2m_p}$, généralement négligeable

Pour aller plus loin : un peu de physique atomique

Comment remplir les couches électroniques ?

On repère un état possible pour un électron par 4 nombres quantiques

- son nombre quantique principal n : $n = 1, 2, \dots$
 - son moment cinétique orbital ℓ : $\ell = 0, \dots, n - 1$
- } détermine l'énergie $E_{n,\ell}$
- la projection m du moment cinétique orbital sur un axe donné :
 $m = -\ell, \dots, \ell$, soit $2\ell + 1$ valeurs de même énergie
 - la projection $s = \pm 1/2$ du spin de l'électron sur cet axe : \uparrow, \downarrow ,
soit deux valeurs de même énergie



Principe de Pauli : au total, on peut mettre au maximum $2(2\ell + 1)$ électrons sur un niveau d'énergie $E_{n,\ell}$

Les atomes lanthanides

1	1																	2	
	H																	He	
2	3	4																	10
	Li	Be																	Ne
3	11	12																	18
	Na	Mg																	Ar
4	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
	K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr	
5	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	
	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe	
6	55	56	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	
	Cs	Ba	La to Yb	Lu	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
7	87	88	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	
	Fr	Ra	Ac to No	Lr	Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt	Ds	Rg	Cn	Nh	Fl	Mc	Lv	Ts	Og

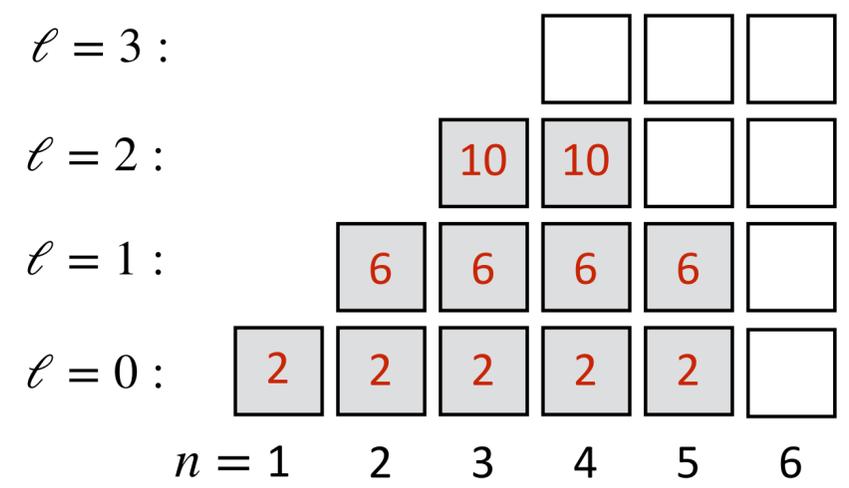
Lanthanides	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
	La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb
Actinides	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102
	Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No

Dysprosium, $Z = 66$

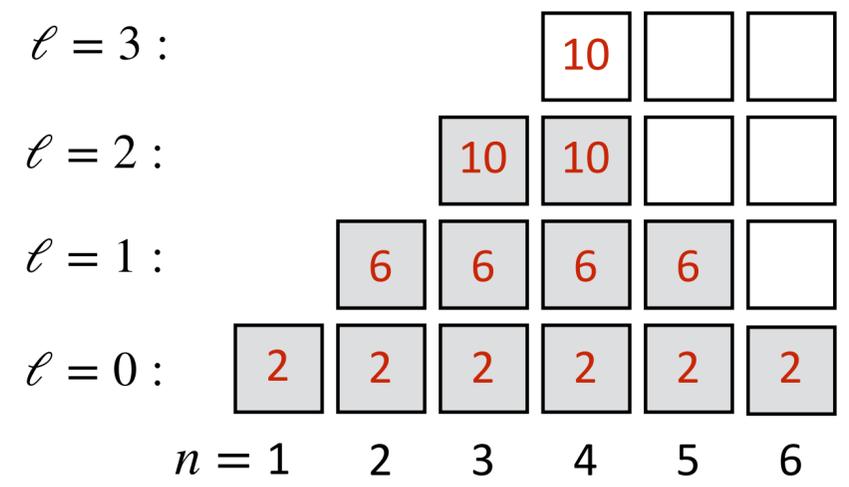


Wikipedia

Xénon, $Z = 54$



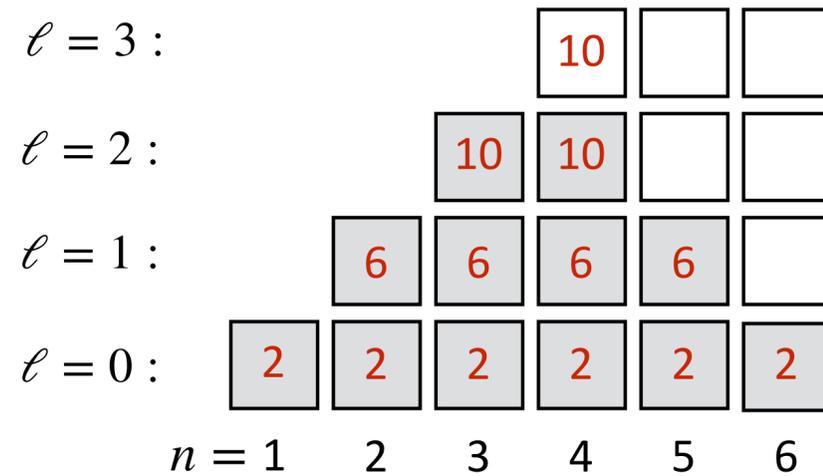
Dysprosium, $Z = 66$



Couche incomplète et moment magnétique

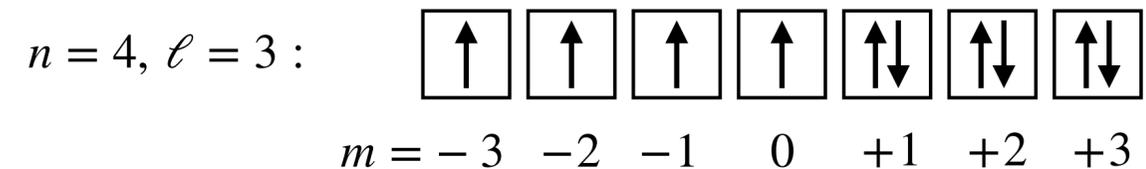


Dysprosium, $Z = 66$



$n = 4, \ell = 3$: 10 électrons sur une couche qui peut en accueillir $2(2\ell + 1) = 14$

Un exemple possible de répartition :



Moment magnétique total attendu ?

- Orbital : $3 + 2 + 1 = 6 \mu_B$
- Spin : 4 spins non appariés = $4 \mu_B$

Total : $10 \mu_B$ soit des interactions magnétiques 100 fois plus fortes que pour des atomes alcalins !

Dipôles électriques permanents ?

Si un moment dipolaire électrique existe, l'invariance par rotation impose $\mathbf{d} = \alpha \mathbf{J}$ pour un système quantique (électron, atome, molécule) préparé dans un état d'énergie et de moment cinétique J bien définis

Si l'hamiltonien est invariant par renversement du temps : $\alpha = 0 \Rightarrow \mathbf{d} = 0$

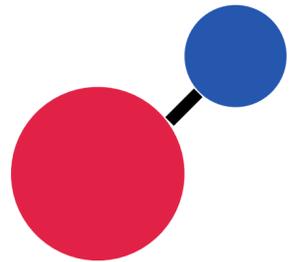
Dans l'opération de renversement du temps $t \rightarrow -t$, on a :

- $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$ et donc pour un dipôle électrique : $\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{d}$
- $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ et donc pour le moment cinétique : $\mathbf{J} \rightarrow -\mathbf{J}$

L'observation d'un moment dipolaire électrique permanent pour un électron, un neutron, un atome... serait une signature de la brisure d'invariance par renversement du temps (violation de CP).

Dipôle électrique d'une molécule

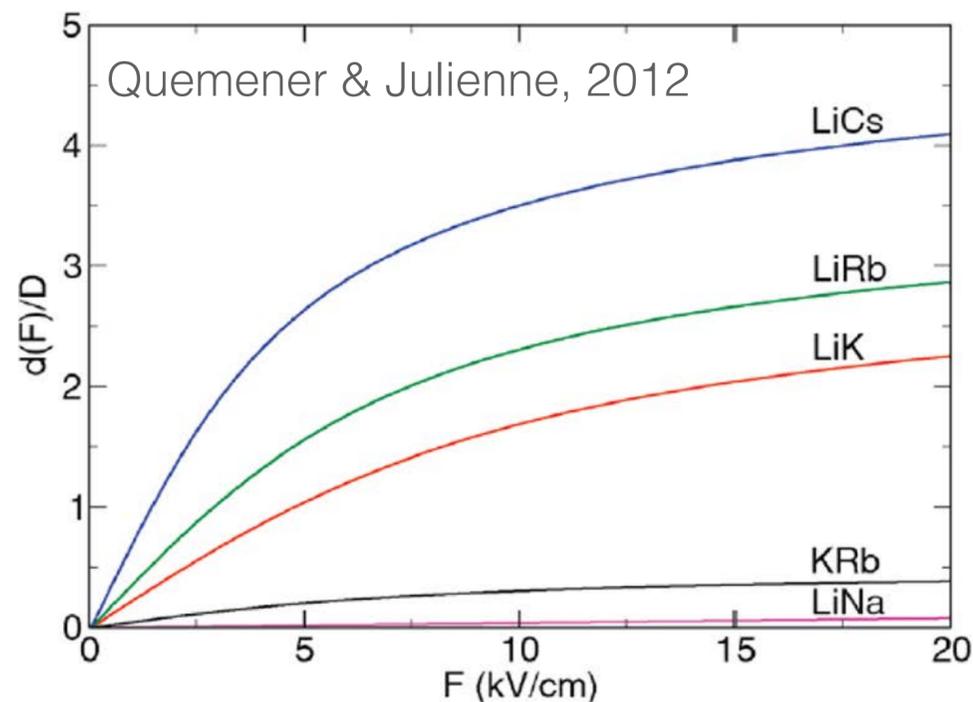
Les tables de données moléculaires indiquent des valeurs de moment dipolaire électrique



Par exemple, pour NaCs : $d \approx 4.8$ Debye avec $1 \text{ Debye} = 3.33 \cdot 10^{-30}$ Coulomb mètre

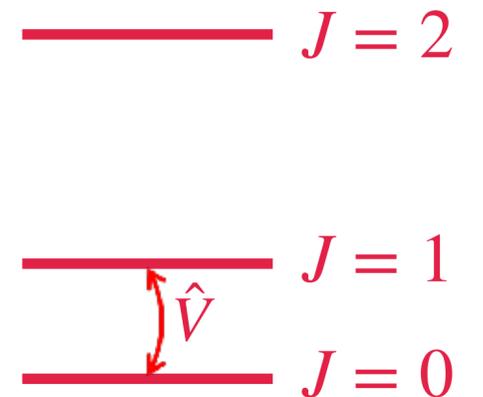
Il s'agit de la valeur dans le référentiel lié à la molécule

Moment dipolaire induit : il apparaît quand on plonge la molécule dans un champ électrique extérieur F



L'interaction molécule-champ couple des états de moments cinétiques différents, par exemple l'état fondamental ($J = 0$) et le premier état de rotation excité ($J = 1$)

$$\hat{V} = -\hat{d} \cdot F$$

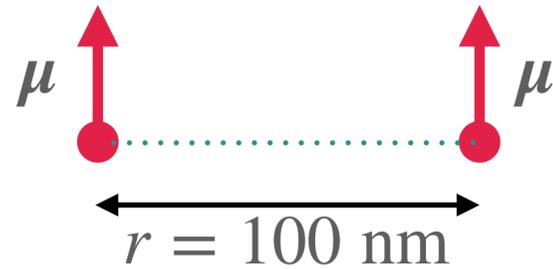


3.

Mesure de l'énergie d'interaction dipôle-dipôle

Ordres de grandeurs

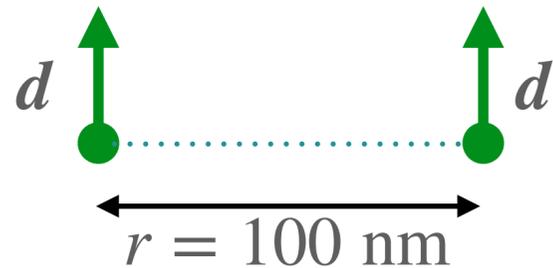
Dipôles magnétiques (atomes de dysprosium, $\mu = 10 \mu_B$)



$$\frac{\mu_0 \mu^2}{4\pi r^3} \approx h \times 1300 \text{ Hz} = k_B \times 60 \text{ nK}$$

Energie caractéristique des gaz quantiques

Dipôles électriques induits



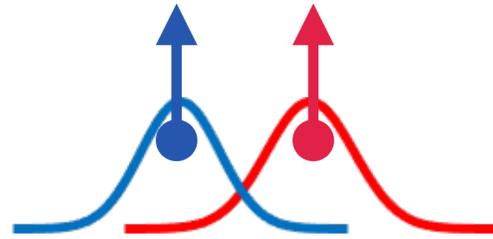
$$d = 1 \text{ Debye}$$

$$\frac{d^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \approx h \times 150 \text{ kHz} = k_B \times 7 \mu\text{K}$$

100 fois plus grand que pour des dipôles magnétiques, si on parvient à rapprocher les dipôles électriques à ces distances !

Longueur a_{dd}

Echelle de longueur caractéristique associée aux interactions dipôle-dipôle



Deux dipôles avec des paquets d'ondes de taille $\sim a$ et séparés de $\sim a$

Pour quelle valeur de a l'énergie cinétique et l'énergie d'interaction dipolaire sont-elles comparables ?

$$\frac{\hbar^2}{ma^2} \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{a^3}$$

On pose
$$a_{\text{dd}} \equiv \frac{1}{3} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m\mu^2}{\hbar^2}$$

Dysprosium : $a_{\text{dd}} \approx 7 \text{ nm} \approx 130 a_0$ avec $a_0 = \text{rayon de Bohr}$

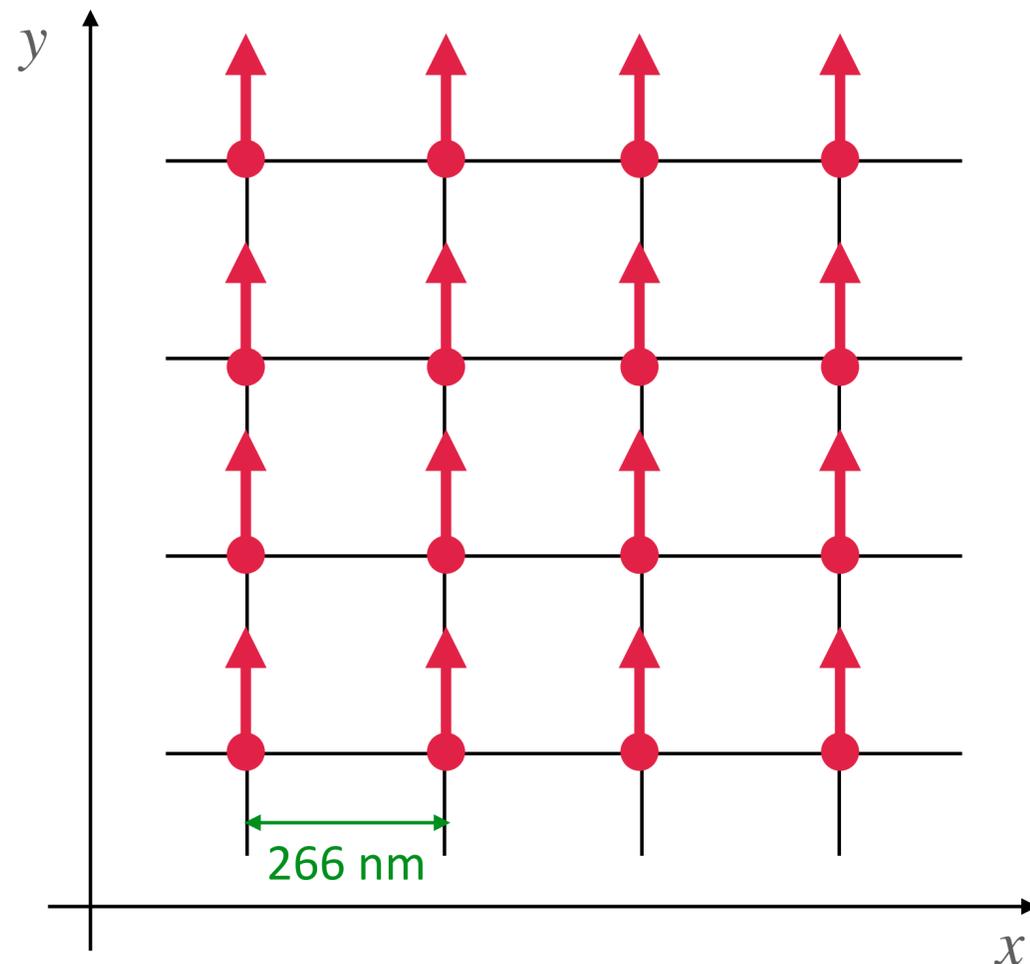
Pour Dy, a_{dd} est comparable à une longueur de diffusion typique pour les interactions de van der Waals

Mesure de l'énergie d'interaction

Réseau optique, formé par trois ondes lumineuses stationnaires selon les 3 axes x, y, z

Régime "isolant de Mott" avec un atome d'erbium par site, effet tunnel négligeable

Dipôles alignés par un champ magnétique le long de l'axe y



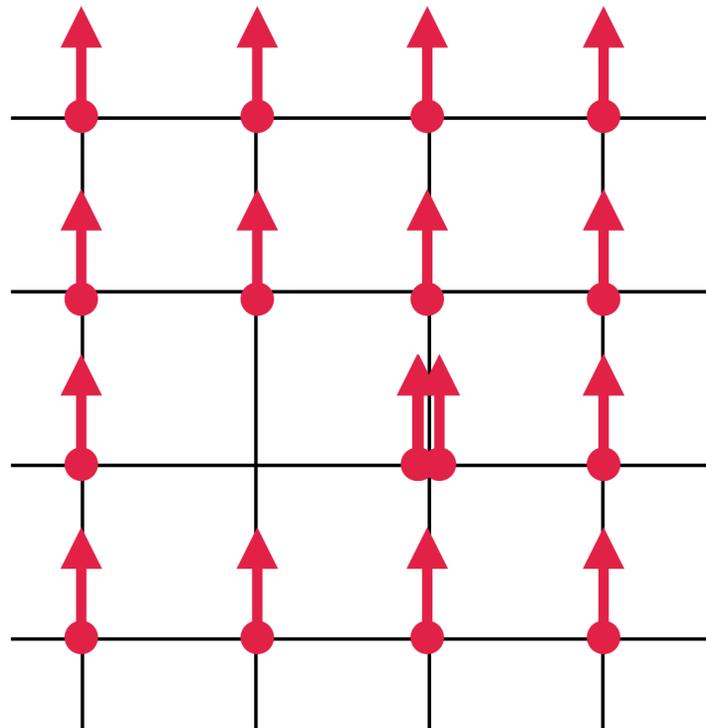
Dans le plan $z = 0$, le potentiel s'écrit

$$V(x, y) = V_1 \sin^2(kx) + V_2 \sin^2(ky)$$

En modulant dans le temps V_1 ou V_2 à une fréquence appropriée, on peut favoriser l'effet tunnel selon x ou y :



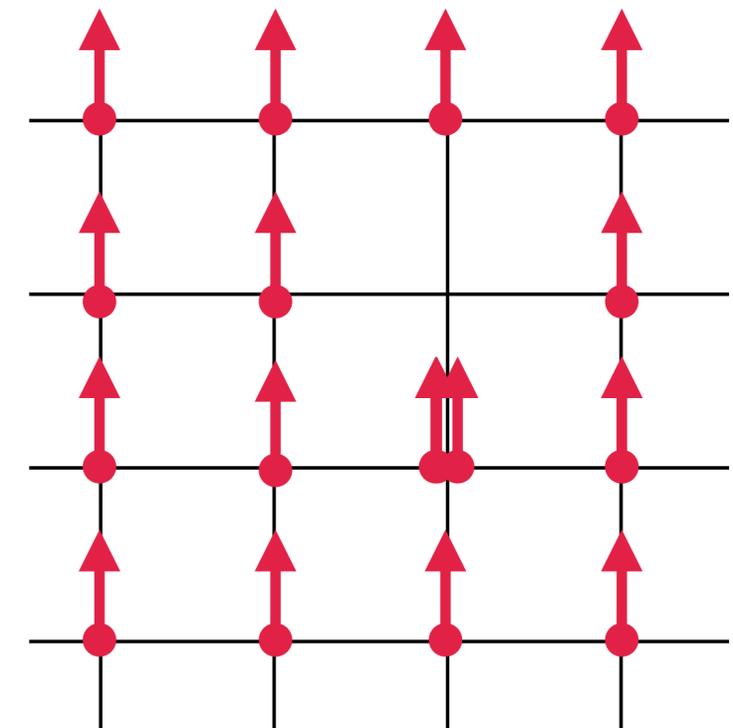
Modulation selon x



$$\begin{aligned} \hbar(\omega_y - \omega_x) &= V^{\text{rep}} - V^{\text{att}} \\ &= \frac{\mu_0 \mu^2}{4\pi r^3} [1 - (-2)] \\ &= \frac{3\mu_0 \mu^2}{4\pi r^3} \end{aligned}$$

≈ 90 Hz mesuré, en accord avec la théorie

Modulation selon y



Fréquence résonnante : $\hbar\omega_x = U - V^{\text{rep}}$

Coût énergétique pour mettre deux atomes sur le même site

Energie de répulsion entre deux dipôles sur un lien horizontal

Fréquence résonnante : $\hbar\omega_y = U - V^{\text{att}}$

Energie d'attraction entre deux dipôles sur un lien vertical

4.

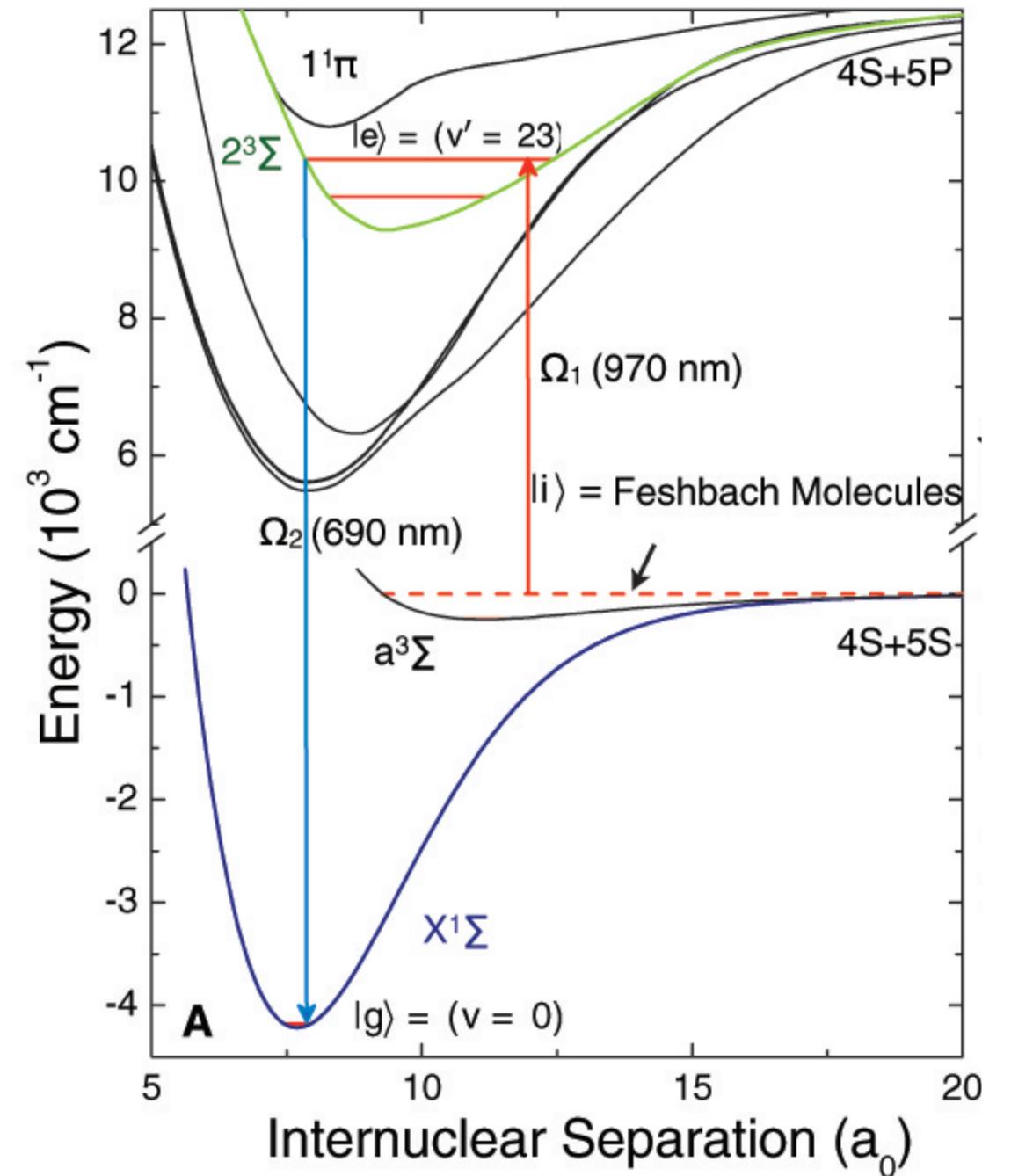
Bouclier micro-onde et
condensat de Bose-Einstein de molécules

Gaz de molécules ultra-froides piégées

En présence d'une résonance de diffusion (Fano-Feshbach), des dimères très faiblement liés sont naturellement formés dans un gaz atomique froid et dense

Transition à deux photons vers l'état fondamental de la molécule di-atomique

Mais les molécules ainsi formées sont rapidement perdues par collisions inélastiques. Peut-on empêcher les molécules de s'approcher les unes des autres ?



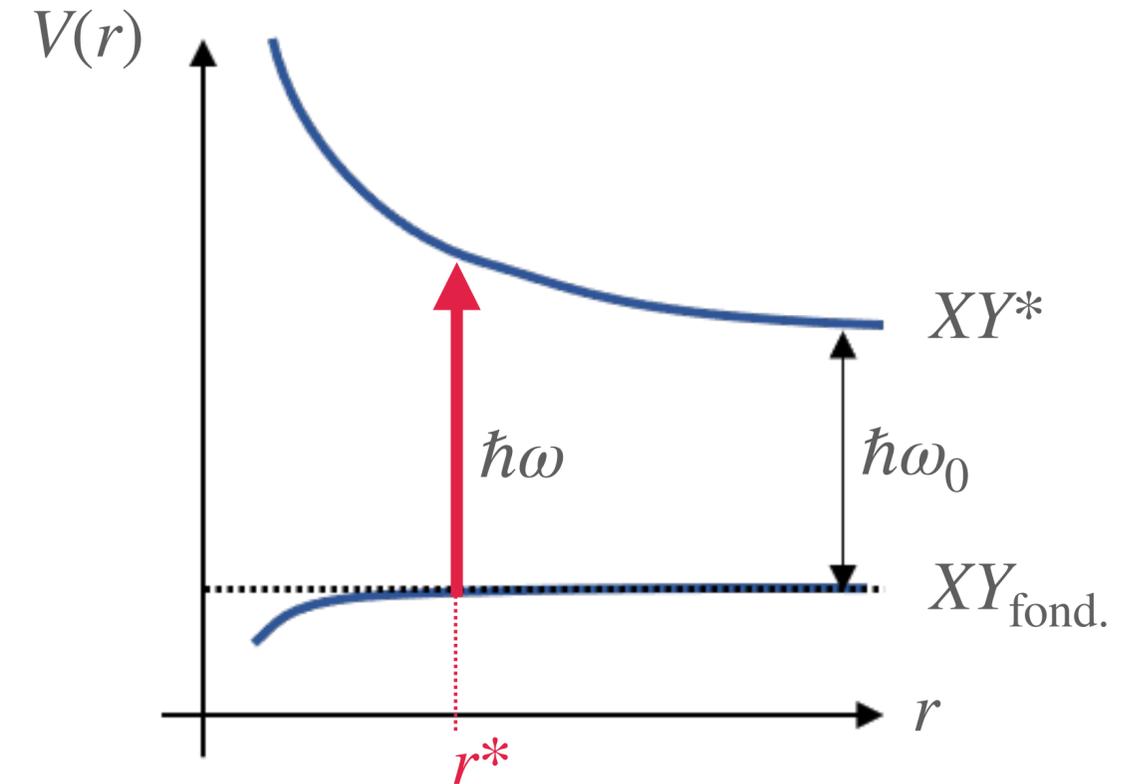
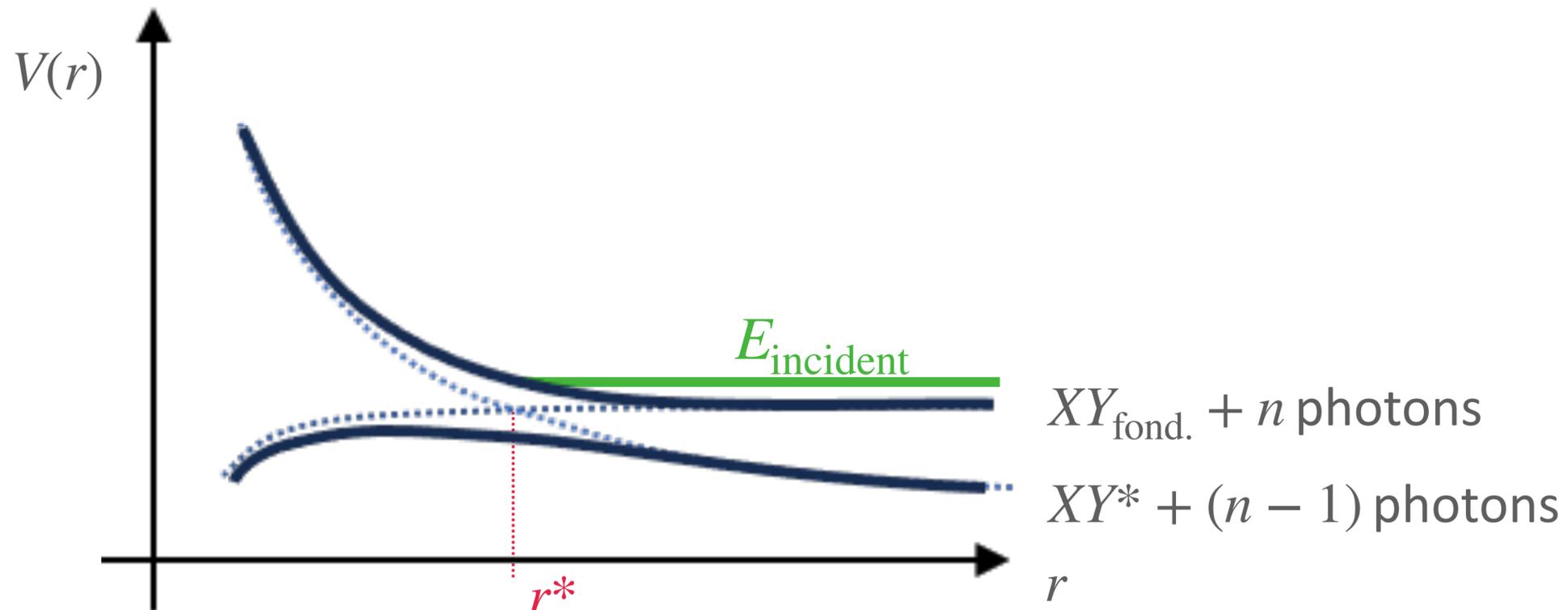
Groupe de Boulder ($^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$):
Ni et al., Science 2008

Le principe d'un bouclier électromagnétique

Supposons que l'on dispose du diagramme d'énergie pour deux molécules X et Y voisines l'une de l'autre

On applique une onde électromagnétique désaccordée "sur le bleu" de la résonance : $\omega > \omega_0$

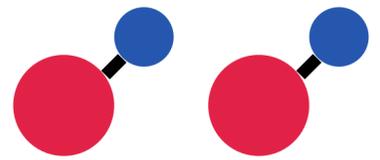
Etats habillés par l'onde électromagnétique :



Bouclier mis en place autour de r^*

En pratique, $r^* \sim 50 \text{ nm}$

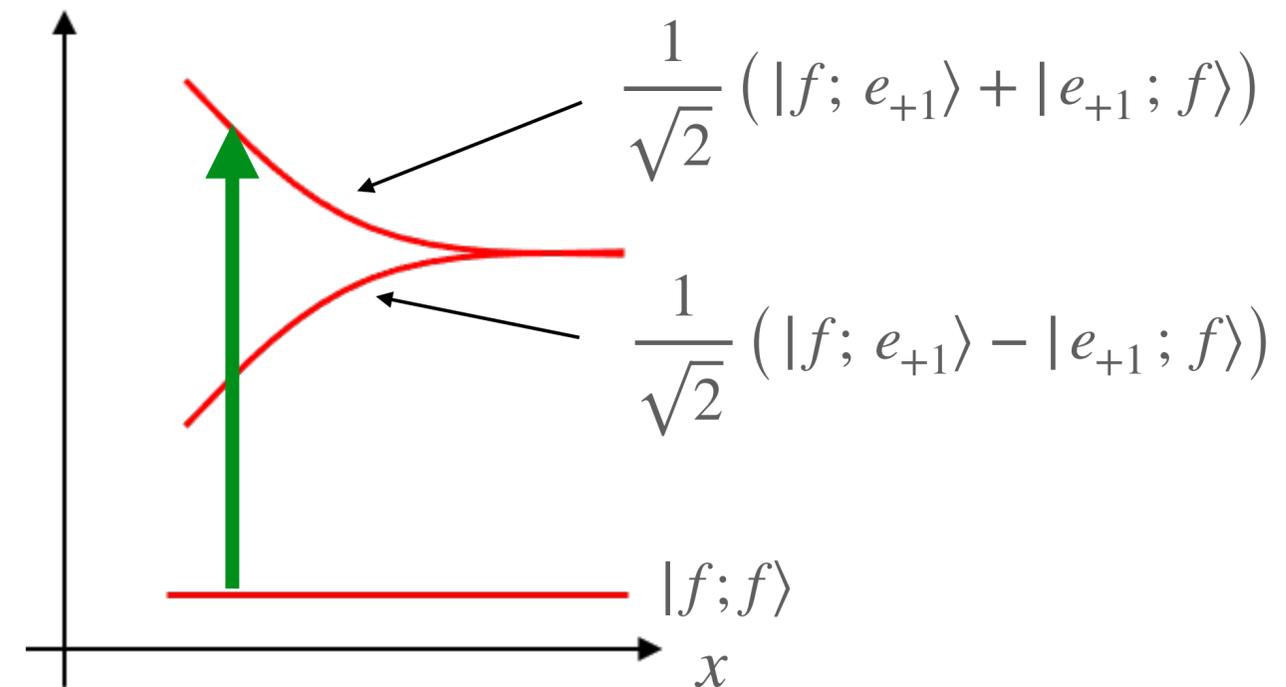
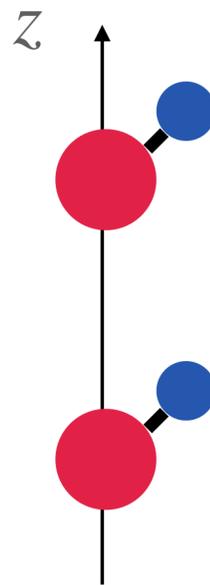
Interactions dipolaires électriques et bouclier



On s'intéresse aux deux états d'énergie rotationnelle les plus bas pour chaque molécule : $J = 0$ et $J = 1$

$$\begin{array}{cccc} \underline{e_{-1}} & \underline{e_0} & \underline{e_{+1}} & |J = 1, m\rangle = |e_m\rangle \\ & \text{—————} & & |J = 0\rangle = |f\rangle \end{array}$$

Couplage dipôle-dipôle résonnant



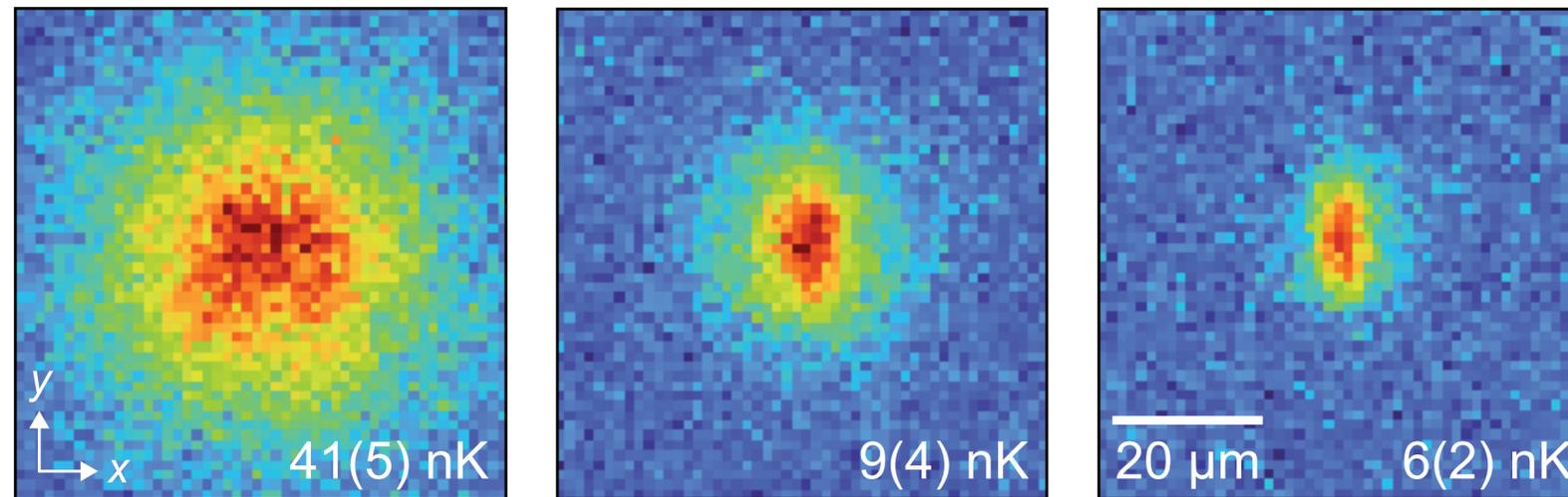
Une micro-onde désaccordée sur le bleu de la transition $J = 0 \rightarrow J = 1$ forme un bouclier

Le premier condensat moléculaire

Bigagli et al., arXiv 2312.10965
groupe de S. Will, Columbia Univ.

Molécules Na Cs refroidies par évaporation dans un piège optique

30 000 molécules à 700 nK \longrightarrow 200 molécules à 6 nK



durée de vie du condensat
 ~ 2 s

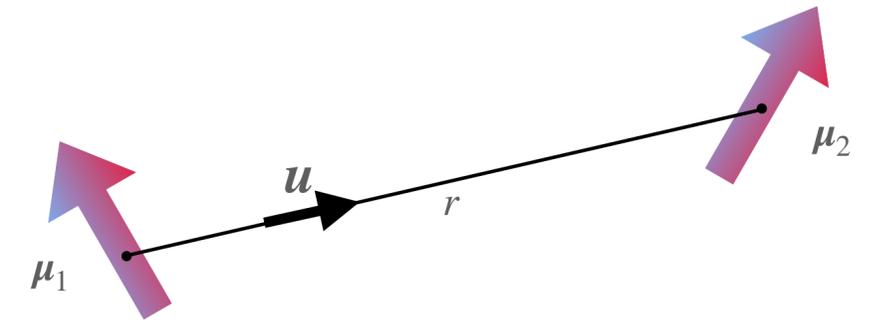
Double bouclier micro-onde :

- Répulsion à courte distance
- Suppression d'un puits attractif à longue distance qui induit des pertes par recombinaison

En résumé

Mise en place du formalisme pour décrire l'interaction entre dipôles

$$V_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi r_{12}^3} [\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2 - 3(\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{\mu}_2 \cdot \boldsymbol{u})]$$

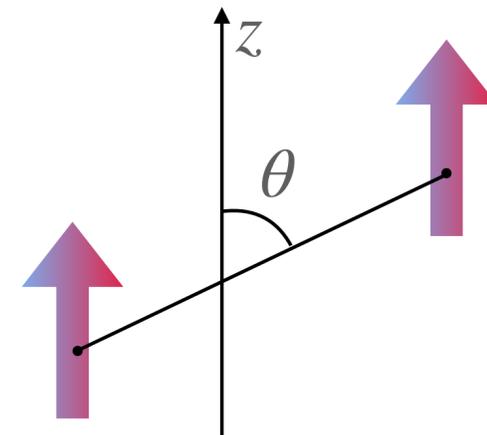


Introduction de la longueur a_{dd} pour caractériser le couplage dipôle-dipôle

$$a_{\text{dd}} \equiv \frac{1}{3} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m\mu^2}{\hbar^2}$$

Pour des dipôles tous alignés selon z par un champ magnétique extérieur, on écrira

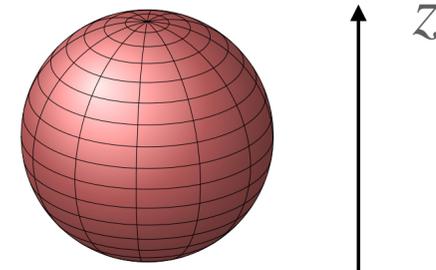
$$V_{12} = \frac{3\hbar^2 a_{\text{dd}}}{mr^3} (1 - 3 \cos^2 \theta)$$



Prochain cours

Une assemblée d'atomes avec des interactions magnétiques significatives est-elle stable ?

Atomes confinés dans un piège harmonique isotrope, $U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$,
avec leur moment magnétique aligné selon l'axe z



Le caractère attractif de l'interaction dipôle-dipôle peut-il favoriser un état très allongé, voire une implosion dans le plan xy ?

