

Chapitre 2

Dynamique des solitons brillants et méthode IST

Sommaire

1	Évolution temporelle d'un soliton	2
1-1	Modes propres d'un soliton?	2
1-2	Oscillations amorties	3
1-3	Etude expérimentale	4
1-4	Cas d'une (relativement) grande déviation initiale	5
2	La méthode IST	6
2-1	Rappel : décomposition en modes propres	6
2-2	Les opérateurs de Lax	7
2-3	Les données de diffusion associées à \hat{L}	8
2-4	L'évolution des données de diffusion	10
2-5	L'inversion des données de diffusion	11
3	Le soliton fondamental	11
3-1	Le soliton fondamental au repos	11
3-2	Variantes autour du soliton au repos	13
3-3	Le soliton fondamental en mouvement	13
4	Solitons d'ordre supérieur	15
4-1	N solitons de vitesses différentes	15
4-2	Les multi-solitons (ou solitons composites)	16
4-3	Observations expérimentales	18
4-4	Peut-on décomposer un multi-soliton?	19

Dans le chapitre précédent, nous sommes partis de l'équation de Schrödinger non linéaire pour obtenir la forme d'un soliton brillant, un objet pouvant être stationnaire ou se déplacer à vitesse constante. Nous avons mis la fonction d'onde du soliton sous la forme $\psi(x) = \psi_0 / \cosh(x/2x_0)$, et nous avons établi le lien entre la largeur x_0 du soliton et le nombre de particules qu'il contient.

Nous avons également montré que les solitons sont des objets robustes : deux solitons brillants ressortent intact d'une collision binaire, quelles que soient leurs masses et leurs vitesses. Dans ce chapitre, nous allons continuer à explorer cette robustesse des solitons brillants. Nous allons considérer en particulier une préparation imparfaite. Elle peut résulter par exemple d'une largeur mal adaptée à son nombre d'atomes, ou encore d'une enveloppe qui n'a pas la forme canonique en $1/\cosh x$. Nous allons voir que, dans ces cas, le paquet d'ondes évolue en oscillant et en éjectant des particules, pour finir par former un soliton stationnaire, un peu moins gros que l'objet de départ, mais qui est une solution exacte de l'équation de Schrödinger non linéaire.

Cette robustesse a été à la base de la suggestion d'utiliser des solitons lumineux pour les télécommunications par fibre optique [voir HAUS & WONG (1996) pour une revue]. Notons toutefois que l'implémentation de cette technique s'est finalement heurtée à des problèmes pratiques et que cette voie n'a pas connu le succès escompté (HASEGAWA 2022; DUDLEY, FINOT et al. 2023).

Dans ce chapitre, nous allons d'abord illustrer quelques facettes de cette robustesse, avant de la replacer dans le contexte général des systèmes intégrables. Nous présenterons pour cela la méthode *d'inversion des données de diffusion* (Inverse Scattering Transform, IST) pour le cas de l'équation de Schrödinger non linéaire. Nous verrons que les solitons sont associés à des valeurs propres bien particulières d'un problème spectral, et que ces valeurs propres restent constantes dans le temps : la robustesse des solitons s'en déduit immédiatement.

Nous terminerons ce chapitre par l'étude de "multi-solitons", des solitons composites formés par la superposition de solitons élémentaires, qui forment eux aussi des structures stables mais moins robustes que les solitons de base, et qui ont récemment été mis en évidence avec des gaz d'atomes froids.

1 Évolution temporelle d'un soliton

1-1 Modes propres d'un soliton ?

Un soliton brillant est un paquet d'ondes stationnaire qui résulte de l'équilibre entre deux phénomènes opposés : l'énergie cinétique est minimisée en prenant le paquet d'ondes le plus grand possible ; l'énergie d'interaction est au contraire minimisée en prenant le paquet d'ondes le plus concentré possible. Si on note ℓ la taille de ce paquet d'ondes, on a pour ces deux contributions (à des facteurs numériques sans importance ici) :

$$E_{\text{cin}} = N \frac{\hbar^2}{m\ell^2} \quad E_{\text{int}} = -N^2 \frac{|g|}{\ell} \quad (1)$$

de sorte que l'énergie totale $E_{\text{cin}} + E_{\text{int}}$ a l'allure représentée sur la figure 1, avec un minimum pour $\ell = x_0$ avec $x_0 \equiv \hbar^2/(Nm|g|)$, un résultat que nous avons déjà trouvé au chapitre précédent.

Cette figure suggère l'idée que si l'on prépare le paquet d'ondes avec une taille voisine de x_0 , on va pouvoir observer de petites oscillations de la taille du soliton, ce qui correspondrait à un mode propre *discret* du soliton. Cette idée est *stricto sensu* incorrecte, comme nous allons l'expliquer maintenant.

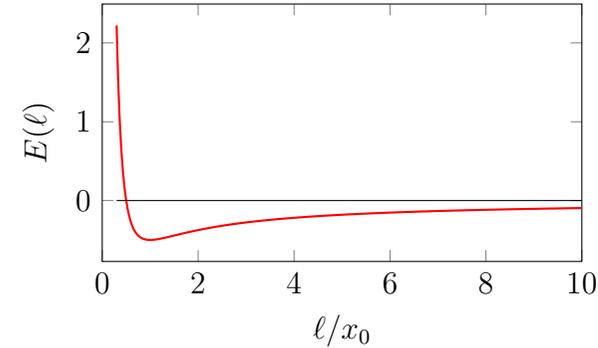


FIGURE 1. Variation de l'énergie totale avec la taille ℓ du paquet d'ondes.

Pour aborder le problème, on peut utiliser la méthode de Bogoliubov, que nous avons déjà présentée au chapitre précédent pour étudier l'instabilité modulationnelle. On s'intéresse à l'évolution d'une petite perturbation de la condition initiale ψ_0 en posant

$$\psi(x, t) = \{ \psi_0(x) + \epsilon [U(x)e^{-i\omega t} + V(x)e^{i\omega t}] \} e^{-i\mu t/\hbar}, \quad (2)$$

où $\psi_0(x)$ représente ici la fonction d'onde du soliton non perturbé, variant comme $1/\cosh(x/2x_0)$, avec le potentiel chimique $\mu = -mg^2N^2/(8\hbar^2)$. La quantité $\hbar\omega$ représente l'énergie à apporter au soliton pour exciter le mode propre en question, les fonctions $U(x)$ et $V(x)$ caractérisent la structure spatiale de ce mode et $\epsilon \ll 1$ est le paramètre du développement perturbatif. On reporte cette expression pour $\psi(x, t)$ dans l'équation de Schrödinger non linéaire

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + g|\psi|^2\psi \quad (3)$$

et on obtient alors à l'ordre 1 en ϵ un système différentiel linéaire pour les fonctions $U(x)$ et $V(x)$:

$$\begin{aligned} (\mu + \hbar\omega) U &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 - 2|g|\psi_0^2 \right] U - |g|\psi_0^2 V \\ (\mu - \hbar\omega) V &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 - 2|g|\psi_0^2 \right] V - |g|\psi_0^2 U. \end{aligned} \quad (4)$$

La résolution de ce système (que nous n'effectuerons pas ici) montre

que tous ces modes propres (sauf deux d'entre eux, voir remarque ci-dessous) varient comme $e^{\pm ikx}$ pour $|x| \rightarrow +\infty$ avec $k \in \mathbb{R}$; ce sont donc des ondes progressives non localisées (KAUP 1990; CASTIN & HERZOG 2001). Le spectre en énergie de ces modes délocalisés est

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + |\mu|, \quad (5)$$

ce qui signifie que pour les exciter, il faut d'abord payer l'énergie $|\mu|$ pour extraire une particule du soliton, puis l'énergie cinétique $\hbar^2 k^2/2m$ pour la mettre en mouvement avec l'impulsion $\hbar k$. Il n'y a donc pas de mode propre *discret*, localisé au voisinage du soliton et d'énergie $\hbar\omega$ inférieure à $|\mu|$, qui correspondrait par exemple à une oscillation non amortie de la taille du soliton autour de sa valeur d'équilibre x_0 .

Remarque 1. Il existe en fait deux modes localisés, de fréquence $\omega = 0$, qui correspondent au fait que l'on peut, sans payer d'énergie, changer la position ou la phase du soliton. Ce sont les deux modes de Goldstone qui correspondent à l'invariance de jauge (pour la phase) et à l'invariance par translation (pour la position). Leur existence n'invalidé en rien notre conclusion sur l'absence de modes propres localisés qui correspondraient à une oscillation non amortie de la largeur du soliton.

Remarque 2. L'absence d'autres modes localisés, correspondant par exemple à un mode d'oscillation de la largeur du soliton, est une conséquence du caractère intégrable de l'équation de Schrödinger non linéaire comme nous allons le voir dans les sections suivantes. Si on modifie cette équation d'évolution en lui ajoutant des termes, même petits, qui brisent l'intégrabilité, on peut alors voir apparaître des modes localisés comme discuté par KIVSHAR, PELINOVSKY et al. (1998) et PELINOVSKY, KIVSHAR et al. (1998).

1-2 Oscillations amorties

L'absence de modes propres localisés n'empêche pas d'observer pendant une durée appréciable des oscillations de l'amplitude et de la largeur d'un soliton préalablement perturbé. Pour s'en convaincre, on peut

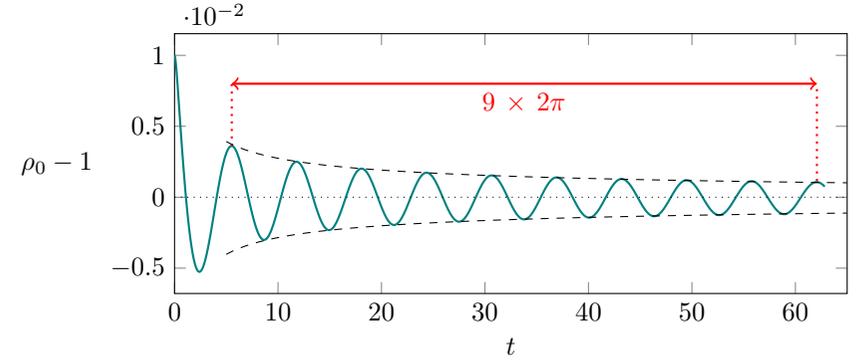


FIGURE 2. Oscillations amorties de la densité centrale $\rho_0(t) = |u(0,t)|^2$ d'un paquet solitonique avec la condition initiale (10) pour $\epsilon = 0.01$. Les courbes noires tiretées correspondent à une décroissance de l'enveloppe des oscillations en $1/\sqrt{t}$. Calcul fait sur une boîte de longueur 640 avec une discrétisation sur 32768 points.

d'abord se tourner vers une simulation numérique. On considère l'équation de Schrödinger non linéaire en coordonnées réduites¹

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0 \quad (7)$$

dont un soliton particulier est donné par

$$u(x) = \frac{1}{\cosh x}, \quad (8)$$

de masse M et d'énergie E données par

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dx = 2 \quad E = \int_{-\infty}^{+\infty} (|\partial_x u|^2 - |u|^4) dx = -\frac{2}{3}. \quad (9)$$

On montre sur la figure 2 l'évolution de la densité centrale associée à la fonction $u(x, t)$ en prenant pour condition initiale

$$u(x, 0) = \frac{\sqrt{1+\epsilon}}{\cosh[x(1+\epsilon)]} \quad \text{avec } \epsilon \ll 1. \quad (10)$$

1. Rappelons le choix d'unités de longueur et de temps qui conduit à cette équation :

$$x_0 = \frac{\hbar^2}{Nm|g|} \quad t_0 = \frac{2m\alpha_0^2}{\hbar}. \quad (6)$$

On a donc toujours un état de masse $\int |u(x,0)|^2 dx = 2$, mais de densité centrale légèrement trop grande et de largeur légèrement trop petite (par un facteur $1 + \epsilon$) pour correspondre au soliton stationnaire (8).

L'évolution dans le temps de la densité centrale révèle une oscillation amortie, avec une décroissance en $1/\sqrt{t}$ et une asymptote très légèrement inférieure à 1. Le fait que l'excitation décroisse de manière irréversible est caractéristique d'un couplage à un continuum : si on avait excité seulement un mode discret, l'oscillation se ferait à la fréquence ω de ce mode sans amortissement. Aux temps longs, on retrouve un soliton stationnaire, de masse légèrement réduite par rapport à la masse initiale.

L'interprétation du résultat montré en figure 2 est simple dans le cadre de l'analyse de Bogoliubov : des modes non localisés sont excités par le choix $\epsilon \neq 0$ en (10) et l'évolution dans le temps de ces modes correspond à une émission de particules ou de rayonnement (selon la nature des objets décrits). La période de l'oscillation est en bonne approximation $2\pi\hbar/\mu$ (2π pour ces unités réduites), ce qui signifie que ce sont essentiellement des modes en bas du continuum (5) qui sont excités². Par ailleurs, on peut comprendre la loi de décroissance en $1/\sqrt{t}$ de la façon suivante. Décomposons l'état initial $u(x, 0)$ sur l'état solitonique final, $u_s(x)$, auquel s'ajoute le petit paquet d'ondes $\delta u(x, 0)$ formé par les modes de Bogoliubov. Initialement, ce paquet d'ondes est localisé au niveau de $u(x, 0)$, mais on sait qu'il va s'étaler puisque les modes de Bogoliubov ne sont pas liés. Sa largeur va augmenter linéairement en temps et son amplitude centrale va donc décroître comme $1/\sqrt{t}$, puisque sa norme doit rester constante au cours du temps. L'oscillation décroissante de $|u(0, t)|^2$ représentée en figure 2 montre l'interférence entre $u_s(x)$ et $\delta u(0, t)$.

Le calcul de la masse évaporée dans ce cas particulier est présenté par CARR & CASTIN (2002), qui montrent que c'est un terme d'ordre 2 en ϵ , donc très faible en valeur relative ($\sim 10^{-4}$) pour l'exemple de la figure 2. Nous verrons plus loin comment la méthode IST permet de calculer directement la masse du soliton atteint aux temps longs, en résolvant le problème aux valeurs propres de l'opérateur de Lax \hat{L} pour la condition initiale $u(x, 0)$.

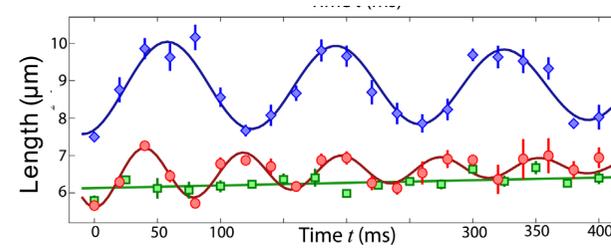


FIGURE 3. Oscillations de la longueur d'un nuage d'atomes de césium confinés dans un piège harmonique allongé. Points bleus : régime condensat de Bose-Einstein standard (interactions répulsives). La fréquence d'oscillation est égale à $\sim \sqrt{3} \times$ la fréquence du confinement axial. Points rouges : régime solitonique (interactions attractives). L'oscillation amortie correspond à un "mode propre" du soliton et elle est semblable à celle montrée en figure 2. Les points verts correspondent également au régime solitonique, mais l'excitation du mouvement axial est négligeable. Figure extraite de DI CARLI, COLQUHOUN et al. (2019).

1-3 Etude expérimentale

DI CARLI, COLQUHOUN et al. (2019) ont étudié la variation dans le temps de la largeur d'un soliton préparé dans un piège harmonique très allongé (figure 3). Les fréquences transverses de ce piège sont de l'ordre de 100 Hz alors que la fréquence longitudinale peut être variée entre 1 et 10 Hz. Les auteurs ont utilisé des atomes de césium formant initialement un condensat de Bose-Einstein "standard", avec environ 2000 atomes en interaction répulsive. Pour ce condensat (points bleus de la figure 3), on peut exciter un mode de "respiration" pour lequel la longueur du condensat oscille avec une fréquence égale à $\sqrt{3}\omega_x$, comme attendu théoriquement (MENOTTI & STRINGARI 2002).

Les auteurs se sont ensuite placés au voisinage d'une résonance de Fano-Feshbach pour faire basculer la longueur de diffusion d'une valeur positive ($\sim 7 a_0$ où a_0 représente le rayon de Bohr) à $-5 a_0$. Ils forment alors un soliton brillant et observent une oscillation plus rapide et amortie de la longueur du nuage (points rouges de la figure 3). Ce "mode" correspond à l'oscillation décrite plus haut (cf. figure 2).

DI CARLI, COLQUHOUN et al. (2019) ont vérifié que la fréquence as-

². Plus précisément, c'est la valeur finale du potentiel chimique μ qui détermine la fréquence d'oscillation, comme discuté par SROYNGOEN & ANGLIN (2025).

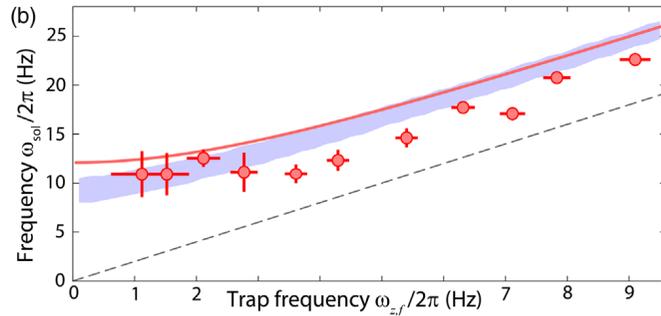


FIGURE 4. Variation de la fréquence de l'oscillation de la longueur du soliton avec la fréquence axiale du piège confinant les atomes. La limite d'une fréquence de confinement nulle correspond à un soliton libre. Zone colorée : résultat d'une résolution numérique de l'équation de Schrödinger non linéaire 1D pour un nombre d'atomes entre 1300 et 1500. La ligne tiretée donne la prédiction pour un gaz parfait. Figure extraite de DI CARLI, COLQUHOUN *et al.* (2019).

sociée aux oscillations amorties de la longueur du soliton devenait quasi-indépendante de la fréquence axiale du piège quand on diminuait fortement cette fréquence (figure 4). Cette limite correspond donc bien à une caractéristique intrinsèque du soliton. Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec les prédictions théoriques basées sur la résolution numérique de l'équation de Schrödinger non linéaire à une dimension (zone grisée de la figure 4).

1-4 Cas d'une (relativement) grande déviation initiale

L'émergence d'un soliton aux temps longs n'est pas restreinte au cas où la condition initiale est proche d'une fonction d'onde solitonique. Nous montrons en figures 5 et 6 l'évolution d'une fonction d'onde initialement triangulaire sous l'effet de l'équation adimensionnée (7). On voit qu'au prix d'une perte d'environ 1% des particules, la fonction d'onde évolue vers une solution solitonique $\kappa / \cosh(\kappa x)$. Les particules manquantes sont "rayonnées" et forment donc un fond de densité asymptotiquement nulle à la limite d'une boîte de calcul de longueur L infinie. Pour ces calculs, on a pris $L = 640$.

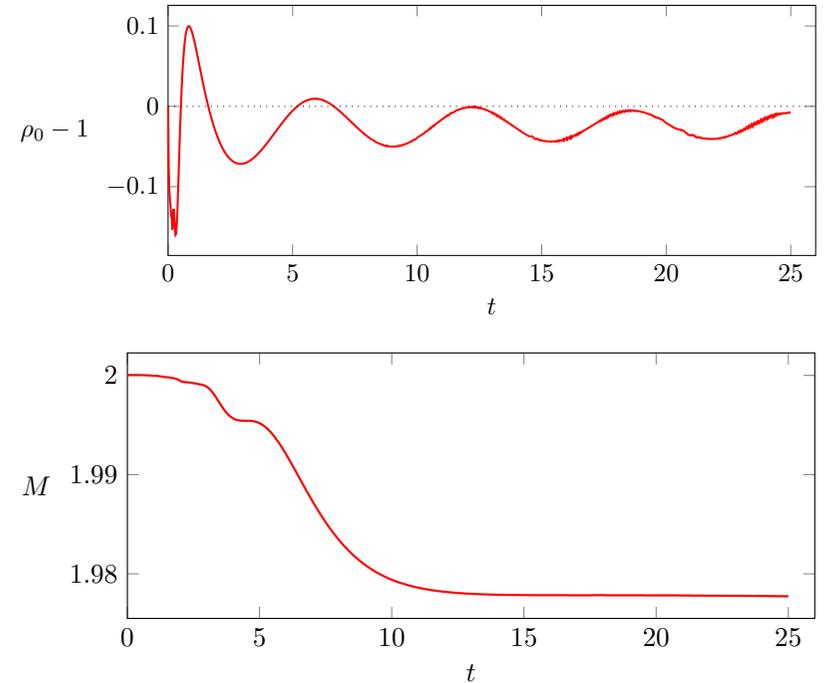


FIGURE 5. Évolution d'une fonction d'onde initiale triangulaire. Le nombre d'atomes N_s est défini comme $\int_{-a}^{+a} |u(x,t)|^2 dx$ avec le choix (quelque peu arbitraire) $a = 20$. Le calcul est fait sur un segment de longueur $L = 640$ avec une discrétisation sur 32 768 points.

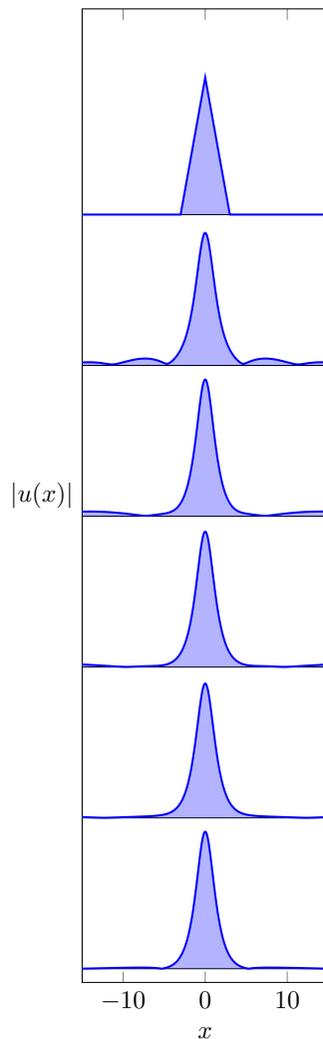


FIGURE 6. Évolution d'une fonction d'onde initiale triangulaire (cf. figure 5). De haut en bas, les temps sont $t = 0, 2.5, 5, \dots, 12.5$.

2 La méthode IST

La méthode IST pour *Inverse Scattering Transform*, c'est-à-dire l'inversion des données de diffusion, a été initiée par GARDNER, GREENE et al. (1967) pour résoudre l'équation KdV. Elle a ensuite été généralisée à d'autres équations non linéaires par plusieurs auteurs, en particulier par ZAKHAROV & SHABAT (1972) pour l'équation de Schrödinger non linéaire qui nous intéresse ici. Nous allons la présenter de manière schématique dans sa version proposée par LAX (1968). Nous allons nous limiter ici au cas où la fonction d'onde $u(x, t)$ tend vers 0 à l'infini [voir par exemple SHRIRA & GEOGJAEV (2010), ROBERTI, EL et al. (2021) et refs. in pour des conditions aux limites non nulles, qui permettent de retrouver les structures de Kuznetsov–Ma, d'Akhmediev et de Peregrine].

La méthode IST est une technique extrêmement puissante pour aborder de nombreux problèmes non-linéaires intégrables. Elle a fait l'objet de plusieurs livres de référence, comme par exemple ABLOWITZ & SEGUR (1981), NOVIKOV, MANAKOV et al. (1984), DRAZIN & JOHNSON (1989), ZAKHAROV (1991) et KOREPIN, KOREPIN et al. (1997). On pourra également consulter l'ouvrage de DAUXOIS & PEYRARD (2006) qui en fait une présentation remarquablement claire dans le cas de l'équation KdV.

2-1 Rappel : décomposition en modes propres

De façon simplifiée, on peut considérer que la méthode IST est une généralisation de la décomposition en modes propres pour résoudre l'évolution d'un système linéaire. Commençons donc par rappeler le principe de cette décomposition. On se donne une équation d'évolution, par exemple l'équation de Schrödinger (linéaire) pour une fonction $\psi(x, t)$ décrivant l'évolution d'une particule dans un potentiel $V(x)$ quelconque :

$$i\hbar\partial_t\psi = \hat{H}\psi \quad \text{avec} \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \quad (11)$$

Partant d'une condition initiale $\psi(x, 0)$ quelconque, il n'est pas toujours simple de trouver la fonction à un instant t ultérieur par intégration numérique. Mais on peut contourner cette difficulté en procédant en trois étapes :

— On résout le problème aux valeurs propres pour \hat{H} :

$$\hat{H}\phi_\lambda = E_\lambda \phi_\lambda. \quad (12)$$

Les valeurs propres E_λ peuvent être discrètes, correspondant aux états liés dans le potentiel $V(x)$, ou faire partir d'un continuum, correspondant aux états de diffusion.

— On décompose l'état initial $\psi(x, 0)$ sur la base propre $\{\phi_\lambda(x)\}$:

$$\psi(x, 0) = \sum_j c_{\lambda_j} \phi_{\lambda_j}(x) + \int c_\lambda \phi_\lambda(x) d\lambda. \quad (13)$$

où l'on a séparé de manière explicite les contributions de la partie discrète et de la partie continue du spectre de \hat{H} .

— On obtient la fonction d'onde solution à n'importe quel instant grâce à :

$$\psi(x, t) = \sum_j c_{\lambda_j} \phi_{\lambda_j}(x) e^{-i\lambda_j t/\hbar} + \int c_\lambda \phi_\lambda(x) e^{-i\lambda t/\hbar} d\lambda. \quad (14)$$

Si on souhaite déterminer l'évolution de plusieurs conditions initiales $\psi(x, 0)$, la première étape n'est à effectuer qu'une seule fois, le problème se ramenant ensuite à déterminer les coefficients $\{c_\lambda\}$ pour chacune des conditions initiales considérées.

2-2 Les opérateurs de Lax

Considérons l'équation de Schrödinger non linéaire sous sa forme adimensionnée pour des interactions attractives :

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0 \quad (15)$$

et partons d'une condition initiale $u(x, 0)$ localisée dans l'espace. Le principe de la méthode IST est de remplacer l'étude de l'évolution non linéaire de $u(x, t)$ par une évolution linéaire dans un espace différent, cette évolution étant elle-même traitée comme nous l'avons décrit au paragraphe précédent (§2-1). Ce principe est résumé sur la figure 7.

Dans la méthode de Lax (LAX 1968), qui implémente cette idée générale, on associe une paire d'opérateurs linéaires \hat{L} et \hat{A} à la fonction $u(x, t)$

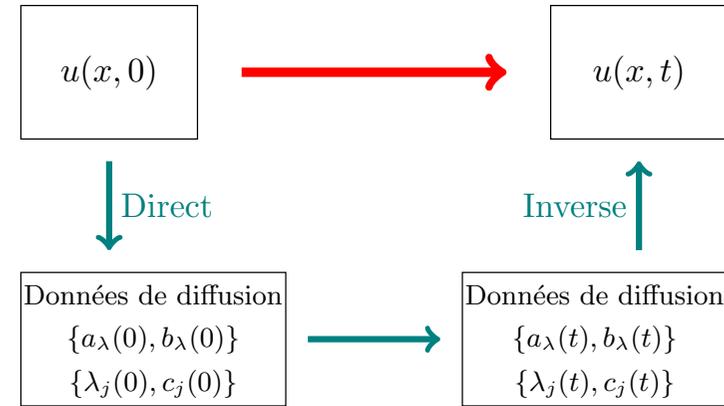


FIGURE 7. Principe de la méthode IST. On remplace le calcul (numérique) de l'évolution non linéaire (flèche rouge) par trois étapes a priori plus faciles car linéaires (flèches vertes).

solution de l'équation non linéaire étudiée. Les opérateurs \hat{L} et \hat{A} font intervenir la fonction u et ses dérivées spatiales; ils dépendent donc implicitement du temps puisque $u(x, t)$ dépend elle-même du temps, mais ils ne font pas intervenir ∂_t . Le lien entre l'équation vérifiée par u et la paire $\{\hat{L}, \hat{A}\}$ est le suivant :

$$u(x, t) \text{ solution de (15)} \Leftrightarrow \frac{d\hat{L}}{dt} = [\hat{A}, \hat{L}]. \quad (16)$$

Pour une équation non linéaire intégrable donnée, il n'y a pas unicité du couple d'opérateurs de Lax. Dans le cas qui nous intéresse ici, (eq. 15), ces opérateurs agissent dans l'espace des spineurs à deux composantes (ZAKHAROV & SHABAT 1972)

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_a(x) \\ \phi_b(x) \end{pmatrix} \quad \phi_{a,b}(x) \in \mathbb{C} \quad (17)$$

et un choix possible est

$$\hat{L} = i \begin{pmatrix} \partial_x & u \\ u^* & -\partial_x \end{pmatrix} \quad \hat{A} = i \begin{pmatrix} 2\partial_x^2 + |u|^2 & u_x + 2u\partial_x \\ u_x^* + 2u^*\partial_x & -2\partial_x^2 - |u|^2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Avec ce choix, on trouve :

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = i \begin{pmatrix} 0 & u_t \\ u_t^* & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

et

$$[\hat{A}, \hat{L}] = \begin{pmatrix} 0 & -u_{xx} - 2|u|^2 u \\ u_{xx}^* + 2|u|^2 u^* & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

d'où l'équivalence donnée en (16).

Notons que \hat{A} peut également s'écrire comme un trinôme en \hat{L} , avec des coefficients qui dépendent de x , mais qui ne font pas intervenir l'opérateur ∂_x :

$$\hat{A} = -2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{L}^2 + 2 \begin{pmatrix} 0 & -u \\ u^* & 0 \end{pmatrix} \hat{L} + i \begin{pmatrix} |u|^2 & -u_x \\ -u_x^* & -|u|^2 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Cette forme est utile pour formuler le problème de Lax sous une forme légèrement différente (voir appendice sur la méthode AKNS).

Le cas répulsif. Dans le cas d'interactions répulsives, pour lesquelles l'équation de Schrödinger non linéaire s'écrit $iu_t + u_{xx} - 2|u|^2 u = 0$, une paire de Lax (\hat{L}, \hat{A}) possible est :

$$\hat{L} = i \begin{pmatrix} \partial_x & -u \\ u^* & -\partial_x \end{pmatrix} \quad \hat{A} = i \begin{pmatrix} 2\partial_x^2 - |u|^2 & -u_x - 2u\partial_x \\ u_x^* + 2u^*\partial_x & -2\partial_x^2 + |u|^2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

On remarquera que dans ce cas, l'opérateur \hat{L} est hermitien et son spectre est constitué uniquement par les nombres réels.

Comme nous allons le voir maintenant, le spectre de \hat{L} donné en (18) pour le cas attractif n'est pas limité aux nombres réels et cet accroissement du spectre par rapport au cas répulsif est précisément dû à la possibilité de générer des solitons brillants, c'est-à-dire des solutions $u(x, t)$ localisées et ne se déformant pas au cours du temps.

2-3 Les données de diffusion associées à \hat{L}

Une fois l'équivalence (16) acquise, nous allons pouvoir remplacer l'évolution sous l'effet de l'équation de Schrödinger non linéaire par l'évolution de spineurs sous l'effet des opérateurs linéaires \hat{A} et \hat{L} selon le

schéma représenté en figure 7. Plus précisément, considérons le problème aux valeurs propres pour l'opérateur \hat{L} à un instant t donné :

$$\hat{L}\Phi = \lambda\Phi \quad \text{avec} \quad \Phi(x, t) = \begin{pmatrix} \phi_a(x, t) \\ \phi_b(x, t) \end{pmatrix} \quad (23)$$

soit en version développée :

$$i\partial_x\phi_a + iu\phi_b = \lambda\phi_a \quad (24)$$

$$-i\partial_x\phi_b + iu^*\phi_a = \lambda\phi_b \quad (25)$$

Ce système est voisin d'un problème aux valeurs propres pour une équation de Schrödinger (ou plutôt de Dirac) *linéaire*, à une dimension, avec la fonction $u(x)$ qui joue le rôle d'un potentiel localisé. En particulier, en dehors de la zone où $u(x)$ prend des valeurs significatives, ce problème aux valeurs propres se réduit à la résolution de

$$\partial_x\phi_a = -i\lambda\phi_a \quad \partial_x\phi_b = i\lambda\phi_b \quad (26)$$

ce qui donne à l'ordre le plus bas en $u(x)$:

$$x \rightarrow \pm\infty : \quad \phi_a \propto e^{-i\lambda x} \quad \phi_b \propto e^{i\lambda x}. \quad (27)$$

L'analogie avec l'équation de Schrödinger n'est pas parfaite car \hat{L} n'est pas auto-adjoint et ses valeurs propres λ peuvent être complexes. Par ailleurs, la fonction $u(x)$ qui joue le rôle de potentiel peut également être complexe. Cependant certaines caractéristiques générales subsistent :

- À un instant t donné, le spectre de \hat{L} se compose d'un continuum et de valeurs propres discrètes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
- La partie continue du spectre correspond à des états de diffusion, se propageant comme $e^{\pm i\lambda x}$ à l'infini. Il correspond à des valeurs de λ recouvrant l'ensemble des nombres réels. Pour chaque valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$, les solutions du système (24-25) forment un espace de dimension 2.
- Les valeurs propres discrètes sont associées à des fonctions propres Φ localisées là où la fonction u prend elle-même des valeurs significatives. Pour assurer la localisation, il faut que λ ait une partie imaginaire non nulle, $\lambda = \xi + i\eta$, pour assurer un comportement en $e^{-|\eta x|}$ à l'infini. Notons que l'existence de ces états liés ne dépend pas du

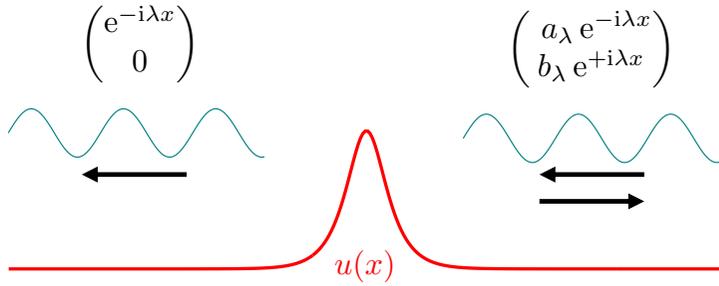


FIGURE 8. Les états de diffusion, états propres de l'opérateur \hat{L} de valeur propre λ réelle. Les données de diffusion correspondantes sont la valeur propre λ et les deux coefficients a_λ et b_λ .

signe (ou de la phase) du "potentiel" $u(x)$. Plus précisément si $(\phi_a, \phi_b)^T$ est un état lié dans le potentiel $u(x)$ pour la valeur propre λ , alors $(\phi_a, -\phi_b)^T$ sera un état lié dans le potentiel $-u(x)$ pour la même valeur propre.

Il est important de souligner dès maintenant que nous n'aurons pas besoin de connaître la forme exacte des fonctions propres $\Phi(x)$ pour mener à bien le programme de la méthode IST. Cette méthode repose uniquement sur le spectre des valeurs propres λ et sur le comportement asymptotique en $\pm\infty$ des fonctions propres.

Plus précisément, à un instant donné, par exemple à l'instant initial $t = 0$, nous allons associer à la fonction $u(x, 0)$ un certain nombre de *données de diffusion*, comme le coefficient de réflexion associé au "potentiel" $u(x, 0)$ et le comportement des états liés dans ce "potentiel". Nous montrerons ensuite que l'évolution dans le temps de ces données de diffusion est remarquablement simple.

Pour la partie continue du spectre (λ réel), on définit les coefficients a_λ et b_λ caractérisant les états de diffusion sous la forme (figure 8)

$$x \rightarrow -\infty : \quad \Phi_\lambda(x) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} \quad (28)$$

$$x \rightarrow +\infty : \quad \Phi_\lambda(x) \sim a_\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} + b_\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+i\lambda x} \quad (29)$$

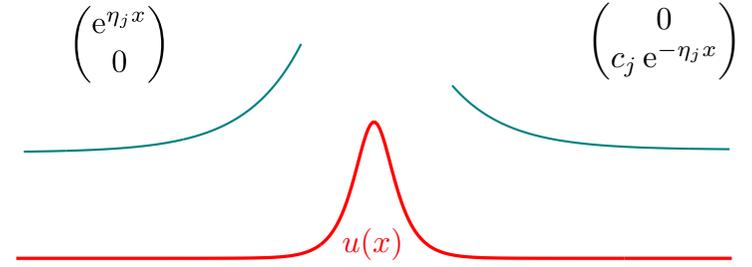


FIGURE 9. Un état lié, état propre de l'opérateur \hat{L} de valeur propre $\lambda_j = \xi_j + i\eta_j$, avec ici $\xi_j = 0$, $\eta_j > 0$. Les données de diffusion correspondantes sont la valeur propre et le coefficient c_j .

Pour la partie discrète du spectre, en plus de la connaissance des valeurs propres $\lambda_j = \xi_j + i\eta_j$, une quantité importante est le rapport des amplitudes de part et d'autre de l'endroit où la fonction u est localisée (figure 9) :

$$x \rightarrow -\infty : \quad \Phi_j(x) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\eta_j x} e^{-i\xi_j x} \quad (30)$$

$$x \rightarrow +\infty : \quad \Phi_j(x) \sim c_j \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\eta_j x} e^{i\xi_j x} \quad (31)$$

Nous avons privilégié ici des fonctions propres proportionnelles au spineur $(1, 0)^T$ quand $x \rightarrow -\infty$ [cf. (28) et (30)], ce qui pour les états liés impose une partie imaginaire positive pour la valeur propre λ . On peut également obtenir des valeurs propres de partie imaginaire négative en considérant le spineur $\bar{\Phi}$ conjugué à Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix} \quad \bar{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_b^* \\ -\phi_a^* \end{pmatrix} \quad (32)$$

En effet, si le spineur Φ est état propre de \hat{L} pour la valeur propre λ , le spineur $\bar{\Phi}$ est état propre pour la valeur propre λ^* . Dans ce qui suit, nous nous limiterons à la description du spectre dans le demi-plan complexe supérieur (incluant l'axe réel), la symétrie $\lambda \leftrightarrow \lambda^*$ étant sous-entendue.

Pour une fonction $u(x, t)$ donnée, le spectre de \hat{L} est donc formé par :

- l'ensemble de l'axe réel pour les états de diffusion,
- des valeurs propres discrètes en dehors de l'axe réel, conjuguées deux à deux, correspondant aux états localisés.

La première partie du programme de la figure 7 consiste donc à associer à la fonction initiale $u(x, 0)$ ces données de diffusion :

$$u(x, 0) \longrightarrow \text{données de diffusion : } \{a_\lambda(0), b_\lambda(0)\}, \{\lambda_j(0), c_j(0)\} \quad (33)$$

2-4 L'évolution des données de diffusion

Un point central du critère d'intégrabilité, lié à l'existence d'une paire d'opérateurs de Lax, réside dans la simplicité de l'évolution dans le temps des données de diffusion.

Commençons par introduire l'opérateur d'évolution $\hat{U}(t)$ entre 0 et t défini par

$$\frac{d\hat{U}}{dt} = \hat{A}(t)\hat{U}(t) \quad \text{avec} \quad \hat{U}(0) = \hat{1}. \quad (34)$$

Notons que contrairement à ce qu'on trouve en physique quantique où le rôle de \hat{A} est joué par un hamiltonien hermitien et où l'opérateur d'évolution est donc unitaire, cette propriété n'est généralement pas vérifiée par l'opérateur \hat{U} introduit ici. Toutefois, cette absence de la propriété d'unitarité ne va pas être un frein dans ce qui suit.

L'opérateur inverse \hat{U}^{-1} obéit quant à lui à l'équation d'évolution :

$$\frac{d\hat{U}^{-1}}{dt} = -\hat{U}^{-1}(t)\hat{A}(t) \quad (35)$$

comme on pourra s'en convaincre en calculant $\hat{U}(t+dt)\hat{U}^{-1}(t+dt)$ en fonction de $\hat{U}(t)\hat{U}^{-1}(t)$ à l'ordre 1 inclus en dt .

Une fois introduit cet opérateur d'évolution, on peut intégrer l'équation d'évolution pour l'opérateur \hat{L} :

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = [\hat{A}(t), \hat{L}(t)] \Leftrightarrow \hat{L}(t) = \hat{U}(t)\hat{L}(0)\hat{U}^{-1}(t). \quad (36)$$

Récrivons cette relation sous la forme

$$\hat{L}(t)\hat{U}(t) = \hat{U}(t)\hat{L}(0) \quad (37)$$

et faisons-la agir sur un état propre $\Phi_j(0)$ de l'opérateur $\hat{L}(0)$ à l'instant initial, associé à la valeur propre $\lambda_j(0)$:

$$\hat{L}(t) [\hat{U}(t)\Phi_j(0)] = \lambda_j(0) [\hat{U}(t)\Phi_j(0)]. \quad (38)$$

On en déduit que la valeur propre $\lambda_j(0)$ à l'instant initial reste valeur propre au cours du temps et que le vecteur propre associé est

$$\Phi_j(t) = \hat{U}(t)\Phi_j(0) \Leftrightarrow \frac{d\Phi_j}{dt} = \hat{A}(t)\Phi_j(t). \quad (39)$$

La partie discrète du spectre est donc invariante lors de l'évolution dans le temps. Nous verrons plus loin que cette partie discrète est associée aux solitons et cette invariance est donc la signature de la robustesse des solitons lors de l'évolution.

L'évolution des autres données de diffusion se déduit directement de ce qui précède. Dans la zone asymptotique $x \rightarrow \pm\infty$, la fonction $u(x, t)$ prend des valeurs négligeables de sorte que l'opérateur \hat{A} y est donné par [cf. (21)] :

$$x \rightarrow \pm\infty : \quad \hat{A} \approx -2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{L}^2 \quad (40)$$

ce qui donne, quand on le fait agir sur un état propre de \hat{L} et que l'on tient compte de (39) :

$$\frac{d\phi_a}{dt} = -2i\lambda^2\phi_a \quad \frac{d\phi_b}{dt} = 2i\lambda^2\phi_b. \quad (41)$$

Le système (28-29) devient à l'instant t

$$x \rightarrow -\infty : \quad \Phi_\lambda(x, t) \sim \begin{pmatrix} e^{-2i\lambda^2 t} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} \quad (42)$$

$$x \rightarrow +\infty : \quad \Phi_\lambda(x, t) \sim a_\lambda \begin{pmatrix} e^{-2i\lambda^2 t} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} + b_\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2i\lambda^2 t} \end{pmatrix} e^{+i\lambda x}. \quad (43)$$

En multipliant l'ensemble par $e^{2i\lambda^2 t}$, on en déduit pour la partie continue du spectre (états de diffusion, λ réel) :

$$a_\lambda(t) = a_\lambda(0) \quad b_\lambda(t) = b_\lambda(0) e^{4i\lambda^2 t} \quad (44)$$

Pour la partie discrète (états liés, λ avec une partie imaginaire non nulle), un raisonnement identique donne :

$$\lambda_j(t) = \lambda_j(0) \quad c_j(t) = c_j(0) e^{4i\lambda_j^2 t}. \quad (45)$$

On a donc rempli la deuxième partie du programme de la figure 7 :

$$\{a_\lambda(0), b_\lambda(0)\}, \{\lambda_j(0), c_j(0)\} \longrightarrow \{a_\lambda(t), b_\lambda(t)\}, \{\lambda_j(t), c_j(t)\} \quad (46)$$

2-5 L'inversion des données de diffusion

La troisième et dernière partie du programme de la figure 7 consiste à inverser les données de diffusion : connaissant les $a_\lambda(t), b_\lambda(t), \{\lambda_j(t), c_j(t)\}$ à l'instant t , peut-on reconstruire le "potentiel" qui leur est associé, en l'occurrence la fonction $u(x, t)$? Cette inversion est effectivement possible même si sa mise en pratique peut être délicate sur le plan numérique. Heureusement, même si l'on ne mène pas l'inversion jusqu'au bout, on peut déduire un grand nombre de propriétés intéressantes en considérant la structure formelle du processus d'inversion des données de diffusion.

Connaissant les données de diffusion, on introduit la fonction intermédiaire définie à un instant t donné :

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_\lambda(t)}{a_\lambda(t)} e^{i\lambda x} d\lambda + \sum_{j=1}^N c_j(t) e^{i\lambda_j x} \quad (47)$$

Cette fonction fait intervenir une intégrale sur le spectre continu de l'opérateur \hat{L} , avec λ allant de $-\infty$ à $+\infty$, ainsi qu'une somme sur les éventuelles valeurs propres discrètes, de partie imaginaire non nulle et positive.

Une fois $F(x, t)$ connue, on cherche les solutions K_1 et K_2 de la paire d'équations intégrales (équations de Marchenko)

$$0 = -K_1^*(x, y) + \int_x^{+\infty} K_2(x, s) F(y + s) ds + F(x + y) \quad (48)$$

$$0 = K_2^*(x, y) + \int_x^{+\infty} K_1(x, s) F(y + s) ds \quad (49)$$

où la dépendance en t , qui joue dans ces deux équations le rôle d'un paramètre constant, est omise pour les différentes fonctions K_1, K_2 et F . Dans

le cas général, cette résolution est l'étape nécessitant le plus gros effort numérique, mais cela reste une opération linéaire. Une fois qu'on l'a effectuée, on obtient la fonction $u(x, t)$ solution de l'équation non linéaire de départ :

$$u(x, t) = 2K_1(x, x, t) \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} |u(x, t)|^2 dx = -2K_2(x, x, t). \quad (50)$$

Nous ne présenterons pas ici la justification de cette procédure et nous renvoyons le lecteur vers les articles fondateurs de ZAKHAROV & SHABAT (1972) et ABLOWITZ, KAUP et al. (1974). Signalons simplement qu'elle repose sur l'analyse du comportement à grand λ des solutions du problème aux valeurs propres initial $\hat{L}\Phi = \lambda\Phi$, la fonction inconnue $u(x, t)$ apparaissant comme coefficient du terme en λ^{-1} dans le développement des fonctions propres Φ .

Remarque. Une simplification notable apparaît pour des fonctions $u(x)$ telles que le coefficient de réflexion $b(\lambda)$ s'annule pour toutes les valeurs de λ , puisque seule subsiste alors la somme discrète sur les états liés dans (47). C'est en fait ce cas que nous allons discuter en priorité dans ce qui va suivre car il correspond au cas de solitons "purs".

3 Le soliton fondamental

3-1 Le soliton fondamental au repos

Comme premier exemple de la méthode IST, intéressons-nous au soliton fondamental au repos. Prenons pour fonction initiale

$$u(x, 0) = \frac{1}{\cosh x} \quad (51)$$

pour laquelle on sait qu'elle correspond à un soliton immobile :

$$u(x, t) = \frac{e^{it}}{\cosh x}. \quad (52)$$

Nous allons vérifier que nous pouvons retrouver ce résultat par la méthode IST en déterminant de manière explicite les données de diffusion, c'est-à-

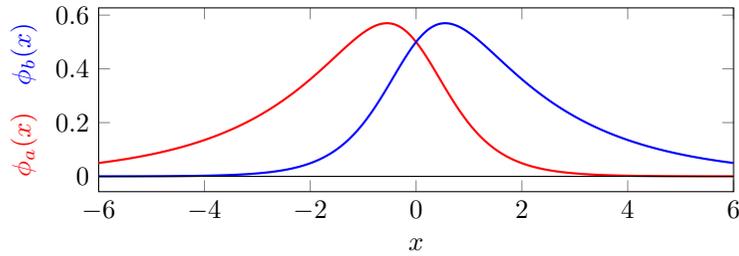


FIGURE 10. Fonction propre $\Phi_1 = (\phi_a, \phi_b)^T$ de l'opérateur \hat{L} associée à la valeur propre $\lambda_1 = i/2$ pour le choix $u(x) = 1/\cosh(x)$.

dire les coefficient de réflexion $b(\lambda)$ pour les états de diffusion et le spectre d'états liés.

Le calcul du coefficient de réflexion $b(\lambda)$ passe par l'utilisation de fonctions hypergéométriques et indique que pour le choix (51), le coefficient de réflexion $b(\lambda)$ s'annule pour tous les états de diffusion (SATSUMA & YAJIMA 1974) :

$$\text{choix (51): } b(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (53)$$

Par conséquent, seule la partie discrète du spectre de \hat{L} contribue dans ce cas à la fonction $F(x)$ définie en (47).

Considérons donc cette partie discrète. La résolution de l'équation aux valeurs propres

$$\hat{L}\Phi = \lambda\Phi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \partial_x \phi_a + \frac{\phi_b}{\cosh x} = -i\lambda \phi_a \\ \partial_x \phi_b - \frac{\phi_a}{\cosh x} = i\lambda \phi_b \end{cases} \quad (54)$$

passé également par l'utilisation de fonctions hypergéométriques et elle permet de montrer qu'il y a une seule valeur propre dans le demi-plan complexe supérieur³ en dehors de l'axe réel (SATSUMA & YAJIMA 1974) :

$$\lambda_1 = i/2 \quad \Phi_1(x) = \begin{pmatrix} e^{x/2}/(1 + e^{2x}) \\ e^{-x/2}/(1 + e^{-2x}) \end{pmatrix} \quad (55)$$

3. Rappelons que les valeurs propres du spectre discret apparaissent par paires (λ_j, λ_j^*) . Il y a donc également la valeur propre $-i/2$ dans le plan complexe inférieur.

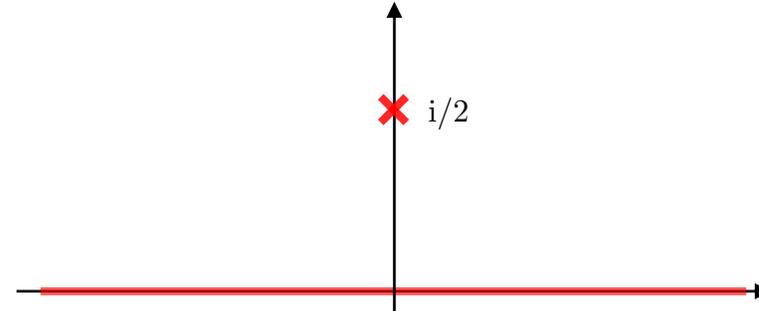


FIGURE 11. Spectre de l'opérateur \hat{L} dans le demi-plan complexe supérieur pour la fonction $u(x) = 1/\cosh x$, c'est-à-dire un soliton au repos de masse 2. Ce spectre est composé de l'axe réel et du point $\lambda_1 = i/2$.

de sorte que $c_1(0) = 1$. Ces deux composantes sont tracées en figure 10. L'évolution des données de diffusion indiquée en (45) se réduit donc à :

$$\lambda_1(t) = \frac{i}{2} \quad c_1(t) = e^{-it}. \quad (56)$$

et la fonction $F(x)$ s'écrit à l'instant t :

$$F(x, t) = e^{-it} e^{-x/2}. \quad (57)$$

Cette unique valeur propre dans le demi-plan complexe supérieur (figure 11) est la signature du soliton choisi en (52), comme nous allons maintenant le montrer.

Pour cette fonction $F(x)$, la résolution du système (48-49) est très simple car on peut chercher des solutions sous la forme

$$K_j(x, y, t) = L_j(x, t) e^{-y/2} \quad j = 1, 2. \quad (58)$$

Ce système s'écrit alors

$$\begin{cases} 0 = -L_1^* + e^{-it-x} L_2 + e^{-it-x/2} \\ 0 = L_2^* + e^{-it-x} L_1 \end{cases} \quad (59)$$

et sa solution est

$$L_1(x, t) = \frac{e^{it-x/2}}{1 + e^{-2x}} \quad L_2(x, t) = -\frac{e^{-3x/2}}{1 + e^{-2x}} \quad (60)$$

On peut alors utiliser la solution générale (50) et vérifier que l'on retrouve bien le résultat exact déjà connu (52). Bien évidemment, l'utilisation de tout l'attirail de la méthode IST pour ce cas simple du soliton fondamental au repos semble disproportionné, mais cela permet de vérifier que le formalisme que nous avons présenté est bien sous contrôle. De plus, nous allons voir très bientôt comment utiliser ce même formalisme pour trouver des solutions nettement moins évidentes.

3-2 Variantes autour du soliton au repos

Soliton de position différente. Le choix de la fonction initiale $u(x, 0) = 1/\cosh(x - x_0)$ ne change pas non plus les coefficients $b(\lambda)$ qui restent nuls, ni la valeur propre discrète $\lambda_1 = i/2$. On retrouve le même système qu'en (54) après changement de variable $x \rightarrow x - x_0$, ce qui a pour effet de modifier la valeur de $c_1(0)$ qui devient

$$c_1(0) = e^{x_0} \tag{61}$$

La résolution de (48-49) se fait comme dans le cas $x_0 = 0$ et conduit à :

$$L_1(x, t) = \frac{e^{it}e^{-x/2}e^{x_0}}{1 + e^{-2(x-x_0)}} \quad L_2(x, t) = -\frac{e^{-3x/2}e^{2x_0}}{1 + e^{-2(x-x_0)}} \tag{62}$$

On en déduit alors la solution de l'équation de Schrödinger à l'instant t : $u(x, t) = e^{it}/\cosh(x - x_0)$.

Soliton de masse différente. Le soliton considéré en (51) a une masse égale à 2 :

$$\int |u(x, 0)|^2 dx = 2. \tag{63}$$

On peut bien sûr s'intéresser à d'autres solitons stationnaires :

$$u(x, 0) = \frac{\kappa}{\cosh(\kappa x)} \tag{64}$$

de masse et d'énergie données par :

$$M = \int |u(x, 0)|^2 dx = 2\kappa \quad E = \int (|\partial_x u|^2 - |u|^4) dx = -\frac{2}{3}\kappa^3. \tag{65}$$

Le traitement qui précède reste valable quelle que soit la valeur de κ . Plus précisément, (i) tous les coefficients de réflexion restent nuls et (ii) le système (54) se résout de manière identique par changement de variable $x' = \kappa x$, ce qui indique que la valeur propre associée au soliton est désormais :

$$\lambda_1 = i\kappa/2. \tag{66}$$

Elle reste donc imaginaire pure et on trouve à l'instant t

$$u(x, t) = \frac{\kappa}{\cosh(\kappa x)} e^{i\kappa^2 t}. \tag{67}$$

Soliton de phase différente. Si l'on change la phase de la condition initiale (51) en prenant $u(x, 0) = e^{i\varphi}/\cosh(x)$, on constate aisément qu'on retrouve le même système qu'en (54), moyennant la substitution $\phi_b \rightarrow \phi_b e^{-i\varphi}$. Les coefficients de réflexion $b(\lambda)$ sont toujours nuls et on garde la même unique valeur propre imaginaire pure $\lambda_1 = i/2$ dans le demi-plan complexe supérieur. La seule modification porte sur le coefficient $c_1(0)$ qui devient :

$$c_1(0) = e^{-i\varphi}. \tag{68}$$

La fonction $F(x)$ acquiert donc elle aussi la phase $e^{-i\varphi}$, la résolution de (48-49) étant ensuite inchangée. On arrive finalement à $u(x, t) = e^{i(t+\varphi)}/\cosh(x)$, comme attendu.

La comparaison de (61) et (68) est instructive : la modification du coefficient $c_1(0)$, toutes choses égales par ailleurs, permet de rendre compte d'un changement de phase ou d'une translation de la fonction initiale $u(x, 0)$ selon qu'on modifie la phase ou le module de c_1 .

3-3 Le soliton fondamental en mouvement

Toujours dans un schéma à un soliton, nous pouvons également prendre pour condition initiale

$$u(x, 0) = \frac{e^{ikx}}{\cosh x}. \tag{69}$$

Nous avons vu au chapitre précédent qu'elle représente un soliton dont l'enveloppe se propage à la vitesse $2k$. Vérifions que nous pouvons retrouver ce résultat par la méthode IST.

L'équation aux valeurs propres (23) admet toujours une et une seule solution pour λ dans le demi-plan complexe supérieur, mais cette valeur propre a désormais une partie réelle non nulle (figure 12) :

$$\lambda_1 = (i - k)/2 \quad \Phi_1(x) = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_1 x}/(1 + e^{2x}) \\ e^{+i\lambda_1 x}/(1 + e^{-2x}) \end{pmatrix} \quad (70)$$

dont on déduit

$$c_1(0) = 1 \quad c_1(t) = e^{i(k^2-1)t} e^{2kt} \quad F(x, t) = c_1(t) e^{-x/2} e^{-ikx/2}. \quad (71)$$

La résolution du système intégral (48-49) à un instant t donné peut là aussi s'effectuer en posant

$$K_j(x, y, t) = L_j(x, t) e^{(-1+ik)y/2} \quad (72)$$

et on trouve

$$L_1(x, t) = \frac{e^{i(1-k^2)t} e^{i(k-1)x/2} e^{2kt}}{1 + e^{-2(x-vt)}} \quad \text{avec } v = 2k \quad (73)$$

et finalement

$$u(x, t) = 2K_1(x, x, t) = \frac{e^{ikx} e^{i(1-k^2)t}}{\cosh(x-vt)}. \quad (74)$$

En résumé des deux paragraphes qui précèdent, le problème à un soliton fondamental

$$u(x, 0) = \frac{\kappa e^{ikx}}{\cosh(\kappa x)} \quad \longrightarrow \quad u(x, t) = \frac{\kappa e^{ikx}}{\cosh[\kappa(x-2kt)]} e^{i(\kappa^2-k^2)t} \quad (75)$$

est caractérisé à tout instant t par :

- un coefficient de réflexion $b(\lambda)$ nul pour tout λ réel, donc pour tous les états de diffusion issus de la résolution de $\hat{L}\Phi = \lambda\Phi$;
- une unique valeur propre λ dans le demi-plan complexe supérieur, et donc un unique état lié :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(i\kappa - k). \quad (76)$$

Cet état lié est associé au soliton, la partie imaginaire κ de la valeur propre caractérise la masse du soliton ($M = 2\kappa$) et la partie réelle k caractérise la vitesse de son enveloppe ($v = 2k$).

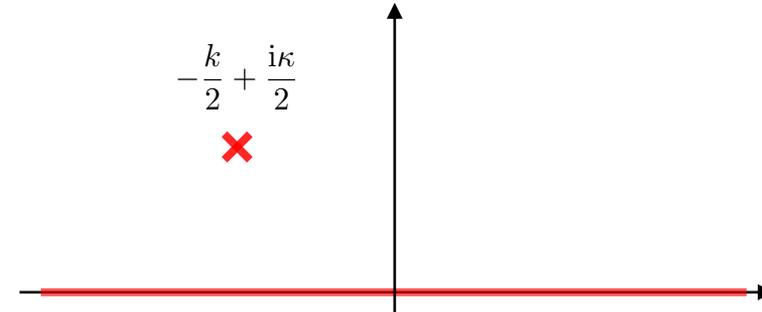


FIGURE 12. Spectre de l'opérateur \hat{L} dans le demi-plan complexe supérieur pour un soliton de masse 2κ et de vitesse $2k$. Ce spectre est composé de l'axe réel et du point $\lambda_1 = (-k + i\kappa)/2$.

Bilan. Les résultats que nous venons d'obtenir permettent de donner une vision plus large de la robustesse du soliton discutée en §1. Considérons d'abord une fonction $u(x, 0)$ ayant exactement la forme requise pour former un soliton. On sait que le spectre de \hat{L} sera composé de l'ensemble des nombres réels et d'une paire de valeurs propres non réelles et conjuguées. On sait également que les coefficients de réflexion b_λ seront tous nuls.

Supposons maintenant que l'on distorde légèrement cette condition initiale $u(x, 0)$. La nature du spectre ne va *a priori* pas être modifiée : il sera toujours composé de l'axe réel (états de diffusion) et d'une unique paire de valeurs propres en dehors de l'axe réel (un état lié dans le "potentiel" associé à $u(x, 0)$). En revanche, les coefficients b_λ deviendront probablement non nuls.

Or, on sait que la paire de valeurs propres non réelles correspond à un soliton. La partie imaginaire peut différer de celle du soliton désiré, ce qui veut dire que le nombre de particules ne sera pas exactement celui visé, la partie réelle peut également être différente, correspondant à une vitesse elle aussi légèrement différente de celle souhaitée. Mais le soliton sera bien présent ! Le fait que les coefficients b_λ soient non nuls indique que les états délocalisés seront peuplés, une contrepartie nécessaire puisque le soliton n'aura pas aux temps longs le nombre d'atomes initialement prévu.

Si on modifie plus drastiquement la condition initiale, il se peut que

la paire de valeurs propres complexes viennent fusionner avec l'axe réel et disparaissent : cela veut dire que l'on n'a pas mis assez de particules (compte tenu de la taille initiale) pour empêcher l'expansion du paquet d'ondes sous l'effet de l'énergie cinétique. Toutes les particules vont se disperser et on n'aura formé aucune structure collective localisée et stable.

Il se peut également, toujours dans le cas où la fonction d'onde initiale est notablement différente de celle initialement visée, que d'autres paires de valeurs propres non réelles apparaissent. On va alors générer plusieurs solitons, une situation sur laquelle nous reviendrons dans le paragraphe qui suit.

Dans tous les cas, la première étape de la méthode IST, c'est-à-dire la diagonalisation de l'opérateur \hat{L} , peut être vue comme un "détecteur de solitons", qui renseigne de manière quantitative sur l'état final qui sera atteint après évaporation de toutes les particules en surplus, en donnant le nombre de solitons, leurs masses et leurs vitesses.

4 Solitons d'ordre supérieur

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la situation où l'on a préparé une fonction initiale $u(x, 0)$ et où la diagonalisation de l'opérateur \hat{L} correspondant

$$\hat{L} = i \begin{pmatrix} \partial_x & u(x, 0) \\ u^*(x, 0) & -\partial_x \end{pmatrix} \quad (77)$$

conduit (en plus de l'axe réel) à plusieurs valeurs propres $\{\lambda_j, j = 1, \dots, n\}$ dans le demi-plan complexe supérieur, et bien sûr leur complexe conjugué dans le demi-plan inférieur.

4-1 N solitons de vitesses différentes

Nous supposons dans ce paragraphe que la fonction $u(x, 0)$ est formée de n paquets d'ondes bien séparés les uns des autres (figure 13),

$$u(x, 0) = \sum_{j=1}^n u_j(x) \quad (78)$$

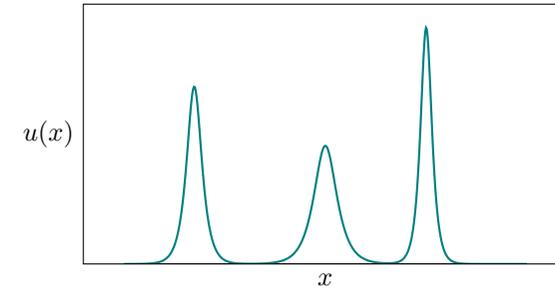


FIGURE 13. Fonction $u(x)$ obtenue en prenant la somme d'enveloppes de solitons fondamentaux bien séparés les uns des autres.

chacune des fonctions u_j correspondant exactement à un soliton localisé en x_j , de masse M_j et de vitesse v_j .

Intéressons-nous au problème aux valeurs propres de \hat{L} et considérons d'abord les états de diffusion. On sait que chacun des "potentiels" $u_j(x)$, pris isolément, conduit à un coefficient de réflexion b_λ strictement nul. Si les enveloppes des fonctions u_j sont très séparées les unes des autres, on peut négliger les interférences entre ces différents centres diffuseurs, ce qui conduit à un coefficient de réflexion nul pour chaque valeur de λ . En termes optiques, un empilement de dioptries avec un traitement antireflet forme lui-même un système antireflet.

On déduit du résultat général (44) que les coefficients b_λ vont rester nuls au cours du temps, même si les solitons viennent momentanément au contact les uns des autres. La fonction $F(x)$ donnée en (47) ne comporte alors que sa composante provenant des états discrets et la détermination de $u(x, t)$ à un instant quelconque ne fera pas intervenir les états de diffusion. En termes physiques, on sait d'emblée qu'aucune particule ne sera évaporée lors des collisions entre solitons.

Considérons maintenant les états liés dans le "potentiel" $u(x, 0)$. Par construction, chaque $u_j(x)$ donne naissance à un état lié localisé au voisinage de x_j , associé à la valeur propre λ_j de \hat{L} . Dans l'hypothèse où les "potentiels" $u_j(x)$ sont très séparés les uns des autres, la diagonalisation de \hat{L} va conduire à n états liés très proches des états liés de chaque "potentiel"

u_j pris individuellement. Dans une formulation quantique standard, cela revient à négliger le couplage par effet tunnel entre des puits de potentiel arbitrairement loin les uns des autres.

Par ailleurs, le spectre $\{\lambda_j\}$ va rester constant [cf. (45)]. On aura donc, une fois que tous les solitons se seront croisés, les mêmes solitons qu'à l'entrée. On rappelle en effet que la partie réelle de λ_j détermine la masse du soliton j et la partie imaginaire détermine sa vitesse.

Le résultat général (44-45) de l'évolution des données de diffusion est donc extrêmement puissant, puisqu'il permet de rendre compte de la stabilité des solitons lors d'une collision, quel que soit leur nombre, leurs masses et leurs vitesses. La résolution du système intégral (48-49) n'est nécessaire que si l'on souhaite disposer de la position exacte à un instant t donné de chaque soliton, cette position résultant du caractère attractif ou répulsif des interactions entre solitons, lui-même dépendant de leur phase relative, donc des coefficients c_j [cf. (68-61)].

4-2 Les multi-solitons (ou solitons composites)

Dans le paragraphe précédent, nous avons fait l'hypothèse qu'il existait un instant initial pour lequel les n solitons étaient bien séparés les uns des autres. Nous allons maintenant considérer la situation inverse, où les solitons sont initialement superposés les uns sur les autres avec tous la même vitesse, que nous choisirons nulle.

Pour simplifier encore la discussion, nous allons supposer que la fonction u s'écrit à l'instant initial

$$u(x, 0) = \frac{A}{\cosh x}, \quad (79)$$

correspondant à une masse et une énergie

$$M = \int |u|^2 dx = 2A^2 \quad E = \int (|\partial_x u|^2 - |u|^4) dx = -\frac{2}{3}A^2(2A^2 - 1). \quad (80)$$

Si on prend $A = 1$, on retrouve le soliton fondamental étudié à la section précédente (§ 3). La question que nous souhaitons aborder porte sur l'évolution du système pour une valeur quelconque de A . Nous allons pour cela utiliser les résultats de SATSUMA & YAJIMA (1974).

La résolution du problème aux valeurs propres pour \hat{L} se fait en éliminant la fonction ϕ_b du système différentiel (24-25) pour obtenir une équation différentielle du deuxième ordre portant sur la fonction ϕ_a uniquement. Cette équation peut être résolue exactement, sa solution s'écrivant en terme d'une fonction hypergéométrique. Le résultat qui importe ici concerne le spectre discret de \hat{L} , dont on a vu qu'il constitue un "détecteur de solitons". Ce spectre est tracé en fonction de A sur la figure 14 et il a une expression très simple :

- Pour $A \leq 1/2$, il n'y a aucune valeur propre en dehors de l'axe réel. Il n'y a donc pas de soliton, le paquet d'ondes initial va s'étaler indéfiniment au cours du temps.
- Pour $A \in]1/2, 3/2]$, il y a une et une seule valeur propre dans le demi-plan complexe supérieur, donc un seul soliton :

$$\lambda_1 = i \left(A - \frac{1}{2} \right) \quad (81)$$

On retrouve la situation représentée en figure 2 et discutée à la fin de la section 3 : en dehors du cas $A = 1$ qui constitue le soliton fondamental ($\lambda_1 = i/2$), il y a émission de particules ou de rayonnement pour atteindre asymptotiquement un soliton au repos, de masse $M_s = 2\kappa$ avec $\lambda_1 = i\kappa/2$, c'est-à-dire $\kappa = 2A - 1$ et $M_s = 2(2A - 1)$. La différence entre la masse de départ $M = 2A^2$ et celle du soliton est $\Delta M = M - M_s = 2(A - 1)^2$. C'est une quantité strictement positive, sauf pour $A = 1$ puisque l'état initial est alors le soliton fondamental, comme nous l'avons déjà indiqué.

Quand A tend vers la limite inférieure $A = 1/2$, la masse du soliton final tend vers 0, ce qui correspond à un paquet d'onde de très faible amplitude et de grande largeur. Quand A tend vers la limite supérieure $A = 3/2$, la masse du soliton formé tend vers $M_s = 4$ alors que la masse initiale est $M = 9/2$. La masse rayonnée est donc $1/2$, le paquet d'ondes solitonique final $\kappa/\cosh(\kappa x)$ ayant une hauteur supérieure à la hauteur initiale (2 au lieu de $3/2$) et une largeur plus étroite.

- Pour $A \in]3/2, 5/2]$, il y a deux valeurs propres discrètes dans le demi-plan complexe supérieur :

$$\lambda_1 = i \left(A - \frac{1}{2} \right) \quad \lambda_2 = i \left(A - \frac{3}{2} \right) \quad (82)$$

On trouve donc une situation à deux solitons fondamentaux superposés, chacun au repos puisque la partie réelle de ces valeurs propres est nulle. Nous appellerons cette structure "bi-soliton" et nous allons revenir vers elle un peu plus loin pour montrer qu'elle donne naissance à une structure oscillante (*breather*).

- Plus généralement, pour $A \in]n - 1/2, n + 1/2]$, il y a n valeurs propres discrètes dans le demi-plan complexe supérieur :

$$\lambda_1 = i \left(A - \frac{1}{2} \right), \quad \dots, \quad \lambda_n = i \left(A - n + \frac{1}{2} \right). \quad (83)$$

Cette structure correspond à un multi-soliton, c'est-à-dire n solitons fondamentaux superposés, tous de vitesse nulle.

Les coefficients de réflexion b_λ qui caractérisent le spectre continu (λ réel) ont également une expression remarquable (SATSUMA & YAJIMA 1974) :

$$b_\lambda = i \frac{\sin(\pi A)}{\cosh(\pi \lambda)}. \quad (84)$$

On constate en particulier que pour les valeurs entières de A , c'est-à-dire A choisi au centre des segments que nous venons d'identifier, les coefficients de réflexion b_λ s'annulent pour toutes les valeurs de k . En ces points, le spectre continu ne contribue donc pas à l'expression de la fonction $F(x)$ définie en (47). Il n'intervient pas non plus dans la résolution du système (48-49) qui fournit la fonction $u(x, t)$ à tout instant. Pour ces valeurs entières de A , aucune particule ou aucun rayonnement n'est émis par le système lors de son évolution : toutes les particules restent sous la forme d'un multi-soliton.

On peut vérifier cette absence d'évaporation pour les valeurs entières $A = n$ en comparant la masse initiale $M_{\text{ini}} = 2A^2 = 2n^2$ [cf. (80)] et la masse totale des $A = n$ solitons individuels associés aux valeurs propres $\lambda_j = i(n - j + 1/2)$ [cf. (64-66)]. Les amplitudes $\kappa_j = 2|\lambda_j|$ de ces n solitons sont les nombres impairs $1, 3, \dots, (2n - 1)$ et la masse totale vaut

$$M_{\text{tot}} = 2 \sum_{j=1}^n (2j - 1) = 2n^2. \quad (85)$$

L'égalité entre la masse initiale et la masse totale des n solitons fondamentaux confirme l'absence d'évaporation dans le cas où A est entier.

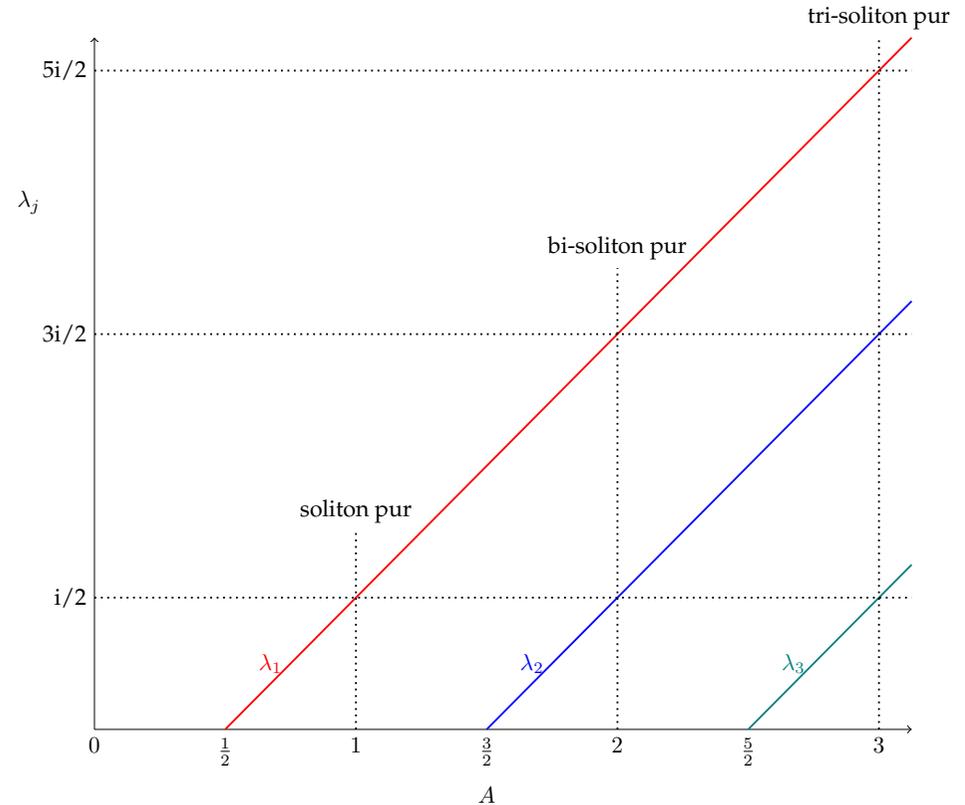


FIGURE 14. Valeurs propres discrètes de l'opérateur \hat{L} pour le choix de fonction $u(x) = A / \cosh x$.

4-3 Observations expérimentales

Ces multi-solitons ont été observés peu de temps après leur prédiction pour des impulsions lumineuses se propageant dans des fibres optiques (MOLLENAUER, STOLEN et al. 1980). Nous allons nous intéresser ici à leur mise en évidence (beaucoup plus récente) avec des ondes de matière par DI CARLI, COLQUHOUN et al. (2019) et LUO, JIN et al. (2020).

Nous montrons en figure 15 une série de résultats obtenus par LUO, JIN et al. (2020). Les auteurs sont partis d'un soliton fondamental réalisé avec $N = 50\,000$ atomes de ${}^7\text{Li}$ fortement confinés selon deux axes ($\omega_{\perp}/2\pi = 300$ Hz), avec un confinement beaucoup plus faible dans la troisième direction, notée ici z ($\omega_z/2\pi = 1$ Hz). À un instant donné, ils modifient soudainement la force des interactions g en changeant la longueur de diffusion à l'aide d'une résonance de Fano–Feshbach. Le changement correspond à $g \rightarrow A^2g$ avec $A = 1.9(3)$ pour le haut de la figure 15, et à $A = 2.6(4)$ pour le bas de cette figure. On pourra vérifier que cela revient à préparer le paquet d'ondes $A/\cosh x$ pour l'équation de Schrödinger non linéaire en coordonnées réduites que nous avons utilisée dans ce chapitre.

Dans le cas $A = 1.9 \approx 2$, on obtient un objet composite formé des deux solitons élémentaires d'amplitudes 1 et 3, associés aux valeurs propres $i/2$ et $3i/2$. Les deux coefficients $c_1(t)$ et $c_2(t)$ entrant dans le calcul de la fonction $F(x)$ varient comme $e^{4i\lambda_j^2 t}$ [cf. (45) et (47)], ce qui fait apparaître la fréquence de battement $\omega_B = 4(\frac{9}{4} - \frac{1}{4}) = 8$ en unités réduites. On s'attend donc à observer une oscillation périodique de la largeur du paquet d'ondes et de sa densité centrale à la fréquence $\omega_B = 8$, ou encore $\omega_B = \omega_{\perp} N^2 (a/2a_{\text{oh}})^2$ en unités dimensionnées où a désigne la longueur de diffusion après changement.

Les données expérimentales sont en excellent accord avec cette prédiction. SATSUMA & YAJIMA (1974) donnent l'expression de la fonction $u(x, t)$ pour ce bi-soliton. Nous ne l'écrivons pas ici car elle est assez compliquée, mais nous donnons l'évolution de la densité centrale $\rho_0(t) = |u(0, t)|^2$ qui est simple :

$$\rho_0(t) = \frac{8}{5 + 3 \cos(\omega_B t)} \rho_0(0) \quad (86)$$

et qui conduit à une variation d'un facteur 4 au cours du temps. Cette prédiction correspond à la courbe noire tracée sur la figure 15 (avec un déca-

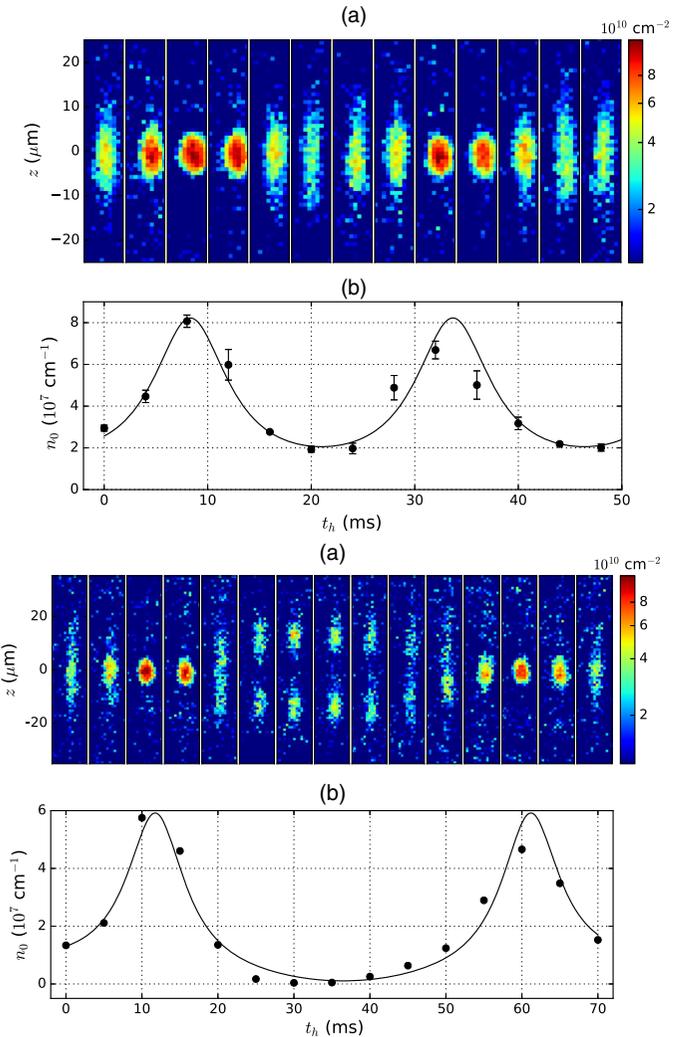


FIGURE 15. Oscillations d'un bi-soliton (haut) et d'un tri-soliton (bas) formé avec des atomes de lithium dans un piège harmonique. Figures extraites de LUO, JIN et al. (2020).

lage de l'origine des temps).

Les données de la partie inférieure de la figure 15 montrent la réalisation d'un tri-soliton, c'est-à-dire un objet composé des trois solitons fondamentaux d'amplitudes 1, 3 et 5. Là aussi, l'évolution dans le temps de la densité centrale est une fonction périodique. Elle fait intervenir les "fréquences de Bohr" $\omega_{ij} = 4|\lambda_i^2 - \lambda_j^2|$ et les résultats expérimentaux sont en bon accord avec les prédictions issues de la méthode IST.

4-4 Peut-on décomposer un multi-soliton ?

Un multi-soliton obtenu en prenant $A = n \in \mathbb{N}^*$ pour le paquet d'ondes initial $u(x, 0) = A/\cosh x$ est un objet stable. Il résulte de la combinaison (non linéaire) de solitons élémentaires $u_j(x) = \kappa_j/\cosh(\kappa_j x)$ avec les amplitudes $\kappa_j = 1, 3, \dots, 2n - 1$, et sa largeur et sa densité centrale évoluent périodiquement dans le temps. Toutefois, ce multi-soliton n'est pas un état lié des n solitons élémentaires. Pour s'en convaincre, il suffit de comparer l'énergie du paquet d'ondes de départ [cf (80)] :

$$E_{\text{ini}} = -\frac{2}{3}n^2(2n^2 - 1) \quad (87)$$

et la somme des énergie des n constituants :

$$E_{\text{tot}} = -\sum_{j=1}^n \frac{2}{3}\kappa_j^3. \quad (88)$$

La somme des cubes des n premiers nombres impairs vaut précisément $n^2(2n^2 - 1)$, d'où l'égalité entre les deux énergies.

Pour décomposer un multi-soliton en ses constituants élémentaires, il suffit donc en principe d'introduire un élément qui brise l'intégrabilité de l'équation d'évolution. C'est précisément ce qui a été étudié numériquement par MARCHUKOV, MALOMED et al. (2019). Ces auteurs ont calculé le comportement d'un bi-soliton quand une barrière de potentiel en forme de distribution de Dirac, légèrement décentrée, est graduellement appliquée sur le système. Un résultat typique est montré en figure 16. On voit qu'après un temps de l'ordre de 10 périodes d'oscillation du bi-soliton initial, ses deux composantes se sont séparées, l'un des constituants partant à

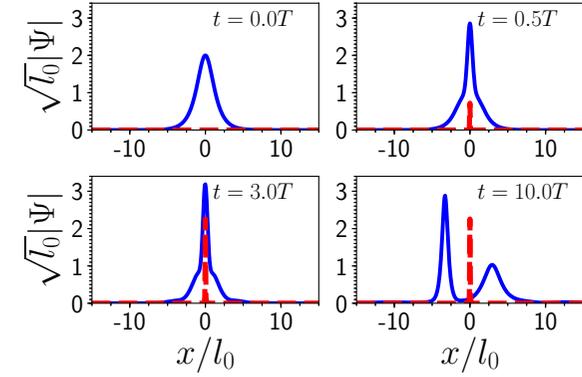


FIGURE 16. Évolution d'un bi-soliton quand une barrière de potentiel $V(x, t) = \epsilon f(t)\delta(x)$ est appliquée au système. La barrière est légèrement décentrée par rapport au bi-soliton. Les deux constituants sont alors éjectés de part et d'autre de la barrière. Le temps T représente la période d'oscillation du bi-soliton. Figure extraite de MARCHUKOV, MALOMED et al. (2019).

gauche de la barrière et l'autre à droite. On vérifie que les produits de la fission sont indépendants des détails de la barrière, c'est-à-dire sa hauteur finale ou son décentrage : les fragments sont les constituants fondamentaux du soliton et la barrière est uniquement un "catalyseur" pour les révéler.

Un résultat similaire est obtenu quand on envoie un multi-soliton sur une barrière de potentiel, certains constituants élémentaires pouvant être réfléchis alors que les autres sont transmis (DUNJKO & OLSHANII 2015).

Appendice : l'approche AKNS

Une version équivalente à la formulation adoptée ici consiste à passer de la manipulation d'opérateurs linéaires, comme les opérateurs \hat{L} et \hat{A} , à de simples matrices 2×2 fonctions de x que nous noterons \hat{U} et \hat{V} (ABLOWITZ, KAUP et al. 1974). Le prix à payer est l'introduction d'un paramètre supplémentaire λ , qui était une valeur propre de \hat{L} dans le traitement de ce chapitre.

Pour présenter cette approche pour l'équation de Schrödinger non linéaire, réécrivons le système (24-25) sous la forme

$$\partial_x \Phi = \hat{U} \Phi \quad (89)$$

avec⁴

$$\hat{U} = \hat{U}_0 + \lambda \hat{U}_1 \quad \hat{U}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -u \\ u^* & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{U}_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (90)$$

De même, la combinaison de l'équation d'évolution déduite de (34)

$$\Phi(t) = \hat{U}(t) \Phi(0) \quad (91)$$

et du développement (21) de \hat{A} en puissances de λ conduit à poser

$$\partial_t \Phi = \hat{V} \Phi \quad (92)$$

avec

$$\hat{V} = \hat{V}_0 + \lambda \hat{V}_1 + \lambda^2 \hat{V}_2 \quad (93)$$

et

$$\hat{V}_0 = i \begin{pmatrix} |u|^2 & -u_x \\ -u_x^* & -|u|^2 \end{pmatrix} \quad \hat{V}_1 = 2\hat{U}_0 \quad \hat{V}_2 = 2\hat{U}_1 \quad (94)$$

Dans ce point de vue, λ est un paramètre indépendant du temps et l'équation de Schrödinger non linéaire est retrouvée en imposant que les deux équations $\partial_x \Phi = \hat{U} \Phi$ et $\partial_t \Phi = \hat{V} \Phi$ soient compatibles l'une avec l'autre quel que soit λ . Cette condition de compatibilité se déduit de

$$\partial_t (\partial_x \Phi) = \partial_x (\partial_t \Phi) \quad (95)$$

ou encore

$$\left(\partial_t \hat{U} - \partial_x \hat{V} + [\hat{U}, \hat{V}] \right) \Phi = 0. \quad (96)$$

Rappelons que dans ce point de vue, \hat{U} et \hat{V} sont simplement des fonctions de x (pas des opérateurs). En tout point où Φ ne s'annule pas, on doit donc imposer que la matrice agissant sur Φ soit nulle. On peut vérifier, par exemple en identifiant les termes faisant intervenir chaque puissance de λ , que cette condition est satisfaite si et seulement si $u(x, t)$ obéit à l'équation de Schrödinger non linéaire :

$$\forall \lambda : \quad \partial_t \hat{U} - \partial_x \hat{V} + [\hat{U}, \hat{V}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0. \quad (97)$$

Le couple de matrices (\hat{U}, \hat{V}) est également appelé paire de Lax pour cette équation non linéaire.

L'équation (96) est appelée *condition de courbure nulle* car elle correspond à l'annulation du tenseur de courbure $F_{\mu,\nu} = [\partial_\mu - A_\mu, \partial_\nu - A_\nu]$.

Références

- ABLOWITZ, Mark J, David J KAUP, Alan C NEWELL & Harvey SEGUR (1974), « The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems », in *Studies in applied mathematics* **53**, p. 249-315.
- ABLOWITZ, Mark J & Harvey SEGUR (1981), *Solitons and the inverse scattering transform*, SIAM.
- CARR, Lincoln D & Yvan CASTIN (2002), « Dynamics of a matter-wave bright soliton in an expulsive potential », in *Phys. Rev. A* **66**, p. 063602.
- CASTIN, Yvan & Christopher HERZOG (2001), « Bose-Einstein condensates in symmetry breaking states », in *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IV-Physics* **2**, p. 419-443.
- DAUXOIS, Thierry & Michel PEYRARD (2006), *Physics of solitons*, Cambridge University Press.
- DI CARLI, Andrea, Craig D COLQUHOUN, Grant HENDERSON, Stuart FLANNIGAN, Gian-Luca OPPO, Andrew J DALEY, Stefan KUHR & Elmar HALLER (2019), « Excitation modes of bright matter-wave solitons », in *Phys. Rev. Lett.* **123**, p. 123602.
- DRAZIN, Philip G & Robin Stanley JOHNSON (1989), *Solitons : an introduction*, Cambridge University Press.

4. ne pas confondre cette matrice \hat{U} avec l'opérateur d'évolution \hat{U} introduit plus haut!

- DUDLEY, John Michael, Christophe FINOT, Goëry GENTY & J TAYLOR (2023), « Fifty years of fiber solitons », in *Optics and photonics news* **34**, p. 26-33.
- DUNJKO, Vanja & Maxim OLSHANII (2015), « Resilience of constituent solitons in multisoliton scattering off barriers », in *arXiv preprint arXiv :1501.00075*.
- GARDNER, Clifford S, John M GREENE, Martin D KRUSKAL & Robert M MIURA (1967), « Method for solving the Korteweg-deVries equation », in *Phys. Rev. Lett.* **19**, p. 1095.
- HASEGAWA, Akira (2022), « Optical soliton : Review of its discovery and applications in ultra-high-speed communications », in *Frontiers in Physics* **10**, p. 1044845.
- HAUS, Hermann A & William S WONG (1996), « Solitons in optical communications », in *Rev. Mod. Phys.* **68**, p. 423.
- KAUP, DJ (1990), « Perturbation theory for solitons in optical fibers », in *Phys. Rev. A* **42**, p. 5689.
- KIVSHAR, Yuri S, Dmitry E PELINOVSKY, Thierry CRETEGNY & Michel PEYRARD (1998), « Internal modes of solitary waves », in *Phys. Rev. Lett.* **80**, p. 5032.
- KOREPIN, Vladimir E, Vladimir E KOREPIN, NM BOGOLIUBOV & AG IZERGIN (1997), *Quantum inverse scattering method and correlation functions*, t. 3, Cambridge university press.
- LAX, Peter (1968), « Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves », in *Commun. Pure Appl. Math.* **21**, p. 46.
- LUO, De, Yi JIN, Jason HV NGUYEN, Boris A MALOMED, Oleksandr V MARCHUKOV, Vladimir A YUROVSKY, Vanja DUNJKO, Maxim OLSHANII & RG HULET (2020), « Creation and characterization of matter-wave breathers », in *Phys. Rev. Lett.* **125**, p. 183902.
- MARCHUKOV, Oleksandr V, Boris A MALOMED, Vladimir A YUROVSKY, Maxim OLSHANII, Vanja DUNJKO & Randall G HULET (2019), « Splitting of nonlinear-Schrödinger-equation breathers by linear and nonlinear localized potentials », in *Phys. Rev. A* **99**, p. 063623.
- MENOTTI, Chiara & Sandro STRINGARI (2002), « Collective oscillations of a one-dimensional trapped Bose-Einstein gas », in *Phys. Rev. A* **66**, p. 043610.
- MOLLENAUER, Linn F, Roger H STOLEN & James P GORDON (1980), « Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers », in *Phys. Rev. Lett.* **45**, p. 1095.
- NOVIKOV, S, Sergei V MANAKOV, Lev Petrovich PITAEVSKII & Vladimir Evgenevič ZAKHAROV (1984), *Theory of solitons : the inverse scattering method*, Springer Science & Business Media.
- PELINOVSKY, Dmitry E, Yuri S KIVSHAR & Vsevolod V AFANASJEV (1998), « Internal modes of envelope solitons », in *Physica D : Nonlinear Phenomena* **116**, p. 121-142.
- ROBERTI, Giacomo, Gennady EL, Alexander TOVBIS, François COPIE, Pierre SURET & Stéphane RANDOUX (2021), « Numerical spectral synthesis of breather gas for the focusing nonlinear Schrödinger equation », in *Physical Review E* **103**, p. 042205.
- SATSUMA, Junkichi & Nobuo YAJIMA (1974), « B. Initial value problems of one-dimensional self-modulation of nonlinear waves in dispersive media », in *Progress of Theoretical Physics Supplement* **55**, p. 284-306.
- SHRIRA, Victor I & Vladimir V GEOGJAEV (2010), « What makes the Peregrine soliton so special as a prototype of freak waves? », in *Journal of Engineering Mathematics* **67**, p. 11-22.
- SROYNGOEN, Waranon & James R ANGLIN (2025), « Soliton resuscitations : asymmetric revivals of the breathing mode of an atomic bright soliton in a harmonic trap », in *arXiv preprint arXiv :2502.09016*.
- ZAKHAROV, Vladimir & Aleksei SHABAT (1972), « Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media », in *Sov. Phys. JETP* **34**, p. 62.
- ZAKHAROV, Vladimir Evgenevich, éd. (1991), *What is integrability?*, Springer-Verlag.