Chapitre 4

Solitons magnétiques et oscillations de Bloch

Sommaire

Les premiers chapitres de ce cours ont été consacrés aux solitons susceptibles d'apparaître dans un fluide à une composante. Selon la nature attractive ou répulsive des interactions dans ce fluide, nous avons trouvé des solitons brillants ou des solitons sombres.

Ce dernier chapitre est consacré à un bref aperçu de structures solitoniques plus complexes pouvant être générées dans les mélanges de condensats. Il s'agit d'un domaine extrêmement riche qu'il n'est pas question de couvrir de manière exhaustive. Nous allons nous concentrer ici sur un type de soliton qui apparaît dans un matériau ferromagnétique et qui peut être reproduit pratiquement à l'identique dans un mélange binaire de condensats.

Nous allons plus précisément étudier le cas d'un mélange légèrement non miscible, pour lequel les solitons qui apparaissent sont équivalents à ceux d'un ferromagnétique "easy-axis". Nous décrirons également la mise en évidence d'un phénomène prédit depuis longtemps pour les solitons magnétiques et qui vient d'être observé avec un mélange de condensats : l'oscillation de Bloch d'un soliton soumis à une force constante.

Faute de place, nous ne décrirons pas d'autres types de structures qui apparaissent dans les mélanges à deux composantes, comme les solitons sombres-brillants (BUSCH & ANGLIN 2001 ; BECKER, STELLMER et al. 2008 ; HAMNER, CHANG et al. 2011 ; DANAILA, KHAMEHCHI et al. 2016 ; KATSIMIGA, MISTAKIDIS et al. 2020 ; MENG, LUO et al. 2025) ou encore des structures obtenues à partir de mélanges à trois composantes (BERSANO, GOKHROO et al. 2018 ; LANNIG, SCHMIED et al. 2020 ; YU & BLAKIE 2022 ; SIOVITZ, LANNIG et al. 2023). Nous renvoyons les lecteurs intéressés vers l'article récent de MOSSMAN, KATSIMIGA et al. (2024) qui fait une revue assez complète des travaux dans ce domaine.

1 La chaîne ferromagnétique

1-1 Les énergies en présence

Dans cette partie, nous allons développer une modélisation simple d'une chaîne uni-dimensionnelle de moments magnétiques $\boldsymbol{\mu}_j$ ($j \in \mathbb{Z}$), tous de même module μ (figure 1). Cette chaîne peut être vue comme une ligne extraite d'un cristal ferromagnétique, une approximation uni-dimensionnelle qui est valable pour toute une classe de matériaux (voir par exemple MIKESKA & STEINER (1991) et DAUXOIS & PEYRARD (2006) et refs. in). Nous allons chercher à écrire l'équation du mouvement d'un moment magnétique $\boldsymbol{\mu}_j$ sous l'effet des trois termes dominants :

— Chaque moment magnétique interagit avec ses voisins. Il s'agit essentiellement d'une interaction d'échange [1], que nous modéliserons par

$$-J\sum_j \boldsymbol{\mu}_j \cdot \boldsymbol{\mu}_{j+1} \,. \tag{1}$$

La constante J, appelée intégrale d'échange, est choisie positive de sorte que les moments magnétiques minimisent leur énergie en s'alignant les uns avec les autres, comme attendu pour un matériau ferromagnétique. Cette interaction est isotrope : la direction commune choisie par les moments magnétiques pour minimiser cette énergie est aléatoire si cette interaction est la seule présente. Dans sa version quantique, (1) est l'hamiltonien de Heisenberg.

— Le deuxième terme figurant dans l'énergie est une petite correction au terme précédent, résultant du fait que les cristaux ferromagnétiques 3D ne sont généralement pas parfaitement isotropes. Une classe importante concerne les matériaux uni-axiaux pour lesquels un axe (noté ici z) conduit à une interaction différente de celle pour les deux autres axes (x et y). Pour prendre en compte cet effet, on ajoute l'énergie [2] :

$$-J'\sum_j \mu_j^{(z)}\,\mu_{j+1}^{(z)} \,. \tag{2}$$

Si $J' > 0$, l'interaction anisotrope favorise l'émergence d'une aimantation selon l'axe z (dans les directions positives ou négatives) et on parle alors de matériau *easy-axis*. Si $J' < 0$, le système minimise son énergie avec une aimantation dans le plan xy et on parle de matériau *easy-plane*.

— La chaîne peut être placée dans un champ magnétique extérieur conduisant à l'énergie

$$-\sum_j \boldsymbol{\mu}_j \cdot \boldsymbol{B}_{\text{ext}} \,. \tag{3}$$

Tout comme le terme (2) proportionnel à J', la présence de ce champ extérieur vient briser l'invariance par rotation. Si J' joue un rôle négligeable, la direction préférentielle de l'aimantation est alors celle du champ extérieur.

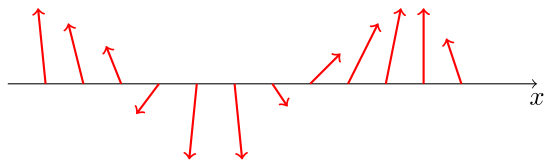

FIGURE 1. *Chaîne uni-dimensionnelle de moments magnétiques, tous de même module μ.*

1. Nous négligeons ici l'interaction dipôle-dipôle d'origine magnétique, beaucoup plus faible que l'interaction d'échange qui est quant à elle d'origine électrostatique.

2. Nous avons adopté ici la modélisation de KOSEVICH, IVANOV et al. (1990). Nous verrons un peu loin [cf. (13)] que la contribution de ce terme est limitée à son ordre le plus bas, pour lequel on peut remplacer $\boldsymbol{\mu}_{j+1}$ par $\boldsymbol{\mu}_j$ (DAUXOIS & PEYRARD 2006).

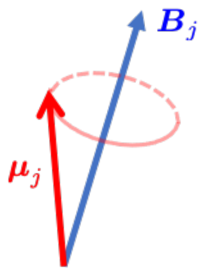

FIGURE 2. *Mouvement de précession du moment magnétique $\boldsymbol{\mu}_j$ sous l'effet du champ magnétique local $\boldsymbol{B}_j$ selon l'équation du mouvement (8).*

1-2 Dynamique d'un moment magnétique

Considérons un moment magnétique $\boldsymbol{\mu}_j$ et étudions son équation du mouvement. On sait qu'un moment cinétique est associé à ce moment magnétique. Nous notons ce moment cinétique $\boldsymbol{s}_j$, et le lien entre $\boldsymbol{\mu}_j$ et $\boldsymbol{s}_j$ est fourni par le rapport gyromagnétique γ :

$$\boldsymbol{\mu}_j = \gamma \boldsymbol{s}_j. \tag{4}$$

L'évolution du moment cinétique $\boldsymbol{s}_j$ est

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}_j}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Gamma}_j \tag{5}$$

où $\boldsymbol{\Gamma}_j$ est le couple agissant sur ce moment. Pour le moment magnétique μ_j, ce couple s'écrit

$$\boldsymbol{\Gamma}_j = \boldsymbol{\mu}_j \times \boldsymbol{B}_j, \tag{6}$$

où $\boldsymbol{B}_j$ est le champ magnétique effectif au niveau du site j, déduit des trois termes d'interaction (1,2,3) décrits ci-dessus :

$$\boldsymbol{B}_j = J\left(\boldsymbol{\mu}_{j-1} + \boldsymbol{\mu}_{j+1}\right) \;+\; J'\left(\mu^{(z)}_{j-1} + \mu^{(z)}_{j+1}\right)\hat{\boldsymbol{z}} \;+ \boldsymbol{B}_{\mathrm{ext}} \tag{7}$$

où $\hat{\boldsymbol{z}}$ désigne le vecteur unitaire aligné selon z. En multipliant les deux membres de l'équation (5) par le rapport gyromagnétique γ, on obtient l'équation du mouvement recherchée (cf. figure 2) :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}_j}{\mathrm{d}t} = \gamma\, \boldsymbol{\mu}_j \times \boldsymbol{B}_j. \tag{8}$$

L'équation d'évolution de chaque $\boldsymbol{\mu}_j$ est couplée à celle de ces voisins, ce qui rend la résolution de ce système délicate. Pour progresser, nous allons passer à une limite continue pour transformer ce système discret en une équation aux dérivées partielles.

Remarque. Nous avons adopté ici une approche classique, mais un traitement quantique conduit à une résultat identique. On part de l'équation de Heisenberg pour le moment cinétique $\hat{\boldsymbol{s}}_j$:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{s}}_j}{\mathrm{d}t} = [\hat{\boldsymbol{s}}_j, \hat{H}] \tag{9}$$

et on considère les termes de l'hamiltonien ne commutant pas avec $\hat{\boldsymbol{s}}_j$:

$$-\,J\gamma^2\left(\hat{\boldsymbol{s}}_{j+1} + \hat{\boldsymbol{s}}_{j-1}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{s}}_j \;-\; J'\gamma^2\left(\hat{s}^{(z)}_{j+1} + \hat{s}^{(z)}_{j-1}\right)\hat{s}^{(z)}_j \;-\; \gamma\boldsymbol{B}_{\mathrm{ext}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}_j. \tag{10}$$

On utilise les relations de commutation canoniques pour un moment cinétique $[\hat{s}^{(x)}, \hat{s}^{(y)}] = \mathrm{i}\hbar\,\hat{s}^{(z)}$ et on arrive, pour les opérateurs $\hat{\boldsymbol{s}}_j$ ou $\hat{\boldsymbol{\mu}}_j$, à un résultat identique à (7-8). Pour une chaîne de spins 1/2, ce modèle est exactement soluble par un ansatz de Bethe [DES CLOIZEAUX & GAUDIN (1966) et refs. in], tout comme la chaîne de moments classiques considérée plus haut.

1-3 Passage à la limite continue

Nous allons maintenant nous intéresser à la situation, réaliste en pratique, où l'orientation d'un moment magnétique $\boldsymbol{\mu}_j$ quelconque est proche de celles de ses voisins $\boldsymbol{\mu}_{j\pm1}$. Les variations de l'orientation de l'aimantation sont possibles, mais sur une échelle de longueur beaucoup plus grande que la période spatiale de la chaîne que nous noterons a.

Nous pouvons alors adopter une représentation continue du moment magnétique[3] :

$$\boldsymbol{\mu}_j(t) \longrightarrow \boldsymbol{\mu}(x_j, t) \qquad \text{avec} \quad x_j = ja \tag{11}$$

3. Comme dans les chapitres précédents, nous utilisons ici la variable x pour repérer la position spatiale. Il est important de noter que la direction correspondante est *a priori* décorrélée des axes x, y, z définissant l'hamiltonien du moment magnétique.

et établir l'équation du mouvement de $\boldsymbol{\mu}(x,t)$ déduite de (8). Pour cela, reprenons une à une les trois contributions au champ $\boldsymbol{B}_{\text{eff}}$ intervenant dans cette équation du mouvement :

— La première contribution est $J(\boldsymbol{\mu}_{j-1} + \boldsymbol{\mu}_{j+1})$ que nous développons à l'ordre 2 inclus en a :

$$\boldsymbol{\mu}(x_{j-1}) + \boldsymbol{\mu}(x_{j+1}) = 2\boldsymbol{\mu}(x_j) + a^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mu}}{\partial x^2} + \mathcal{O}(a^4). \tag{12}$$

Le terme d'ordre zéro $2\boldsymbol{\mu}(x_j)$, bien que dominant, a un effet nul sur l'équation d'évolution car il intervient dans (8) par l'intermédiaire de $\boldsymbol{\mu}(x_j) \times \boldsymbol{\mu}(x_j) = 0$. C'est pourquoi il est indispensable de pousser le développement ci-dessus à l'ordre 2.

— Pour le terme lié à l'anisotropie J' du matériau, nous pouvons nous limiter au terme d'ordre zéro en a :

$$\mu^{(z)}(x_{j-1}) + \mu^{(z)}(x_{j+1}) = 2\mu^{(z)}(x_j) + \mathcal{O}(a^2). \tag{13}$$

Dans la mesure où $J' \ll J$, il n'y a pas d'incohérence à limiter notre développement à cet ordre tout en poussant le développement (12) à l'ordre 2 en a.

— Le terme lié au champ extérieur est inchangé.

On arrive alors à l'équation d'évolution pour le champ de vecteur $\boldsymbol{\mu}(x,t)$ (LANDAU & LIFSHITZ 1935) :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial t} = \gamma \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B} \qquad \text{avec} \quad \boldsymbol{B} = J a^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mu}}{\partial x^2} + 2J'\mu^{(z)}\hat{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{B}_{\text{ext}}\,. \tag{14}$$

Comme nous l'avons fait pour l'équation de Schrödinger non linéaire, nous pouvons simplifier cette équation en l'écrivant sous une forme adimensionnée :

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \tilde{t}} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{b} \qquad \text{avec} \quad \boldsymbol{b} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{m}}{\partial \tilde{x}^2} \pm m^{(z)}\hat{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{b}_{\text{ext}}} \tag{15}$$

où le champ de vecteur $\boldsymbol{m}(\tilde{x},\tilde{t})$ est de module 1 en tout point ($|\boldsymbol{m}(\tilde{x},\tilde{t})| = 1$), et où l'on a introduit les échelles de temps et de longueur :

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_0} \quad \tilde{x} = \frac{x}{x_0} \qquad \text{avec} \quad t_0 = \frac{1}{2\gamma\mu|J'|} \qquad x_0 = a\sqrt{\frac{J}{2|J'|}} \tag{16}$$

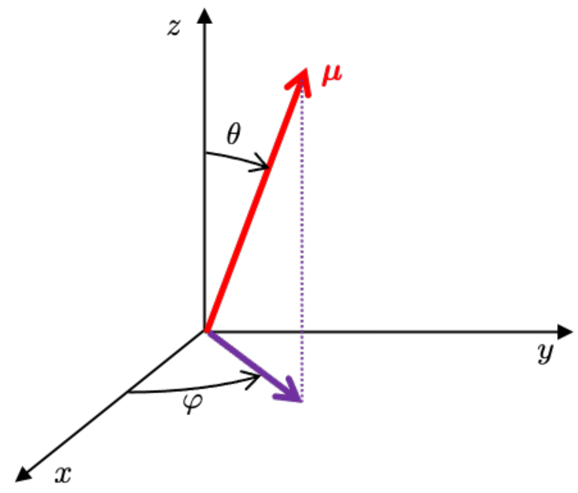

FIGURE 3. *Paramétrisation de $\boldsymbol{\mu}(x,t)$ par les deux angles $\theta(x,t)$ et $\varphi(x,t)$.*

et

$$\boldsymbol{b}_{\text{ext}} = \frac{\boldsymbol{B}_{\text{ext}}}{2\mu|J'|}. \tag{17}$$

Dans l'équation (15), le signe $+$ correspond au cas *easy-axis* ($J' > 0$) et le signe $-$ au cas *easy-plane* ($J' < 0$). Notons que l'échelle naturelle de longueur x_0 est très grande devant la période spatiale a de la chaîne car nous avons supposé que $J \gg |J'|$. Des structures de taille caractéristique de l'ordre de 1 en unités réduites peuvent donc être correctement décrites par ce passage à la limite continue car elles s'étendent sur beaucoup de sites de la chaîne discrète. Dans ce qui suit, nous omettrons le symbole $\tilde{\ }$ sur les variables x et t pour alléger les notations, le contexte indiquant s'il faut adopter des unités réduites ou les unités physiques.

Représentation angulaire d'axe z. Puisque les champs de vecteurs $\boldsymbol{\mu}(x,t)$ ou $\boldsymbol{m}(x,t)$ ont un module constant, on peut les paramétrer par les deux angles des coordonnées sphériques $\theta(x,t)$ et $\varphi(x,t)$ (cf. figure 3) :

$$m^{(x)} + \mathrm{i}m^{(y)} = \sin\theta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \qquad m^{(z)} = \cos\theta. \tag{18}$$

L'équation d'évolution (15) se réécrit pour ces deux angles (KOSEVICH, IVANOV et al. 1990) :

$$\boxed{\begin{cases} \theta_t &= -2\theta_x\varphi_x\cos\theta - \varphi_{xx}\sin\theta \\ \varphi_t &= -\cos\theta\left(\varphi_x^2 \pm 1\right) + \dfrac{\theta_{xx}}{\sin\theta} \end{cases}} \tag{19}$$

où nous avons pris $\boldsymbol{b}_{\text{ext}} = 0$ pour simplifier. Nous verrons plus loin comment ces deux équations apparaissent à l'identique pour la description d'un mélange binaire de condensats dans le régime où les trois constantes d'interaction g_{ij} $(i, j = 1, 2)$ sont proches les unes des autres (*régime de Manakov*). C'est pourquoi il est possible d'étudier la physique des solitons magnétiques grâce à des fluides quantiques.

1-4 Approche lagrangienne

Ces équations du mouvement pour les deux champs $\theta(x,t)$ et $\varphi(x,t)$ peuvent être obtenues à partir d'une approche lagrangienne, avec la densité de lagrangien $\mathcal{L}[\theta, \theta_t, \theta_x, \varphi, \varphi_t, \varphi_x]$ donnée par :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{cin}} - \mathcal{V} \tag{20}$$

avec (KOSEVICH, IVANOV et al. 1990) :

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = -\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\varphi_t \qquad \mathcal{V} = \frac{1}{4}\left[\theta_x^2 + (\varphi_x^2 \pm 1)\sin^2\theta\right]. \tag{21}$$

On utilise pour cela l'équation d'Euler–Lagrange pour le champ θ :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_x}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_t}\right) \tag{22}$$

et son analogue pour le champ φ.

On définit la "masse" M (ou plutôt la polarisation dans ce contexte) qui est une quantité conservée :

$$M = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (1-\cos\theta)\ \mathrm{d}x, \tag{23}$$

où l'on a supposé que $\theta \to 0$ à l'infini pour que l'intégrale soit convergente (ce sera le cas pour les solutions considérées dans ce cours). Par ailleurs, l'invariance par translation dans le temps et dans l'espace entraîne la conservation de l'énergie E et de l'impulsion P du système, avec

$$E = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\theta_x^2 + \left(\phi_x^2 \pm 1\right)\sin^2\theta\right]\ \mathrm{d}x \tag{24}$$

$$P = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (1-\cos\theta)\,\varphi_x\ \mathrm{d}x. \tag{25}$$

Remarque. Dans le cas où l'anisotropie caractérisée par J' est absente, on peut également écrire un système d'équations couplées pour θ et φ. On arrive à un système semblable à celui écrit ci-dessus, mais sans le terme ± 1 (LAKSHMANAN, RUIJGROK et al. 1976). Les échelles de longueur et de temps (16) doivent bien sûr être modifiées en conséquence.

1-5 Lien avec l'équation de Schrödinger non linéaire

Il est possible d'établir un lien formel, appelé équivalence de jauge, entre l'équation de Landau–Lifshitz et l'équation de Schrödinger non linéaire pour un gaz à une composante. Ce lien a d'abord été proposé quel que soit le signe de J' par NAKAMURA & SASADA (1982), mais la preuve dans le cas $J' < 0$ (easy-plane) a été critiquée par KUNDU & PSHAEV (1983). En revanche, dans le cas $J' > 0$ (easy-axis), l'équivalence de jauge avec l'équation de Schrödinger non linéaire attractive est prouvée.

Nous n'allons pas présenter ici ce lien général, mais il est possible de montrer comment l'équation de Schrödinger non linéaire attractive émerge dans un cas limite simple de l'équation de Landau–Lifshitz. Plaçons-nous dans le cas $J' > 0$ (easy-axis) et supposons que la direction de l'aimantation est en tout point proche de $\boldsymbol{u}_z$, c'est-à-dire l'angle polaire θ proche de 0 :

$$|m^{(x)}|,\ |m^{(y)}| \ll m^{(z)} \approx 1. \tag{26}$$

Nous nous limiterons de plus à des solutions avec une grande échelle spatiale comparée à l'échelle naturelle x_0, soit

$$\left|\frac{\partial^2 m^{(\alpha)}}{\partial x^2}\right| \ll \left|\frac{\partial m^{(\alpha)}}{\partial x}\right| \ll |m^{(\alpha)}|, \qquad \alpha = x, y. \tag{27}$$

Introduisons maintenant la quantité complexe :

$$\psi = \left(m^{(x)} + \mathrm{i}m^{(y)}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \tag{28}$$

dont l'équation d'évolution déduite de (15) est

$$\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi \left(b^{(z)} - 1\right) - m^{(z)}b^{(+)} \qquad \text{avec} \quad b^{(+)} = \left(b^{(x)} + \mathrm{i}b^{(y)}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}. \tag{29}$$

Supposons qu'aucun champ extérieur n'est appliqué, de sorte que l'on a

$$b^{(z)} = \frac{\partial^2 m^{(z)}}{\partial x^2} + m^{(z)} \approx m^{(z)} \tag{30}$$

où l'on a négligé la dérivée seconde car sa contribution à (29) aurait été négligeable une fois multipliée par ψ. Effectuons de plus un développement à l'ordre 2 inclus en ψ pour $m^{(z)}$:

$$b^{(z)} \approx 1 - \frac{|\psi|^2}{2} \, . \tag{31}$$

La quantité $b^{(+)}$ est quant à elle multipliée par $m^{(z)} \approx 1$ dans (29) et on doit donc garder la dérivée seconde à cet ordre du calcul :

$$b^{(+)} = \frac{\partial^2 (m^{(x)} + \mathrm{i}m^{(y)})}{\partial x^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \tag{32}$$

de sorte qu'on arrive à :

$$\boxed{\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} \approx -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{2}|\psi|^2\psi} \, , \tag{33}$$

c'est-à-dire l'équation de Schrödinger non linéaire attractive.

Lien avec l'équation de sine–Gordon. L'équation de Landau Lifshitz admet une autre limite importante, l'équation de sine–Gordon, également très étudiée dans le contexte des solitons car elle donne naissance à des solitons topologiques. On se place pour cela dans la situation opposée à celle du paragraphe précédent en choisissant $J' < 0$ (easy-plane). La polarisation macroscopique minimisant l'énergie est alors orientée dans le plan xy.

On suppose par ailleurs qu'un faible champ extérieur est appliqué le long de l'axe x, $\boldsymbol{b}_{\text{ext}} = b_0 \,\hat{\boldsymbol{x}}$ avec $b \ll 1$. La présence de ce champ conduit à ajouter les termes $b_0 \sin\varphi$ et $b_0 \cot\theta \cos\varphi$ aux deux équations du système (19). En nous limitant comme au paragraphe précédent à des solutions variant lentement à l'échelle de x_0, et en prenant $|\theta - \frac{\pi}{2}| \ll 1$, nous pouvons simplifier le système (19) et obtenir :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \theta_t & \approx & -\varphi_{xx} + b_0 \sin\varphi \\ \varphi_t & \approx & \cos\theta \end{array} \right. \tag{34}$$

On élimine la variable θ en prenant la dérivée par rapport au temps de la seconde équation, $\varphi_{tt} \approx -\theta_t \sin\theta \approx -\theta_t$, ce qui donne finalement :

$$\boxed{\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + b_0 \sin\varphi = 0} \tag{35}$$

Nous ne commenterons pas davantage cette limite ici et nous renvoyons les lecteurs vers la discussion détaillée de DAUXOIS & PEYRARD (2006), ainsi que SCHWEIGLER, KASPER et al. (2017) et WYBO, BASTIANELLO et al. (2023) pour des réalisations dans le cadre des gaz d'atomes ultra-froids.

2 Un mélange binaire de condensats

2-1 Équations de Gross-Pitaevskii couplées

Nous considérons maintenant un mélange de deux gaz de Bose à température nulle, que nous supposons bien décrits dans le cadre de l'approche de Gross–Pitaevskii par les fonctions d'onde macroscopiques $\psi_1(\boldsymbol{r})$ et $\psi_2(\boldsymbol{r})$. Pour simplifier, nous supposerons que les atomes des deux gaz ont la même masse m, ce qui correspond au cas de deux fluides de la même espèce atomique, préparés dans deux états internes différents.

Nous supposerons que les interactions peuvent être décrites par un potentiel de contact, avec les trois couplages g_{11}, g_{22} et g_{12}. Les deux premiers décrivent les interactions intra-espèces et le troisième décrit l'interaction inter-espèce. La fonctionnelle d'énergie de Gross–Pitaevskii s'écrit alors en

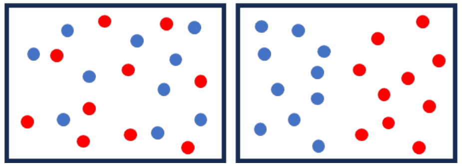

FIGURE 4. *Deux configurations possibles selon le caractère miscible (gauche) ou immiscible (droite) d'un mélange.*

dimension D :

$$\begin{aligned} E[\psi_1,\psi_2] &= \frac{\hbar^2}{2m}\int \left(|\boldsymbol{\nabla}\psi_1|^2+|\boldsymbol{\nabla}\psi_2|^2\right)\,\mathrm{d}^D r \\ &+ \frac{1}{2}\int \left[g_{11}\,\rho_1^2(\boldsymbol{r})+2g_{12}\,\rho_1(\boldsymbol{r})\rho_2(\boldsymbol{r})+g_{22}\,\rho_2^2(\boldsymbol{r})\right]\,\mathrm{d}^D r \end{aligned}$$

avec $\rho_j = |\psi_j|^2$, $j = 1, 2$. Dans ce qui suit, nous supposerons que tous les coefficients g_{ij} sont positifs pour éviter tout risque d'effondrement d'un des fluides sur lui-même[4]. Nous ne considérerons pas le cas où un couplage cohérent est mis en place entre les deux condensats. La prise en compte d'un tel couplage se ferait par un terme additionnel $\int \psi_1^*\psi_2+\psi_2^*\psi_1$ [voir par exemple QU, TYLUTKI et al. (2017)].

L'équation d'évolution de ψ_1 et ψ_2 se déduit de la fonctionnelle d'énergie donnée ci-dessus :

$$\mathrm{i}\hbar\,\partial_t\psi_i = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi_i+(g_{ii}\rho_i+g_{ij}\rho_j)\,\psi_i \tag{36}$$

avec $i, j = 1, 2$ et $j \neq i$. Chaque fluide évolue donc sous l'effet de son propre champ moyen ainsi que celui créé par l'autre composante. Pour chaque fluide, on a l'équation de continuité :

$$\partial_t\rho_j+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_j\boldsymbol{v}_j)=0 \qquad \text{avec} \quad \rho_j\boldsymbol{v}_j=\frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left(\psi_j^*\boldsymbol{\nabla}\psi_j\right) \tag{37}$$

puisqu'il n'y a pas de transfert de matière d'un fluide à l'autre.

4. Nous avons étudié dans le cours 2021-22 la situation $g_{12} < 0$ avec $g_{11}, g_{22} > 0$ qui peut conduire à la formation de gouttelettes quantiques.

Critère de miscibilité. Nous allons brièvement rappeler la nature du mélange – miscible ou non miscible – selon les valeurs des coefficients g_{ij}. Notre raisonnement sera fondé uniquement sur les énergies d'interaction intervenant dans l'énergie $E[\psi_1, \psi_2]$ et il négligera les termes d'énergie cinétique. Notre résultat s'appliquera donc aussi bien à un mélange de fluides quantiques que classiques, dans la limite où les effets surfaciques sont négligeables devant les effets volumiques.

Notons N_1 et N_2 les nombres de particules dans chacun des fluides et envisageons les deux situations représentées sur la figure 4 :

— Les deux fluides occupent tout le volume V accessible pour former un mélange homogène, de sorte que l'énergie d'interaction est égale à

$$E_{\text{hom}} = \frac{1}{2V}\left(g_{11}N_1^2+2g_{12}\,N_1N_2+g_{22}N_2^2\right). \tag{38}$$

— Les deux fluides sont spatialement séparés et occupent les volumes V_1 et V_2 avec $V = V_1 + V_2$, ce qui conduit à l'énergie d'interaction :

$$E_{\text{sep}} = \frac{g_{11}N_1^2}{2V_1}+\frac{g_{22}N_2^2}{2V_2}. \tag{39}$$

Dans le second cas, les volumes V_1 et V_2 s'ajustent (sous la contrainte $V_1 + V_2 = V$) pour minimiser l'énergie. Cela se produit pour

$$V_1 = V\,\frac{\sqrt{g_{11}}N_1}{\sqrt{g_{11}}N_1+\sqrt{g_{22}}N_2} \qquad V_2 = V - V_1\,, \tag{40}$$

ce qui conduit à

$$E_{\text{sep}} = \frac{1}{2V}\left(g_{11}N_1^2+2\sqrt{g_{11}g_{22}}\,N_1N_2+g_{22}N_2^2\right). \tag{41}$$

La comparaison de (38) et (41) donne alors le résultat recherché :

$$\boxed{\text{mélange miscible} \quad \Leftrightarrow \quad g_{12} < \sqrt{g_{11}\,g_{22}}} \tag{42}$$

2-2 Le régime de Manakov

De manière générale, la description des deux fluides quantiques couplés nécessite deux champs complexes, ψ_1 et ψ_2, ou de manière équivalente quatre champs réels, les deux densités $\rho_{1,2}$ et les deux phases $\varphi_{1,2}$

avec $\psi_j = \sqrt{\rho_j}\, e^{i\varphi_j}$. L'état du système est alors décrit par le spineur

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{\rho_1}\, e^{i\varphi_1}\\ \sqrt{\rho_2}\, e^{i\varphi_2}\end{pmatrix} . \tag{43}$$

Nous allons nous placer dans la situation où les trois coefficients g_{ij} sont positifs et proches les uns des autres[5], une situation appelée *régime de Manakov*. Pour simplifier les calculs, nous allons supposer plus précisément que

$$g_{11} = g_{22} \tag{44}$$

et introduire la différence

$$g_s = g_{12} - g \qquad \text{avec} \quad |g_s| \ll g, \tag{45}$$

l'indice "s" faisant référence aux excitations de spin, comme nous allons le voir dans un instant. Avec cette hypothèse, les régime miscible et immiscible trouvés en (42) correspondent respectivement à $g_s < 0$ et $g_s > 0$.

En pratique, l'égalité $g_{11} = g_{22}$ peut être réalisée pour une espèce atomique dont le niveau électronique fondamental est de moment cinétique $F = 1$, comme c'est le cas pour ^{7}Li, ^{23}Na, ^{39}K, ^{41}K, ^{87}Rb. Il suffit en effet de travailler avec les deux états $|F = 1, m_F = \pm 1\rangle$ et l'égalité recherchée résulte de la symétrie de rotation. Pour ^{87}Rb, l'hypothèse $|g_s| \ll g$ est très bien vérifiée : $g_s/g \sim 10^{-2}$.

Dans cette situation, un découplage se produit entre deux types d'excitation du système binaire (KAMCHATNOV, KARTASHOV et al. 2014 ; QU, PITAEVSKII et al. 2016 ; CONGY, KAMCHATNOV et al. 2016) :

— Les excitations de basse énergie se font à densité totale $\rho_1 + \rho_2$ constante ; elles ne portent que sur la polarisation $\rho_1 - \rho_2$ et font intervenir le couplage g_s.

— Les excitation de haute énergie font au contraire apparaître une modulation de la densité totale $\rho_1 + \rho_2$ et font intervenir le couplage g.

5. Ce régime est très différent de celui étudié dans le cours 2021-22, §IV.3, où l'on avait considéré un mélange avec $g_{11}, g_{22} > 0$, et le troisième paramètre g_{12} choisi négatif et voisin de $-\sqrt{g_{11}\, g_{22}}$. Cette situation donne naissance à des gouttelettes quantiques dans une géométrie 3D et des solitons brillants dans une géométrie quasi 1D, comme montré expérimentalement par CHEINEY, CABRERA et al. (2018).

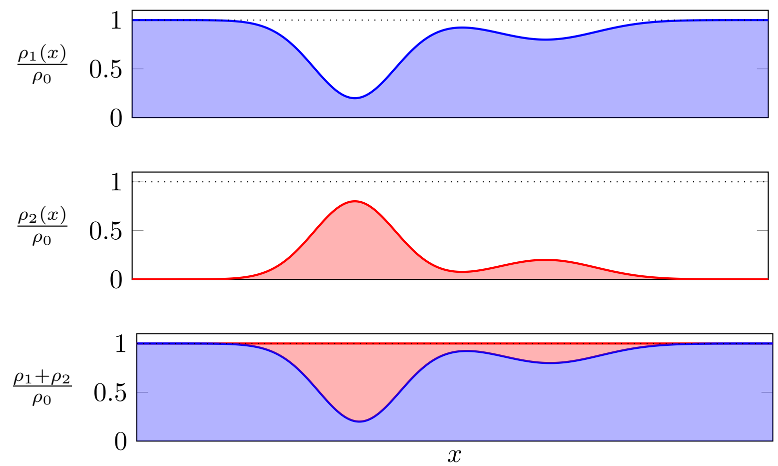

FIGURE 5. *Variation spatiale des densités $\rho_1(x)$ et $\rho_2(x)$ avec la condition de densité totale constante $\rho_1(x,t) + \rho_2(x,t) = \rho_0$.*

Dans ce qui suit, nous allons considérer un problème uni-dimensionnel, nous concentrer sur les excitations de basse énergie, et faire l'approximation

$$\rho_1(x,t) + \rho_2(x,t) = \rho_0 \tag{46}$$

où ρ_0 est une contante, en tout point x et tout instant t (figure 5). La somme des deux équations de continuité (37) entraîne alors

$$\partial_x J = 0 \qquad \text{avec} \quad J = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 . \tag{47}$$

Le courant total de particules $1 + 2$ est donc uniforme dans l'espace.

Dans ce régime de densité constante, la paramétrisation du spineur décrivant le gaz est ramenée à trois champs réels $\theta(x,t)$, $\Phi(x,t)$ et $\varphi(x,t)$:

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \sqrt{\rho_0}\, e^{i\Phi/2}\begin{pmatrix}\cos(\theta/2)\, e^{-i\varphi/2}\\ \sin(\theta/2)\, e^{+i\varphi/2}\end{pmatrix} \tag{48}$$

où Φ et φ désignent respectivement la phase globale et la phase relative des deux composantes :

$$\Phi(x,t) = \varphi_1(x,t) + \varphi_2(x,t) \qquad\qquad \varphi(x,t) = \varphi_2(x,t) - \varphi_1(x,t) \tag{49}$$

Les vitesses v_j des fluides définies en (37) sont données par

$$v_1 = \frac{\hbar}{2m}\left(\Phi_x - \varphi_x\right) \qquad v_2 = \frac{\hbar}{2m}\left(\Phi_x + \varphi_x\right) \tag{50}$$

de sorte que la relation $\partial_x J = 0$ devient :

$$\partial_x\left(\Phi_x - \cos\theta\,\varphi_x\right) = 0. \tag{51}$$

Cette relation, conséquence directe de l'hypothèse de densité totale constante, vient lier partiellement la phase globale Φ, la phase relative φ et l'angle de mélange θ. Elle s'intègre pour donner

$$\boxed{\Phi_x - \cos\theta\,\varphi_x = 2k(t)} \tag{52}$$

où k est à ce stade une fonction quelconque du temps.

Nous allons considérer dans la suite des situations où la composante 2 est localisée dans une zone réduite de l'espace par rapport à l'extension de la composante 1, que nous appellerons "bain". Dans ce cas, loin de la composante minoritaire, on a $\theta \approx 0$ et donc

$$\text{zone telle que } \rho_2 \approx 0 : \qquad k \approx \frac{1}{2}\left(\Phi_x - \varphi_x\right) = \frac{mv_1}{\hbar}\,. \tag{53}$$

La quantité k représente ainsi le nombre d'onde du bain dans les zones où ce bain est essentiellement pur.

2-3 Bain immobile : la chaîne magnétique retrouvée

Nous considérons dans ce paragraphe le cas où le bain est immobile, par exemple parce qu'il est confiné sur un segment, avec une barrière infranchissable à chaque extrémité. Dans ce cas, on peut poser $k(t) = 0$ à tout instant t et éliminer la phase Φ au profit de φ grâce à :

$$\boxed{\text{Bain immobile :} \qquad \Phi_x = \cos\theta\,\varphi_x} \tag{54}$$

Tant qu'on se limite à des excitations de basse énergie et que l'on peut faire l'approximation de densité constante, l'état du mélange binaire est donc décrit par les deux champs $\theta(x,t)$ et $\varphi(x,t)$. La réécriture des équations (36) en fonction de θ et φ donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{2m}{\hbar}\theta_t &=& -2\theta_x\varphi_x\cos\theta - \varphi_{xx}\sin\theta \\ \dfrac{2m}{\hbar}\varphi_t &=& -\cos\theta\left(\varphi_x^2 + \dfrac{2mg_s\rho_0}{\hbar^2}\right) + \dfrac{\theta_{xx}}{\sin\theta} \end{array}\right. \tag{55}$$

Choisissons l'unité de longueur x_0 telle que

$$\boxed{x_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m|g_s|\rho_0}}} \tag{56}$$

et l'unité de temps t_0 associée

$$\boxed{t_0 = \frac{2mx_0^2}{\hbar} = \frac{\hbar}{|g_s|\rho_0}} \tag{57}$$

ce qui donne le système en tout point identique à celui trouvé pour la chaîne magnétique en (19) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \theta_t &=& -2\theta_x\varphi_x\cos\theta - \varphi_{xx}\sin\theta \\ \varphi_t &=& -\cos\theta\left(\varphi_x^2 \pm 1\right) + \dfrac{\theta_{xx}}{\sin\theta} \end{array}\right. \tag{58}$$

où le signe $+$ fait maintenant référence au cas non-miscible et le signe $-$ au cas miscible.

Pour un bain immobile et dans l'hypothèse d'une densité totale constante pour le mélange, il y a donc une correspondance parfaite entre chaîne de moments magnétiques et mélange binaire de condensats avec :

ferromagnétique "easy-axis"	$\Leftrightarrow$	mélange non miscible
ferromagnétique "easy-plane"	$\Leftrightarrow$	mélange miscible.

En particulier, l'approche lagrangienne présentée en §1-4 reste inchangée (CONGY, KAMCHATNOV et al. 2016).

On retrouve notamment les trois quantités conservées mentionnées plus haut, à commencer par la masse du champ (23) qui s'écrit ici $N_2/\rho_0 x_0$, c'est-à-dire la population de la composante minoritaire (en unités réduites) :

$$\boxed{\text{Bain immobile :} \qquad N_2 = \frac{\rho_0}{2}\int (1-\cos\theta)\,\mathrm{d}x} \tag{59}$$

où l'intégrale est prise sur toute la longueur du bain, mais où seules les régions où ψ_2 prend des valeurs significatives contribuent. Les expressions (24) et (25) de l'énergie et pour l'impulsion sont également inchangées, les unités correspondantes étant [6]

$$\text{unité d'énergie : } E_0 = \frac{\hbar}{t_0}\rho_0 x_0 \qquad \text{unité d'impulsion : } P_0 = \hbar\rho_0. \tag{60}$$

On a donc dans les unités physiques

$$\boxed{\text{Bain immobile :} \qquad E_{\text{imm.}} = \frac{1}{4}E_0 x_0 \int \left[\theta_x^2 + \left(\phi_x^2 \pm \frac{1}{x_0^2}\right)\sin^2\theta\right]\,\mathrm{d}x} \tag{61}$$

L'expression (25) de l'impulsion peut par ailleurs se simplifier notablement en utilisant la relation $\Phi_x = \varphi_x\cos\theta$ qui entraîne

$$\text{Bain immobile :} \qquad P_{\text{imm.}} = \frac{\hbar\rho_0}{2}\int (\varphi_x - \Phi_x)\,\mathrm{d}x = -\hbar\rho_0\int \varphi_{1,x}\,\mathrm{d}x \tag{62}$$

ou encore, en revenant aux unités physiques :

$$\boxed{\text{Bain immobile :} \qquad P_{\text{imm.}} = -\hbar\rho_0\left[\varphi_1(x_+) - \varphi_1(x_-)\right]} \tag{63}$$

où $x_\pm$ sont situés de part et d'autre de la zone où ψ_2 prend des valeurs significatives, et où la phase du bain φ_1 peut varier (cf. figure 6, haut).

Remarque : On pourrait s'inquiéter de la discontinuité qui apparaît dans (58) à la transition miscible-non miscible. Le point important à noter est que l'échelle de longueur x_0 diverge en ce point. Pour un échantillon de taille finie L, cette échelle de longueur perd son intérêt si $x_0 > L$ et il vaut mieux travailler avec le système d'équations dimensionnées (55), qui n'est pas singulier dans la limite $|g_s| \to 0$.

6. Notons que ces unités font intervenir la quantité sans dimension $\rho_0 x_0$, de sorte qu'il n'est pas possible de rétablir les unités correctes par simple analyse dimensionnelle. Le choix fait ici permet d'assurer $E_0 = P_0 v_0$ où l'unité de vitesse v_0 est donnée par $v_0 = x_0/t_0$.

2-4 Bain en mouvement libre

Nous considérons maintenant un gaz pouvant bouger librement sur un anneau, avec des conditions aux limites périodiques pour les fonctions d'onde ψ_1 et ψ_2. Dans ce cas, il n'y a pas de raison de supposer *a priori* que le bain est au repos à tout instant, en particulier quand on applique une force extérieure sur le système comme ce sera le cas en §4. La relation particulière (54) doit donc être remplacée par celle, plus générale, écrite en (52). En nous plaçant toujours dans l'approximation d'une densité totale constante et égale à ρ_0, nous trouvons maintenant pour l'évolution des champs θ et φ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \theta_t & = & -2\theta_x\varphi_x\cos\theta - \varphi_{xx}\sin\theta - 2k\theta_x \\ \varphi_t & = & -\cos\theta\left(\varphi_x^2 \pm 1\right) + \dfrac{\theta_{xx}}{\sin\theta} - 2k\varphi_x \end{array}\right. \tag{64}$$

où le nombre d'onde k est exprimé en unités de $1/x_0$. Nous verrons un peu plus loin que k est directement proportionnel à l'impulsion du système [eq. (73)] et est donc indépendant du temps tant qu'une force extérieure n'agit pas sur l'un ou l'autre des fluides.

Là encore, ces équations peuvent être obtenues à partir d'une approche lagrangienne, qui implique cette fois-ci les trois champs θ, Φ, φ ainsi que leurs dérivées premières par rapport au temps et à l'espace. Ce lagrangien se calcule en partant de celui régissant l'évolution des deux équations de Schrödinger non linéaires couplées :

$$\mathcal{L}_{NLS} = \sum_{j=1,2}\left(\mathrm{i}\hbar\,\psi_j^*\psi_{j,t} - \frac{\hbar^2}{2m}|\psi_{j,x}|^2 - \frac{g}{2}|\psi_j|^4\right) - g_{12}|\psi_1|^2|\psi_2|^2 \tag{65}$$

et en y injectant la forme (48) du spineur (ψ_1,ψ_2). On trouve

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{cin}} - \mathcal{V} \tag{66}$$

avec

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = \frac{1}{2}\left(\varphi_t\cos\theta - \Phi_t\right) \tag{67}$$

et

$$\mathcal{V} = \frac{1}{4}\left(\theta_x^2 + \varphi_x^2 + \Phi_x^2\right) - \frac{1}{2}\Phi_x\varphi_x\cos\theta \pm \frac{1}{4}\sin^2\theta. \tag{68}$$

L'équation de Lagrange pour Φ redonne le lien général (52) entre Φ, φ et θ, et celles pour θ et φ conduisent à (64).

On retrouve là encore trois quantités conservées :

— Le nombre d'atomes dans la composante minoritaire

$$\boxed{\text{Bain libre :} \qquad N_2 = \frac{\rho_0}{2}\int (1-\cos\theta)\;\mathrm{d}x} \tag{69}$$

qui prend la même valeur que le bain soit en mouvement libre ou qu'on lui impose de rester au repos comme en § 2-3.

— L'énergie (en unités physiques) :

$$\boxed{\text{Bain libre :} \qquad E_{\text{lib.}} = \frac{1}{4}E_0 x_0 \int \left[\theta_x^2 + (\varphi_x^2 \pm \frac{1}{x_0^2})\sin^2\theta + 4k^2\right]\;\mathrm{d}x} \tag{70}$$

En comparaison avec le cas du bain immobile (61), on note pour un anneau de longueur L l'ajout du terme

$$E_0 x_0 L k^2 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\,\rho_0 L \tag{71}$$

qui correspond simplement à l'énergie cinétique de $\rho_0 L$ atomes se déplaçant à vitesse $\hbar k/m$.

— L'impulsion (en unités physiques) :

$$P_{\text{lib.}} = \frac{\hbar\rho_0}{2}\int (\Phi_x - \varphi_x\cos\theta)\;\mathrm{d}x \tag{72}$$

En exploitant le lien (52) entre Φ_x et φ_x, cette impulsion s'écrit encore pour un anneau de longueur L :

$$\boxed{\text{Bain libre :} \qquad P_{\text{lib.}} = \hbar k \rho_0 L} \tag{73}$$

Lien entre $P_{\text{imm.}}$ et $P_{\text{lib.}}$. La différence (71) entre l'énergie du cas "bain immobile" et "bain libre" se comprend simplement en terme d'énergie cinétique du bain. En revanche, la différence entre les impulsions (63) pour le bain immobile et (73) pour le bain en mouvement libre sur un anneau mérite un commentaire.

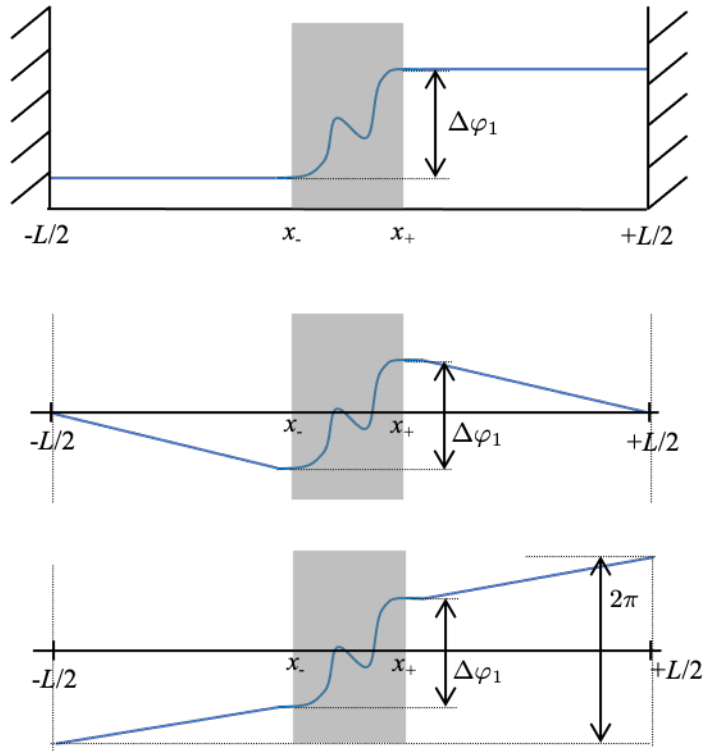

FIGURE 6. *Profils possibles pour la phase $\varphi_1(x)$ du bain. La composante minoritaire 2 est supposée localisée dans la zone grisée et sa présence a pour résultat une variation de phase $\Delta\varphi_1$ entre les points x_- et x_+. Haut : cas du confinement sur un segment, imposant un bain immobile et donc une phase φ_1 uniforme en dehors de la zone grisée. Milieu et bas : cas d'un bain disposé sur un anneau, avec les conditions aux limites périodiques $\psi_1(L/2) = \psi_1(-L/2)$, donc $\varphi_1(L/2) = \varphi_1(-L/2) + 2\pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. On a pris $n = 0$ pour la figure du milieu (pas d'enroulement de phase) et $n = 1$ pour la figure du bas.*

Nous avons représenté sur la figure 6 un profil de phase du bain dans chaque cas. Nous ne décrirons pas ici ce qui se passe dans la zone grisée où la composante minoritaire est présente, ce sera l'objet de la section suivante pour le cas particulier d'un soliton. Nous supposons seulement que le mélange entre les deux composantes a pour effet de produire la même différence de phase $\Delta\varphi_1 = \varphi_1(x_+) - \varphi_1(x_-)$ de part et d'autre de cette zone, que le bain soit au repos sur un segment ou libre dans un anneau. Nous supposons de plus que l'extension de la zone grisée est très petite devant la longueur totale L du bain.

Dans le cas où le bain est au repos, nous avons vu en (63) que l'impulsion est simplement égale à $-\hbar\rho_0\Delta\varphi_1$ (figure 6, haut). Dans le cas du bain en mouvement libre sur un anneau, la fonction d'onde du bain ψ_1 doit être mono-valuée, ce qui impose à la phase de prendre la même valeur (modulo 2π) en $\pm L/2$. Prenons d'abord le cas sans enroulement de phase (figure 6, milieu) : quand on parcourt le bain du point x_+ au point x_- (donc sans passer dans la zone grisée), on a un gradient de phase, donc un nombre d'onde, donné par $k = -\Delta\varphi_1/L$. Le résultat (73) $P_{\text{lib.}} = \hbar k\rho_0 L$ se réécrit donc $P_{\text{lib}} = -\hbar\rho_0\Delta\varphi_1$, ce qui coïncide avec le cas d'un bain au repos. Si un enroulement de phase est présent dans l'anneau, la différence de phase entre x_+ et x_- est égale à $-\Delta\varphi_1 + 2n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$ (figure 6, bas pour $n = 1$), ce qui fournit la relation générale entre $P_{\text{imm.}}$ et $P_{\text{lib.}}$:

$$P_{\text{lib.}} = P_{\text{imm.}} + n\, 2\pi\hbar\rho_0. \tag{74}$$

3 Le soliton magnétique

La réalisation de solitons magnétiques à partir de mélange de condensats est un sujet qui a été exploré par plusieurs groupes au cours des dix dernières années, à la fois sur le plan théorique et sur le plan expérimental [7]. Ces études ont d'abord porté sur le cas miscible, correspondant au cas *easy-plane* pour la chaîne magnétique. On pourra consulter notamment QU, PITAEVSKII et al. (2016), IVANOV, KAMCHATNOV et al. (2017), QU, TYLUTKI et al. (2017) et PITAEVSKII (2019) pour la théorie et FAROLFI, TRYPOGEORGOS et al. (2020) et CHAI, LAO et al. (2020) pour les deux premières réalisations expérimentales.

Dans ce qui suit, nous allons nous concentrer sur le cas non miscible, c'est-à-dire le cas *easy-axis* pour l'équivalent ferromagnétique. Plus précisément, nous considérons un nombre fini d'atomes de l'espèce 2 immergés dans un bain de grande longueur formé par l'espèce 1. Nous allons chercher dans cette section la forme que doit prendre ce nuage de particules 2 pour pouvoir se déplacer à vitesse v constante sans subir de déformation, ce qui constitue la définition d'un soliton.

3-1 Structure générale de la solution

Nous nous intéressons à des états du mélange pour lesquels le fluide est composé exclusivement de particules de type 1 quand $x \to \pm\infty$. Cela impose :

$$x \to \pm\infty : \qquad \theta \to 0. \tag{75}$$

Nous n'imposons pas de contrainte entre la phase du bain de part et d'autre du soliton, ce qui revient à nous placer sur un segment (arbitrairement long).

Nous allons nous intéresser au cas d'un bain immobile [8] et chercher les solutions solitoniques du système (58) sous la forme

$$\begin{cases} \theta(x,t) = \theta(x - vt) \\ \varphi(x,t) = \Omega t + \phi(x - vt) \end{cases} \tag{76}$$

Un soliton est donc caractérisé par deux paramètres, sa vitesse v et le paramètre Ω. Nous verrons plus loin qu'il est indispensable d'introduire ce second paramètre Ω pour obtenir des solutions intéressantes [9]. Une contrainte similaire était apparue pour les solitons brillants, pour lesquels la phase de la fonction d'onde n'évoluait pas avec le même argument $x - vt$ que son module.

7. Les "véritables" solitons magnétiques dans des matériaux solides ont été observés depuis de nombreuses années, en lien avec les interfaces entre deux zones de magnétisation différente. On pourra consulter KOSEVICH, IVANOV et al. (1990) pour les références historiques, ainsi que TOGAWA, KOYAMA et al. (2012) et CARETTA, OH et al. (2020) pour des réalisations récentes.

8. Le cas d'un bain de nombre d'onde k et de vitesse $v_b = \hbar k/m$, décrit par les équations (64), s'en déduit en remplaçant dans ce qui suit v par $v - v_b$.

9. L'article de CHAI, YOU et al. (2022) pose implicitement $\Omega = 0$ et ne trouve qu'un sous-ensemble des solutions solitoniques discutées ici.

Quand on injecte cette structure de solution dans les équations du mouvement (58), on arrive au système différentiel pour les fonctions à une variable θ et ϕ (LONG & BISHOP 1979) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -v\theta' & = & -2\theta'\phi'\cos\theta - \phi''\sin\theta \\ \Omega - v\phi' & = & -\cos\theta\left[(\phi')^2+1\right] + \dfrac{\theta''}{\sin\theta} \end{array} \right. \tag{77}$$

Rappelons que pour obtenir ce système, nous avons exprimé position et temps en unités de x_0 et t_0 définis en (56-57), la vitesse étant donc en unité de x_0/t_0. Nous allons maintenant résoudre ce système dans le cas particulier $v = 0$, puis nous passerons à un soliton de vitesse quelconque.

3-2 Le soliton magnétique au repos

Pour un soliton de vitesse nulle, la première équation de (77) donne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\phi'\sin^2\theta\right) = 0. \tag{78}$$

Comme θ tend vers 0 à l'infini, on en déduit que $\phi' = 0$ sauf en un point x_s où $\sin\theta = 0$ et où l'on peut avoir $\phi'(x)$ proportionnel à la distribution de Dirac $\delta(x - x_s)$. La phase ϕ est donc uniforme, avec une possibilité de discontinuité en un point où $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ (déplétion totale d'une ou l'autre des composantes) :

$$\text{Point } x_s \text{ où } \sin[\theta(x)] = 0 : \quad \phi(x) = \phi_0 + \phi_1 Y(x - x_s) \tag{79}$$

où $Y(x)$ représente la fonction de Heaviside.

La seconde équation de (77) devient alors :

$$\theta'' = \Omega\sin\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\,. \tag{80}$$

La résolution de cette équation différentielle est relativement technique ; nous allons donc nous borner à indiquer les conclusions principales pour les solutions centrées en $x = 0$ (le problème est invariant par translation) :

— Le paramètre Ω doit être tel que

$$\boxed{\Omega > -1} \tag{81}$$

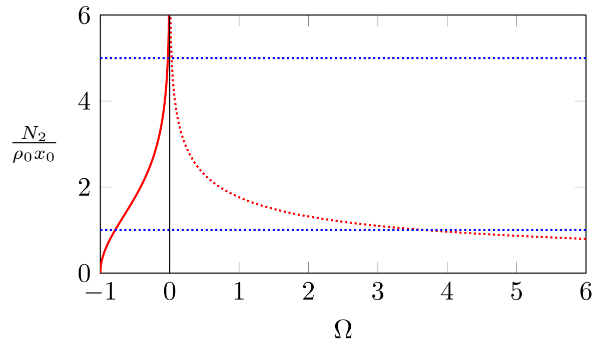

FIGURE 7. *Résolution graphique de la relation entre le paramètre Ω et le nombre d'atomes N_2 dans la composante minoritaire. Les deux lignes pointillées bleues correspondent aux nombres d'atomes de la composante minoritaire $\tilde{N}_2 = 1$ et $\tilde{N}_2 = 5$. Les profils correspondants sont tracés en figure 8 et 9, respectivement. Pour $\tilde{N}_2 = 1$, les solutions sont $\Omega \approx -0.78$ (rouge continue) et $\Omega = 3.68$ (rouge pointillée). Pour Pour $\tilde{N}_2 = 5$, les solutions sont $\Omega \approx -2.66\ 10^{-2}$ (rouge continue) et $\Omega = 2.73\ 10^{-2}$ (rouge pointillée).*

— Quand cette condition est vérifiée, la solution s'écrit :

$$\boxed{\frac{\rho_2(x)}{\rho_0} = \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{2+2\Omega}{2+\Omega+|\Omega|\cosh(2\kappa x)}} \tag{82}$$

avec

$$\boxed{\kappa = \sqrt{1+\Omega}} \tag{83}$$

Cette solution est maximale en $x = 0$ et décroît exponentiellement vite à l'infini.

— Le nombre de particules N_2 dans la composante minoritaire est donné par (59) et on trouve

$$\boxed{N_2 = \rho_0 x_0 \ln\left(\frac{2+\Omega+2\kappa}{|\Omega|}\right)} \tag{84}$$

Nous montrons en figure 7 le principe d'une inversion graphique de cette équation, permettant de trouver la ou les valeurs de Ω à prendre

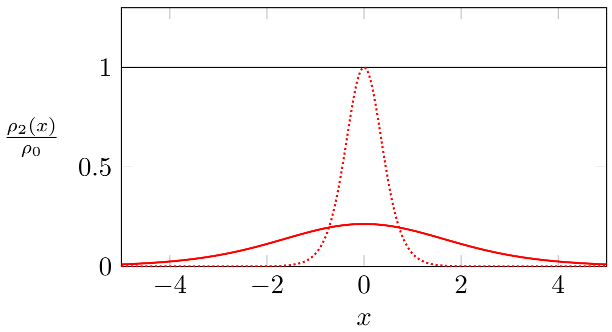

FIGURE 8. *Les deux profils de densité de la composante minoritaire pour* $N_2/\rho_0 x_0 = 1$ *pour un soliton magnétique de vitesse nulle.*

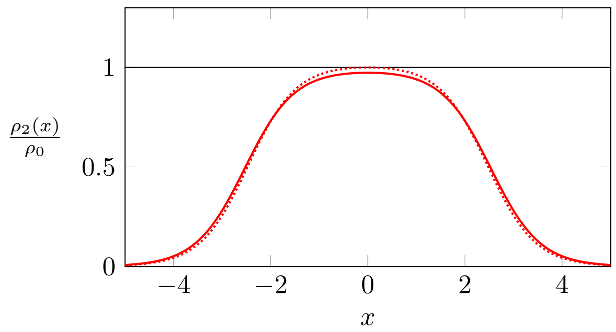

FIGURE 9. *Les deux profils de densité de la composante minoritaire pour* $N_2/\rho_0 x_0 = 5$ *pour un soliton magnétique de vitesse nulle.*

pour rendre compte d'un nombre N_2 de particules dans la composante minoritaire. Pour une valeur donnée de N_2, on trouve deux valeurs de Ω, l'une négative entre $\Omega = -1$ et $\Omega = 0$ (branche continue), l'autre positive (branche pointillée). Il y a donc deux solitons au repos possibles pour chaque valeur de N_2. L'énergie de ces solutions calculée en utilisant (61) vaut $E = 2\kappa = 2\sqrt{1+\Omega}$. La solution obtenue pour $\Omega < 0$ a donc une énergie plus basse que celle correspondant à $\Omega > 0$.

Faibles nombres N_2. Dans le cas où $N_2/\rho_0 x_0 \lesssim 1$, les deux solutions obtenues sont très différentes l'une de l'autre, comme on le voit sur la figure 8. Une des solutions (en ligne rouge continue sur cette figure) correspond à $\Omega \approx -1$, pour laquelle (82) se simplifie en

$$\frac{\rho_2(x)}{\rho_0} \approx \frac{\kappa^2}{\cosh^2(\kappa x)} \tag{85}$$

avec $\kappa = \sqrt{1+\Omega} \ll 1$. On retrouve la structure caractéristique d'un soliton brillant de faible amplitude, avec une largeur grande devant x_0. On pouvait s'attendre à ce type de solution dans la mesure où nous avions trouvé en § 1-5 que l'équation de Landau–Lishiftz se ramenait à l'équation de Schrödinger non linéaire dans le régime où θ reste proche de 0, c'est-à-dire le régime de faible déplétion.

L'autre solution pour la même valeur de N_2 (en ligne rouge pointillée sur la figure) correspond à $\Omega \gg 1$, et donc $\kappa \gg 1$. Elle est beaucoup plus étroite, avec une déplétion complète de la composante 1. Notons que l'émergence d'une structure étroite est nécessairement associée à une énergie cinétique importante ; l'hypothèse de la séparation des échelles d'énergie liées aux excitations de spin et aux excitations de densité totale doit donc être réexaminée avec soin pour ce type de solution : la structure de spin qui apparaît ici coûte beaucoup d'énergie et peut se coupler à une excitation de densité.

Grands nombres N_2. Dans le cas où $N_2/\rho_0 x_0 \gg 1$, les valeurs de Ω trouvées par la résolution de (84) sont proches de $\Omega = 0$ et opposées l'une de l'autre. Elles conduisent à des profils spatiaux très voisins :

$$\frac{\rho_2(x)}{\rho_0} \approx \frac{1}{1 + \frac{|\Omega|}{2}\cosh(2x)}, \tag{86}$$

représentés en continu et en pointillé sur la figure 9 pour $N_2/\rho_0 x_0 = 5$. Ces profils sont plats et proches de 1 sur un segment de longueur $\ln(4/|\Omega|) \approx N_2/\rho_0 x_0$ centré sur $x = 0$, et décroissent ensuite vers 0 sur l'échelle de longueur x_0 (puisque $\kappa \approx 1$ dans ce cas). Cette structure correspond à un domaine de spin dans le cas ferromagnétique, ou une bulle quasi-pure du condensat 2 de densité ρ_0, immergée dans le condensat 1.

Sauts de phase éventuels. Nous avons indiqué en (79) la possibilité d'avoir un saut de la phase φ (d'amplitude inconnue à ce stade) en un point x_s où $\sin[\theta(x_s)] = 0$, donc $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Revenons brièvement sur ce point pour les deux catégories de solutions envisagées et regardons ce que cela entraîne pour les phases des deux condensats. Remarquons d'abord que la solution donnée en (82) pour $\sin(\theta/2)$ ne s'annule jamais, quel que soit le signe de Ω. Cela exclut de trouver un point x où $\theta(x) = 0$. Un éventuel zéro de $\sin[\theta(x)]$ doit donc correspondre à $\theta(x) = \pi$, c'est-à-dire un point x pour lequel $\sin[\theta(x)/2] = 1$ correspondant à une déplétion totale du bain.

On constate sur (82) que la condition $\sin(\theta/2) = 1$ est réalisée en $x = 0$ pour les solutions à $\Omega > 0$. Les phases ϕ et φ peuvent donc être discontinue en ce point. Les phases φ_1 et φ_2 des condensats se déduisent de (49-52)

$$\partial_x\varphi_1 = -\sin^2(\theta/2)\,\partial_x\varphi \qquad \partial_x\varphi_2 = \cos^2(\theta/2)\,\partial_x\varphi\,. \tag{87}$$

En un point x_s où $\theta(x_s) = \pi$, la discontinuité de φ se transmet (au signe près) à la phase du bain φ_1. Plus précisément, si l'on revient à la fonction d'onde du bain $\psi_1(x)$, celle-ci s'écrit à une phase globale près

$$\Omega > 0,\ v = 0: \qquad \psi_1(x) = \sqrt{\rho_0}\,\frac{\sqrt{\Omega}\ \sinh(\kappa x)}{\left[1 + \Omega\cosh^2(\kappa x)\right]^{1/2}}, \tag{88}$$

donc un saut de phase de $\pm\pi$ en $x = 0$. En revanche, Il n'y a donc pas de discontinuité de la phase de la composante minoritaire en ce point.

Par ailleurs, les solutions correspondant à $\Omega < 0$ n'atteignent jamais la valeur 1 et la déplétion du bain n'est donc jamais totale pour elles. On en déduit que la phase $\varphi(x)$ est uniforme sur tout l'espace pour ces solutions et il en va de même pour les phases individuelles des deux condensats φ_1 et φ_2. À partir de (82), on trouve pour la fonction d'onde du bain (toujours à une phase globale près) :

$$\Omega < 0,\ v = 0: \qquad \psi_1(x) = \sqrt{\rho_0}\,\frac{\sqrt{|\Omega|}\ \cosh(\kappa x)}{\left[1 + |\Omega|\sinh^2(\kappa x)\right]^{1/2}} \tag{89}$$

et pour celle de la fonction d'onde de la composante minoritaire

$$\Omega < 0,\ v = 0: \qquad \psi_2(x) = \sqrt{\rho_0}\,\frac{(1-|\Omega|)^{1/2}}{\left[1 + |\Omega|\sinh^2(\kappa x)\right]^{1/2}}. \tag{90}$$

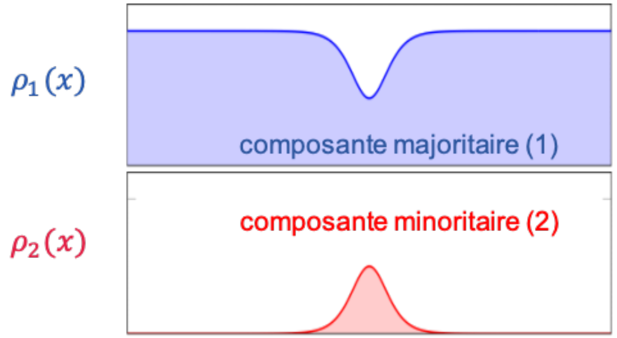

FIGURE 10. *Soliton magnétique dans un mélange à deux composantes.*

3-3 Réalisation expérimentale d'un soliton au repos

Le groupe du Collège de France a récemment mené une expérience dans laquelle un soliton magnétique au repos a été produit et caractérisé dans un mélange à deux composantes (figure 10). Le point de départ est un piège optique en forme de boîte à fond plat le long de l'axe x avec une longueur $L_x = 60\,\mu$m. Les autres degrés de liberté sont fortement confinés avec une largeur $L_y = 3\,\mu$m et une épaisseur $L_z \sim 0.3\,\mu$m. On y prépare un gaz condensé uniforme, de $N_1 \approx 20\,000$ atomes de rubidium (soit $\rho_0 = 370$ atomes/μm), de très basse température. La dynamique de spin est gelée selon les directions y et z, de sorte que le gaz est initialement décrit en bonne approximation par la fonction d'onde unidimensionnelle $\psi(x) = \sqrt{\rho_0}$. Les atomes sont préparés dans l'état électronique fondamental et dans le sous-niveau hyperfin $|F = 1, m_F = -1\rangle$.

Au moyen d'une transition impliquant un photon infrarouge de longueur d'onde ~ 790 nm et un photon micro-onde, on transfère une fraction des atomes de $|F = 1, m_F = -1\rangle$ vers $|F = 1, m_F = +1\rangle$. Le faisceau infrarouge est mis en forme spatialement grâce à un système de micro-miroirs pour que la dépendance en x de la fraction transférée reproduise au mieux la fonction $\sin^2(\theta/2)$ donnée en (82). Lors du transfert, la densité totale reste par construction égale à ρ_0 en tout point x. Par ailleurs, on vise une solution $\Omega < 0$ de sorte que les fonctions d'onde $\psi_{1,2}$ doivent conserver une phase uniforme : il n'y a donc aucune manipulation à faire pour disposer

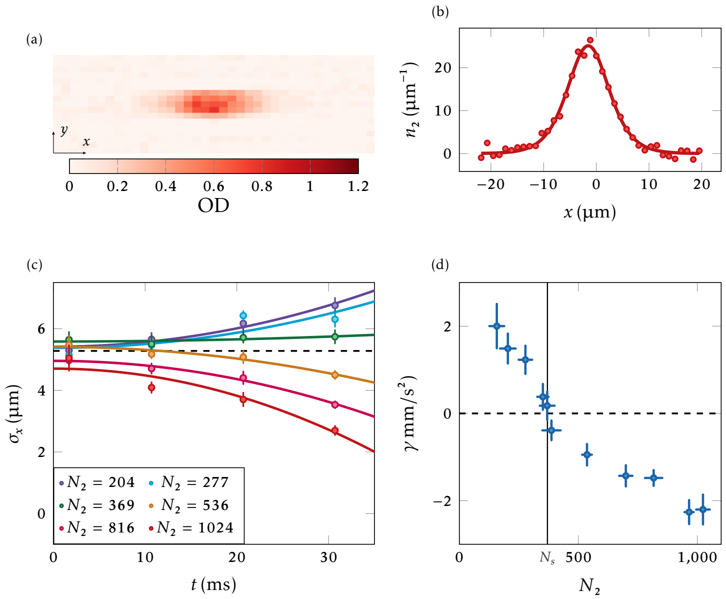

FIGURE 11. *a,b : Visualisation de la densité $\rho_2(x)$ de la composante minoritaire d'un soliton magnétique. La densité ρ_0 de la composante majotritaire (non visible ici) est de 370 atomes/µm. c,d : expansion du paquet d'ondes ψ_2 en fonction du nombre d'atomes N_2. L'état "soliton magnétique" est atteint pour $N_2 = 370$. Figure extraite de la thèse de Franco Rabec (voir aussi* RABEC, CHAUVEAU *et al.* *(2024)).*

du bon profil de phase, contrairement aux expériences menées avec des solitons sombres.

En pratique, on s'intéresse à des situations de faible déplétion, pour lesquelles la densité de la composante minoritaire varie comme $1/\cosh^2(\kappa x)$ [cf. (85)]. On "imprime" donc ce profil simple, en choisissant une valeur donnée de κ, en l'occurrence $\kappa^{-1} = 5.5\,\mu$m. On varie la quantité d'atomes transférés en changeant l'intensité du faisceau lumineux assurant le transfert. On mesure ensuite si la structure ainsi produite se contracte, se dilate ou reste stationnaire. Dans le dernier cas, on en déduit que l'on a atteint les conditions de formation d'un soliton magnétique de vitesse nulle avec $\Omega \approx -0.91$. L'échelle de longueur x_0 est égale à $1.61\,\mu$m dans ce cas particulier.

Un résultat typique est montré en figure 11. Pour la valeur choisie pour κ, le nombre d'atomes assurant la stationnarité est $N_2 = 370$. On en déduit le paramètre d'interaction de l'expérience $g_s = h \times 0.06\,$Hz$\cdot\mu$m ; ce résultat est en bon accord avec ce que l'on attendait connaissant les longueurs de diffusion 3D et la géométrie du piège confinant les atomes. Nous retrouverons le soliton magnétique ainsi produit en section 4, pour étudier les oscillations de Bloch sous l'effet d'une force constante.

3-4 Le soliton magnétique en mouvement

Nous passons maintenant à la résolution du système (77) dans le cas d'une vitesse v quelconque. Les calculs correspondants étant assez longs, nous allons simplement donner ici les principaux résultats. L'angle θ est donné par

$$\boxed{\frac{\rho_2(x)}{\rho_0} = \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{2\kappa^2}{2+\Omega+\sqrt{\Omega^2+v^2}\cosh(2\kappa x)}} \tag{91}$$

avec

$$\boxed{\kappa = \sqrt{1+\Omega-v^2/4}} \tag{92}$$

ce qui généralise le résultat (82-83) au cas $v \neq 0$. La phase ϕ n'est plus uniforme, mais donnée par :

$$\tan\left(\phi(x)+\frac{1}{2}xv\right) = \frac{2\Omega - v^2 + 2\sqrt{\Omega^2+v^2}}{2\kappa v}\tanh(\kappa x) \tag{93}$$

Le nombre d'atomes de l'espèce minoritaire 2 dans cette structure vaut :

$$\cosh\tilde{N}_2 = \frac{2+\Omega}{\sqrt{\Omega^2+v^2}}. \tag{94}$$

Pour gagner un peu d'intuition physique à partir de ces équations compliquées, il est intéressant de représenter l'état du soliton dans le plan (v,Ω) (figure 12). On remarque d'abord que la définition de κ en (92) vient mettre

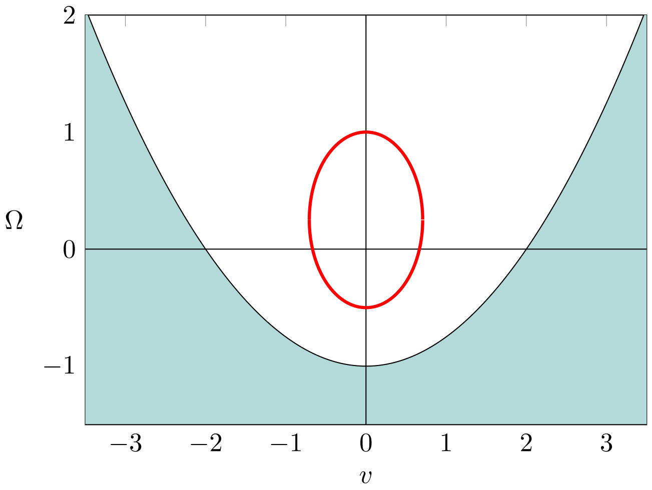

FIGURE 12. *Courbe rouge : ellipse représentant les états possibles d'un soliton magnétique dans le plan* (v, Ω) *pour un nombre de particules* $\tilde{N}_2$ *fixé (ici* $\tilde{N}_2 \approx 1.7$*). La zone colorée correspond aux paramètres* (v, Ω) *pour lesquels il n'y a pas de solution. Quand* $\tilde{N}_2$ *augmente, l'ellipse se contracte autour du point* $(0, 0)$.

une contrainte sur le domaine du plan accessible. Comme l'argument de la racine carrée doit être positif, il faut choisir le couple (v, Ω) tel que

$$\Omega > -1 + \frac{v^2}{4} \tag{95}$$

ce qui représente un domaine limité par une parabole d'axe z. La condition $\Omega > -1$ trouvée en (81) correspond au cas particulier $v = 0$ de cette condition générale.

Dans le plan (v, Ω), les courbes correspondant à N_2 constant sont des ellipses, avec leurs sommets situés en $v = 0$, $\Omega < 0$ et en $v = 0$, $\Omega > 0$. Ces sommets correspondent aux deux solutions identifiées précédemment pour $v = 0$, et on voit maintenant que ces solutions particulières sont reliées par un continuum de solutions correspondant à une vitesse non nulle. La question, ouverte à ce stade, est de trouver un moyen pour mettre le soliton en mouvement et lui faire parcourir cette ellipse. Nous montrerons dans la partie 4 comment cela est possible.

L'énergie du soliton est toujours donnée par la relation simple $E = 2\kappa$. À partir de ce résultat, on trouve que l'impulsion P déduite de la relation canonique

$$\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_{\tilde{N}_2} = v \tag{96}$$

est reliée à la vitesse par

$$\boxed{v = 2\,\frac{\sin P}{\sinh \tilde{N}_2}} \tag{97}$$

Cette dernière relation permet d'écrire l'énergie comme

$$\boxed{E(\tilde{N}_2, P) = 2\tanh(\tilde{N}_2/2) \; + \; 4\,\frac{\sin^2(P/2)}{\sinh \tilde{N}_2}} \tag{98}$$

On pourra vérifier sur ce cas particulier du soliton magnétique la relation générale $P = -\hbar\rho_0\,\Delta\varphi_1$ donnée en (63), reliant l'impulsion P et la variation de phase du bain $\Delta\varphi_1$ autour de la zone où la composante 2 est localisée.

Le fait que l'énergie et la vitesse soient des fonctions périodiques de l'impulsion est remarquable. Cela jouera un rôle essentiel dans la section suivante, où nous étudierons le mouvement du soliton magnétique sous l'effet d'une force. Sur le plan mathématique, cette périodicité s'explique par le fait que l'impulsion est égale à la variation de phase du bain $\Delta\varphi_1$, et qu'une phase est définie modulo 2π.

Nous avons utilisé dans ce qui précède le fait que l'impulsion P et la vitesse v sont des quantités conjuguées. Comme l'énergie (98) dépend des deux variables indépendantes P et $\tilde{N}_2$, une question naturelle est de trouver la variable conjuguée à $\tilde{N}_2$. Un calcul sans difficulté conduit à

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \tilde{N}_2}\right)_P = -\Omega\,, \tag{99}$$

ce qui montre que Ω joue (au signe près) le rôle d'un potentiel chimique, c'est-à-dire l'énergie nécessaire pour modifier le nombre de particules $\tilde{N}_2$ d'une unité, à impulsion constante.

Rappel sur les unités. La position et le temps sont exprimés dans ce qui précède en unités de x_0 et t_0 donnés en (56-57). L'unité de vitesse est x_0/t_0, l'unité d'énergie est $\frac{\hbar}{t_0}\rho_0 x_0$ et l'unité d'impulsion est $\hbar\rho_0$. Nous avons posé $\tilde{N}_2 = N_2/\rho_0 x_0$.

4 Oscillations de Bloch d'un soliton magnétique

4-1 Les oscillations de Bloch "usuelles"

Le phénomène des oscillations de Bloch est une des manifestations les plus spectaculaires de la physique quantique pour une particule unique. Pourvu que cette particule soit placée dans un environnement adéquat, on constate que l'action d'une force extérieure f, uniforme et constante dans le temps, ne conduit pas à un mouvement uniformément accéléré, mais à un mouvement oscillant. Nous avons rencontré et étudié en détail ce phénomène dans des cours précédents (voir en particulier le cours 2012-13) et nous allons donc simplement le présenter brièvement ici.

L'environnement qui donne naissance au phénomène des oscillations de Bloch est un potentiel périodique dans l'espace, que nous noterons $V(x)$ en nous limitant pour simplifier à un problème unidimensionnel. Nous noterons a la période spatiale du potentiel, $V(x+a) = V(x)$, et la période temporelle de l'oscillation de Bloch vaut alors

$$\boxed{t_B = \frac{2\pi\hbar}{fa}} \tag{100}$$

L'explication de ce phénomène réside dans la structure de la relation de dispersion qui relie l'énergie E de la particule à son impulsion, ou plutôt sa quasi-impulsion, notée ici p. Dans le potentiel périodique $V(x)$ et en l'absence de la force extérieure f, cette relation de dispersion est composée de bandes d'énergie $E_n(p)$ avec la périodicité $2\pi\hbar/a$:

$$E_n\left(p + \frac{2\pi\hbar}{a}\right) = E_n(p). \tag{101}$$

Les états propres de l'hamiltonien $|\phi_{n,p}\rangle$ sont également périodiques en p, mis à part des facteurs de phase sans importance ici. Un domaine d'impulsion de largeur $2\pi\hbar/a$, par exemple $[-\pi\hbar/a, +\pi\hbar/a]$, est appelé une *zone de Brillouin*.

Supposons par exemple que la particule est préparée dans la bande d'énergie la plus basse, $n = 0$, sous forme d'un paquet d'ondes obtenu en superposant un continuum de valeurs de la quasi-impulsion :

$$|\psi(t=0)\rangle = \int c(p)\, |\phi_{n=0,p}\rangle \,\mathrm{d}p \tag{102}$$

Appliquons maintenant la force supplémentaire f : chaque quasi-impulsion p va évoluer selon $\dot{p} = f$. Supposons de plus que cette force f est suffisamment faible pour qu'au cours de son mouvement, la particule reste dans la bande inférieure $n = 0$. Au bout du temps t_B, la quasi-impulsion de chaque état propre intervenant dans l'intégrale (102) a augmenté de la quantité $2\pi\hbar/a$, et cette quasi-impulsion a donc décrit l'ensemble de la zone de Brillouin. On en déduit que l'état de la particule est revenu à sa valeur initiale (à une phase globale près), en particulier en ce qui concerne sa position moyenne.

Ce phénomène a d'abord été mis en évidence pour des électrons dans des super-réseaux (FELDMANN, LEO et al. 1992), puis pour des atomes dans des ondes lumineuses stationnaires (BEN DAHAN, PEIK et al. 1996; WILKINSON, BHARUCHA et al. 1996). L'ingrédient essentiel qui lui donne naissance est la loi de variation périodique des observables physiques (énergie, vitesse, position,...) avec l'impulsion. La réponse de l'impulsion à une force ($\dot{p} = f$) implique alors immédiatement un mouvement oscillant pour l'objet physique en jeu.

4-2 Force sur un soliton magnétique

Considérons maintenant un soliton magnétique au repos réalisé à partir de N_2 atomes immergés dans un bain de particules de type 1, avec la densité asymptotique $\rho_1(x) = \rho_0$. Supposons que l'on applique une force f sur chaque particule de type 2, sans affecter les particules de type 1. Si la force est suffisamment faible, le soliton va (au moins aux temps courts) être accéléré en bloc : les particules 2 vont se mettre en mouvement dans la direction de la force, et le trou qu'elles créent dans le bain de particules 1 va suivre ce mouvement. Si ce n'était pas le cas, on génèrerait une excitation de la densité totale du mélange, dont on a vu qu'elle est coûteuse en énergie car proportionnelle à g.

Dans cette hypothèse où le mélange de fluides peut continuer à être décrit comme un soliton magnétique qui garde son intégrité sous l'action de la force f, l'impulsion canonique du système varie comme

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = F \qquad \text{avec} \quad F = N_2 f} \tag{103}$$

Cette relation se déduit de la conservation de l'énergie totale en présence du potentiel $U(x)$ associé à la force f ($f = -\mathrm{d}U/\mathrm{d}x$) :

$$E_{\text{tot}} = E(\tilde{N}_2, P) \ + \ \tilde{N}_2 U(x_s) \tag{104}$$

où $E(\tilde{N}_2, P)$ est donnée en (98) et où x_s représente la position du centre du soliton [10]. Puisque N_2 reste constant, on trouve

$$0 = \frac{\mathrm{d}E_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_{\tilde{N}_2} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} \ + \ \tilde{N}_2 \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t} \tag{105}$$

où encore, en utilisant la vitesse du soliton $v = \frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_{\tilde{N}_2}$:

$$0 = v\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} - \tilde{N}_2 f v \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \tilde{N}_2 f\ . \tag{106}$$

Le mouvement uniformément accéléré du soliton va durer tant que la vitesse correspondante v, exprimée en unités réduites x_0/t_0 est petite devant 1. On a en effet dans ce régime [cf (97-98)] :

$$v \approx \frac{P}{m_{\text{eff}}} \qquad E(\tilde{N}_2, P) \approx E_0(\tilde{N}_2) + \frac{P^2}{2m_{\text{eff}}} \tag{107}$$

avec la masse effective

$$m_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\sinh \tilde{N}_2. \tag{108}$$

Une fois sorti de ce régime, il faut revenir à la relation de dispersion complète $E(\tilde{N}_2, P)$ pour déterminer le mouvement du soliton. Comme cette relation de dispersion est périodique en P avec la période 2π en unités réduites (ou $2\pi\hbar\rho_0$ en unités réelles), on en déduit que le soliton va avoir un mouvement oscillant avec la période temporelle

$$\boxed{t_B = \frac{2\pi\hbar\rho_0}{F}} \tag{109}$$

comme prédit initialement par KOSEVICH, GANN et al. (1998) et KOSEVICH (2001). On retrouve donc une dynamique typique des oscillations de Bloch, même si aucune structure périodique sous-jacente n'est présente dans ce système (GANGARDT & KAMENEV 2009; SCHECTER, GANGARDT et al. 2012). La correspondance entre le résultat traditionnel (100) et celui trouvé pour un soliton magnétique est la suivante :

$$\begin{array}{ccc} a & \leftrightarrow & \rho_0^{-1} \\ f & \leftrightarrow & F = N_2 f \end{array} \tag{110}$$

Il est important de noter qu'on est ici en présence d'un phénomène collectif : la période est une fonction de $N_2 f$ et pas de f seulement. En d'autres termes, l'oscillation du soliton n'est pas la superposition de mouvements individuels des particules de type 2 soumises chacune à la force f, mais une dynamique d'un objet "mésoscopique" (pour $N_2 \gg 1$) soumis à la force F.

Pour la représentation graphique dans le plan (v, Ω), ce mouvement oscillant revient à parcourir l'ellipse de la figure 12 dans le sens direct. Les deux points tournants du mouvement, pour lesquels la vitesse du soliton s'annule, correspondent aux deux états du soliton au repos trouvés en § 3-2 [voir également ZHAO, WANG et al. (2020) pour une description en terme de masse effective dont le signe dépend du temps].

4-3 Observation des oscillations de Bloch

Le soliton magnétique dont nous avons décrit la préparation en § 3-3 peut être mis en mouvement par un gradient de champ magnétique, puisque les deux sous-niveaux en jeu, $|1\rangle \equiv |F=1, m=-1\rangle$ et $|2\rangle \equiv |F=1, m=+1\rangle$ ressentent des forces opposées dans ce gradient. En pratique, on prépare le nuage dans l'état $|1\rangle$ en présence du gradient b', choisi suffisamment faible pour que la densité à l'équilibre ρ_1 reste pratiquement

10. Cette écriture suppose implicitement que $U(x)$ varie peu sur l'étendue du soliton.

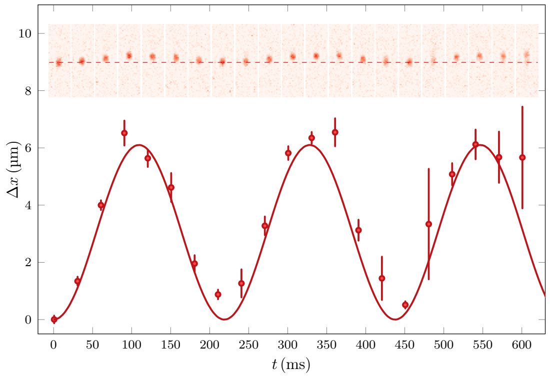

FIGURE 13. *Oscillations de Bloch d'un soliton magnétique préparé comme indiqué sur la figure 11. Le bain de particules 1 est bien présent, mais il n'est pas visible sur cette série d'images car le faisceau lumineux servant à imager le système n'est pas résonnant avec les atomes dans l'état $|1\rangle \equiv |F=1, m=-1\rangle$. Figure extraite de* RABEC, CHAUVEAU *et al. (2024).*

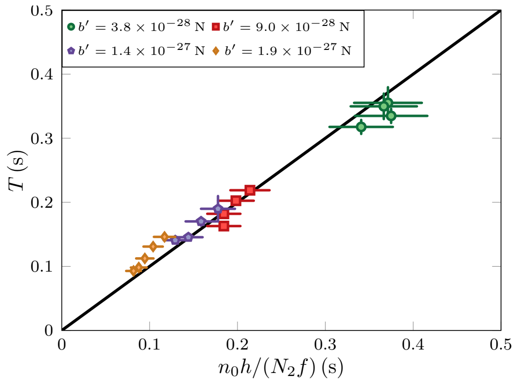

FIGURE 14. *Variation de la période mesurée pour les oscillations de Bloch en fonction de N_2 et de la force $f = \mu_B b'$.*

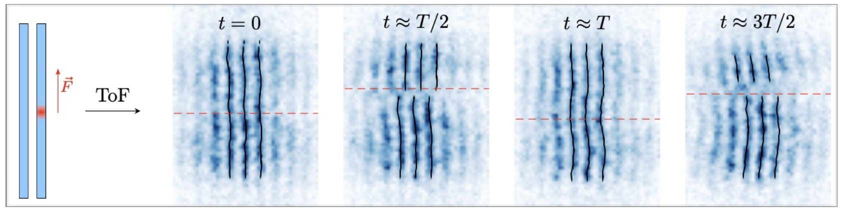

FIGURE 15. *Etude de la phase du bain de particules $|1\rangle$ aux points tournants de l'oscillation de Bloch. On fait interférer le segment d'atomes contenant le soliton avec un segment test, de phase uniforme.*

uniforme. On utilise $b' = 1\,\mathrm{G/m}$, ce qui correspond à une différence d'énergie ΔU entre les deux extrémités du segment de l'ordre du nanokelvin, bien inférieure au potentiel chimique du gaz. La force f introduite précédemment est égale à la différence des forces ressenties par les atomes sur les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$, ce qui correspond à $f = \mu_B b'$ où μ_B est le magnéton de Bohr.

La période des oscillations de Bloch est de quelques centaines de millisecondes, ce qui est très long par rapport au temps que met une onde sonore pour aller d'une extrémité à l'autre de l'échantillon (la dizaine de millisecondes). L'hypothèse faite en (52) d'un courant J nul est donc légitime : les phonons générés par la mise en mouvement du soliton font en une période t_B plusieurs allers-et-retours entre les extrémités du tube et le soliton lui-même ; cela assure que la phase du bain de particules 1 peut être considérée comme uniforme de part et d'autre du soliton.

Un exemple d'oscillations est montré en figure 13. On peut vérifier que la variation de la période mesurée avec la force f et le nombre d'atomes N_2 est en excellent accord avec la prédiction (109) (figure 14).

Par une méthode d'interférométrie atomique, on peut étudier l'état du bain aux moments des points tournants du mouvement. À l'instant initial ainsi qu'après un nombre entier d'oscillations, on s'attend à ce que le bain ait une phase uniforme [cf. eq. (89)], ce qui correspond au point inférieur de l'ellipse de la figure 12. En revanche, après une demi-oscillation (ou $3/2$, $5/2$,...), la phase du bain doit présenter un saut de phase de $\pm\pi$ au niveau du centre du soliton, ce qui correspond au point supérieur de l'ellipse de la figure 12 [cf. eq. (88)].

Ces prédictions concernant la phase du bain peuvent être vérifiées en préparant un deuxième segment, parallèle au premier et pour lequel tous les atomes sont dans l'état $|1\rangle$. À un instant donné, on relâche le confinement de deux segments qui s'étendent ballistiquement, se recouvrent et on observe alors les interférences du segment "test" de phase uniforme avec le segment contenant le soliton magnétique. Quand ce dernier a lui aussi une phase uniforme pour la fonction d'onde $\psi_1(x)$ de la composante 1, les franges d'interférence sont rectilignes. En revanche, quand $\psi_1(x)$ présente un saut de phase de π, les franges ont une dislocation d'un demi-interfrange à l'endroit du soliton. C'est bien ce que l'on observe expérimentalement (cf. figure 15).

Ce résultat expérimental présente une analogie forte avec celui d'une jonction Josephson soumise à une différence de potentiel V constante dans le temps (BRESOLIN, ROY et al. 2023). En notant φ la différence de phase du supraconducteur de part et d'autre de la jonction, le comportement de cette jonction est régi par les deux équations suivantes :

$$I = I_c \sin\varphi \tag{111}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{qV}{\hbar} \tag{112}$$

où I est le courant circulant à travers la jonction et I_c l'intensité caractéristique de la jonction. Ces équations conduisent à un courant $I(t)$ sinusoïdal

$$I(t) = I_c \sin(\omega t) \qquad \text{avec} \quad \omega = qV/\hbar. \tag{113}$$

La correspondance avec l'oscillation du soliton se fait par l'identification :

$$I \longleftrightarrow v \tag{114}$$

$$\varphi \longleftrightarrow P/\hbar\rho_0 = \varphi_1(x_-) - \varphi_1(x_+) \tag{115}$$

$$qV \longleftrightarrow N_2 f/\rho_0 \tag{116}$$

Les équations (111) et (112) sont équivalentes respectivement à (97) et (103) que nous réécrivons ici en unités physiques :

$$v = v_c \sin(P/\hbar\rho_0) \qquad \text{avec} \quad v_c = \frac{2}{\sinh \tilde{N}_2}\,\frac{x_0}{t_0} \tag{117}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = N_2 f. \tag{118}$$

4-4 L'origine de la périodicité de $E(P)$

Comme nous l'avons indiqué plus haut, l'origine du phénomène des oscillations de Bloch réside dans la périodicité de la relation de dispersion $E(P)$, dont on déduit la périodicité $v(P)$ puisque $v = \partial E/\partial P$. Si l'impulsion évolue linéairement en temps sous l'effet d'une force extérieure F constante et uniforme, avec $\dot{P} = F$, l'énergie, la vitesse et la position du système étudié seront des fonctions oscillantes du temps.

La périodicité de $E(P)$ (ou plutôt de $E_{\mathrm{rel}}(P)$ dans ce qui va suivre) avec la période $2\pi\hbar\rho_0$ est en fait une propriété générale d'un gaz 1D. Pour le montrer, nous allons suivre un raisonnement dû à BLOCH (1973) et BLOCH (1974) [voir aussi HALDANE (1981)]. Considérons un ensemble de N particules de masse m sur un anneau de périmètre L, ce qui revient à imposer des conditions aux limites périodiques à la fonction d'onde $\Psi(x_1, \cdots, x_N)$. Séparons les N variables de position en une variable du centre de masse

$$X = \frac{1}{N}(x_1 + \cdots + x_N) \tag{119}$$

et $N-1$ variables relatives $\xi_1, \cdots, \xi_{N-1}$ que nous n'aurons pas à définir explicitement. L'hamiltonien s'écrit sous la forme

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} \otimes \hat{1}_{\mathrm{rel}} + \hat{1}_{\mathrm{cdm}} \otimes \hat{H}_{\mathrm{rel}} \tag{120}$$

où $M = Nm$ désigne la masse totale, $\hat{P} = \sum \hat{p}_i$ est l'impulsion totale, et $\hat{H}_{\mathrm{rel}}$ contient les termes cinétiques liés aux impulsions relatives ainsi que l'effet des interactions entre particules, qui ne dépendent que des différences de position $x_i - x_j$. On peut alors chercher les fonctions propres de $\hat{H}$ sous la forme

$$\Psi_P(x_1, \cdots, x_N) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}PX/\hbar}\, \Phi_p(\xi_1, \cdots, \xi_{N-1}) \tag{121}$$

où P est une valeur propre possible de l'opérateur impulsion totale $\hat{P}$ et où

$$\hat{H}_{\mathrm{rel}}\Phi_P = E_{\mathrm{rel}}(P)\, \Phi_p\ . \tag{122}$$

L'énergie totale associée à Ψ_P est donc

$$\frac{P^2}{2M} + E_{\mathrm{rel}}(P)\ . \tag{123}$$

À ce stade, on pourrait s'étonner de voir apparaître P dans l'équation aux valeurs propres (122) pour l'hamiltonien $\hat{H}_{\rm rel}$: celui-ci ne dépend en effet que des variables relatives ξ_i et on aurait pu s'attendre naïvement à un découplage complet entre le degré de liberté du centre de masse et les variables relatives. En fait, ce découplage complet ne se produit pas en raison des contraintes liées aux conditions aux limites périodiques adoptées ici. Pour expliquer ce point, nous allons expliciter ces contraintes en exploitant deux types de transformations.

— Si on effectue pour chaque particule la translation $x_i \to x_i + L$, les coordonnées relatives sont inchangées et $X \to X + L$. La fonction d'onde Ψ_P devant rester inchangée, on en déduit que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}PL/\hbar} = 1$, ou encore

$$P = 2\pi n\hbar/L \qquad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{124}$$

C'est la relation de quantification habituelle pour l'impulsion d'une particule (ici, le centre de masse) dans une boîte de taille L.

— Si on effectue pour une seule des N particules la translation $x_i \to x_i + L$, le préfacteur $\mathrm{e}^{\mathrm{i}PX/\hbar}$ est multiplié par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}PL/N\hbar} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}P/\hbar\rho_0}$ avec $\rho_0 = N/L$. Les variables relatives sont quant à elles modifiées d'une façon que nous ne préciserons pas explicitement, mais que nous pouvons écrire sous la forme $\xi_j \to \xi_j'$. Comme Ψ_P doit rester inchangée dans cette translation, on en déduit que la fonction des variables relatives est modifiée selon :

$$\Phi_P(\xi_1', \cdots, \xi_{N-1}') = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}P/\hbar\rho_0}\, \Phi_P(\xi_1, \cdots, \xi_{N-1})\,. \tag{125}$$

Nous trouvons ici de manière explicite le fait qu'un choix quelconque de P obéissant à la condition de quantification (124) vient changer les conditions aux limites de la fonction Φ_P. C'est précisément pour cela que les fonctions propres Φ_P du mouvement relatif et les valeurs propres associées $E_{\rm rel}(P)$ dépendent de l'impulsion du centre de masse.

Toutefois, si l'on choisit P tel que $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P/\hbar\rho_0} = 1$, c'est-à-dire P multiple de $2\pi\hbar\rho_0$, alors les fonctions propres Φ_P satisfont les mêmes conditions aux limites que celles pour $P = 0$. Comme l'hamiltonien relatif $\hat{H}_{\rm rel}$ ne dépend pas de P, on en déduit que son spectre pour $P = 2\pi\hbar\rho_0$ est le même que celui pour $P = 0$.

Par ailleurs, dans la limite thermodynamique $N \to \infty$, $L \to \infty$ avec $\rho_0 = N/L$ constante, la masse $M = Nm$ tend vers l'infini de sorte que l'énergie cinétique du centre de masse $P^2/2M$ tend également vers 0 quand $P = 2\pi\hbar\rho_0$. Cela fournit en particulier la périodicité recherchée pour l'énergie de l'état fondamental du système, qui est ce qui nous intéresse ici pour le soliton magnétique.

Dans l'expérience d'oscillations de Bloch que nous avons décrite précédemment, le soliton magnétique peut être considéré comme une impureté mésoscopique qui permet d'injecter de l'impulsion de manière contrôlée dans le bain par l'intermédiaire de la force F, et sonder ainsi la périodicité générale $E(P)$ que nous venons de démontrer. Une autre expérience exploitant cette même périodicité est décrite dans MEINERT, KNAP et al. (2017), où l'impureté est alors microscopique puisqu'elle est composé d'un seul atome, de nature différente de celle du bain (voir également GRUSDT, SHASHI et al. (2014), PETKOVIĆ & RISTIVOJEVIC (2016) et WILL & FLEISCHHAUER (2023)).

Références

BECKER, Christoph, Simon STELLMER, Parvis SOLTAN-PANAHI, Sören DÖRSCHER, Mathis BAUMERT, Eva-Maria RICHTER, Jochen KRONJÄGER, Kai BONGS & Klaus SENGSTOCK (2008), « Oscillations and interactions of dark and dark–bright solitons in Bose–Einstein condensates », in *Nature Physics* **4**, p. 496-501.

BEN DAHAN, M., E. PEIK, J. REICHEL, Y. CASTIN & C. SALOMON (1996), « Bloch Oscillations of Atoms in an Optical Potential », in *Phys. Rev. Lett.* **76**, p. 4508.

BERSANO, TM, V GOKHROO, MA KHAMEHCHI, J D'AMBROISE, DJ FRANTZESKAKIS, P ENGELS & PG KEVREKIDIS (2018), « Three-component soliton states in spinor F= 1 Bose-Einstein condensates », in *Phys. Rev. Lett.* **120**, p. 063202.

BLOCH, F (1973), « Superfluidity in a Ring », in *Phys. Rev. A* **7**, p. 2187.

– (1974), « Reply to" Free-energy minima for helium in a ring" », in *Phys. Rev. A* **10**, p. 716.

BRESOLIN, S., A. ROY, G. FERRARI, A. RECATI & N. PAVLOFF (2023), « Oscillating Solitons and ac Josephson Effect in Ferromagnetic Bose-Bose Mixtures », in *Phys. Rev. Lett.* **130**, p. 220403.

BUSCH, Th & JR ANGLIN (2001), « Dark-bright solitons in inhomogeneous Bose-Einstein condensates », in *Phys. Rev. Lett.* **87**, p. 010401.

CARETTA, Lucas, Se-Hyeok OH, Takian FAKHRUL, Dong-Kyu LEE, Byung Hun LEE, Se Kwon KIM, Caroline A ROSS, Kyung-Jin LEE & Geoffrey SD BEACH (2020), « Relativistic kinematics of a magnetic soliton », in *Science* **370**, p. 1438-1442.

CHAI, X., D. LAO, K. FUJIMOTO, R. HAMAZAKI, M. UEDA & C. RAMAN (2020), « Magnetic Solitons in a Spin-1 Bose-Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* **125**, p. 030402.

CHAI, X., L. YOU & C. RAMAN (2022), « Magnetic solitons in an immiscible two-component Bose-Einstein condensate », in *Phys. Rev. A* **105**, p. 013313.

CHEINEY, P, CR CABRERA, J SANZ, B NAYLOR, L TANZI & L TARRUELL (2018), « Bright soliton to quantum droplet transition in a mixture of Bose-Einstein condensates », in *Phys. Rev. Lett.* **120**, p. 135301.

CONGY, Thibault, Anatoly KAMCHATNOV & Nicolas PAVLOFF (2016), « Dispersive hydrodynamics of nonlinear polarization waves in two-component Bose-Einstein condensates », in *SciPost Physics* **1**, p. 006.

DANAILA, I, MA KHAMEHCHI, V GOKHROO, P ENGELS & PG KEVREKIDIS (2016), « Vector dark-antidark solitary waves in multicomponent Bose-Einstein condensates », in *Phys. Rev. A* **94**, p. 053617.

DAUXOIS, Thierry & Michel PEYRARD (2006), *Physics of solitons*, Cambridge University Press.

DES CLOIZEAUX, Jacques & Michel GAUDIN (1966), « Anisotropic linear magnetic chain », in *Journal of Mathematical Physics* **7**, p. 1384-1400.

FAROLFI, A., D. TRYPOGEORGOS, C. MORDINI, G. LAMPORESI & G. FERRARI (2020), « Observation of Magnetic Solitons in Two-Component Bose-Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* **125**, p. 030401.

FELDMANN, J., K. LEO, J. SHAH, D.A.B. MILLER, J.E. CUNNINGHAM, T. MEIER, G. von PLESSEN, A. SCHULZE, P. THOMAS & S. SCHMITT-RINK (1992), « Optical investigation of Bloch oscillations in a semiconductor superlattice », in *Phys. Rev. B* **46**, p. 7252.

GANGARDT, D.M. & A. KAMENEV (2009), « Bloch Oscillations in a One-Dimensional Spinor Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **102**, p. 070402.

GRUSDT, F., A. SHASHI, D. ABANIN & E. DEMLER (2014), « Bloch oscillations of bosonic lattice polarons », in *Phys. Rev. A* **90**, p. 063610.

HALDANE, FDM (1981), « Effective harmonic-fluid approach to low-energy properties of one-dimensional quantum fluids », in *Phys. Rev. Lett.* **47**, p. 1840.

HAMNER, C., J.J. CHANG, P. ENGELS & M.A. HOEFER (2011), « Generation of Dark-Bright Soliton Trains in Superfluid-Superfluid Counterflow », in *Phys. Rev. Lett.* **106**, p. 065302.

IVANOV, Sergey K, Anatoly M KAMCHATNOV, Thibault CONGY & Nicolas PAVLOFF (2017), « Solution of the Riemann problem for polarization waves in a two-component Bose-Einstein condensate », in *Phys. Rev. E* **96**, p. 062202.

KAMCHATNOV, AM, YV KARTASHOV, P-É LARRÉ & N PAVLOFF (2014), « Nonlinear polarization waves in a two-component Bose-Einstein condensate », in *Phys. Rev. A* **89**, p. 033618.

KATSIMIGA, GC, Simeon I MISTAKIDIS, TM BERSANO, MKH OME, SM MOSSMAN, K MUKHERJEE, P SCHMELCHER, P ENGELS & PG KEVREKIDIS (2020), « Observation and analysis of multiple dark-antidark solitons in two-component Bose-Einstein condensates », in *Phys. Rev. A* **102**, p. 023301.

KOSEVICH, AM (2001), « Bloch oscillations of magnetic solitons as an example of dynamical localization of quasiparticles in a uniform external field », in *Low Temperature Physics* **27**, p. 513-541.

KOSEVICH, AM, VV GANN, AI ZHUKOV & VP VORONOV (1998), « Magnetic soliton motion in a nonuniform magnetic field », in *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **87**, p. 401-407.

KOSEVICH, Arnold Markovich, BA IVANOV & AS KOVALEV (1990), « Magnetic solitons », in *Physics Reports* **194**, p. 117-238.

KUNDU, A & O PSHAEV (1983), « Comments on the gauge equivalence between Heisenberg spin chains with single-site anisotropy and nonlinear Schrodinger equations », in *Journal of Physics C : Solid State Physics* **16**, p. L585.

LAKSHMANAN, M, Th W RUIJGROK & CJ THOMPSON (1976), « On the dynamics of a continuum spin system », in *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* **84**, p. 577-590.

LANDAU, Lev & Evgeny LIFSHITZ (1935), « On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies », in *Phys. Z. Sowjetunion* **8**, p. 101-114.

LANNIG, Stefan, Christian-Marcel SCHMIED, Maximilian PRÜFER, Philipp KUNKEL, Robin STROHMAIER, Helmut STROBEL, Thomas GASENZER, Panayotis G KEVREKIDIS & Markus K OBERTHALER (2020), « Collisions of three-component vector solitons in Bose-Einstein condensates », in *Phys. Rev. Lett.* **125**, p. 170401.

LONG, KA & AR BISHOP (1979), « Nonlinear excitations in classical ferromagnetic chains », in *Journal of Physics A : Mathematical and General* **12**, p. 1325.

MEINERT, Florian, Michael KNAP, Emil KIRILOV, Katharina JAG-LAUBER, Mikhail B ZVONAREV, Eugene DEMLER & Hanns-Christoph NÄGERL (2017), « Bloch oscillations in the absence of a lattice », in *Science* **356**, p. 945-948.

MENG, Ling-Zheng, Xi-Wang LUO & Li-Chen ZHAO (2025), « Self-Adapted Josephson Oscillation of Dark-Bright Solitons under Constant Forces », in *arXiv preprint arXiv :2501.15841*.

MIKESKA, H-J & M STEINER (1991), « Solitary excitations in one-dimensional magnets », in *Advances in Physics* **40**, p. 191-356.

MOSSMAN, Sean M, Garyfallia C KATSIMIGA, Simeon I MISTAKIDIS, Alejandro ROMERO-ROS, Thomas M BERSANO, Peter SCHMELCHER, Panayotis G KEVREKIDIS & Peter ENGELS (2024), « Observation of dense collisional soliton complexes in a two-component Bose-Einstein condensate », in *Communications Physics* **7**, p. 163.

NAKAMURA, K & T SASADA (1982), « Gauge equivalence between one-dimensional Heisenberg ferromagnets with single-site anisotropy and nonlinear Schrodinger equations », in *Journal of Physics C : Solid State Physics* **15**, p. L915.

PETKOVIĆ, Aleksandra & Zoran RISTIVOJEVIC (2016), « Dynamics of a mobile impurity in a one-dimensional Bose liquid », in *Phys. Rev. Lett.* **117**, p. 105301.

PITAEVSKII, Lev P (2019), « Magnetic solitons in binary mixtures of Bose–Einstein condensates », in *Rendiconti Lincei. Scienze Fisiche e Naturali* **30**, p. 269-276.

QU, C., M. TYLUTKI, S. STRINGARI & L.P. PITAEVSKII (2017), « Magnetic solitons in Rabi-coupled Bose-Einstein condensates », in *Phys. Rev. A* **95**, p. 033614.

QU, Chunlei, Lev P PITAEVSKII & Sandro STRINGARI (2016), « Magnetic solitons in a binary Bose-Einstein condensate », in *Phys. Rev. Lett.* **116**, p. 160402.

RABEC, F, G CHAUVEAU, G BROCHIER, S NASCIMBENE, J DALIBARD & J BEUGNON (2024), « Bloch Oscillations of a Soliton in a 1D Quantum Fluid », in *arXiv preprint arXiv :2412.04355*.

SCHECTER, Michael, DM GANGARDT & Alex KAMENEV (2012), « Dynamics and Bloch oscillations of mobile impurities in one-dimensional quantum liquids », in *Annals of Physics* **327**, p. 639-670.

SCHWEIGLER, Thomas, Valentin KASPER, Sebastian ERNE, Igor MAZETS, Bernhard RAUER, Federica CATALDINI, Tim LANGEN, Thomas GASENZER, Jürgen BERGES & Jörg SCHMIEDMAYER (2017), « Experimental characterization of a quantum many-body system via higher-order correlations », in *Nature* **545**, p. 323-326.

SIOVITZ, Ido, Stefan LANNIG, Yannick DELLER, Helmut STROBEL, Markus K OBERTHALER & Thomas GASENZER (2023), « Universal dynamics of rogue waves in a quenched spinor Bose condensate », in *Phys. Rev. Lett.* **131**, p. 183402.

TOGAWA, Y, T KOYAMA, K TAKAYANAGI, S MORI, Y KOUSAKA, J AKIMITSU, S NISHIHARA, K INOUE, AS OVCHINNIKOV & J-i KISHINE (2012), « Chiral magnetic soliton lattice on a chiral helimagnet », in *Phys. Rev. Lett.* **108**, p. 107202.

WILKINSON, S.R., C.F. BHARUCHA, K.W. MADISON, Q. NIU & M.G. RAIZEN (1996), « Observation of Atomic Wannier-Stark Ladders in an Accelerating Optical Potential », in *Phys. Rev. Lett.* **76**, p. 4512.

WILL, M. & M. FLEISCHHAUER (2023), « Dynamics of polaron formation in 1D Bose gases in the strong-coupling regime », in *New J. Phys.* **25**, p. 083043.

WYBO, Elisabeth, Alvise BASTIANELLO, Monika AIDELSBURGER, Immanuel BLOCH & Michael KNAP (2023), « Preparing and analyzing solitons in the sine-Gordon model with quantum gas microscopes », in *PRX Quantum* **4**, p. 030308.

YU, X. & P.B. BLAKIE (2022), « Propagating Ferrodark Solitons in a Superfluid : Exact Solutions and Anomalous Dynamics », in *Phys. Rev. Lett.* **128**, p. 125301.

ZHAO, Li-Chen, Wenlong WANG, Qinglin TANG, Zhan-Ying YANG, Wen-Li YANG & Jie LIU (2020), « Spin soliton with a negative-positive mass transition », in *Phys. Rev. A* **101**, p. 043621.