

Solitons magnétiques et oscillations de Bloch



diapositives



Hokusai, 1831



notes de cours

Séminaires et atelier

Ce matin : Thierry Giamarchi, Université de Genève
Hall effect in strongly correlated low dimensional systems

Cet après-midi (14h00-18h00), co-organisé avec Sylvain Nascimbene :
Topological Quantum Matter with Atoms and Photons

14:00 - 14:30 : Leticia Tarruell (ICFO, Barcelone, Espagne)

14:40 - 15:10 : Jean-Noël Fuchs (LPTMC, Paris)

15:20 - 15:50 : Julian Schmitt (U. Heidelberg, Allemagne)

16:00 - 16:30 : pause

16:30 - 17:00 : Sylvain Nascimbene (LKB, Paris)

17:10 - 17:40 : Leonardo Fallani (U. Florence, Italie)

Solitons brillants, solitons sombres

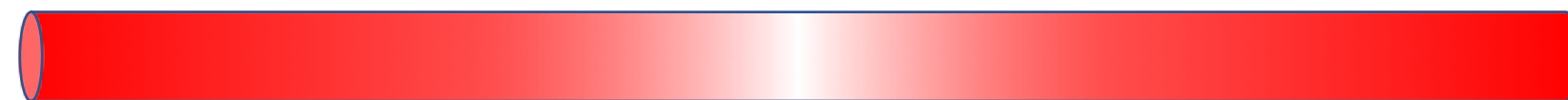
N particules



Solitons brillants : interactions attractives dans un gaz 1D

densité ρ_0

densité ρ_0



Solitons sombres : interactions répulsives dans un gaz 1D

Structures de taille constante dans le temps, pouvant être au repos ou se déplacer à vitesse constante

Pour le cas du soliton sombre, la vitesse v doit rester inférieure à la vitesse du son c (avec $mc^2 = g\rho_0$)

Mélange de deux superfluides



Description par deux fonctions d'onde $\psi_1(x, t)$ et $\psi_2(x, t)$

Évolutions non linéaires couplées pour $\psi_1(x, t)$ et $\psi_2(x, t)$

Les particules 1 sont sensibles à :

- leur propre espèce $\longrightarrow$ champ moyen $g_{11} |\psi_1|^2$
- à l'espèce 2 $\longrightarrow$ champ moyen $g_{12} |\psi_2|^2$

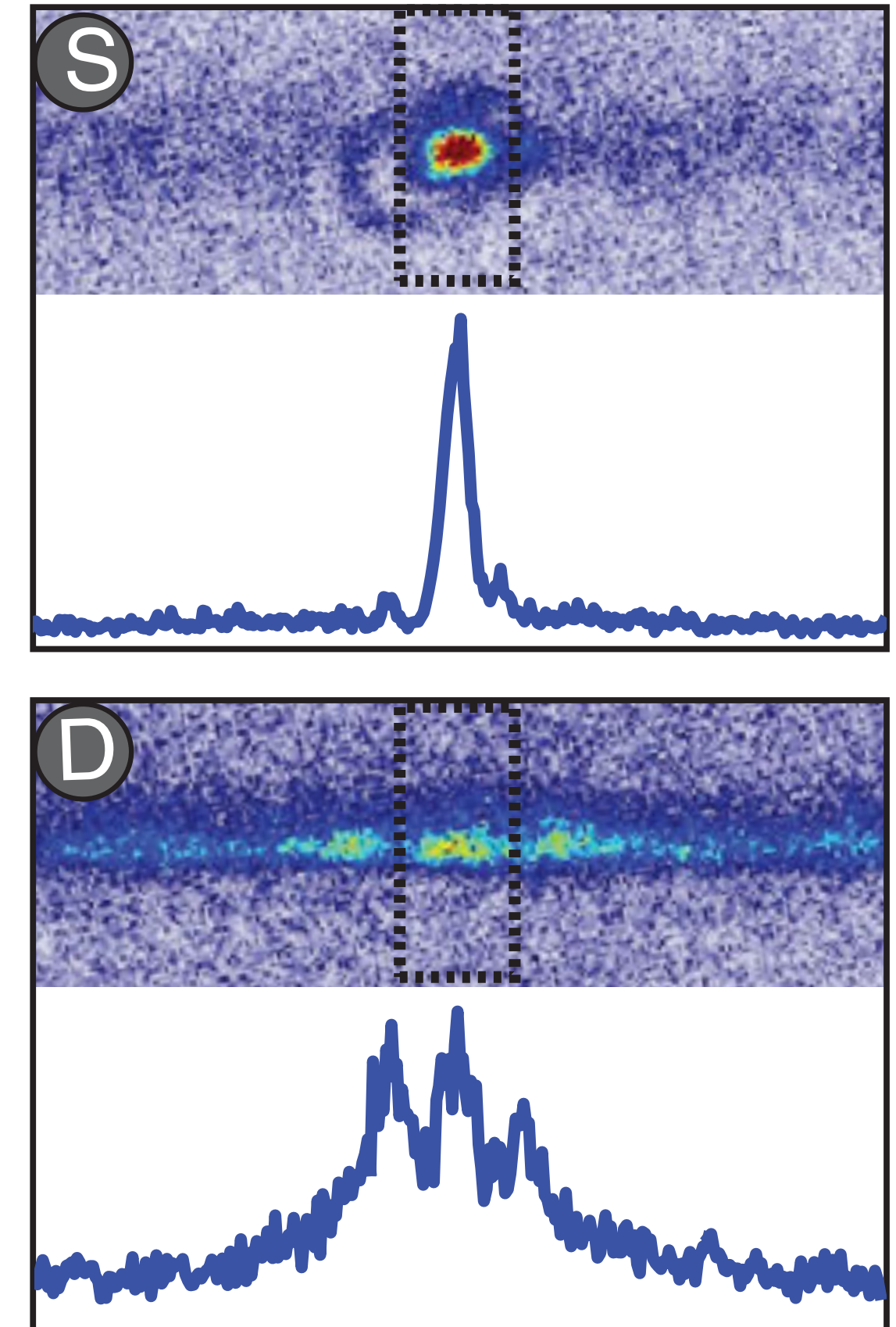
Il en va de même pour les particules 2

Une situation très riche

- Trois paramètres d'interaction : g_{11} , g_{22} , g_{12}
- Nature de la géométrie : 1D, 2D, 3D
- Rôle possible des fluctuations quantiques

Pour $g_{12} < 0$ et $|g_{12}|$ grand : formation de gouttelettes quantiques ou de solitons brillants selon la dimensionalité du problème

cf. cours 2021-22



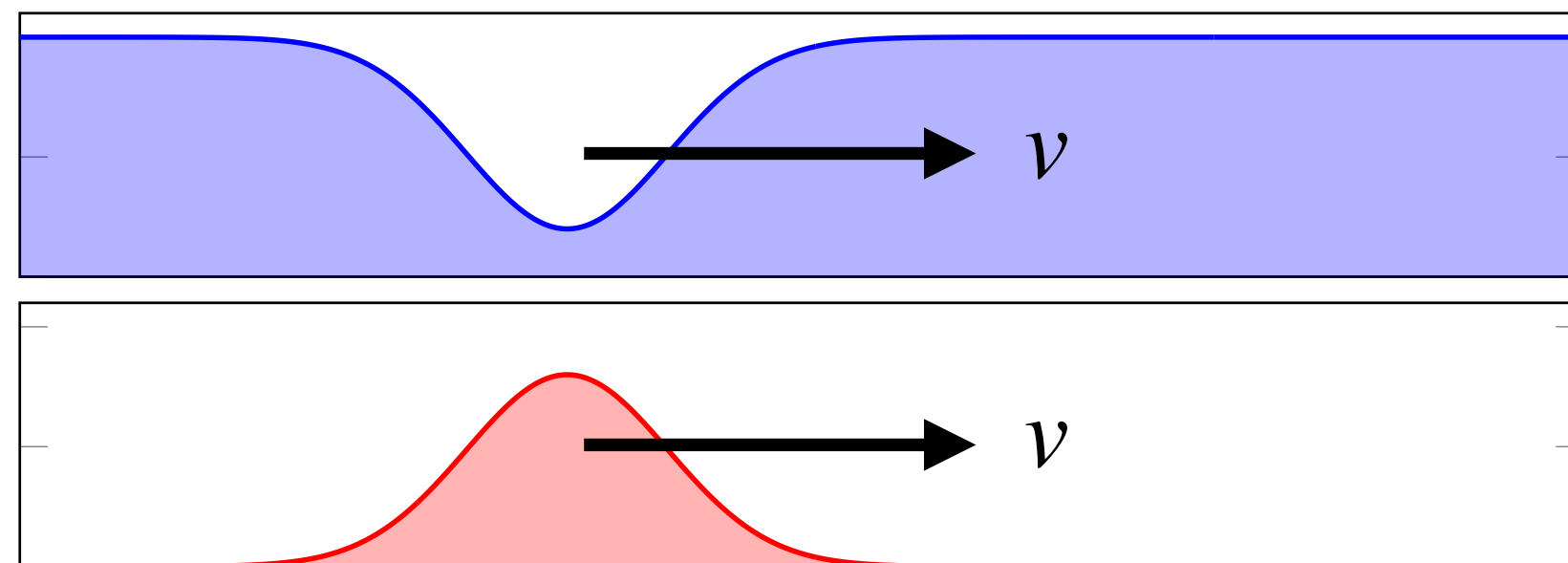
Cheiney et al.,
PRL **120** 135301

La situation considérée ici

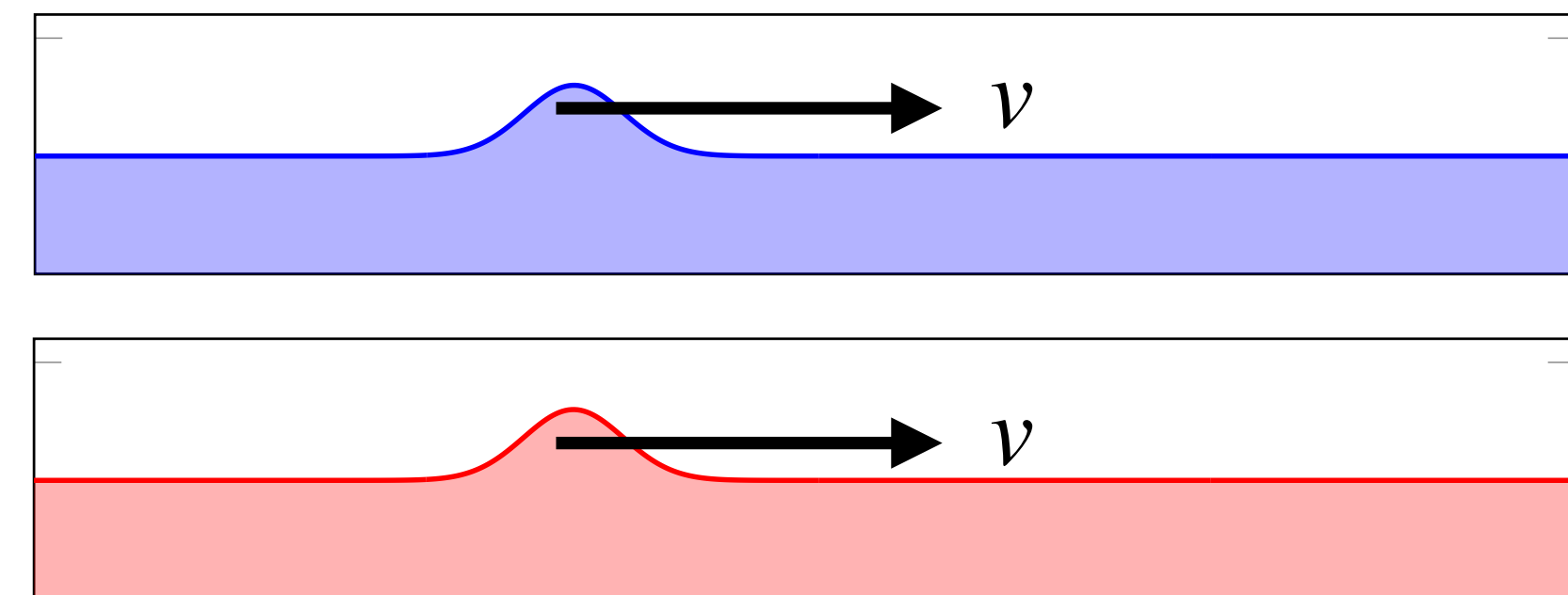
- Masses identiques $m_1 = m_2$
- Toutes les interactions sont répulsives $\iff$ Les trois coefficients g_{ij} sont positifs
répulsion intra- et inter espèce
- Les fluctuations quantiques ne jouent pas de rôle significatif

Toutes les énergies de champ moyen sont positives : il n'y a pas de compensation entre elles, contrairement au cas des gouttelettes quantiques

La superposition des deux espèces est-elle miscible et peut-on former des structures stables ?



non miscible



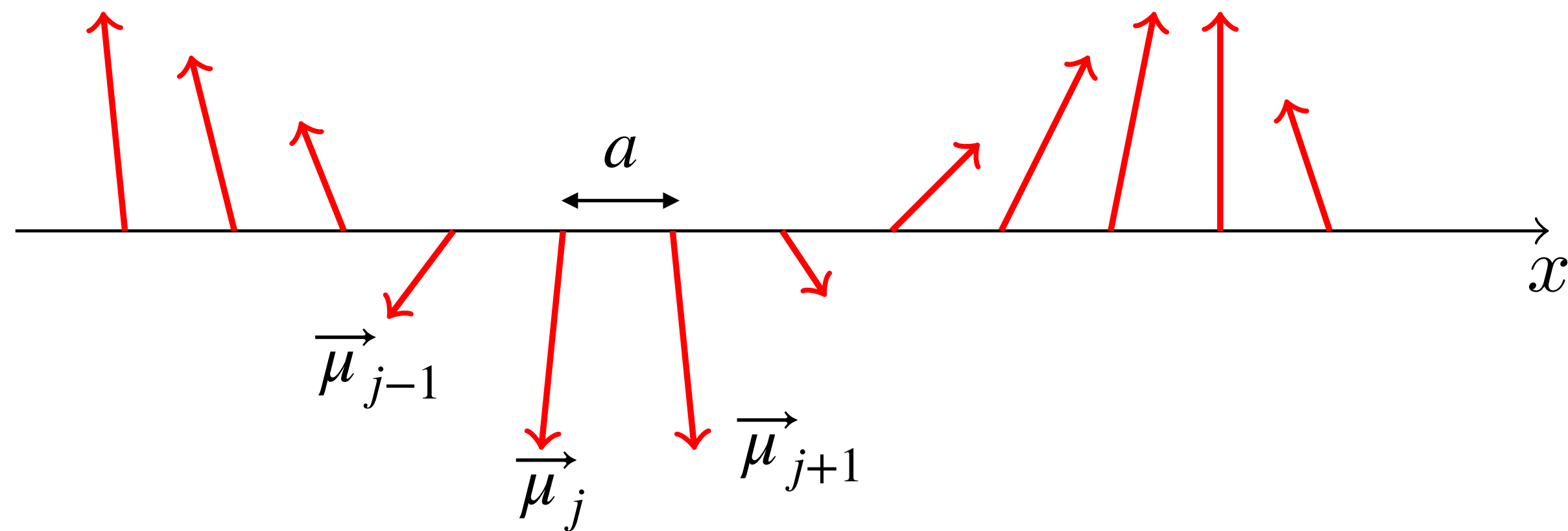
miscible

Analogie magnétique

Le mélange de deux superfluides dans le cas

$$g_{11} \approx g_{22} \approx g_{12}$$

est formellement équivalent au cas d'une chaîne de moments magnétiques, prise à la limite continue



$$|\vec{\mu}_j| = \mu$$

Solitons à deux fluides $\iff$ Solitons magnétiques

Plan du cours

1. la chaîne ferromagnétique anisotrope

Configurations “axe favorisé” ou “plan favorisé” (“easy-axis” ou “easy-plane”)

2. Un mélange binaire de condensats

Configurations “non miscibles” ou “miscibles”

3. Le soliton magnétique

Relation de dispersion $E(P)$ périodique

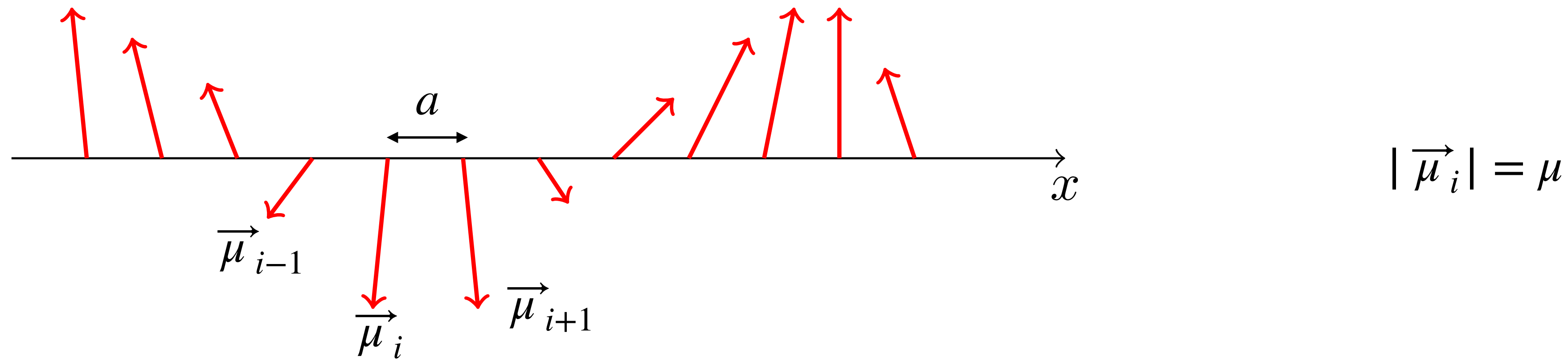
4. Oscillations de Bloch d'un soliton magnétique !

1.

La chaîne ferromagnétique

Interaction d'échange, anisotropie favorisant un axe ou un plan

Chaîne de moments magnétiques



Interaction entre moments magnétiques : interaction “d’échange” entre proches voisins

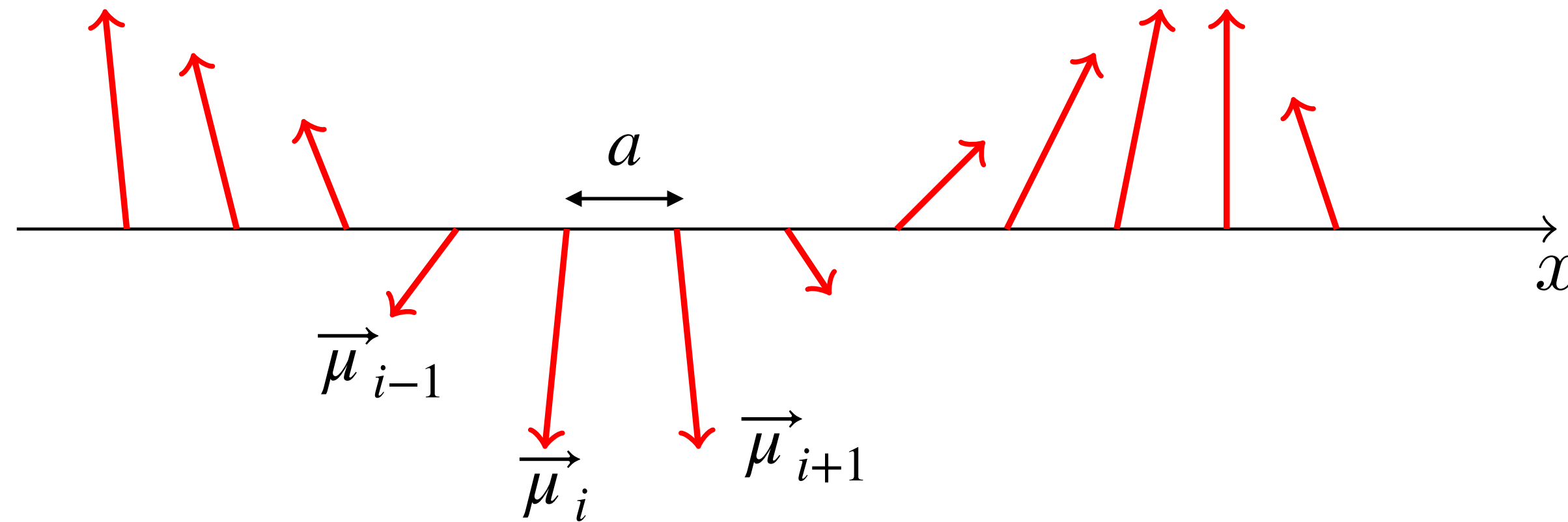
$$-J \sum_i \vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_{i+1} \quad J > 0$$

Origine : énergie électrostatique + principe de Pauli (les interactions dipolaires magnétiques sont négligées)

Pour un moment magnétique $\vec{\mu}_i$ donné : $-J \vec{\mu}_i \cdot (\vec{\mu}_{i-1} + \vec{\mu}_{i+1}) \equiv -\vec{\mu}_i \cdot \vec{B}_i^{\text{eff}}$

$J > 0$: tous les moments magnétiques sont alignés (dans une direction quelconque) dans l’état fondamental

Chaîne de moments magnétiques (2)



terme isotrope :

$$-J \sum_i \vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_{i+1} \quad J > 0$$

Il y a souvent une légère anisotropie liée à la structure du matériau :

$$-J' \sum_i \mu_i^{(z)} \mu_{i+1}^{(z)} \quad |J'| \ll J$$

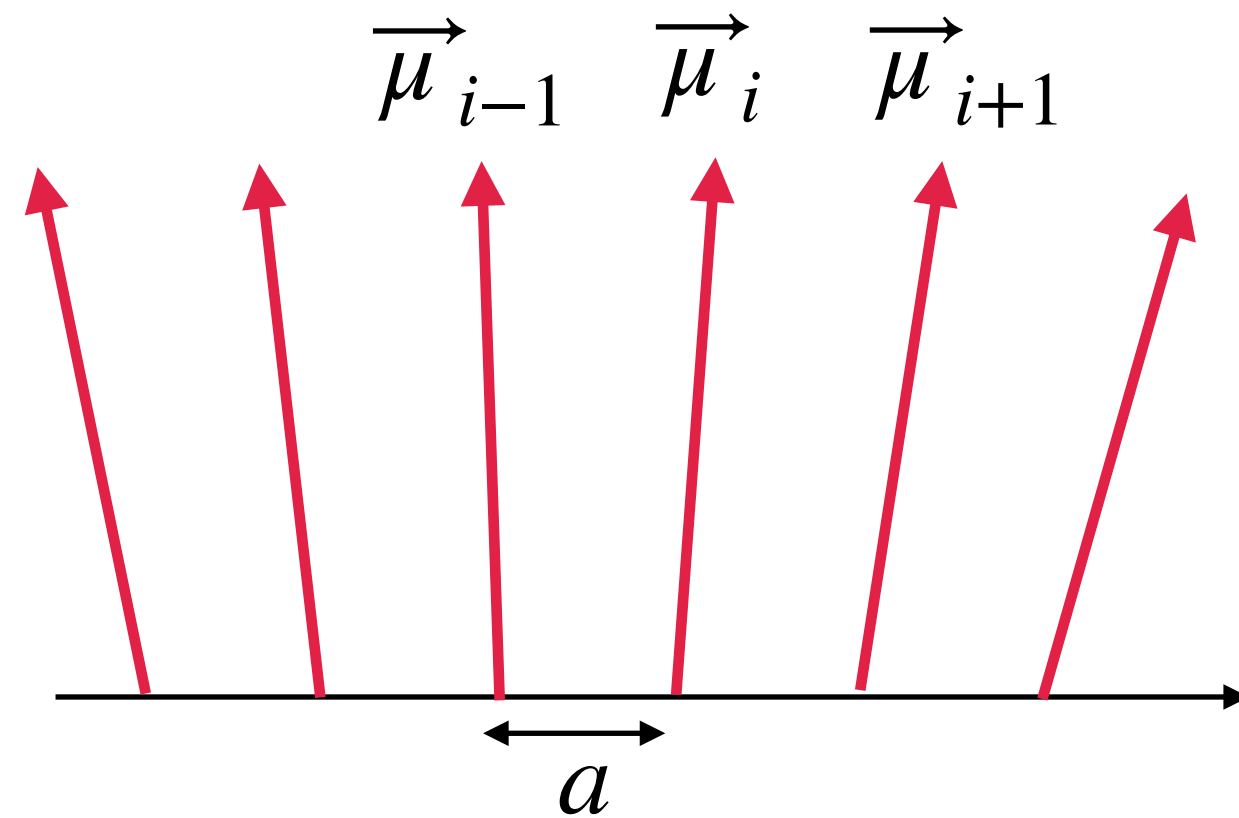
- $J' > 0$: favorise une aimantation selon l'axe z "easy-axis"
- $J' < 0$: favorise une aimantation dans le plan xy "easy-plane"

Dynamique d'un moment magnétique

- Lien entre moment cinétique et moment magnétique : rapport gyromagnétique γ
- Equation du mouvement pour un moment magnétique $\vec{\mu}_i$

$$\frac{d\vec{\mu}_i}{dt} = \gamma \vec{\mu}_i \times \vec{B}_i$$

Passage à la limite continue



$\vec{\mu}_i$ voisin de $\vec{\mu}_{i-1}$ et $\vec{\mu}_{i+1}$

$$\vec{\mu}_i(t) \longrightarrow \vec{\mu}(x_i, t)$$

$$x_i = ia$$

Termes contribuant à l'évolution du moment magnétique $\vec{\mu}_i$:

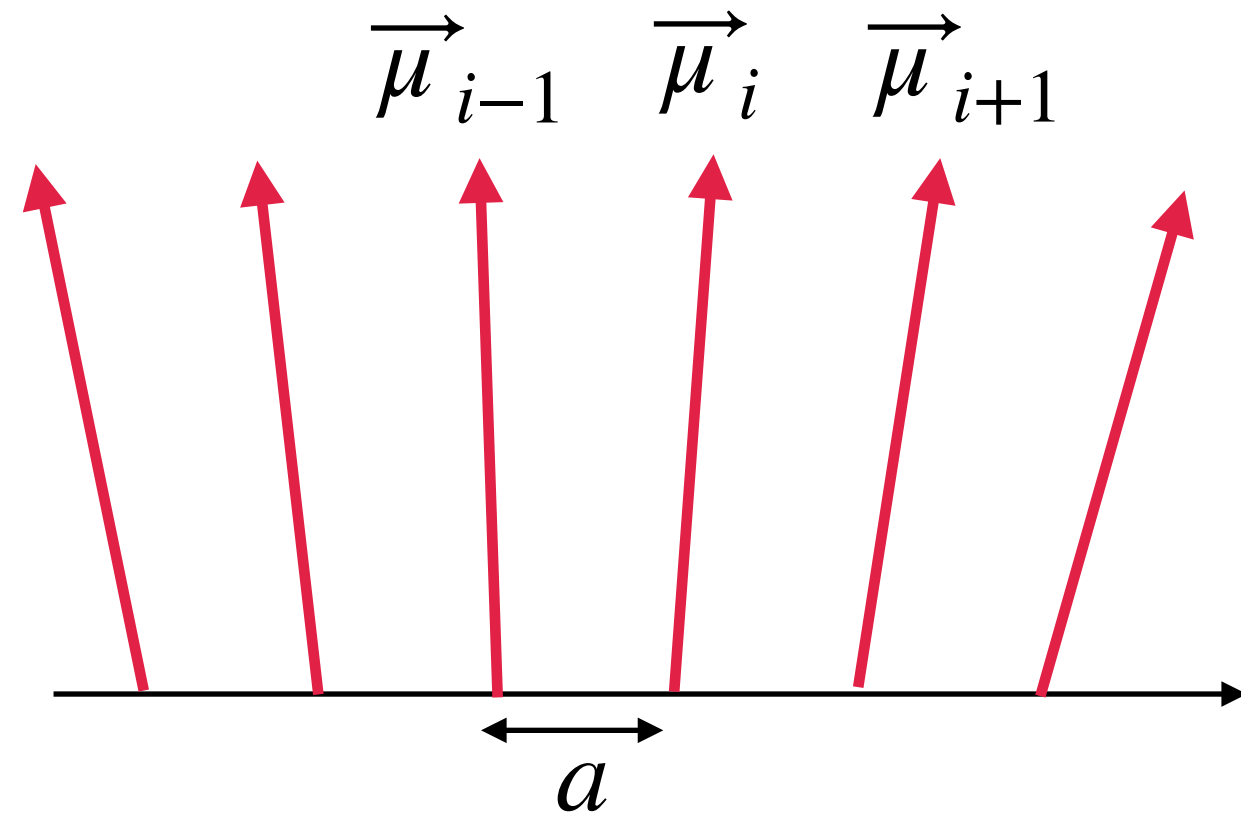
$$\longrightarrow \vec{\mu}(x_{i-1}) + \vec{\mu}(x_{i+1}) = \underbrace{2\vec{\mu}(x_i)}_{\text{ne contribue pas}} + a^2 \frac{\partial^2 \vec{\mu}}{\partial x^2} + \mathcal{O}(a^4)$$

ne contribue pas : $\vec{\mu} \times \vec{\mu} = 0$

$$\longrightarrow \mu^{(z)}(x_{i-1}) + \mu^{(z)}(x_{i+1}) = \underbrace{2\mu^{(z)}(x_i)}_{\text{c'est légitime de s'arrêter à l'ordre 2}} + \mathcal{O}(a^2)$$

$|J'| \ll J$: c'est légitime de s'arrêter à l'ordre 2 ici

Équation de Landau-Lifshitz (1935)



passage à un champ continu $\vec{\mu}(x, t)$

$$\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial t} = \gamma \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$$\vec{B} = Ja^2 \frac{\partial^2 \vec{\mu}}{\partial x^2} + 2J' \mu^{(z)} \hat{z}$$

On peut ajouter :

- l'action d'un champ magnétique extérieur (cf. notes de cours)
- un terme dissipatif : équation de Landau-Lifshitz-Gilbert (1955)

Passage en unités réduites

$$\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial t} = \gamma \vec{\mu} \times \vec{B} \quad \text{avec} \quad \vec{B} = Ja^2 \frac{\partial^2 \vec{\mu}}{\partial x^2} + 2J' \mu^{(z)} \hat{z} \quad |\vec{\mu}(x, t)| = \mu$$

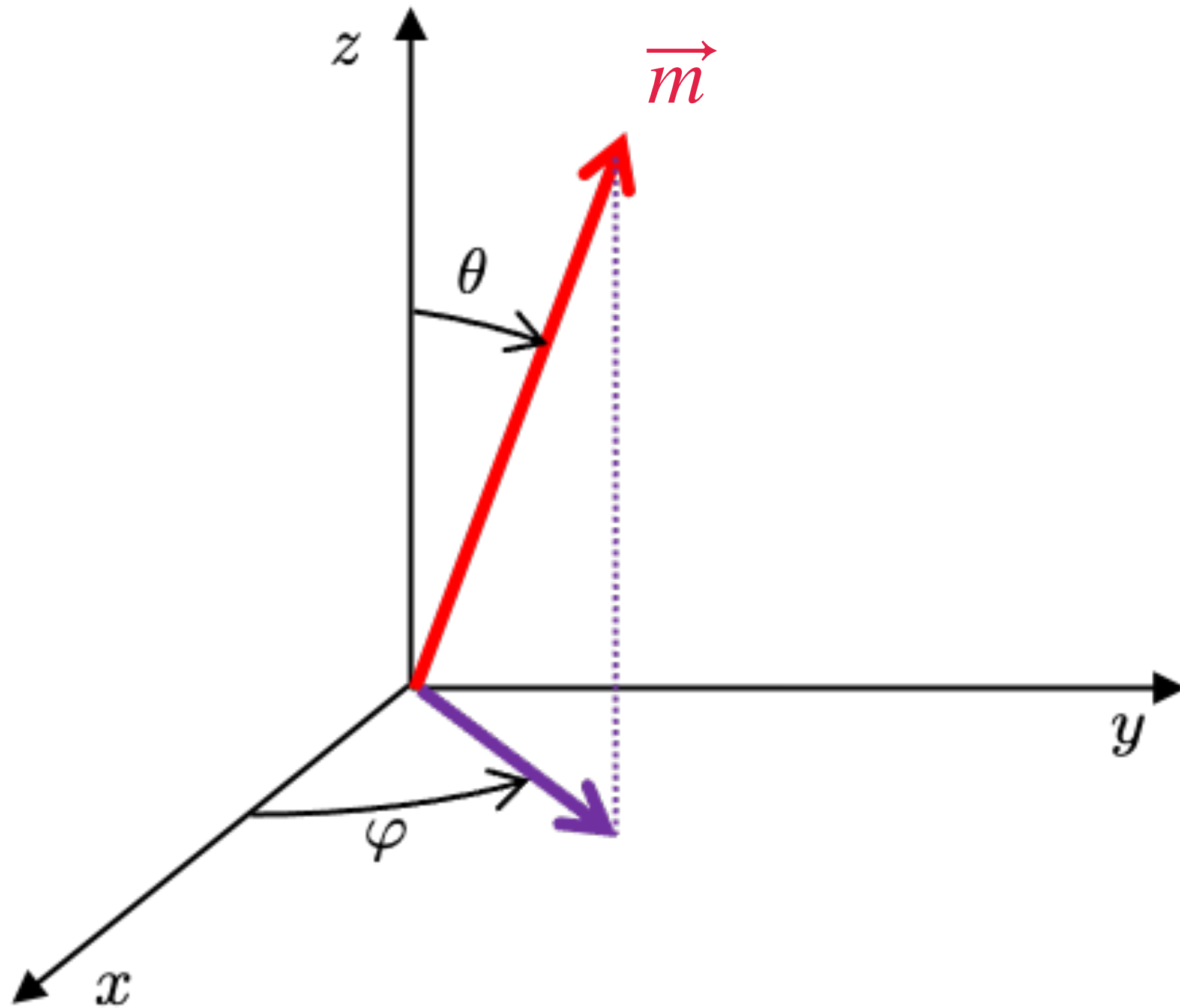
$$\text{Unité de longueur : } x_0 = a \sqrt{\frac{J}{2|J'|}} \quad |J'| \ll J \Rightarrow x_0 \gg a$$

$$\text{Unité de temps : } t_0 = \frac{1}{2\gamma\mu|J'|}$$

$$\vec{m}(x, t) = \frac{\vec{\mu}(x, t)}{\mu} \quad \frac{\partial \vec{m}}{\partial \tilde{t}} = \vec{m} \times \vec{b} \quad \text{avec} \quad \vec{b} = \frac{\partial^2 \vec{m}}{\partial \tilde{x}^2} \pm m^{(z)} \hat{z} \quad |\vec{m}(x, t)| = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + : \text{easy-axis } (J' > 0) \\ - : \text{easy-plane } (J' < 0) \end{array} \right.$$

Passage en coordonnées angulaires



$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial \tilde{t}} = \vec{m} \times \vec{b} \quad \text{avec} \quad \vec{b} = \frac{\partial^2 \vec{m}}{\partial \tilde{x}^2} \pm m^{(z)} \hat{z}$$

Évolution des fonctions angulaires $\theta(x, t)$, $\varphi(x, t)$?

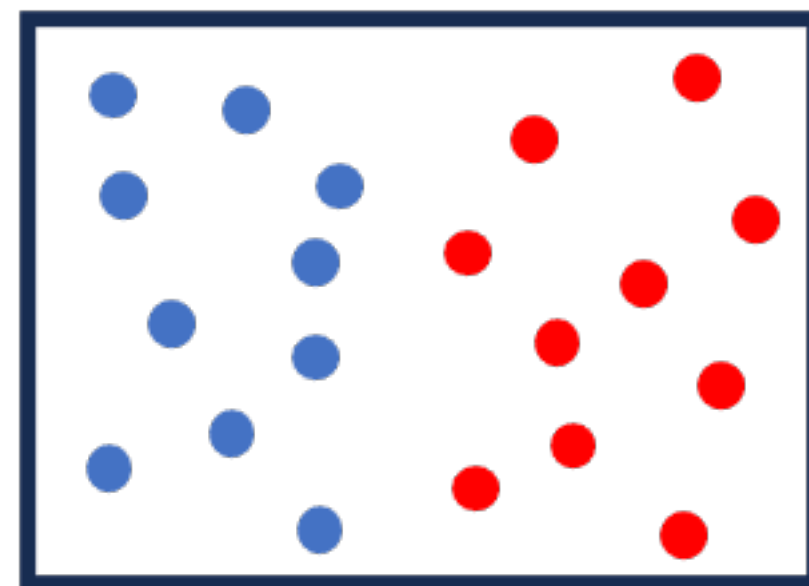
$$\begin{cases} \theta_t = -2\theta_x \varphi_x \cos \theta - \varphi_{xx} \sin \theta \\ \varphi_t = -\cos \theta (\varphi_x^2 \pm 1) + \frac{\theta_{xx}}{\sin \theta} \end{cases}$$

+ : easy-axis ($J' > 0$)

− : easy-plane ($J' < 0$)

2.

Un mélange binaire de condensats

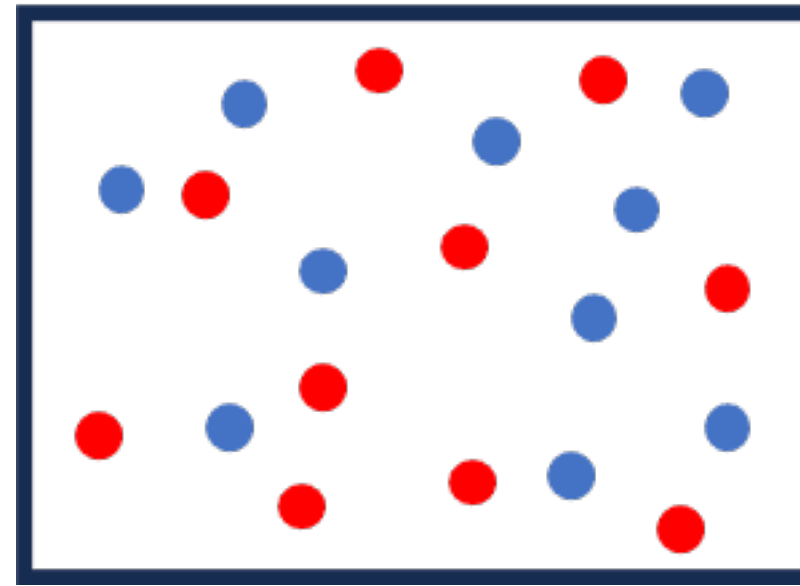


espèce 1

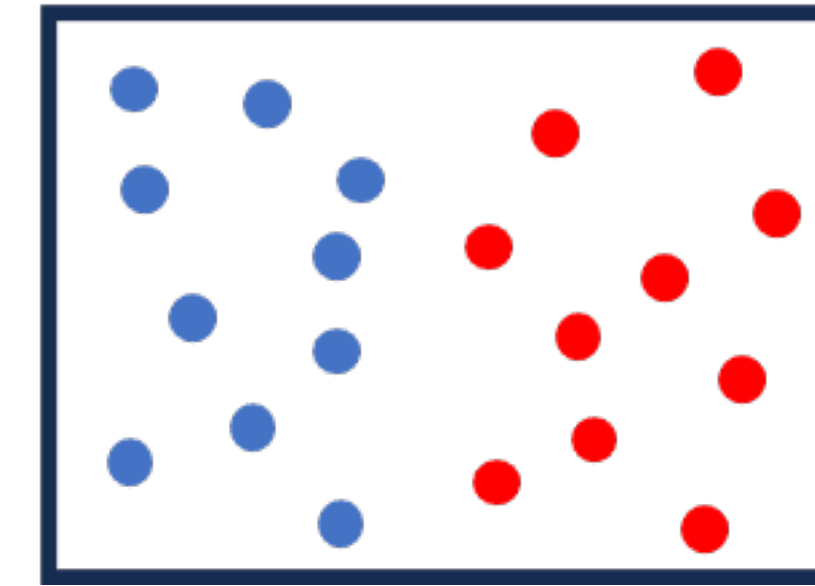
espèce 2

Critère de miscibilité

Deux configurations possibles :



miscible



non miscible

Quelle configuration correspond à l'énergie minimale ?

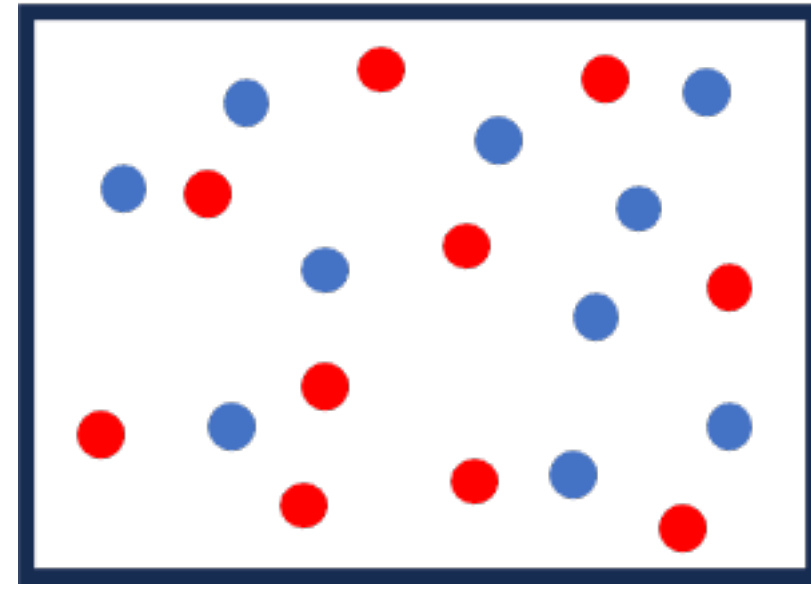
On néglige les effets de surface ($\ll$ effets de volume)

Configuration 1 : les deux fluides occupent le volume V : $E_{\text{hom}} = \frac{1}{2V} (g_{11}N_1^2 + 2g_{12}N_1N_2 + g_{22}N_2^2)$

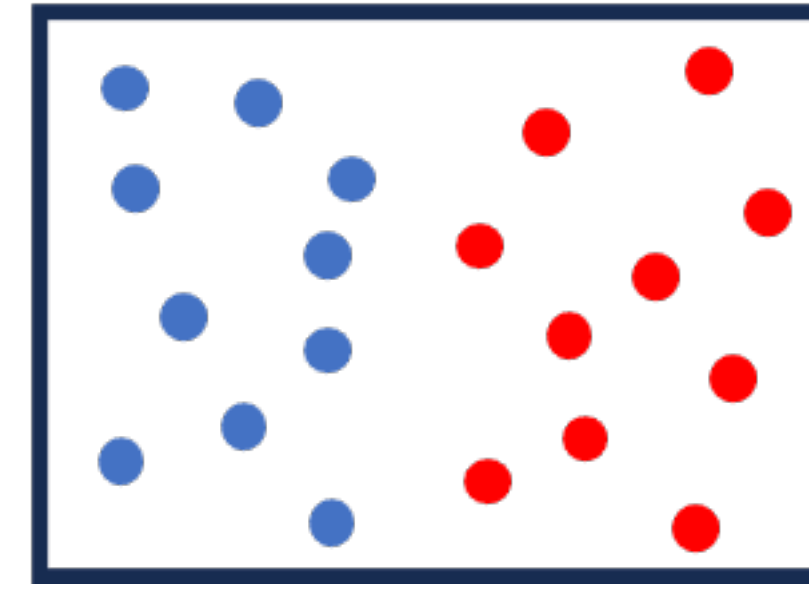
Configuration 2 : les deux fluides occupent respectivement les volumes V_1 et V_2

$$E_{\text{sep}} = \frac{g_{11}N_1^2}{2V_1} + \frac{g_{22}N_2^2}{2V_2} \quad \text{à minimiser avec la contrainte } V_1 + V_2 = V$$

Critère de miscibilité (2)



miscible



non miscible

Configuration 2 après minimisation sur V_1 et V_2 :

$$E_{\text{sep}} = \frac{1}{2V} \left(g_{11}N_1^2 + 2\sqrt{g_{11}g_{22}} N_1N_2 + g_{22}N_2^2 \right)$$

Configuration 1 :

$$E_{\text{hom}} = \frac{1}{2V} \left(g_{11}N_1^2 + 2g_{12} N_1N_2 + g_{22}N_2^2 \right)$$

$$\text{Mélange miscible} \iff g_{12} < \sqrt{g_{11} g_{22}}$$



Le mélange binaire de deux superfluides est décrit par

- deux champs complexes $\psi_1(x, t)$ et $\psi_2(x, t)$

ou alors

- quatre champs réels $\rho_1(x, t)$, $\varphi_1(x, t)$ et $\rho_2(x, t)$, $\varphi_2(x, t)$ avec $\psi_1 = \sqrt{\rho_1} e^{i\varphi_1}$ et $\psi_2 = \sqrt{\rho_2} e^{i\varphi_2}$

On va se placer ici dans le régime où tous les coefficients g_{ij} sont voisins (régime de Manakov)

- Existence de deux échelles d'énergie très différentes
- Pour les excitations de basse énergie, réduction à l'évolution de deux champs réels

Le régime de Manakov



On prend pour simplifier les calculs $g_{11} = g_{22} \equiv g$ et on définit

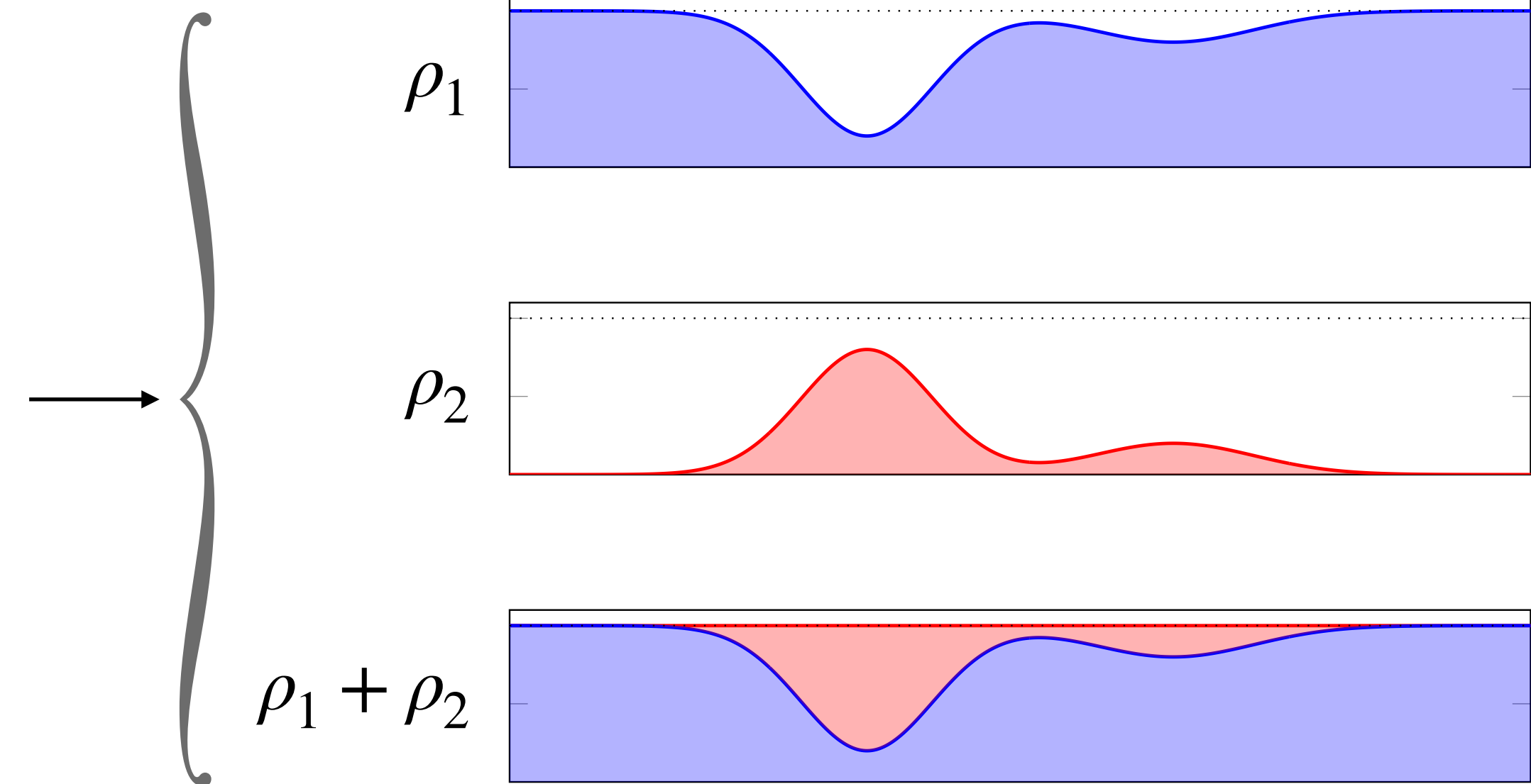
$$g_s = g_{12} - g \quad \text{indice "s": spin}$$

On se place au voisinage de la limite de miscibilité $g_{12} = \sqrt{g_{11} g_{22}}$, c'est-à-dire ici $g_{12} = g$

$$\text{On a donc : } |g_s| \ll g$$

- Excitations de basse énergie, à densité totale $\rho_1 + \rho_2$ constante : font intervenir g_s

- Excitations de plus haute énergie, pour lesquelles la densité totale $\rho_1 + \rho_2$ varie : font intervenir g



Elles seront ignorées dans la suite

Description du fluide (régime de Manakov)



Densité totale constante dans le temps et dans l'espace : $\rho_1(x, t) + \rho_2(x, t) = \rho_0$

Paramétrisation des densités par une fonction $\theta(x, t)$:

$$\rho_1(x, t) = \rho_0 \cos^2 \left[\frac{\theta(x, t)}{2} \right] \quad \rho_2(x, t) = \rho_0 \sin^2 \left[\frac{\theta(x, t)}{2} \right]$$

Fonctions d'onde des deux superfluides :

$$\psi_1(x, t) = \sqrt{\rho_0} \cos \left[\frac{\theta(x, t)}{2} \right] e^{i\varphi_1(x, t)} \quad \psi_2(x, t) = \sqrt{\rho_0} \sin \left[\frac{\theta(x, t)}{2} \right] e^{i\varphi_2(x, t)}$$

Trois fonctions inconnues ?

Oui, mais les deux phases $\varphi_1(x, t)$ et $\varphi_2(x, t)$ n'évoluent pas de manière indépendante

densité totale constante $\Rightarrow$ Courant total J indépendant de x

$$J = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 \quad \text{avec} \quad v_j = \frac{\hbar}{m} \partial_x \varphi_j$$

La paramétrisation du mélange

Fonctions d'onde des deux superfluides :

$$\psi_1(x, t) = \sqrt{\rho_0} \cos \left[\frac{\theta(x, t)}{2} \right] e^{i\varphi_1(x, t)} \quad \psi_2(x, t) = \sqrt{\rho_0} \sin \left[\frac{\theta(x, t)}{2} \right] e^{i\varphi_2(x, t)}$$

On écrit les phases φ_1 et φ_2 en termes de fonctions somme et différence :

$$\begin{cases} \Phi(x, t) = \varphi_1(x, t) + \varphi_2(x, t) \\ \varphi(x, t) = \varphi_2(x, t) - \varphi_1(x, t) \end{cases} \quad \text{hypothèse sur le courant total : } J = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_x = \cos \theta \, \varphi_x$$

On paramètre donc le mélange par les deux champs $\theta(x, t)$ et $\varphi(x, t)$:

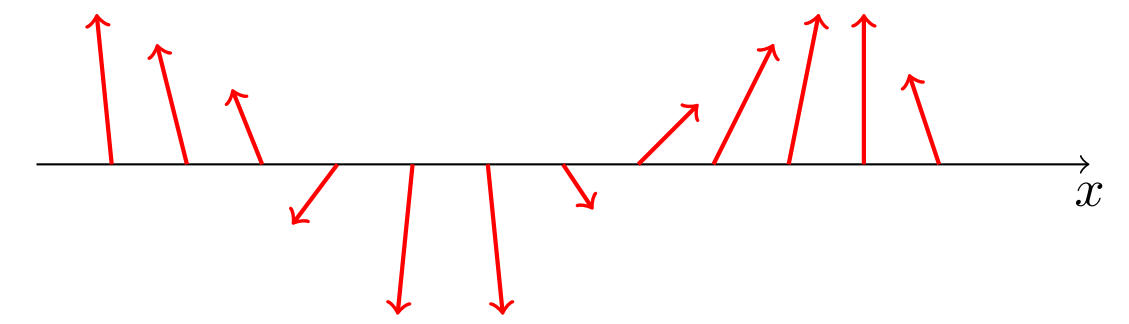
$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\rho_0} e^{i\Phi/2} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) e^{-i\varphi/2} \\ \sin(\theta/2) e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

Équations de Schrödinger
non-linéaires couplées



Équations d'évolution
des deux champs θ et φ

La chaîne magnétique retrouvée !



$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\rho_0} e^{i\Phi/2} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) e^{-i\varphi/2} \\ \sin(\theta/2) e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_x = \cos \theta \varphi_x$$

Choix d'unités de longueur et de temps :

$$x_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m |g_s| \rho_0}}$$

$$t_0 = \frac{2mx_0^2}{\hbar} = \frac{\hbar}{|g_s| \rho_0}$$

longueur de cicatrisation de spin

Les deux équations de Schrödinger non linéaires couplées conduisent à :

$$\begin{cases} \theta_t = -2\theta_x \varphi_x \cos \theta - \varphi_{xx} \sin \theta \\ \varphi_t = -\cos \theta (\varphi_x^2 \pm 1) + \frac{\theta_{xx}}{\sin \theta} \end{cases}$$

mélange de condensats $\begin{cases} + : \text{non miscible } (g_s > 0) \\ - : \text{miscible } (g_s < 0) \end{cases}$

$\iff$

chaîne magnétique $\begin{cases} + : \text{easy-axis } (J' > 0) \\ - : \text{easy-plane } (J' < 0) \end{cases}$

3.

Le soliton magnétique

Revue pour la matière condensée : Kosevich et al, Physics Reports 194, 117-238

Gaz quantiques :

Cas miscible

{ théorie : Qu et al., PRL **116**, 160402 (2016)
expérience : Farolfi et al., PRL **125**, 030401 ; Chai et al., PRL **125**, 030402 (2020)

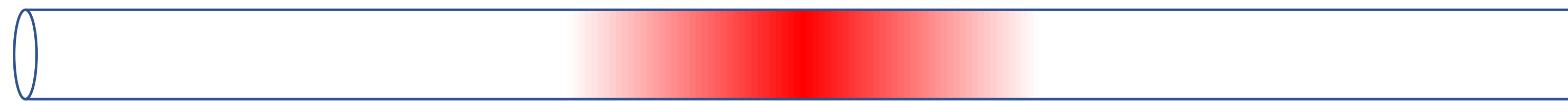
Cas non-miscible

{ théorie : Bresolin et al., PRL **130**, 220403 (2023)
expérience : Rabec et al. arXiv 2412.04355 (2025 ?)

Structure de la solution (cas non miscible)



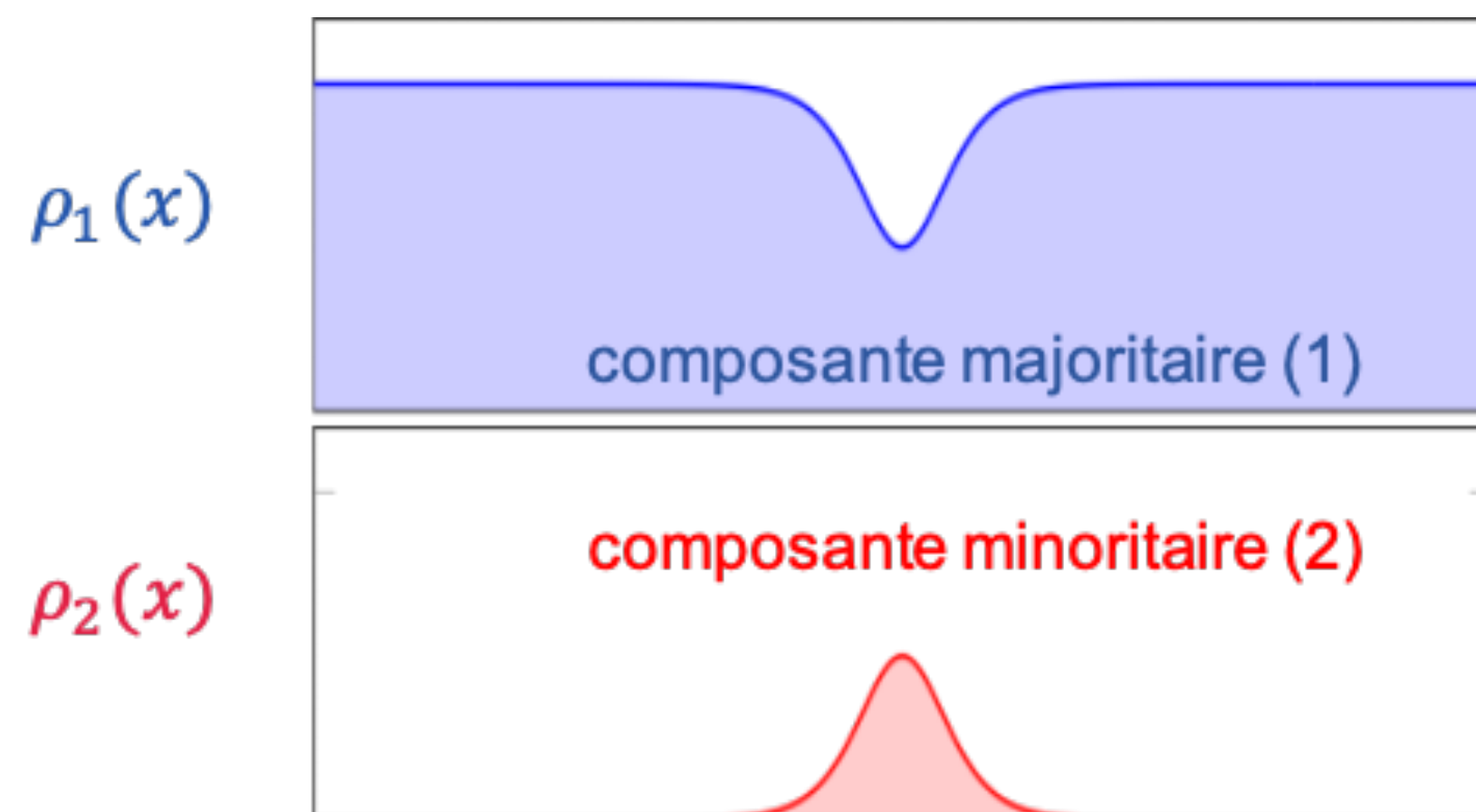
espèce 1 (majoritaire) : bain



espèce 2 (minoritaire) :
impureté mésoscopique

N_2 particules

Rappel : hypothèse d'une densité totale constante



$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\rho_0} e^{i\Phi/2} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) e^{-i\varphi/2} \\ \sin(\theta/2) e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_x = \cos \theta \varphi_x$$

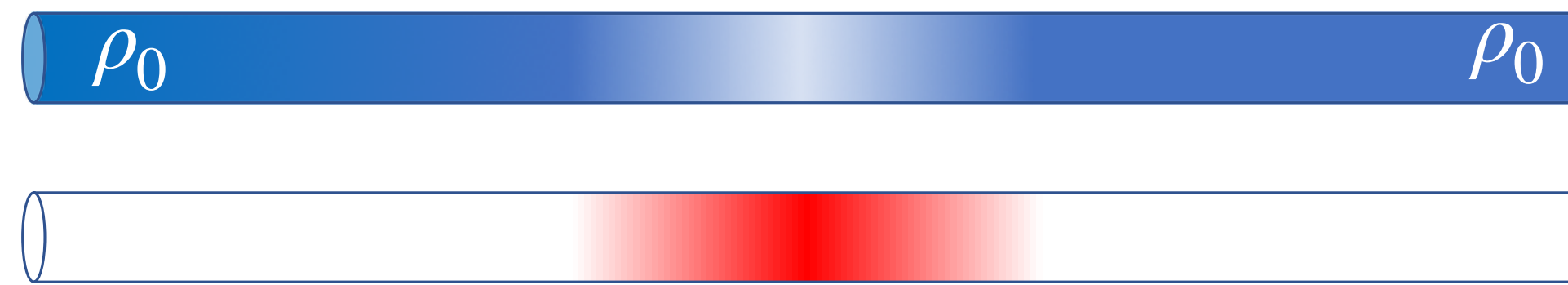
On cherche une paire de fonctions (θ, φ) telle que :

$$\begin{cases} \theta(x, t) = \theta(x - vt) \\ \varphi(x, t) = \Omega t + \chi(x - vt) \end{cases}$$

paramètres : Ω, v

Le soliton magnétique au repos

$$\begin{aligned}\theta(x, t) &= \theta(x) \\ \varphi(x, t) &= \Omega t + \chi(x)\end{aligned}$$



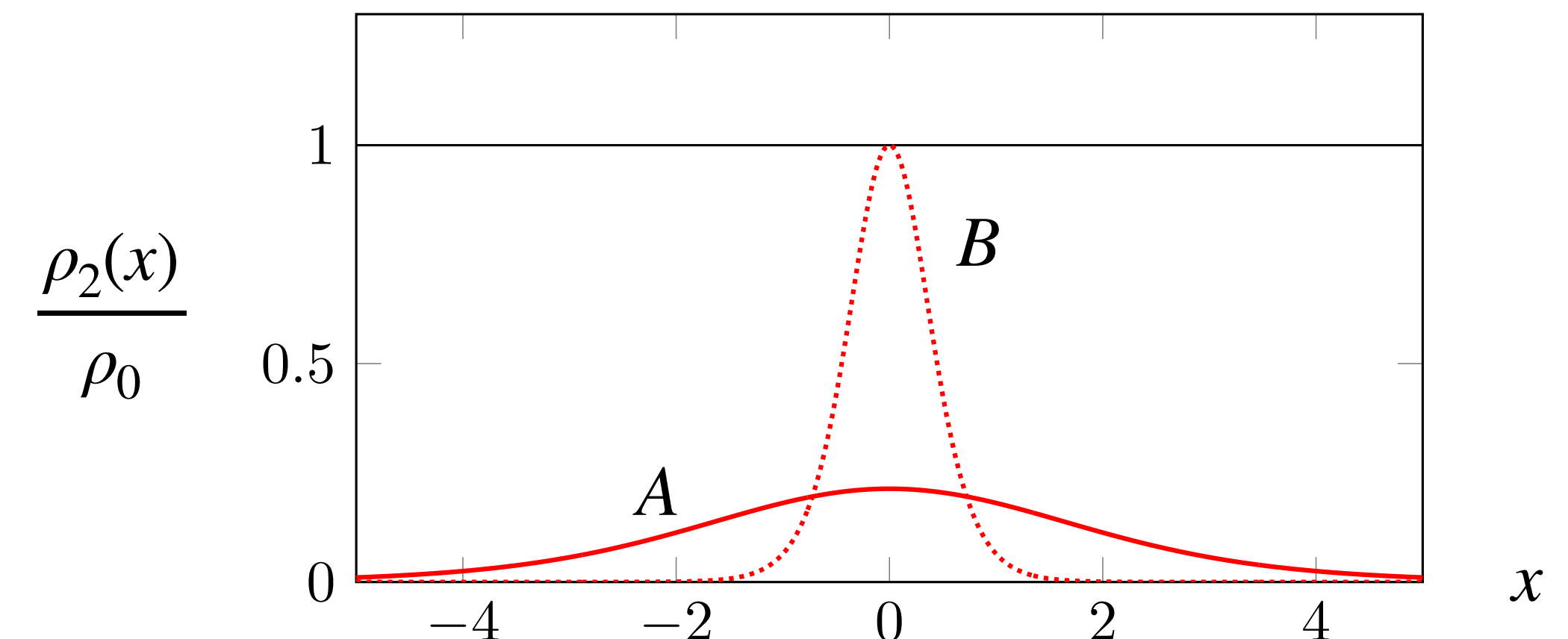
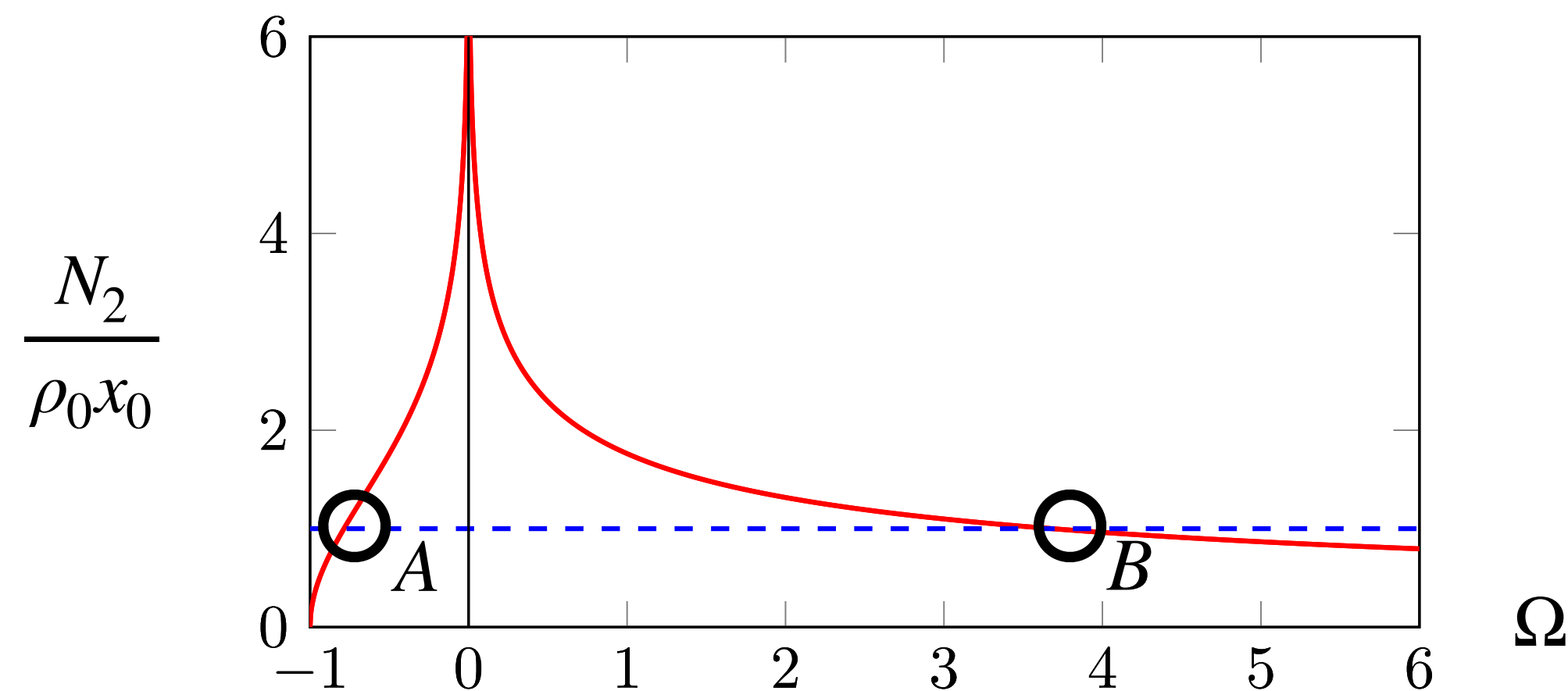
$$\begin{cases} \theta_t = -2\theta_x \varphi_x \cos \theta - \varphi_{xx} \sin \theta \\ \varphi_t = -\cos \theta (\varphi_x^2 \pm 1) + \frac{\theta_{xx}}{\sin \theta} \end{cases}$$

Solutions si et seulement si $\Omega > -1$

$$\frac{\rho_2(x)}{\rho_0} = \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2(1 + \Omega)}{2 + \Omega + |\Omega| \cosh(2\sqrt{1 + \Omega} x)}$$

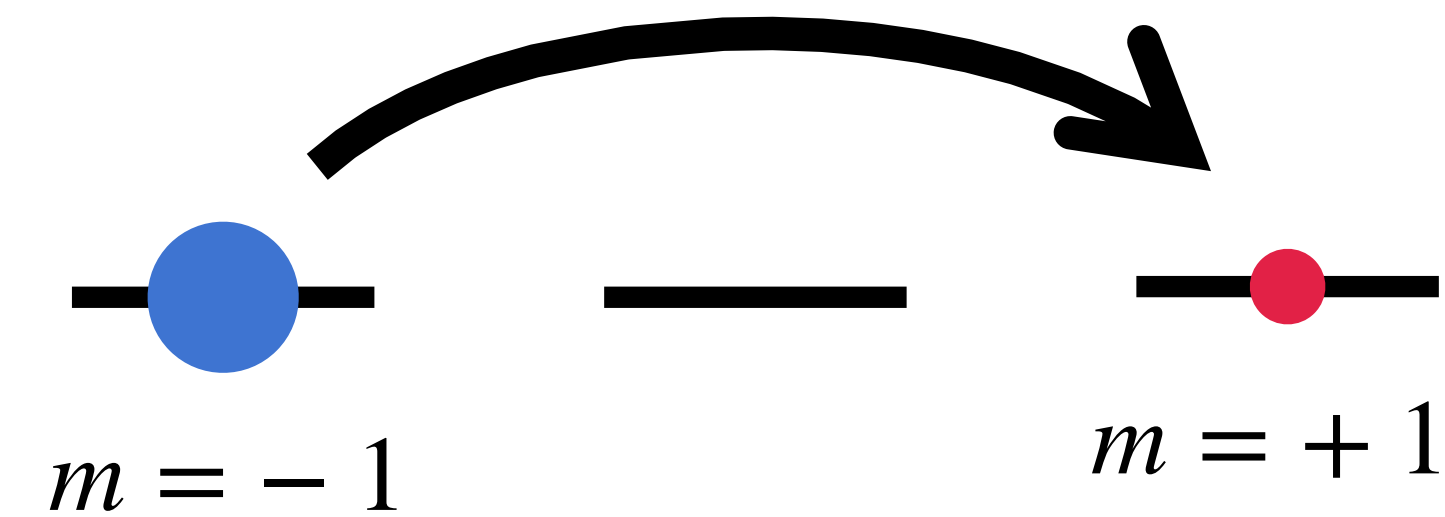
$$N_2 = \rho_0 x_0 \ln \left(\frac{2 + \Omega + 2\sqrt{1 + \Omega}}{|\Omega|} \right)$$

Pour une valeur donnée de N_2 , deux solutions possibles :



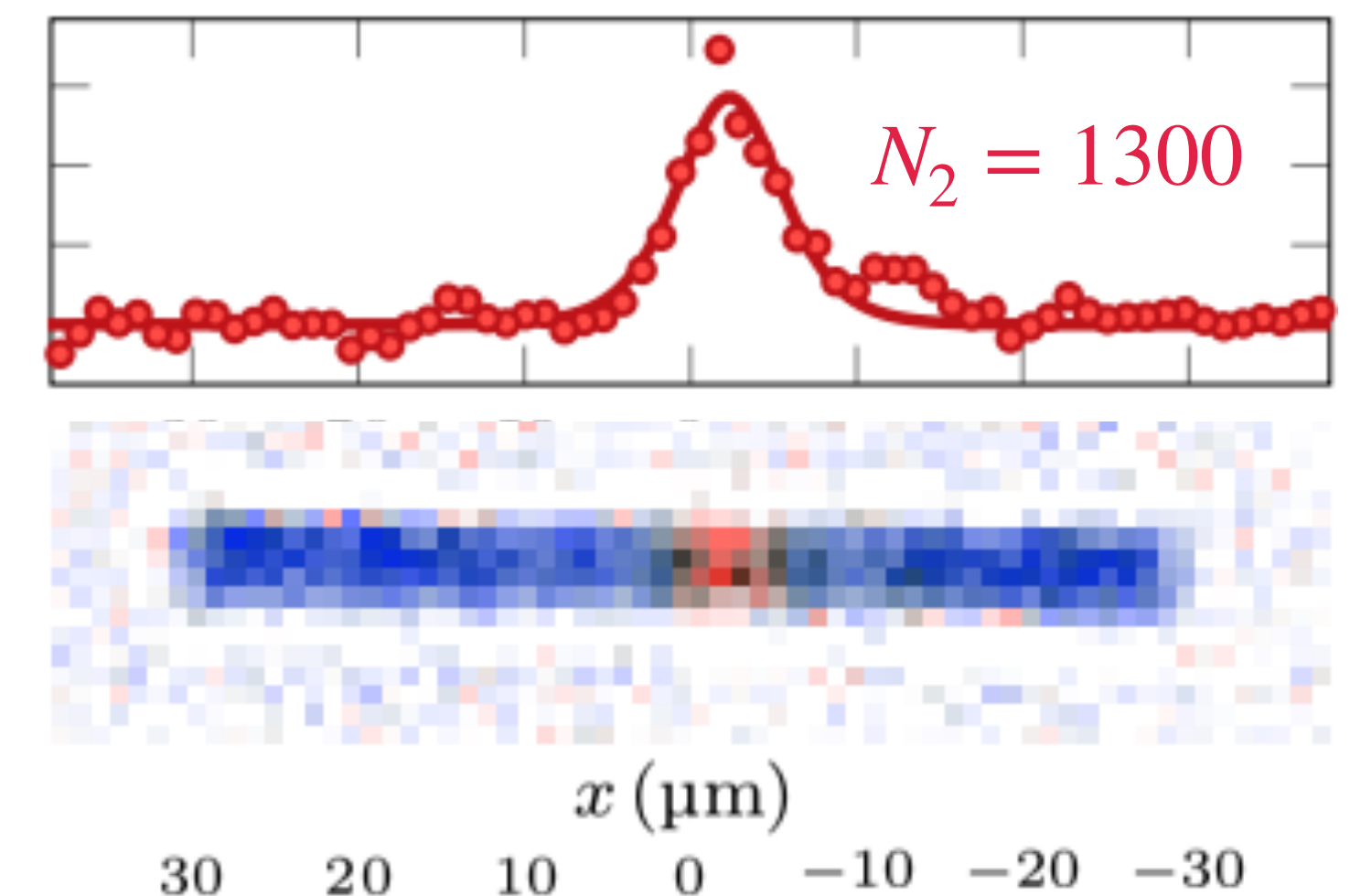
Condensat quasi-1D d'atomes de rubidium ^{87}Rb

Niveau fondamental de spin 1



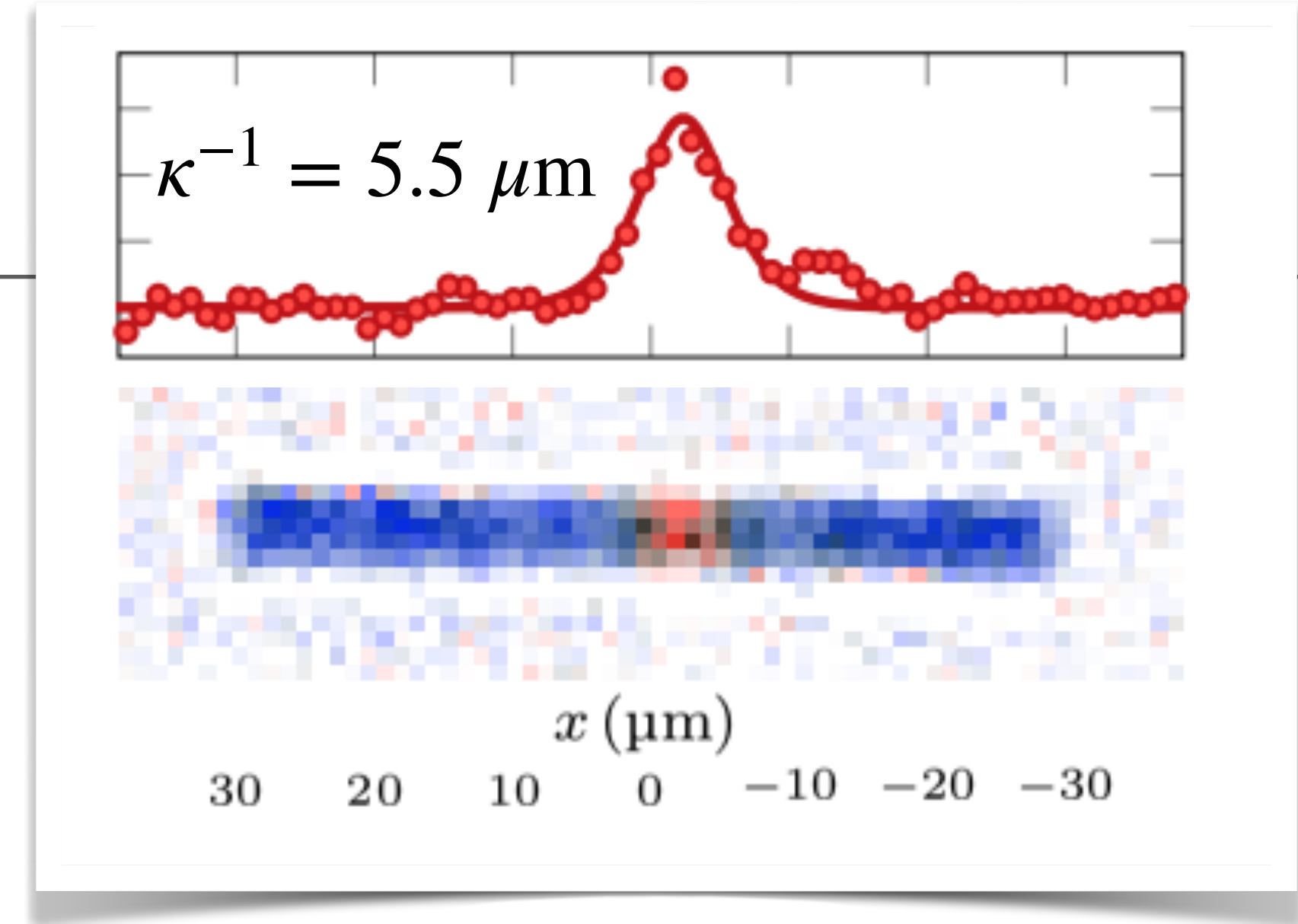
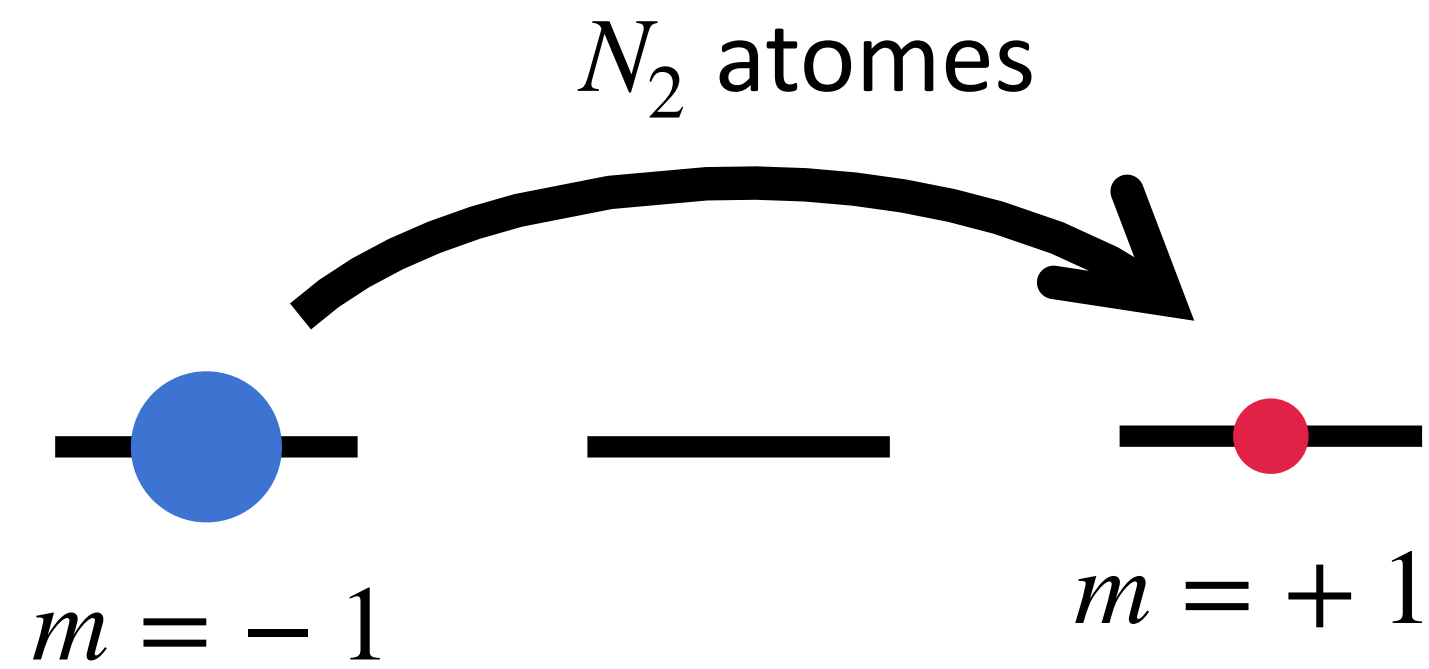
Etat initial : segment d'atomes dans l'état $m = -1$ (longueur $60\ \mu\text{m}$, densité $400\ \text{atomes}/\mu\text{m}$)

Préparation du soliton : transfert sélectif de $m = -1$ vers $m = +1$ par un processus multi-photonique, avec un laser au profil spatial contrôlé : on imprime le profil de densité $\rho_2(x)$ recherché (solution A)

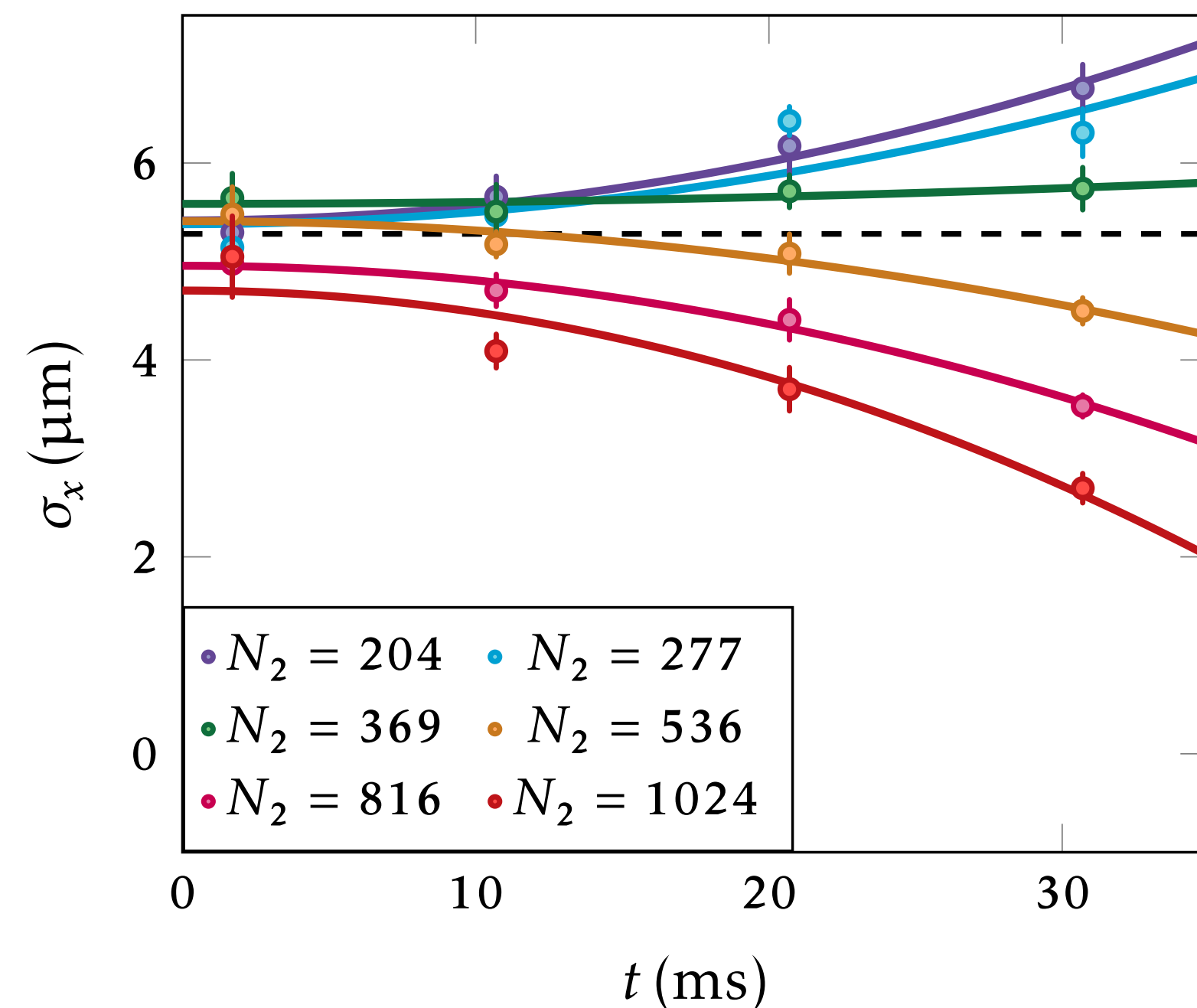


Que se passe-t-il ensuite ?

A-t-on préparé un soliton ?



Evolution de la largeur de la structure pour $m = +1$ selon le nombre d'atomes qu'on y a injectés



Structure stationnaire pour $N_2 \approx 400$ atomes
Bon accord avec la valeur prévue pour ce superfluide

Le soliton magnétique en mouvement

Calculs un peu longs...

$$\frac{\rho_2(x)}{\rho_0} = \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2(1 + \Omega - v^2/4)}{2 + \Omega + \sqrt{\Omega^2 + v^2} \cosh(2\sqrt{1 + \Omega - v^2/4} x)}$$

Zone autorisée dans le plan (v, Ω) : $\Omega > -1 + \frac{v^2}{4}$

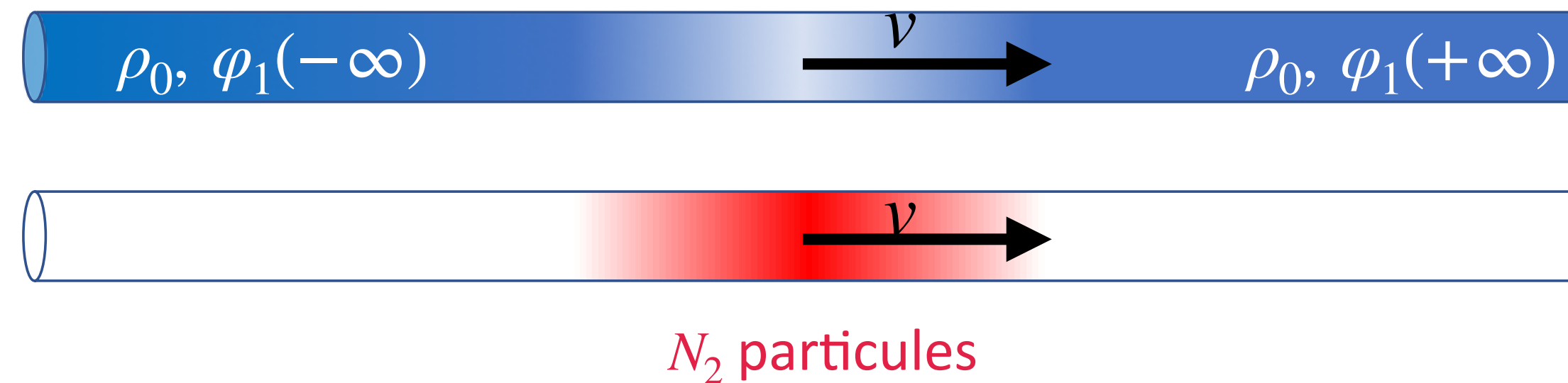
Nombre d'atomes dans la composante 2 : $\cosh \left(\frac{N_2}{\rho_0 x_0} \right) = \frac{2 + \Omega}{\sqrt{\Omega^2 + v^2}}$

Points du plan (v, Ω) accessibles pour un nombre d'atomes donné : $(2 + \Omega)^2 = C^2 (\Omega^2 + v^2)$

ellipse

Impulsion canonique d'un soliton magnétique

cf. cours 3 sur les solitons gris



composante 1 : $P_1 = P_{\text{loc},1} + P_{\text{contre-courant},1}$
 $= -mN_2v + P_{\text{contre-courant},1}$

composante 2 : $P_2 = P_{\text{loc},2} = mN_2v$

Dans l'hypothèse où la densité totale $\rho_1 + \rho_2$ est constante, les deux impulsions locales se compensent

Il reste : $P_{\text{canonique}} = P_{\text{contre-courant},1} = -\hbar\rho_0 \Delta\varphi_1$ avec $\Delta\varphi_1 = \varphi_1(+\infty) - \varphi_1(-\infty)$

L'impulsion canonique est proportionnelle à une différence de phase

Énergie d'un soliton magnétique

$$P_{\text{can}} = -\hbar\rho_0 \Delta\varphi_1$$

Calculée à partir de la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevskii

$$E[\psi_1, \psi_2] = \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} \int \left(|\partial_x \psi_1|^2 + |\partial_x \psi_2|^2 \right) dx}_{\text{cinétique}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int \left[g_{11} \rho_1^2(x) + 2g_{12} \rho_1(x)\rho_2(x) + g_{22} \rho_2^2(x) \right] dx}_{\text{interaction}} \quad \rho_i = |\psi_i|^2$$

On trouve : $E = -\alpha \cos(P_{\text{can}}/\hbar\rho_0) + \text{Cte}$ $\alpha = \frac{2E_0}{\sinh(N_2/2\rho_0 x_0)}$ $E_0 = \frac{\hbar}{t_0} \rho_0 x_0$

Lien entre vitesse et impulsion canonique :

$$v = \left(\frac{\partial E}{\partial P} \right)_{\rho_0, \tilde{N}_2} = \frac{\alpha}{\hbar\rho_0} \sin(P_{\text{can}}/\hbar\rho_0)$$

E et v sont des fonctions périodiques de l'impulsion !

4.

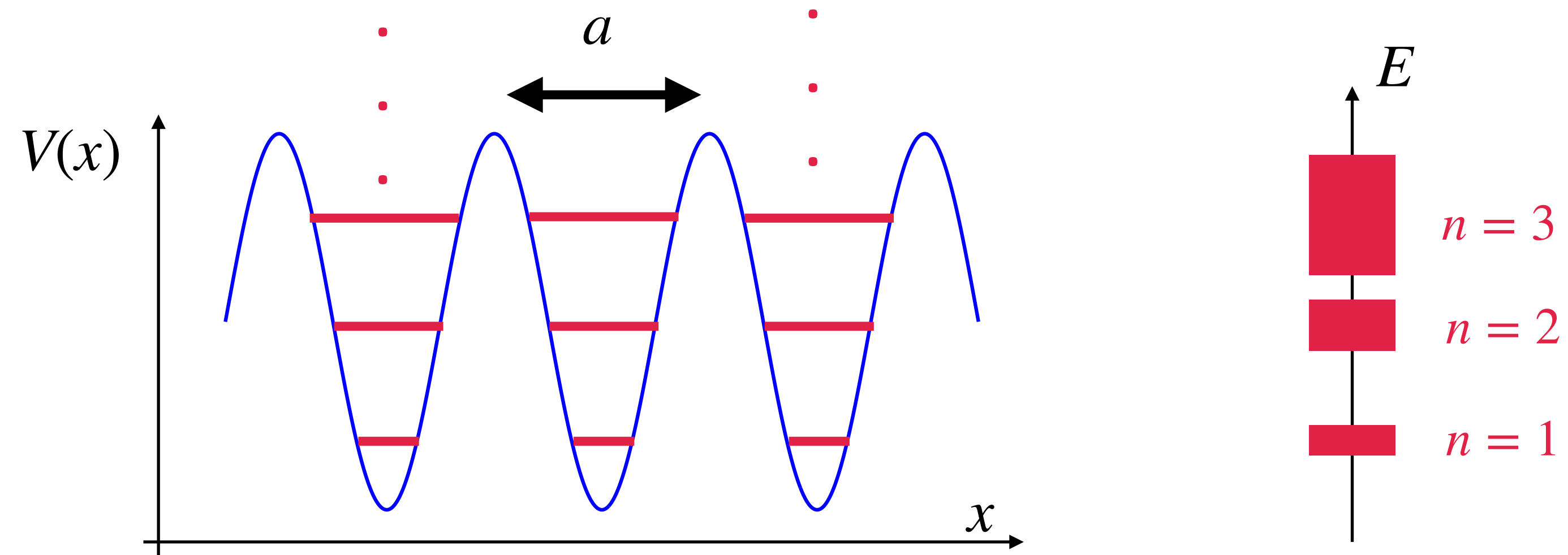
Oscillations de Bloch d'un soliton magnétique

Kosevich et al., JETP **87**, 401 (1998)

Les oscillations de Bloch “usuelles”

Particule quantique en mouvement dans un potentiel périodique de période a

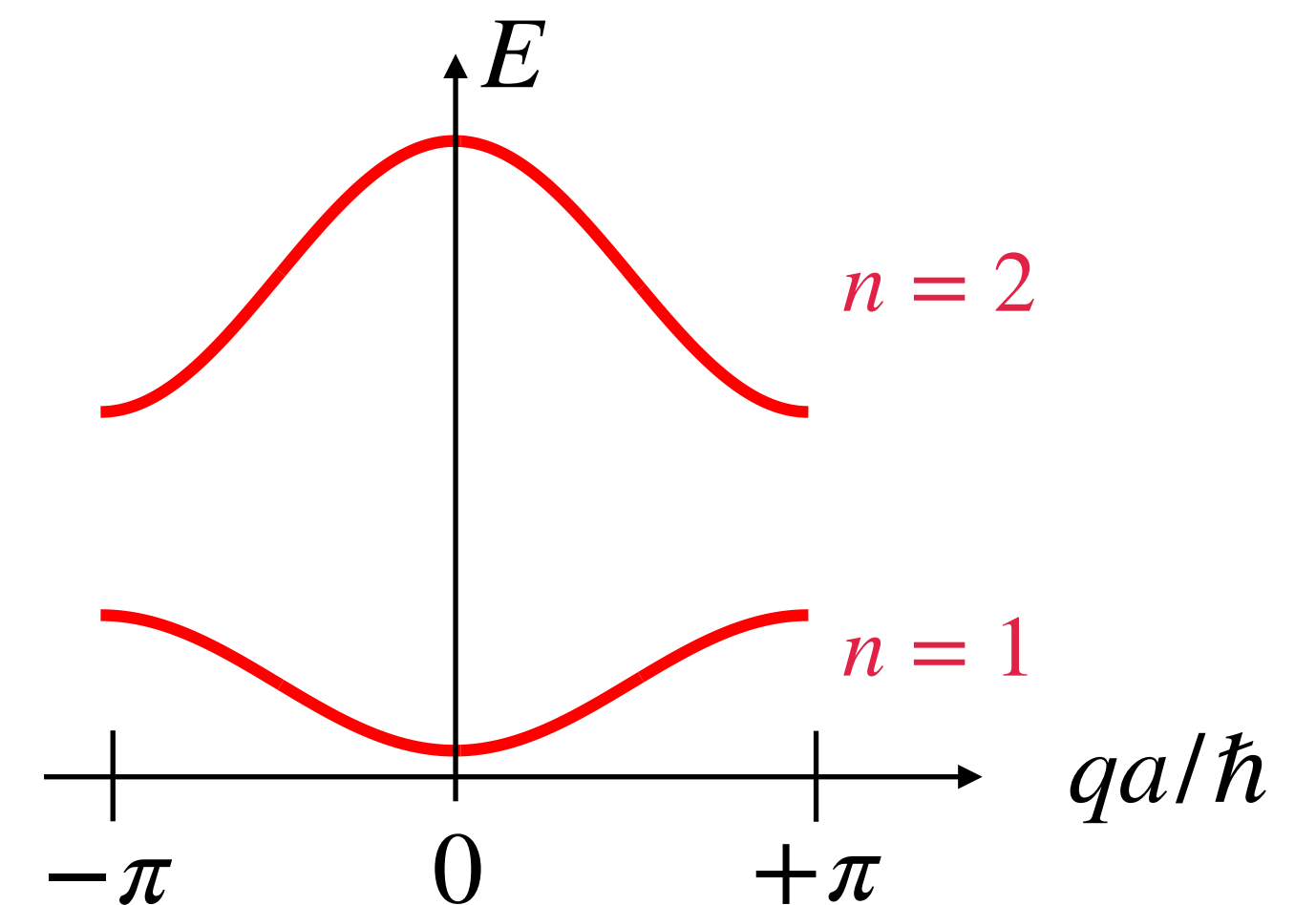
spectre formé de bandes d'énergie autorisées



Les états propres sont des fonctions de Bloch : $\psi_{n,q}(x) = e^{iqx/\hbar} u_{n,q}(x)$ où $u_{n,q}$ est une fonction périodique

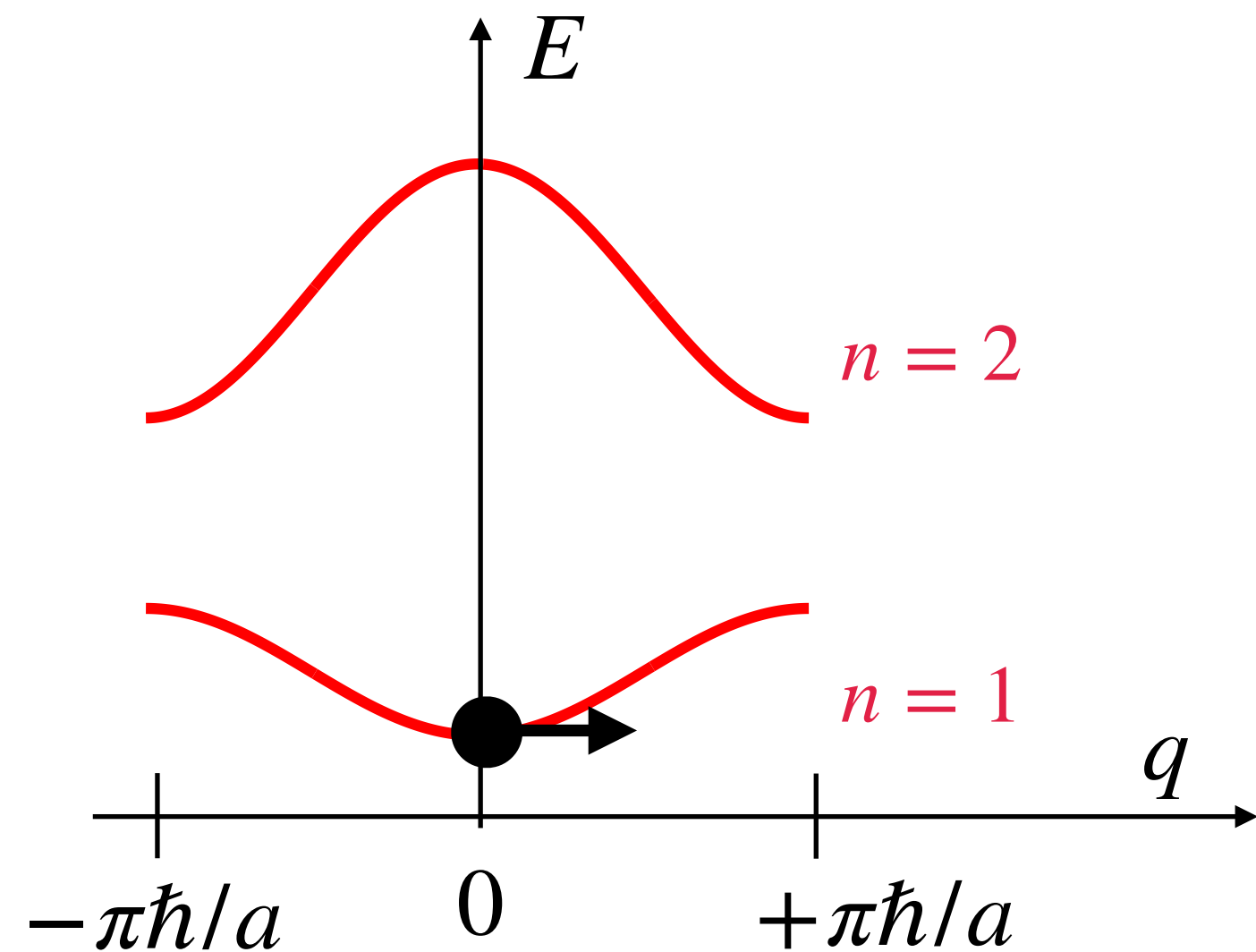
Le quasi-moment q peut être choisi dans la première zone de Brillouin :

$$-\frac{\pi\hbar}{a} \leq q \leq +\frac{\pi\hbar}{a}$$



Les oscillations de Bloch “usuelles” (2)

On ajoute une force extérieure uniforme f agissant sur la particule (en plus du potentiel périodique $V(x)$)



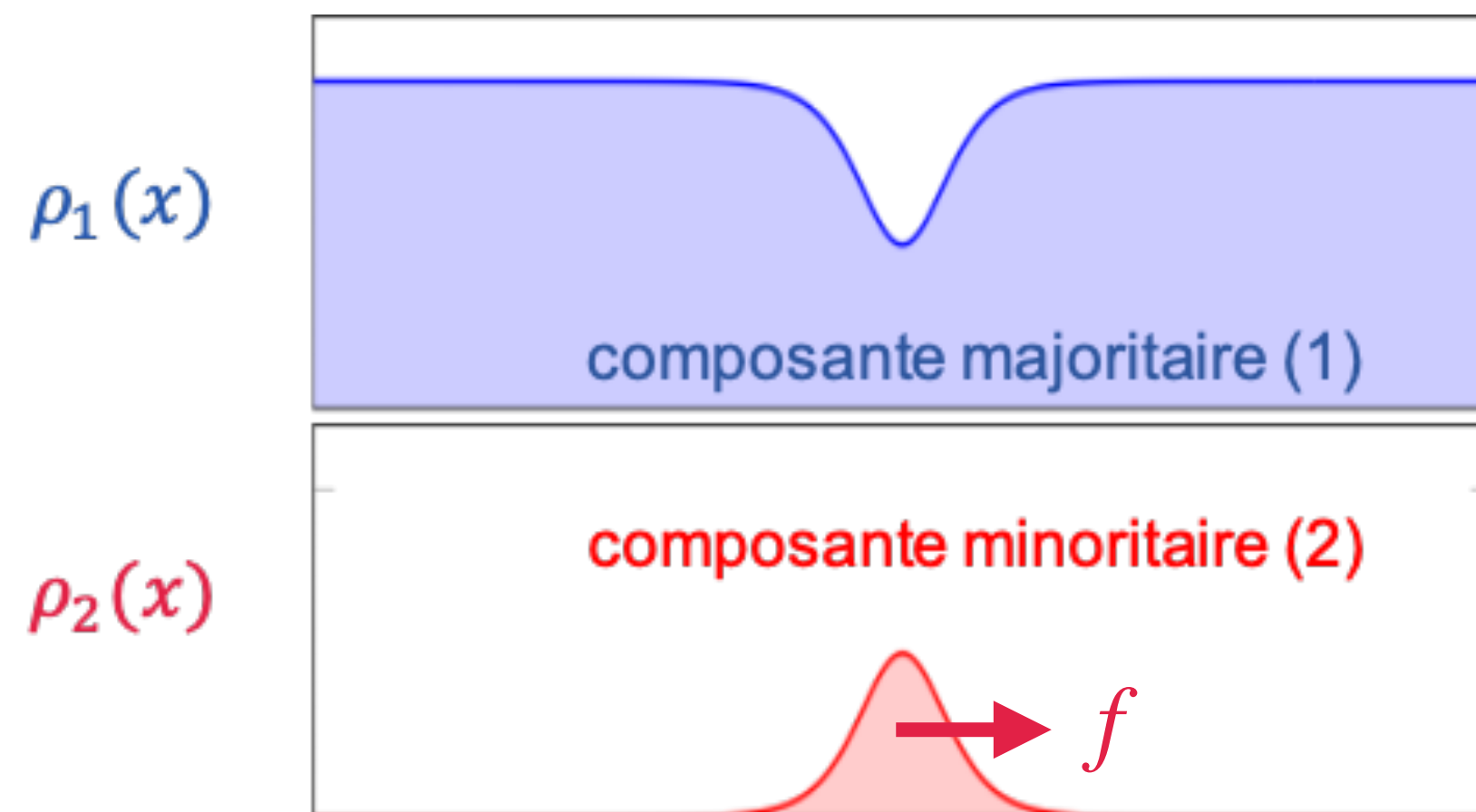
Evolution du quasi-moment : $\frac{dq}{dt} = f$

Hypothèse : force suffisamment faible pour que la particule reste dans la bande $n = 1$

Après le temps $t_B = \frac{2\pi\hbar}{af}$, le quasi-moment a augmenté de $\frac{2\pi\hbar}{a}$: on a parcouru toute la zone de Brillouin

Mouvement périodique de période t_B

Solitons magnétiques et oscillations de Bloch



On applique une force f sur chaque particule de la composante 2

La force f est supposée suffisamment faible pour ne pas “casser” le soliton

Force sur les N_2 particules : $F = N_2 f$

→ L'impulsion du soliton augmente linéairement avec le temps : $\frac{dP}{dt} = F$

→ Énergie et vitesse sont des fonction périodiques de P

$$E = -\alpha \cos(P/\hbar\rho_0) + \text{Cte}$$

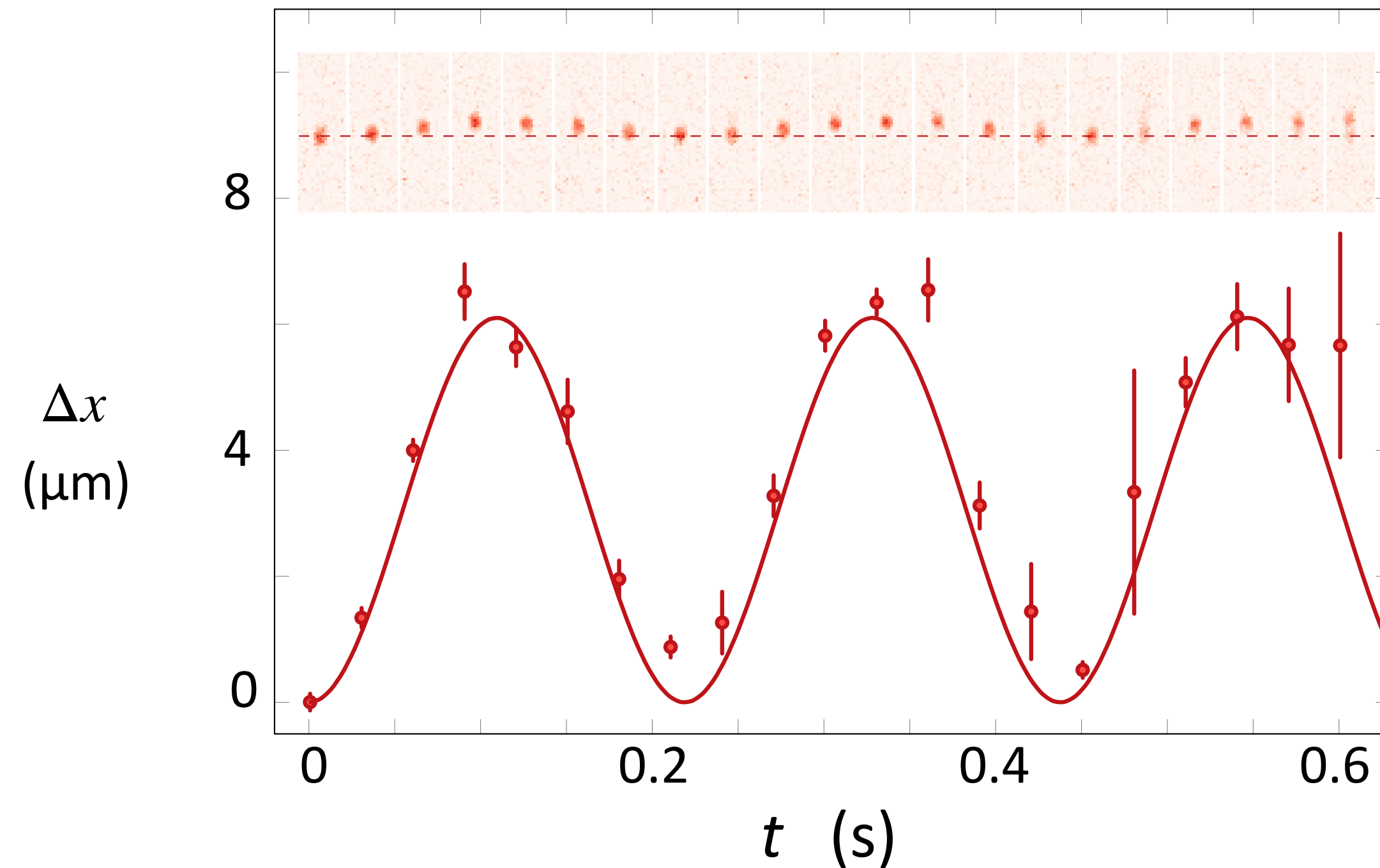
$$v = (\alpha/\hbar\rho_0) \sin(P/\hbar\rho_0)$$

Quand P a augmenté de $\hbar\rho_0$, le soliton doit être revenu à son état initial

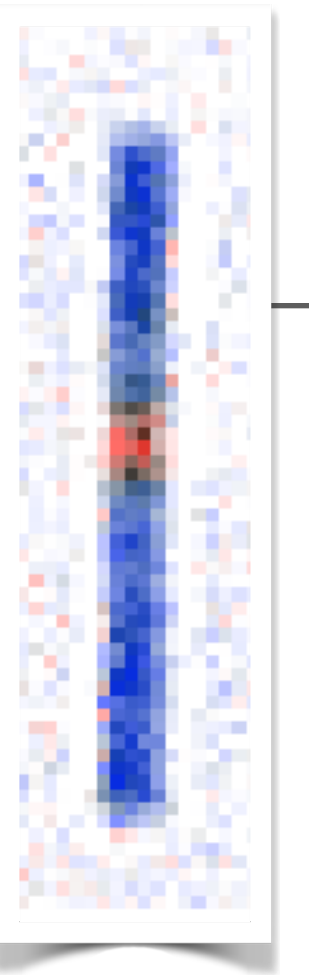
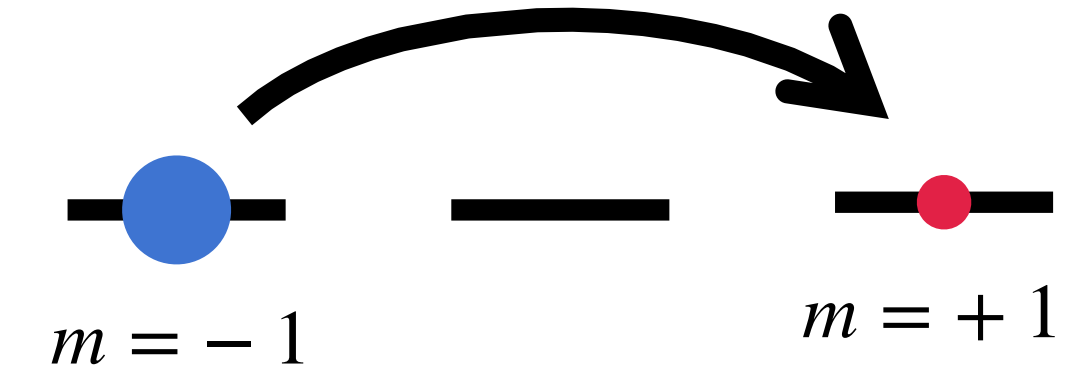
Mouvement oscillant de période $t_B = \frac{2\pi\hbar\rho_0}{F}$ à comparer à $t_B = \frac{2\pi\hbar/a}{f}$ pour les OB “usuelles”

Observation expérimentale

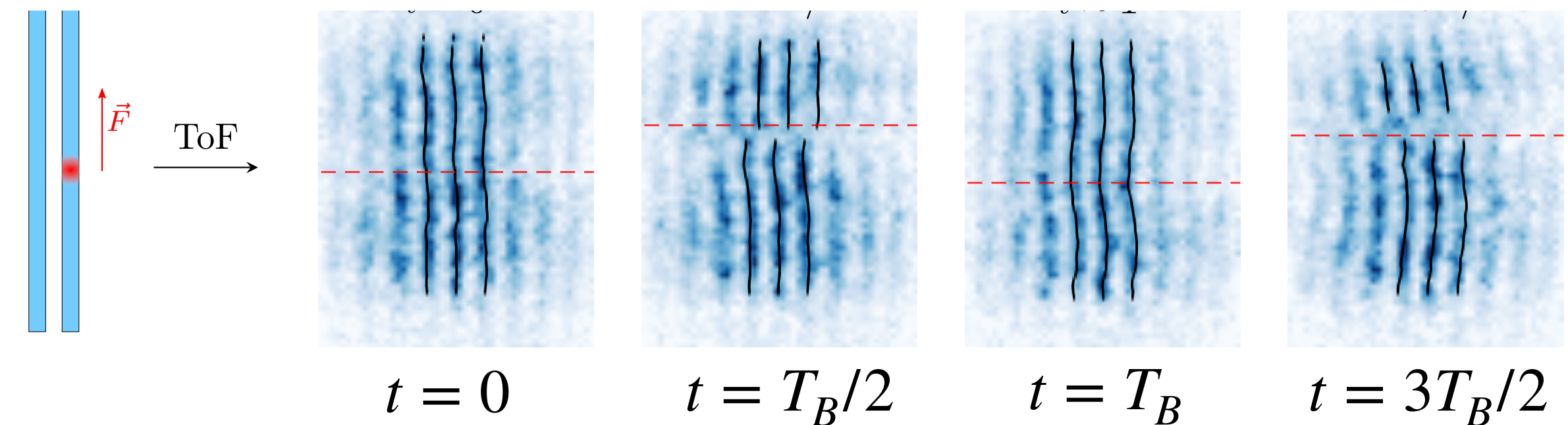
On exerce une force différentielle sur l'espèce 2 ($m = +1$) grâce à un gradient de champ magnétique



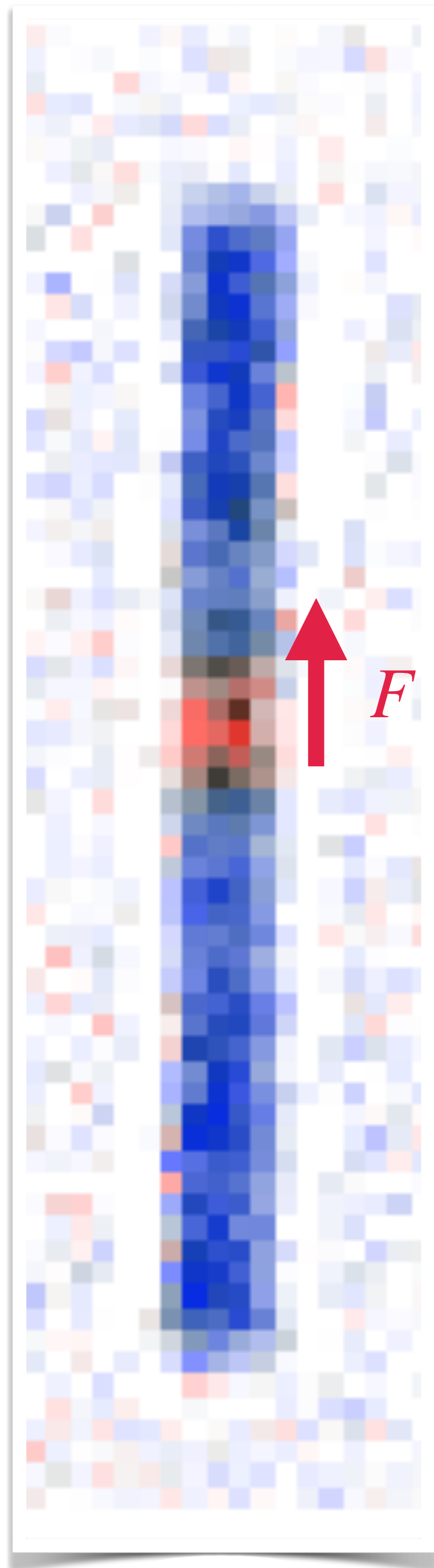
période de l'oscillation en bon accord avec la prédiction



Évolution de la phase du bain



Période de l'oscillation du soliton



$$t_B = \frac{2\pi\hbar\rho_0}{F}$$

La constante de Planck intervient directement:
c'est un phénomène d'origine quantique

$F = N_2 f$: ce n'est pas un phénomène à 1 particule,
mais une réponse collective des N_2 particules

Qu'est-ce qui est quantique dans ce phénomène ?

Réponse : le bain uni-dimensionnel, avec sa relation de dispersion périodique $E(P)$

Bloch (1973), Haldane (1981)

Ce phénomène peut être interprété comme un effet Josephson avec une jonction mobile

Bresolin et al. (2023)