

# Chapitre 2

## Dynamique d'une jonction Josephson

### Sommaire

<b>1</b>	<b>Caractéristique d'une jonction supraconductrice . . . .</b>	<b>2</b>
1-1	Rappel sur le modèle RCSJ . . . . .	2
1-2	Étude analytique pour $C \rightarrow 0$ . . . . .	3
1-3	La "planche à laver" inclinée . . . . .	4
1-4	Résultats numériques dans le cas général . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Caractéristique d'une jonction atomique . . . . .</b>	<b>7</b>
2-1	Rappel sur les jonctions atomiques . . . . .	7
2-2	La barrière mobile . . . . .	8
2-3	Observation de la relation courant-phase . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Les paramètres des jonctions atomiques . . . . .</b>	<b>10</b>
3-1	Le courant critique . . . . .	10
3-2	Le modèle RCSJ pour une jonction atomique . . . . .	12
3-3	Origines physiques de la dissipation . . . . .	14
<b>4</b>	<b>L'effet tunnel macroscopique . . . . .</b>	<b>17</b>
4-1	États quantiques macroscopiques . . . . .	17
4-2	Jonction au voisinage du courant critique . . . . .	18
4-3	Activation thermique de la barrière . . . . .	19
4-4	Niveaux quantifiés dans le potentiel $U(\varphi)$ . . . . .	20
4-5	Observation de l'effet tunnel macroscopique . . . . .	20

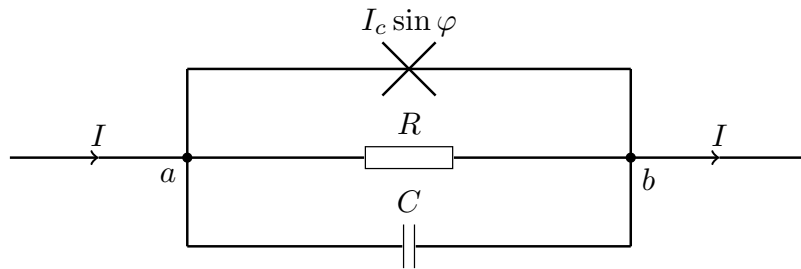
Le chapitre précédent a été consacré à la présentation des jonctions Josephson supraconductrices et à leur transposition à des fluides d'atomes, avec des faisceaux laser focalisés qui jouent le rôle de la barrière isolante des jonctions solides.

Pour une jonction supraconductrice, nous avons donné les deux relations fondamentales proposées par Josephson :

$$\begin{cases} I = I_c \sin \varphi \\ \hbar \dot{\varphi} = 2eV \end{cases}, \quad (1)$$

où  $\varphi$  désigne la différence de phase entre les supraconducteurs placés de part et d'autre de la jonction,  $I$  représente l'intensité électrique traversant la jonction,  $V$  la tension électrique à ses bornes, et  $2e > 0$  la valeur absolue de la charge d'une paire de Cooper. L'intensité critique  $I_c$  est un paramètre qui caractérise la jonction.

Toujours à propos des jonctions supraconductrices, nous avons introduit un modèle plus complet permettant de décrire les principaux phénomènes accompagnant l'effet Josephson. Ce modèle RCSJ, pour *resistively capacitance shunted junction*, est représenté sur la figure 1. Nous allons l'utiliser dans ce chapitre pour établir la caractéristique de la jonction, c'est-à-dire la tension moyenne  $\bar{V}$  qui apparaît à ses bornes quand on l'alimente par un générateur de courant délivrant une intensité  $I$  constante. Cette étude sera basée sur un modèle célèbre dans la physique des jonctions, celui de la "planche à laver inclinée".



**FIGURE 1.** Le modèle RCSJ, avec une résistance  $R$  et une capacité  $C$  en parallèle avec la jonction idéale décrite par (1). L'ensemble est alimenté par un générateur de courant délivrant l'intensité  $I$ .

Nous passerons ensuite à la transposition de ces notions à une jonction atomique. Nous présenterons un schéma ingénieux proposé par GIOVANAZZI, SMERZI et al. (2000) pour simuler la présence d'un générateur de courant. Ce schéma consiste à placer une barrière mobile dans le fluide, l'intensité traversant la barrière étant directement proportionnelle à sa vitesse, au moins dans le régime  $I < I_c$ . On peut alors retrouver pour ces fluides atomiques l'équivalent des paramètres du modèle RCSJ.

Une question importante concernant la transposition de l'idée de Josephson à des gaz d'atomes porte sur les mécanismes physiques de la dissipation (le "R" du modèle "RCSJ"). Nous décrirons des analyses numériques récentes ainsi que des expériences qui ont mis en évidence le rôle essentiel des solitons et des vortex dans le régime dissipatif.

Pour terminer ce chapitre, nous reviendrons aux jonctions supraconductrices pour décrire brièvement les recherches de Clarke, Devoret et Shapiro, fondées sur la version quantique du modèle de la planche à laver inclinée, recherches qui ont été récompensées par le prix Nobel de Physique 2025.

## 1 Caractéristique d'une JJ supraconductrice

### 1-1 Rappel sur le modèle RCSJ

Nous avons introduit au chapitre précédent le modèle RCSJ (*resistively capacitance shunted junction*) qui permet de décrire de manière semi-quantitative la dynamique d'une jonction Josephson, possiblement alimentée par un générateur de courant ou un générateur de tension.

Rappelons brièvement les principaux ingrédients de ce modèle. Nous notons  $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$  la différence de phase entre les deux côtés de la jonction,  $V = V_a - V_b$  la différence de potentiel électrique, et  $I$  l'intensité électrique totale circulant de  $a$  vers  $b$ . La structure électrique envisagée dans le modèle RCSJ est représentée sur la figure 1 et elle comporte trois éléments :

- un élément Josephson idéal traversé par le courant  $I_c \sin \varphi$  ;
- une résistance traversée par le courant  $V/R$  ;
- un condensateur de capacité  $C$ , portant la charge  $Q = CV$  et traversé par le courant  $\dot{Q} = C\dot{V}$ .

On a donc le lien suivant entre l'intensité totale  $I(t)$ , la phase  $\varphi(t)$  et la tension  $V(t)$  :

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{V}{R} + C \frac{dV}{dt}, \quad (2)$$

ainsi que le lien  $\hbar \dot{\varphi} = 2eV$  entre la phase  $\varphi(t)$  et la tension  $V(t)$  (seconde relation de Josephson dans (1)).

Si l'on élimine  $V$  au profit de la phase  $\varphi$ , on aboutit à l'équation différentielle non linéaire du deuxième ordre en  $\varphi$  :

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\varphi} + \frac{\hbar C}{2e} \ddot{\varphi}. \quad (3)$$

Nous envisagerons dans la suite de ce cours différentes configurations :  $I$  peut être maintenue constante par un générateur de courant, et il s'agit alors de déterminer  $\varphi(t)$  et donc  $V(t)$ , en particulier sa moyenne temporelle  $\bar{V}$ . Nous considérerons également au chapitre suivant la situation où  $I$  peut comporter une composante continue et une composante modulée [ $I(t) = I_0 + I_1 \cos(\omega t)$ ] et nous montrerons que la tension moyenne  $\bar{V}$  peut

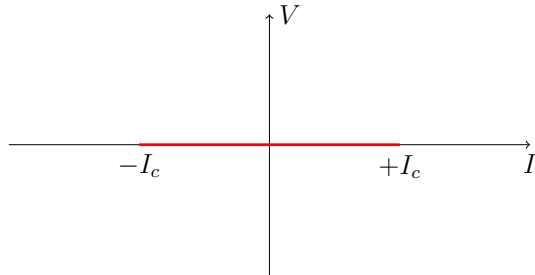


FIGURE 2. Solution possible pour l'équation du mouvement (3) : un courant  $I$  compris entre  $-I_c$  et  $+I_c$ , et une différence de potentiel électrique  $V$  nulle.

présenter un comportement résonnant (résonances de Shapiro). Nous verrons que cette équation non linéaire donnant l'évolution de la phase  $\varphi$  présente une grande variété de solutions, selon l'importance de l'amortissement résistif, et qu'elle peut révéler différents phénomènes typiques de la physique non linéaire, de l'hystérésis par exemple.

Dans ce chapitre, nous allons considérer le cas où le dispositif représenté en figure 1 est alimenté par un générateur de courant d'intensité constante  $I$ . Nous allons chercher à résoudre analytiquement ou numériquement l'équation (3) pour en déduire  $\varphi(t)$  et  $V(t)$ .

Notons tout de suite une solution particulière qui sera toujours présente :

$$|I| \leq I_c \quad V = 0 \tag{4}$$

correspondant à la phase constante  $\varphi = \arcsin(I/I_c)$ . Il s'agit du segment horizontal dans le plan  $(I, V)$  déjà montré au chapitre 1 et reporté sur la figure 2.

### 1-2 Étude analytique pour $C \rightarrow 0$

Nous allons nous concentrer d'abord sur le cas simple, sans hystérésis, où les effets capacitifs peuvent être négligés devant les effets résistifs

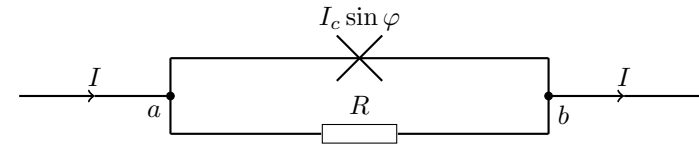


FIGURE 3. La simplification du modèle RCSJ quand les effets capacitifs sont négligeables.

(figure 3). On peut alors simplifier l'équation (3) pour ne garder que

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\varphi}. \tag{5}$$

On peut distinguer deux régimes :

- Si l'intensité  $I$  est inférieure à  $I_c$ , on trouve uniquement la solution constante  $\varphi = \arcsin(I/I_c)$  (modulo  $2\pi$ ) et donc

$$\boxed{|I| \leq I_c : \quad V = 0} \tag{6}$$

C'est le segment horizontal tracé en figure 2 et apparaissant également en figure 4.

- Si  $I > I_c$ , on transforme cette équation en :

$$\int_0^{\varphi(t)} \frac{d\varphi'}{I - I_c \sin \varphi'} = \frac{2eR}{\hbar} t \tag{7}$$

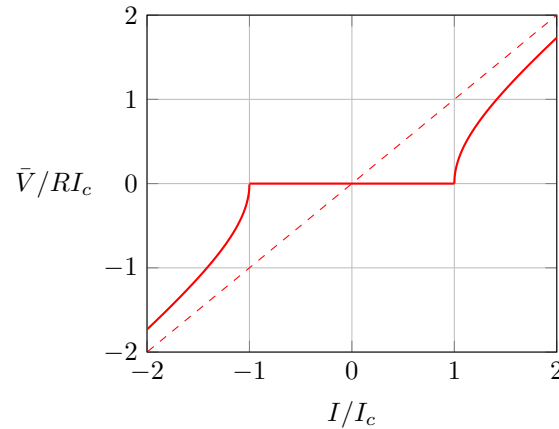
où nous avons pris par convention une phase nulle à l'instant  $t = 0$ . L'intégration de cette équation conduit à (GRADSHTEYN & RYZHIK 2014) :

$$\frac{2}{\sqrt{I^2 - I_c^2}} \arctan \left[ \frac{I \tan(\varphi/2) - I_c}{\sqrt{I^2 - I_c^2}} \right] = \frac{2eR}{\hbar} t \tag{8}$$

dont on déduit

$$I \tan \frac{\varphi}{2} = I_c + \sqrt{I^2 - I_c^2} \tan \left( \frac{\pi t}{T} \right) \quad \text{avec} \quad T = \frac{\pi \hbar}{eR \sqrt{I^2 - I_c^2}}. \tag{9}$$

La fonction  $\varphi$  est une fonction croissante du temps et elle augmente de  $2\pi$  quand  $t$  augmente de  $T$ . La fonction  $\dot{\varphi}$  est périodique dans le temps



**FIGURE 4.** Caractéristique courant-tension dans le cas où le couplage capacitif est négligeable. La ligne tireté représente le résultat purement résistif  $\bar{V} = RI$ .

de période  $T$  et il en va de même pour  $V(t)$ . La moyenne  $\bar{V}$  de  $V(t)$  sur une période  $T$  se calcule simplement :

$$\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt = \frac{\hbar}{2eT} \int_0^T \dot{\varphi}(t) dt = \frac{\hbar}{2eT} [\varphi(T) - \varphi(0)] = \frac{\hbar}{2eT} 2\pi \quad (10)$$

ou encore, en utilisant l'expression (9) de  $T$  :

$$\boxed{|I| > I_c : \quad \bar{V} = R\sqrt{I^2 - I_c^2}} \quad (11)$$

On obtient ainsi la caractéristique tracée en figure 4. Pour un courant  $I$  très grand devant  $I_c$ , on retrouve le résultat purement résistif  $\bar{V} = RI$ , tracé en tireté sur cette figure.

Cette caractéristique courant-tension correspond en pratique au cas de jonctions Josephson réalisées à partir de contacts ponctuels (*point contact*), pour lesquelles la capacité  $C$  est effectivement très petite (BARONE & PATERNO 1982).

### 1-3 La "planche à laver" inclinée

Nous prenons maintenant en compte les effets capacitifs ( $C \neq 0$ ). Pour obtenir une intuition des solutions dans ce cas général, commençons par omettre cette fois-ci la contribution résistive dans (3) qui s'écrit donc :

$$\frac{\hbar C}{2e} \ddot{\varphi} = -I_c \sin \varphi + I. \quad (12)$$

Cette équation décrit le mouvement d'une particule de "masse"  $\hbar C/2e$  soumise à la force  $F(\varphi) = -I_c \sin \varphi + I$ . Cette force dérive du potentiel

$$\boxed{U(\varphi) = -I_c \cos \varphi - I\varphi} \quad (13)$$

La superposition du potentiel sinusoïdal  $-I_c \cos \varphi$  et du potentiel linéaire  $-I\varphi$  est tracée en figure 5 pour différentes valeurs du rapport  $I/I_c$ . Elle est souvent appelée de manière imagée "potentiel en planche à laver inclinée" (*tilted washboard potential*), comme celle montrée sur la figure 6.

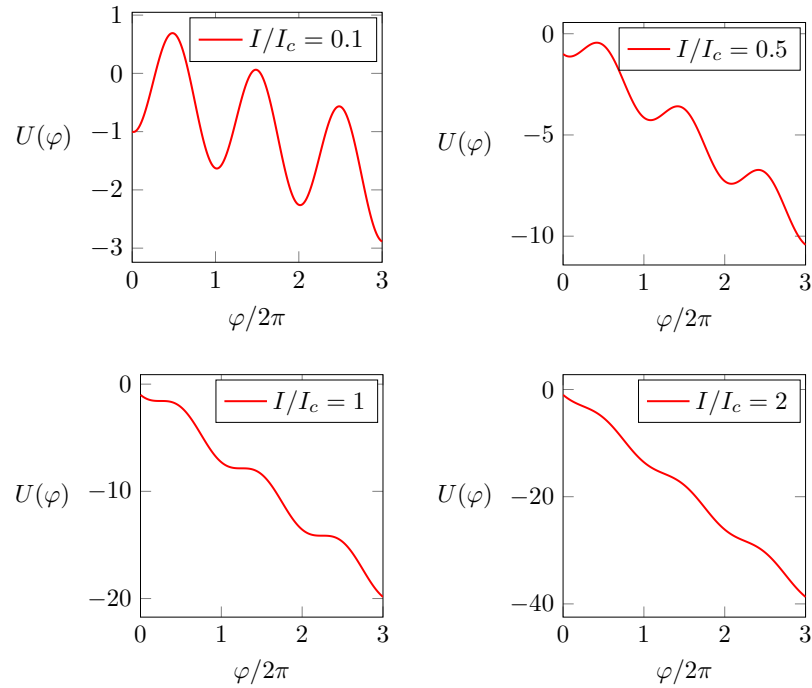
Pour ce problème sans dissipation, on identifie deux possibilités, conduisant à des régimes différents :

- $|I| < I_c$  (première ligne de la figure 5) : le potentiel  $U(\varphi)$  présente des minima locaux, séparés de  $2\pi$ . Pour une énergie donnée, on a donc (i) un régime piégé, où la variable  $\varphi$  reste confinée autour d'un minimum local et (ii) un régime accéléré où la particule dévale la pente correspondant au potentiel linéaire  $-I\varphi$ . Le terme dissipatif (non pris en compte pour l'instant) sera alors essentiel pour assurer que la "vitesse"  $\dot{\varphi}$  ne diverge pas.
- $|I| \geq I_c$  (deuxième ligne de la figure 5) : le potentiel  $U(\varphi)$  ne présente pas de minimum local, seul le régime accéléré est possible.

Les phénomènes d'hystérésis mentionnés plus haut peuvent se manifester dans le premier cas, pour lequel deux scénarios sont en compétition.

### 1-4 Résultats numériques dans le cas général

Nous avons abordé dans ce qui précède deux régimes limite : celui où les effets capacitifs décrits par  $C$  sont négligeables et qui conduit à une



**FIGURE 5.** Forme du potentiel  $U(\varphi)$  pour différentes valeurs du rapport  $I/I_c$ . Des minima locaux, espacés de  $2\pi$ , existent seulement si  $I < I_c$ .

solution analytique, et celui où les effets résistifs décrits par  $R$  sont négligeables, qui conduit au mouvement dans le potentiel de type "planche à laver inclinée". Nous passons maintenant à l'étude de la jonction quand tous les termes de l'équation du mouvement (3) sont significatifs. Dans ce cas, il n'est pas possible d'obtenir une solution analytique simple et on doit se tourner vers une résolution numérique.

Avant de présenter ces résultats, il est important d'identifier le ou les paramètres sans dimension qui caractérisent le problème. Pour cela, on divise l'équation (3) par  $I_c$  :

$$\frac{I}{I_c} = \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eRI_c} \dot{\varphi} + \frac{\hbar C}{2eI_c} \ddot{\varphi} \quad (14)$$



**FIGURE 6.** Une planche à laver en pierre. Photo Wikipedia.

et on introduit l'échelle de temps

$$t_0 = \frac{\hbar}{2eRI_c} \quad (15)$$

En exprimant le temps en unité de  $t_0$ , on arrive à l'équation

$$\boxed{\frac{I}{I_c} = \sin \varphi + \dot{\varphi} + \beta_c \ddot{\varphi}} \quad (16)$$

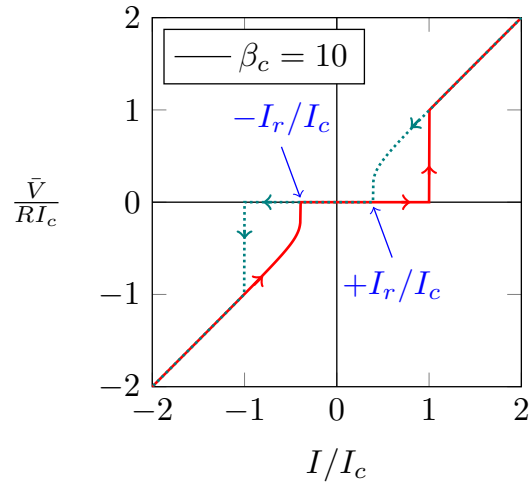
où l'on a introduit le paramètre sans dimension (paramètre de Stewart-McCumber).

$$\boxed{\beta_c = \frac{2eI_c R^2 C}{\hbar}} \quad (17)$$

La détermination de la caractéristique d'une jonction Josephson décrite par le modèle RCSJ ne dépend donc que de ce seul paramètre<sup>1</sup>. Le cas dominé par la dissipation étudié en §1-2 correspond au choix  $\beta_c = 0$ . Le cas opposé  $\beta_c \gg 1$  correspond au contraire à une situation où les effets résistifs sont faibles (i.e.  $R \rightarrow \infty$ ).

On a tracé en figures 7 et 8 les caractéristiques courant-tension pour différentes valeurs de  $\beta_c$ . On voit apparaître un phénomène d'hystérésis marqué pour  $\beta_c > 1$ . En pratique, ces courbes sont calculées en recherchant

1. Je remercie Thierry Giamarchi pour une discussion sur la nature de certaines solutions de cette équation.

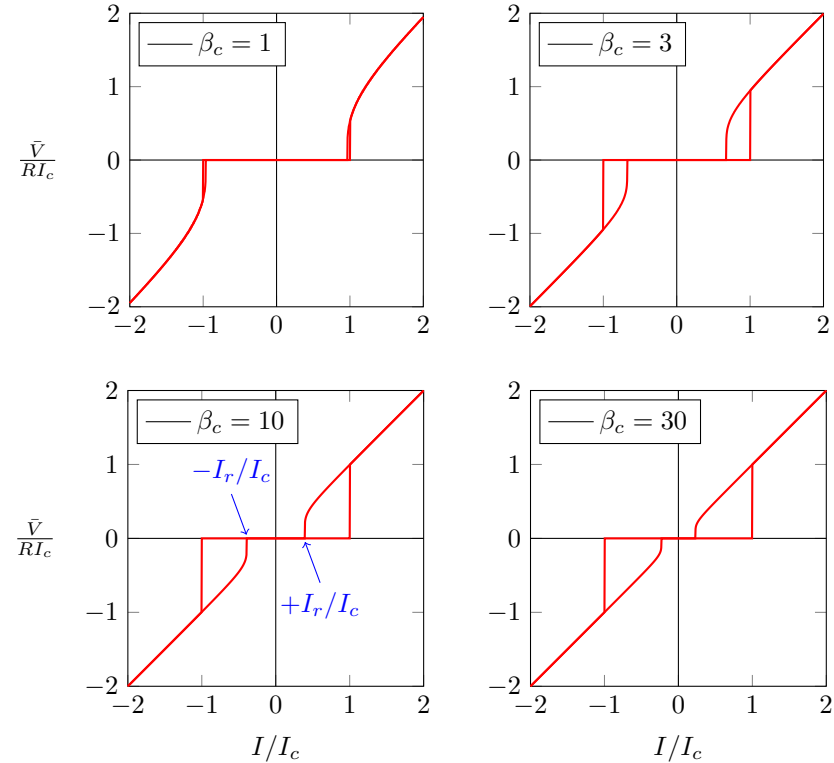


**FIGURE 7.** Caractéristique courant-tension déduite de (3) pour  $\beta_c = 10$ . Cette équation est intégrée numériquement pour chaque valeur de  $I/I_c$ . On calcule la moyenne temporelle  $\bar{V}$  de la tension  $V(t)$  une fois le régime stationnaire atteint. La courbe en trait continu rouge est obtenue en balayant  $I$  dans le sens positif, depuis  $-2I_c$  à  $+2I_c$ . La courbe en pointillé vert est obtenue en balayant  $I$  depuis  $+2I_c$  à  $-2I_c$ . Un phénomène d'hystérésis apparaît sur cette caractéristique : dans la plage  $[-I_c, -I_r]$  et  $[+I_r, +I_c]$ , une même valeur du courant peut conduire à deux valeurs de la tension  $\bar{V}$  selon les conditions initiales choisies.

le régime forcé de (16). La fonction  $\varphi(t)$  est périodique en temps et on en déduit  $\bar{V}$  par la relation (10).

Pour déterminer chaque caractéristique, on commence au point  $I = 0$  et  $V = 0$  et on suit le régime forcé en augmentant  $I$  par incréments  $dI$  petits devant  $I_c$ . Pour chaque incréments  $dI$ , on attend que le régime forcé soit atteint pour déterminer la valeur de  $\bar{V}(I)$  correspondante. Les calculs sont faits jusqu'à  $I = 2I_c$  pour cette figure. Ensuite, partant de la solution en ce point (qui est proche du régime purement résistif), on revient vers le point  $I = 0$  en diminuant  $I$  par petits incréments.

On obtient ainsi la caractéristique dans le demi-plan  $I > 0$ , en particu-



**FIGURE 8.** Caractéristique courant-tension déduite de (3) pour différentes valeurs de  $\beta_c$ .

lier les deux branches d'hystérésis pour un courant compris entre  $I_r$  et  $I_c$  (figure 7). La partie  $I < 0$  s'en déduit par symétrie. Dans la limite  $\beta_c \gg 1$ , BUCKEL & KLEINER (2008) donnent la valeur approchée  $I_r/I_c = 4/(\pi\sqrt{\beta_c})$ .

Cette hystérésis correspond aux deux types de mouvement mentionnés plus haut pour le cas  $|I| < I_c$  :

- un mouvement piégé en un minimum local du potentiel  $U(\varphi)$ , donc à tout instant  $\dot{\varphi} = 0$  et  $\bar{V} = 0$ ;
- un mouvement à vitesse moyenne  $\bar{\varphi}$  non nulle, donc  $\bar{V} \neq 0$ , résultant de la compétition entre l'accélération due au potentiel linéaire  $-I\varphi$  et la force de friction.

**Autre paramétrisation rencontrée fréquemment.** Le choix de l'unité de temps  $t_0$  dans (14) n'est pas le seul possible. Certains auteurs préfèrent introduire le temps  $t_1$  tel que

$$t_1^2 = \frac{\hbar C}{2eI_c} \quad (18)$$

qui est égal à  $2\pi/\omega_p$ , où  $\omega_p$  est la fréquence plasma introduite au chapitre précédent. En prenant  $t_1$  comme unité de temps, on aboutit à l'équation du mouvement

$$\frac{I}{I_c} = \sin \varphi + \frac{\dot{\varphi}}{Q_{\text{qual}}} + \ddot{\varphi}, \quad (19)$$

où le facteur de qualité  $Q_{\text{qual}}$  est directement relié au paramètre  $\beta_c$  par

$$Q_{\text{qual}} = \sqrt{\beta_c}. \quad (20)$$

## 2 Caractéristique d'une jonction atomique

L'étude des caractéristiques courant-tension pour des jonctions Josephson supraconductrices a été faite dans les années qui ont suivi la proposition de Josephson. Il n'est pas question de faire une revue de ces études ici et nous renvoyons les personnes intéressées vers les ouvrages classiques du domaine comme BARONE & PATERNO (1982) et TINKHAM (2004). Nous allons nous intéresser ici aux réalisations plus récentes faites à partir de gaz d'atomes ou de molécules froides.

### 2-1 Rappel sur les jonctions atomiques

Rappelons les résultats obtenus au premier chapitre concernant une jonction Josephson atomique formée par un double puits, avec les nombres d'atomes à gauche et à droite :

$$N_a = \bar{N}_a + n, \quad N_b = \bar{N}_b - n, \quad (21)$$

et la différence de phase  $\varphi \equiv \varphi_a - \varphi_b$ . Le fonctionnement non dissipatif de la jonction est caractérisé par les deux énergies  $E_J$  et  $E_C$ . Son énergie s'écrit

$$E(\varphi, n) = \bar{\Delta\mu} n + \frac{E_C}{2} n^2 - E_J \gamma(n) \cos \varphi, \quad (22)$$

où la quantité  $\bar{\Delta\mu} = \bar{\mu}_b - \bar{\mu}_a$  représente la différence de potentiel chimique pour les nombres moyens de particules  $\bar{N}_a$  et  $\bar{N}_b$ , et où on a posé :

$$\gamma(n) \equiv \sqrt{\left(1 + \frac{n}{\bar{N}_a}\right) \left(1 - \frac{n}{\bar{N}_b}\right)}. \quad (23)$$

Dans ce chapitre, nous nous limiterons à des régimes où l'on peut prendre en bonne approximation  $\gamma(n) \approx 1$ . Cette hypothèse correspond à ce que nous avons appelé le "régime Josephson" dans le chapitre 1. Dans ce cas, les équations d'évolution des paramètres  $n$  et  $\varphi$  décrivant la jonction sont

$$\begin{cases} \hbar \dot{n} = E_J \sin \varphi \\ \hbar \dot{\varphi} = -\bar{\Delta\mu} - nE_C \end{cases} \quad (24)$$

La quantité  $\dot{n}$  représente un courant de particules, donc l'équivalent du courant électrique  $I$  pour une jonction supraconductrice. La première équation de (24) peut donc s'écrire

$$\dot{n} = I_c \sin \varphi \quad \text{avec} \quad I_c = E_J/\hbar \quad (25)$$

Rappelons par ailleurs que l'énergie de charge  $E_C$  est définie par

$$E_C \equiv \left. \frac{\partial \mu_a}{\partial N_a} \right|_{N_a=\bar{N}_a} + \left. \frac{\partial \mu_b}{\partial N_b} \right|_{N_b=\bar{N}_b} \quad (26)$$

de sorte que la quantité intervenant dans la seconde équation de (24) peut se simplifier en

$$\begin{aligned} \overline{\Delta\mu} + nE_C &= \left( \bar{\mu}_a + n \frac{\partial \mu_a}{\partial N_a} \right) - \left( \bar{\mu}_b - n \frac{\partial \mu_b}{\partial N_b} \right) \\ &= \mu_a - \mu_b = \Delta\mu. \end{aligned} \quad (27)$$

La seconde équation de (24) peut donc également s'écrire

$$\boxed{\hbar \dot{\varphi} = -\Delta\mu} \quad (28)$$

où  $\Delta\mu \equiv \mu_a - \mu_b$  est calculé pour les nombres de particules instantanés  $N_a$  et  $N_b$ .

En pratique, nous considérerons fréquemment des jonctions à l'équilibre pour les nombres moyens d'atomes  $(\bar{N}_a, \bar{N}_b)$ , de sorte que  $\bar{\mu}_a = \bar{\mu}_b$ . Dans ces conditions, on a la relation simple entre  $n$  et la différence instantanée de potentiel chimique :  $\Delta\mu = nE_C$ , qui peut également se mettre sous la forme

$$n = C \Delta\mu \quad \text{avec} \quad C = \frac{1}{E_C}. \quad (29)$$

La capacité  $C$  relie donc la "charge"  $n$  de la jonction à  $\Delta\mu$ .

## 2-2 La barrière mobile

Comment explorer directement la partie de la caractéristique composée du segment  $I \in [-I_c, +I_c]$  pour une différence de potentiel nulle entre les deux côtés de la jonction? Dans une jonction supraconductrice, on a affaire à un système ouvert puisque la jonction est branchée à un générateur de courant. De nouvelles charges (paires de Cooper) peuvent être donc injectées ou retirées d'un côté ou de l'autre de la barrière, ce qui permet d'imposer un courant  $I \neq 0$  tout en conservant  $V = 0$ .

Dans une jonction atomique, composée d'un double puits de potentiel, le rôle de  $V$  est joué par la différence de potentiel chimique  $\Delta\mu = \mu_a - \mu_b$  entre les deux côtés de la barrière (cf. chapitre 1). Il est alors moins évident de travailler à  $\Delta\mu = 0$  car le système est isolé : avec une barrière fixe située au centre du puits de potentiel, le passage de particules d'un côté à l'autre de la barrière va modifier le potentiel chimique de chacune des deux

composantes : du fait des interactions entre atomes, l'un des potentiels chimiques va augmenter, l'autre diminuer, et on quitte le régime  $\Delta\mu = 0$ .

Pour contourner ce problème, GIOVANAZZI, SMERZI et al. (2000) ont proposé d'utiliser une barrière mobile. Idéalement, cette barrière est placée dans un gaz de densité uniforme. Quand on met cette barrière en mouvement pour atteindre une vitesse  $v$ , on peut observer deux types de comportement selon la valeur de  $v$  :

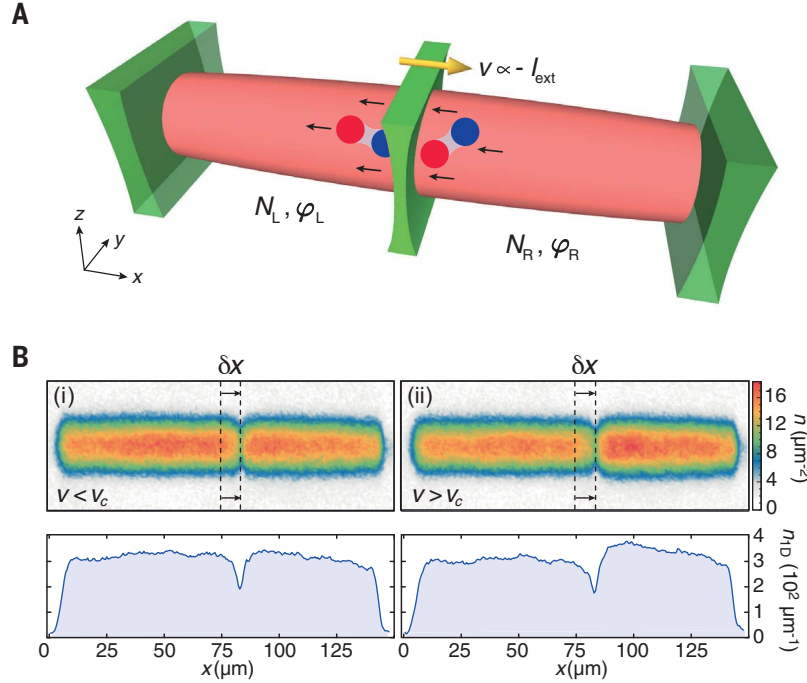
- Si la vitesse  $|v|$  reste inférieure à un certain seuil  $v_c$ , les densités de part et d'autre de la barrière restent égales. Cela signifie que le flux de particules  $I$  qui traverse la barrière est égal à  $\rho v$ , où  $\rho$  désigne la densité linéique du milieu.
- Si la vitesse  $|v|$  dépasse la valeur critique  $v_c$ , alors le flux de particules à travers la barrière n'est pas suffisant pour maintenir l'égalité des densités. Un bourrelet de densité se produit en amont de la barrière, et une dépression se produit en aval. Les deux potentiels chimiques  $\mu_a$  et  $\mu_b$  sont alors différents.

Ces deux scénarios sont montrés sur la figure 9, obtenue par KWON, DEL PACE et al. (2020) sur un gaz de molécules (bosoniques) de  $^6\text{Li}_2$ . Nous reviendrons un peu plus loin sur les détails de cette expérience.

Le premier type de comportement est une manifestation directe de la superfluidité du milieu et il rappelle le critère de Landau pour tester cette superfluidité. Selon ce critère, on déplace une impureté microscopique dans le milieu et on étudie si cette impureté crée ou non des excitations, en l'occurrence des phonons, lors de son mouvement. Le résultat dépend du rapport  $v/c$ , où  $v$  est la vitesse de l'impureté et  $v$  la vitesse du son. Pour  $v < v_c$ , aucune excitation n'est créée si le milieu est à température nulle, donc totalement superfluide.

Dans le cas présent, l'impureté microscopique est remplacée par une barrière macroscopique, de sorte que la vitesse critique  $v_c$  est notablement inférieure à la vitesse du son. Par ailleurs, en accord avec la première relation de Josephson, on s'attend à ce qu'une différence de phase  $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$  apparaisse entre les deux côtés de la barrière. La différence de phase  $\varphi$  est reliée à l'intensité  $I = \rho v$  par la relation de Josephson  $I = I_c \sin \varphi$ , et l'intensité critique  $I_c$  se déduit de la vitesse critique  $v_c$  par

$$\boxed{I_c = \rho v_c} \quad (30)$$



**FIGURE 9.** Haut : Jonction Josephson atomique pour un gaz de molécule  ${}^6\text{Li}_2$  en forme de cylindre. La barrière centrale est mobile et permet de contrôler le flux d'atomes traversant la barrière. Bas : deux exemples de profils de densité pour  $I < I_c$  (gauche) et  $I > I_c$  (droite). Hauteur de la barrière :  $0.6 \times$  énergie de Fermi, paramètre d'interaction :  $1/k_F a_s = 4.2$ . Figure extraite de KWON, DEL PACE et al. (2020).

Le second type de comportement est un régime dissipatif. Le mouvement de la barrière crée des excitations dans le fluide. Ces excitations dépendent des détails du milieu, en particulier de sa dimensionalité : pour un milieu strictement unidimensionnel, ces excitations sont de type phonons et solitons noirs ou gris ; pour un milieu bi- ou tri-dimensionnel, ce peut être (en plus des phonons) des vortex.

Nous allons modéliser le comportement de la barrière dans ce régime par une approche de type RCSJ, en écrivant l'intensité  $I_{\text{ext}} = -\rho v$  imposée de l'extérieur<sup>2</sup> comme la somme des trois termes :

$$I_{\text{ext}} = -I_c \sin \varphi + \frac{\Delta\mu}{R} + C \widehat{\Delta\mu}. \quad (31)$$

En utilisant la seconde relation de Josephson (28), cette équation peut s'écrire comme une équation différentielle d'ordre 2 en  $\varphi$ , analogue de l'équation (3) pour les jonctions supraconductrices :

$$\rho v = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{R} \dot{\varphi} + \hbar C \ddot{\varphi}. \quad (32)$$

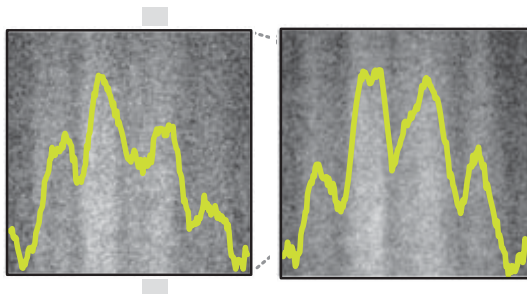
Dans ce modèle,  $R/\hbar$  est sans unité et  $\hbar C$  a la dimension d'un temps. L'intensité  $I$  et l'intensité critique  $I_c$  se mesurent en nombre de particules/seconde, leur dimension est donc l'inverse d'un temps.

### 2-3 Observation de la relation courant-phase

La suggestion de GIOVANAZZI, SMERZI et al. (2000) d'utiliser une barrière mobile pour explorer la relation courant-phase d'une jonction atomique a été implémentée par plusieurs groupes expérimentaux, tout d'abord LEVY, LAHOUD et al. (2007), puis RYU, BLACKBURN et al. (2013) et JENDRZEJEWSKI, ECKEL et al. (2014). Nous reviendrons sur certaines de ces expériences au chapitre 5 quand nous discuterons la physique des SQUIDS.

Nous allons nous concentrer dans ce qui suit sur l'expérience de KWON, DEL PACE et al. (2020), dont nous avons montré les premiers résultats en

2. Le signe  $-$  rend simplement compte du fait que pour une barrière de vitesse positive (allant vers la droite, donc de  $a$  vers  $b$ ), le courant de particules qui la traverse va de  $b$  vers  $a$ . Par ailleurs, pour  $v > 0$ , on s'attend dans le régime dissipatif à une augmentation de la densité dans la partie droite et une diminution dans la partie gauche, donc  $\mu_b > \mu_a$ .



**FIGURE 10.** Figure d'interférence entre les deux parties de la jonction de la figure 9, dont on déduit la phase relative  $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$ . Gauche :  $\varphi \approx 0$ , droite :  $\varphi \approx 0.4\pi$ . Figure extraite de KWON, DEL PACE et al. (2020).

figure 9. Cette expérience est réalisée avec un gaz de fermions ( ${}^6\text{Li}$ ) au voisinage d'une résonance de Feshbach. On se place du côté des longueurs de diffusion positives, de sorte que le gaz est essentiellement composé de molécules bosoniques  ${}^6\text{Li}_2$ .

Le gaz est confiné dans un potentiel harmonique de forte raideur selon  $y$  et  $z$ , et de raideur beaucoup plus faible selon  $x$ . Grâce à deux nappes de lumière additionnelles, on sélectionne la partie centrale du nuage, qui a donc la forme d'un cylindre allongé de longueur  $140\ \mu\text{m}$  avec une densité linéique quasi-homogène  $\rho = 300$  molécules/ $\mu\text{m}$  (figure 9). Au voisinage du centre, on place une troisième nappe de lumière, de plus faible intensité et d'épaisseur  $\sim 1\ \mu\text{m}$ , qui joue le rôle d'une barrière tunnel. Deux types de mesure sont possibles :

- Une image directe comme celles montrées en figure 9 fournit les nombre d'atomes de part et d'autre de la barrière tunnel.
- Une expansion balistique durant laquelle les deux parties du nuage se recouvrent et interfèrent, ce qui donne accès à la phase relative entre les nuages (figure 10).

Pour obtenir l'équivalent de la caractéristique courant-tension pour cette jonction atomique, KWON, DEL PACE et al. (2020) sont partis de la situation symétrique où les deux côtés de la jonction ont la même longueur  $L_a = L_b = L/2$  et ils ont déplacé la jonction pendant une durée  $\tau$  de

sorte qu'à l'issue de ce déplacement, on a  $L_a = L/2 + \ell$  (partie gauche) et  $L_b = L/2 - \ell$  (partie droite) avec  $\ell = v\tau$  : une vitesse positive de la jonction correspond à une augmentation de  $L_a$  et une diminution de  $L_b$ . On fixe  $\ell = \pm 10\ \mu\text{m}$ , ce qui est petit devant la longueur totale  $L = 150\ \mu\text{m}$ .

L'état de la jonction à l'issue du déplacement (figure 9) est caractérisé par les nombres  $N_a$  et  $N_b$ , dont on déduit la différence de potentiel chimique entre les deux côtés de la jonction. Le résultat de cette mesure est montré en figure 11. On retrouve la caractéristique typique d'une jonction :

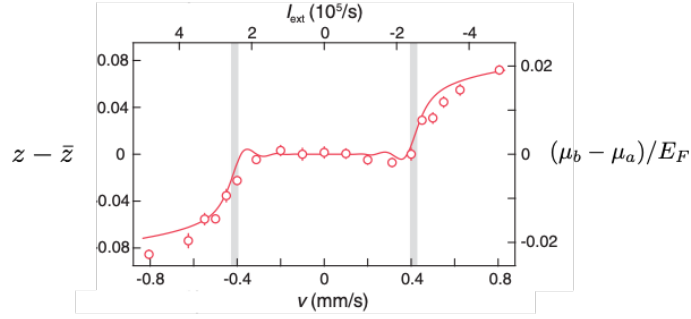
- Pour  $|v| < 0.4\ \text{mm/s}$ , la jonction se comporte de manière idéale :  $\Delta\mu$  reste nul à l'issue du déplacement de la jonction (figure 9, en bas à gauche).
- Pour  $I$  supérieure à cette valeur, le courant traversant la jonction est plus faible que  $I$  et on observe une augmentation de la densité du côté dont la longueur a été réduite (figure 9, en bas à droite).

La méthode interférométrique mentionnée plus haut permet également d'étudier le lien entre l'intensité et la phase dans le régime  $|v| < v_c$ . Le résultat est montré en figure 12. L'ajustement de  $I(\varphi)$  par une fonction périodique de  $\varphi$  montre qu'une harmonique supplémentaire vient légèrement modifier la relation  $I = I_c \sin \varphi$ .

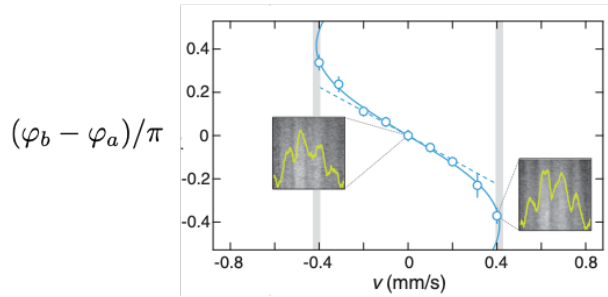
## 3 Les paramètres des jonctions atomiques

### 3-1 Le courant critique

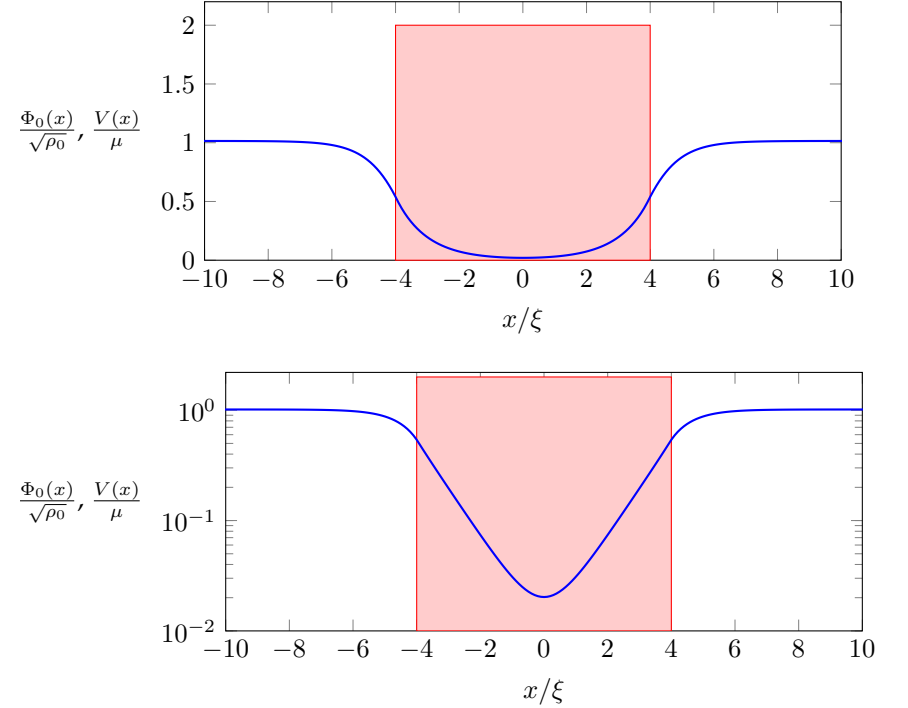
La valeur de l'intensité critique d'une jonction supraconductrice a été calculée à partir d'une approche microscopique basée sur la théorie BCS par AMBEGAOKAR & BARATOFF (1963). Pour un gaz d'atomes bosoniques dans un piège avec une barrière centrale, la détermination de  $I_c$  a été faite par MEIER & ZWERGER (2001) par une approche basée sur l'approche de Bogoliubov, puis reprise par PIAZZA, COLLINS et al. (2010) qui ont utilisé une résolution analytique approchée de l'équation de Gross-Pitaevskii. Les résultats des deux approches sont similaires et nous donnons ci-dessous un ordre de grandeur du résultat, que nous utiliserons à plusieurs reprises dans la suite de cours.



**FIGURE 11.** Caractéristique courant-tension pour une jonction atomique avec  $E_F/h = 6$  kHz. Le paramètre  $z$  est défini par  $z = (N_b - N_a)/(N_a + N_b)$ . Le paramètre  $\bar{z}$  désigne la valeur de  $z$  pour une jonction idéale. La convention de signe pour le courant est  $I_{\text{ext}} \equiv I_{a \rightarrow b}$ . La ligne continue représente un ajustement par le modèle RCSJ. La légère oscillation visible juste en dessous de  $I_c$  est due à des oscillations plasma de faible amplitude, excitées par le caractère non-adiabatique du branchement du courant. Figure extraite de KWON, DEL PACE et al. (2020).



**FIGURE 12.** Relation entre phase et vitesse de la barrière pour une jonction atomique. On notera que la vitesse est de signe opposé à l'intensité [cf. (??)], de sorte qu'on retrouve bien (approximativement) la première relation de Josephson  $I_{a \rightarrow b} = I_c \sin(\varphi_b - \varphi_a)$  avec  $I_c > 0$ . Figure extraite de KWON, DEL PACE et al. (2020).



**FIGURE 13.** Coordonnées linéaires (haut) et semi-logarithmiques (bas) pour l'état fondamental  $\Phi_0(x)$  d'énergie  $E_0$  de l'équation de Gross-Pitaevskii dans une boîte de longueur  $L = 400 \xi$  avec une barrière centrale carrée de largeur  $8 \xi$  et de hauteur  $2 \mu$  ( $\xi$  et  $\mu$  désignent respectivement la longueur de cicatrization et le potentiel chimique du gaz). La valeur de l'énergie tunnel déduite de  $E_J = \frac{1}{2}(E_1 - E_0)$ , où  $E_1$  est l'énergie de l'état antisymétrique  $\Phi_1(x)$  d'énergie la plus basse, est  $E_J = \hbar I_c = 2.9 \cdot 10^{-4} \hbar \rho_0 c_0$ . Cette valeur correspond à  $\alpha \approx 0.9$  dans (34). Calcul fait avec  $N = 4096$  points.

Considérons une barrière carrée de hauteur  $V_0$  et de largeur  $d$  avec un condensat uniforme de densité asymptotique  $\rho_0$  de part et d'autre de la barrière (figure 13). L'interaction est caractérisée par le paramètre  $g$  et le potentiel chimique des condensats s'écrit donc  $\mu = g\rho_0$ . La vitesse du son dans ces condensats est  $c_0 = \sqrt{g\rho_0/m}$ . La hauteur de la barrière  $V_0$  est supposée supérieure à  $\mu$  de sorte que la densité décroît exponentiellement vite à l'intérieur de la barrière. Il est utile de définir le facteur de transmission

$$\mathcal{T} \equiv e^{-\kappa d} \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - \mu)}}{\hbar} \quad (33)$$

qui est supposé ici petit devant 1. Le courant critique  $I_c$  peut alors s'écrire

$$I_c \approx \alpha \rho_0 c_0 \mathcal{T} \quad (34)$$

où le nombre sans dimension  $\alpha$  est d'ordre 1 si la hauteur  $V_0$  de la barrière reste comparable au potentiel chimique, ce qui est le cas en pratique. Les valeurs explicites de  $\alpha$  proposées par MEIER & ZWERGER (2001) et PIAZZA, COLLINS et al. (2010) ne coïncident pas exactement, mais sont toutes deux compatibles<sup>3</sup> avec  $\alpha \sim 1$  pour  $V_0 \gtrsim \mu$ .

On peut retrouver l'expression proposée pour  $I_c$  par l'argument heuristique suivant. Le courant  $I_c$  est atteint pour une différence de phase de  $\pi/2$  entre les deux côtés de la barrière. Cette différence de phase est en fait concentrée dans la zone où la densité prend sa valeur minimale  $\rho_{\min} \sim \rho_0 \mathcal{T}$ ; cette zone de densité minimale est centrée sur la barrière et sa largeur est  $\ell \sim \kappa^{-1}$ , soit un gradient de phase  $\frac{\pi/2}{\ell} \sim \kappa$ . La vitesse des particules dans cette zone est donc  $v \sim \frac{\hbar\kappa}{m}$  et le flux correspondant s'écrit  $\rho_{\min} v \approx \rho_0 \frac{\hbar\kappa}{m} \mathcal{T}$ , ce qui est du même ordre que (34) pour  $V_0 \gtrsim \mu$ . En pratique, pour des hauteurs de barrière entre  $1.2\mu$  et  $2\mu$ , et des largeurs entre  $3\xi$  et  $7\xi$  (où  $\xi$  est la longueur de cicatrisation), la valeur ainsi obtenue pour  $I_c$  diffère de moins d'un facteur 2 du résultat  $I_c = E_J/\hbar$  calculé à partir de  $E_J = \frac{1}{2}(E_1 - E_0)$  (cf. chapitre 1), alors que la valeur de  $I_c$  varie elle-même par plus d'un facteur 100 sur cette plage de paramètres.

Plus récemment ZACCANTI & ZWERGER (2019) ont repris et généralisé l'approche de MEIER & ZWERGER (2001) pour traiter de manière approchée le cas d'un gaz de Fermi sur toute l'étendue de la transition entre le

3. Par exemple, PIAZZA, COLLINS et al. (2010) donnent  $\alpha = g(\mu/V_0)$  avec  $g(x) = \sqrt{2x(1-x)}$ , soit  $\alpha = 1/\sqrt{2}$  pour  $V_0 = 2\mu$ .

régime BCS et le régime d'un condensat moléculaire, en passant par le cas du gaz de Fermi unitaire<sup>4</sup>. Ils prévoient notamment que le courant critique passe par un maximum au voisinage du régime unitaire. L'accord entre les prévisions de cette théorie approchée et les résultats expérimentaux est satisfaisant (KWON, DEL PACE et al. 2020).

### 3-2 Le modèle RCSJ pour une jonction atomique

Dans le cadre du modèle RCSJ, il faut déterminer les trois paramètres  $I_c, R, C$  pour préciser complètement le fonctionnement de la jonction. Nous avons décrit ci-dessus comment accéder à  $I_c$ . Pour mesurer la résistance  $R$  et la capacité  $C$ , une méthode relativement simple consiste à revenir à l'oscillation plasma déjà présentée au chapitre précédent. Rappelons que cette oscillation correspond, pour une barrière fixe, au mouvement de faible amplitude de la jonction autour d'une position d'équilibre.

Positionnons la barrière fixe au centre du gaz, de sorte que la position d'équilibre corresponde à  $\bar{N}_a = \bar{N}_b = N/2$  et  $\bar{\mu}_a = \bar{\mu}_b$ . Pour une petite différence de phase  $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$ , la dynamique de la jonction est donnée par les deux équations (cf. §2-1) :

$$\begin{cases} \dot{n} = I_c \varphi \\ \dot{\varphi} = -\frac{1}{\hbar C} n \end{cases} \quad (35)$$

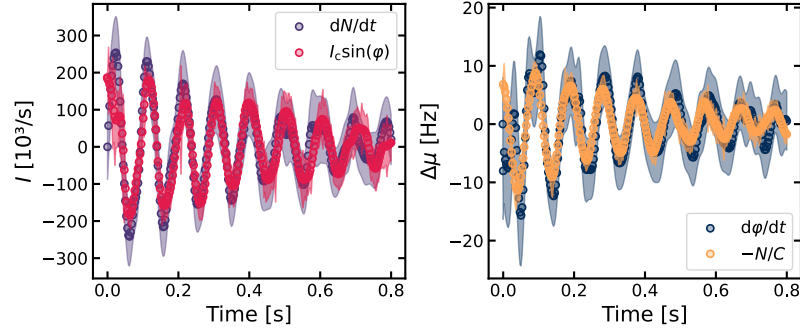
où on a négligé dans un premier temps les effets résistifs.

Nous avons vu qu'il était possible de mesurer pour une jonction à la fois la différence de population  $n$ , à partir d'une image in-situ, et la différence de phase  $\varphi$ , à partir d'une image d'interférence obtenue après temps de vol. On peut donc

- vérifier que  $n$  et  $\varphi$  évoluent bien en quadrature l'une par rapport à l'autre, comme prévu par (35);
- utiliser la première relation de (35) pour vérifier la valeur de  $I_c$ ;
- utiliser la seconde relation de (35) pour obtenir la valeur de  $C$ .

On montre en figure 14 le résultat obtenu par BERNHART, RÖHRLE et al. (2025) mettant en place cette procédure pour un gaz de <sup>87</sup>Rb confiné

4. Je remercie Willi Zwerger pour une discussion sur le sujet.



**FIGURE 14.** Gauche : utilisation de la première relation de (35) pour extraire la valeur  $I_c = 192(7) \text{ ms}^{-1}$ . Droite : utilisation de la seconde relation de (35) pour extraire la valeur  $hC = 65.0(4) \text{ s}$ . Figure extraite de BERNHART, RÖHRLE et al. (2025).

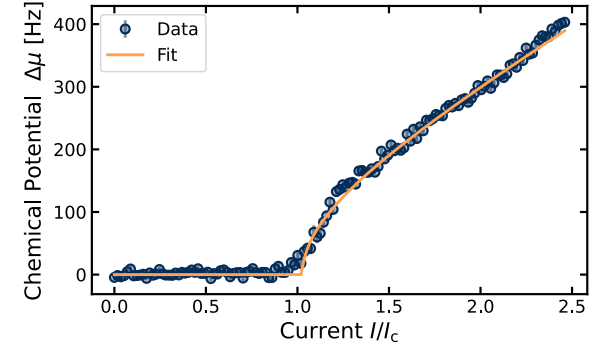
dans un tube cylindrique. À l'équilibre, le potentiel chimique du gaz est  $\bar{\mu}_a = \bar{\mu}_b = h \times 1.9 \text{ kHz}$  et la barrière centrale a une hauteur de  $0.45 \bar{\mu}_{a,b}$  et une largeur de l'ordre du micromètre. Les valeurs déduites de la figure 14 sont  $I_c = 192$  particules/ms et  $hC = 65 \text{ s}$ .

Pour déterminer le paramètre manquant  $R$ , on peut analyser l'amortissement visible sur l'oscillation plasma ou alors étudier la caractéristique courant-tension pour des valeurs de  $I$  nettement supérieures à  $I_c$ , de sorte qu'on a alors  $|\mu| \approx RI$ , c'est-à-dire l'équivalent de la loi d'Ohm. BERNHART, RÖHRLE et al. (2025) utilisent cette seconde technique pour déterminer  $R/h = 0.9 \cdot 10^{-3}$  (figure 15). Notons que chaque point de cette caractéristique est obtenu en moyennant les résultats de 25 réalisations indépendantes de l'expérience, ce qui correspond *de facto* à la moyenne temporelle conduisant à  $\bar{V}$  pour une jonction supraconductrice.

Une fois connu ces trois paramètres, on peut calculer le paramètre de Stewart-McCumber pour une jonction atomique (équivalent du paramètre  $\beta_c$  défini en (17) pour une jonction supraconductrice)

$$\beta_c = \frac{I_c R^2 C}{\hbar} \quad (36)$$

qui donne  $\beta_c \approx 60$  pour les paramètres de BERNHART, RÖHRLE et al.



**FIGURE 15.** Utilisation de la partie haute intensité de la caractéristique pour extraire la valeur de la résistance  $R$ , avec ici  $R/h = 0.907(4) \cdot 10^{-3}$ . Figure extraite de BERNHART, RÖHRLE et al. (2025).

(2025). En fait, pour cette valeur relativement élevée de  $\beta_c$ , on s'attend à une caractéristique présentant de l'hystérésis (cf. figure 8). Cette hystérésis ne semble pas avoir été observée par les auteurs<sup>5</sup>, probablement parce que toutes leurs expériences ont été réalisées dans le sens des  $I$  croissants, c'est-à-dire une barrière initialement immobile, puis accélérée pour atteindre sa vitesse finale.

Une caractérisation similaire a récemment été menée pour un gaz de Fermi de  ${}^6\text{Li}$  dans le régime unitaire par DEL PACE, HERNÁNDEZ-RAJKOV et al. (2025) sur le même montage que celui de KWON, DEL PACE et al. (2020) décrit plus haut. Ils obtiennent une intensité critique  $I_c = 180$  paires de Cooper/ms (voisine de celle montrée en figure 11), une capacité  $hC = 1.8(2) \text{ s}$  et une résistance  $R/h = 2.9 \cdot 10^{-3}$ , ce qui conduit à  $\beta_c \approx 13$  (Giacomo Roati, communication privée). Le fait que  $C$  soit notablement réduite lorsqu'on passe du gaz de Bose de  ${}^{87}\text{Rb}$  (interaction faible) au gaz

5. La caractérisation de l'hystérésis pour une jonction atomique pose par ailleurs un problème de principe, dû au fait que ces jonctions sont des systèmes isolés. Si on augmente progressivement  $I$  de 0 à  $2I_c$  (par exemple), que l'on reste à  $2I_c$  pendant une durée  $\tau$ , puis qu'on ramène  $I$  à une valeur finale  $I_f < I_c$ , l'énergie déposée dans le fluide sera une fonction croissante de  $\tau$ , et l'état final du système sera donc une fonction à la fois de  $I_f$  et de  $\tau$ . Ce problème ne se pose pas pour les jonctions supraconductrices, qui sont des systèmes ouverts avec une température maintenue constante grâce aux échanges d'énergie avec un réservoir.

de Fermi de  ${}^6\text{Li}$  (interaction forte) est lié à la différence de compressibilité entre les deux milieux :  $\frac{\partial\mu}{\partial N}$  est beaucoup plus grand dans le cas du gaz de Fermi unitaire.

Nous montrons finalement en figure 16 la variation des paramètres du modèle RCSJ avec la hauteur de la barrière mobile  $V_0$  pour le gaz de Fermi unitaire étudié par KWON, DEL PACE et al. (2020). On voit que lorsqu'on augmente la hauteur de la barrière, la valeur de l'intensité critique  $I_c$  diminue et la résistance  $R$  augmente. Pour  $I_c$ , l'accord avec les prédictions de ZACCANTI & ZWERGER (2019) est très satisfaisant. Le paramètre  $\beta_c$  est lui aussi une fonction croissante de la hauteur de la barrière, et il atteint une valeur proche de 1000 pour la plus haute valeur de barrière utilisée.

### 3-3 Origines physiques de la dissipation

Les processus dissipatifs dans une jonction Josephson atomique ont fait l'objet de nombreuses études théoriques, et ils sont décrits en détail dans l'article de revue de AMICO, BOSHIER et al. (2021). La nature de ces processus dépend de la dimension d'espace de la jonction. Pour une jonction couplant deux gaz unidimensionnels, POLO, AHUFINGER et al. (2018) ont fait une analyse quantique complète du problème dans le cas d'interactions fortes (gaz de Tonks-Girardeau). Ils ont montré que l'amortissement était causé par les fluctuations thermiques ou quantiques présentes dans le gaz sous forme de phonons de basse énergie, ainsi que par la génération de trains de solitons (AMICO, BOSHIER et al. 2021).

Le rôle important des solitons apparaît clairement sur les figures 17 et 18, obtenues en résolvant numériquement l'équation de Gross-Pitaevskii pour un gaz 1D. Les calculs sont fait sur une grille de  $N = 1024$  pixels et la longueur de cicatrisation est égale à 2 pixels. Une barrière mobile parcourt le gaz de  $N/4$  à  $3N/4$ . Sa vitesse initiale est nulle. La barrière subit d'abord un mouvement uniformément accéléré, puis se déplace à vitesse uniforme. Les durées des deux parties du mouvement sont choisies ici égales (ce paramètre n'a que peu d'influence sur le résultat final). La barrière a une hauteur égale au potentiel chimique du gaz, elle a un profil gaussien et sa demi-largeur à  $1/e^2$  (waist) est 8 fois plus grande que la longueur de cicatrisation  $\xi$ . La vitesse critique dans ces conditions est  $v_c \approx 0.0475 c_s$ , où  $c_s$  est la vitesse du son.

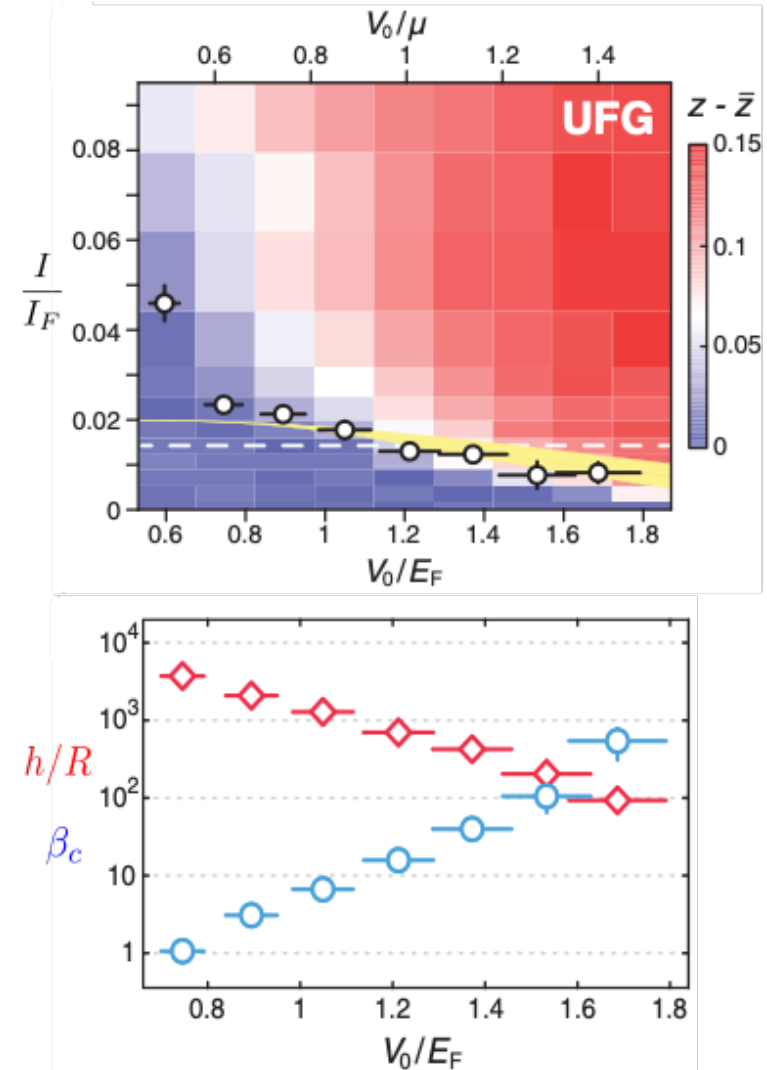
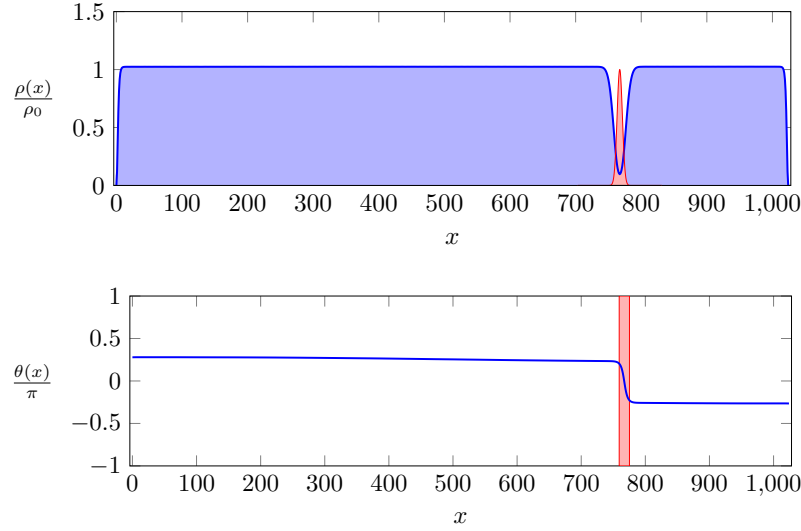


FIGURE 16. Détermination de  $I_c$  (haut), puis de  $R$  et  $\beta_c$  (bas) pour un gaz de Fermi unitaire. Les unités  $E_F$  et  $I_F$  désignent les échelles obtenues pour le gaz de Fermi idéal. Figures extraites de KWON, DEL PACE et al. (2020).

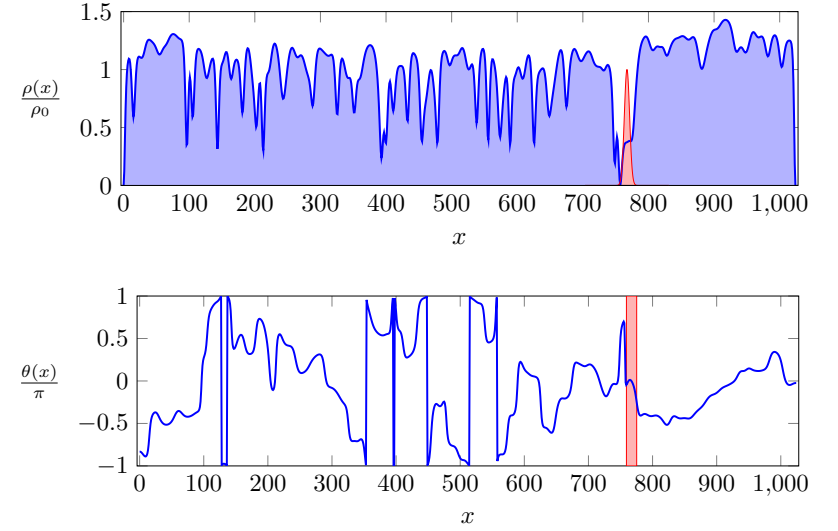


**FIGURE 17.** Etat d'un gaz 1D (densité en haut, phase en bas) après le mouvement d'une barrière mobile de  $L/4$  à  $3L/4$ , avec ici  $L = 1024$ . La vitesse finale de la barrière est  $0.045 c_s$ , où  $c_s$  est la vitesse du son. La vitesse critique pour la barrière choisie est  $0.0475 c_s$ .

Pour une vitesse  $v = 0.045 c_s$ , donc légèrement inférieure à  $v_c$  (figure 17), les densités de part et d'autre de la barrière sont égales, la variation de phase au niveau de la barrière est légèrement inférieure à  $\pi/2$ , et la phase  $\theta(x)$  de la fonction d'onde est uniforme sur chacun des domaines. Cette uniformité est assurée par le fait que comme  $v \ll c_s$ , les phonons générés par le mouvement de la barrière ont eu le temps de faire de nombreux allers-et-retour dans le gaz et donc d'équilibrer la distribution de phase.

Pour une vitesse  $v = 0.050 c_s$ , donc légèrement supérieure à  $v_c$  (figure 18), la situation est radicalement différente. On note que la phase varie très vite dans la partie aval de la jonction, qui présente également des trous de densité importants correspondant à des solitons sombres.

Quand on passe à des systèmes à deux ou trois dimensions, les mécanismes microscopiques à l'origine de la dissipation mis en évidence par les



**FIGURE 18.** Etat d'un gaz 1D (densité en haut, phase en bas) après le mouvement d'une barrière mobile de  $L/4$  à  $3L/4$ , avec ici  $L = 1024$ . La vitesse finale de la barrière est  $0.050 c_s$ , où  $c_s$  est la vitesse du son. La vitesse critique pour la barrière choisie est  $0.0475 c_s$ .

simulations numériques sont liés aux vortex, des points où la densité s'anule et autour desquels la phase a un enroulement de  $\pm 2\pi$ . Nous allons décrire ici quelques résultats obtenus par SINGH, POLO et al. (2024) dans leur étude d'un gaz de Bose à deux dimensions, piégé dans une boîte rectangulaire avec une barrière tunnel mobile (figure 19). Des résultats comparables ont été obtenus par XHANI, NERI et al. (2020) et XHANI, GALANTUCCI et al. (2020) pour un gaz 3D cylindrique. Des signatures expérimentales liées à ces vortex ont été observées par DEL PACE, HERNÁNDEZ-RAJKOV et al. (2025) dans le contexte des résonance de Shapiro, que nous étudierons au chapitre 3.

La figure 20, tiré du supplément de l'article de SINGH, POLO et al. (2024), présente deux résultats pour une barrière mobile : la ligne du haut correspond à une vitesse inférieure à  $v_c$ , donc la branche horizontale  $\mu = 0$  de la caractéristique ; la ligne inférieure est obtenue pour  $v > v_c$ , donc dans

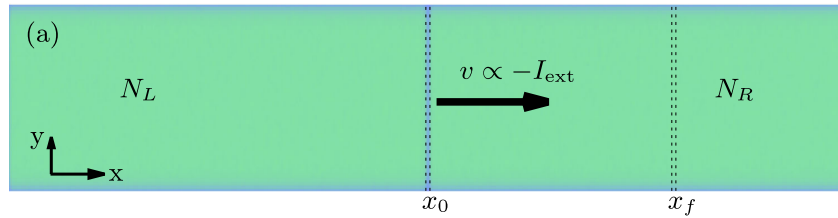


FIGURE 19. Géométrie rectangulaire avec barrière mobile étudiée par SINGH, POLO *et al.* (2024).

le régime dissipatif. Dans chaque cas, les auteurs ont tracé la densité linéique  $\rho(x) = \int \rho^{(2D)}(x, y) dy$  (colonne de gauche) et la phase le long de la ligne  $y = 0$  (colonne de droite).

Pour une vitesse inférieure à  $v_c$ , on voit que la densité reste la même de part et d'autre de la barrière mobile, alors qu'une différence de phase  $\varphi$  approximativement constante émerge après un temps de 50 ms. Pour une vitesse supérieure à  $v_c$ , une différence de densité notable apparaît, avec un surplus de densité en amont de la barrière mobile, et un déficit en aval.

La figure 21 montre l'identification de l'ensemble des vortex présents à différents instants dans le gaz dans le régime dissipatif  $v/v_c = 1.06$ . Les vortex sont créés par paires avec des circulations opposées dans la région de la barrière, zone de faible densité, et ces paires se séparent ensuite. On notera que dans ce régime dissipatif, il devient délicat de définir la phase  $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$  car les distributions de phase de part et d'autre de la jonction présentent des singularités aux emplacements de ces vortex. La définition de  $\Delta\mu = \mu_a - \mu_b$  reste en revanche possible, à partir de la densité linéique  $\rho(x) = \int \rho^{(2D)}(x, y) dy$ .

Notons que dans un système tri-dimensionnel, la nucléation de paires de vortex mentionnées ci-dessus et à l'origine de la dissipation est remplacée par la nucléation d'anneaux de vorticité [voir par exemple KHANI, NERI *et al.* (2020)]. Remarquons par ailleurs que nous nous sommes limités ici aux mécanismes de dissipation à température nulle. Le rôle de la fraction thermique dans l'apparition d'un écoulement résistif est discuté par JENDRZEJEWSKI, ECKEL *et al.* (2014).

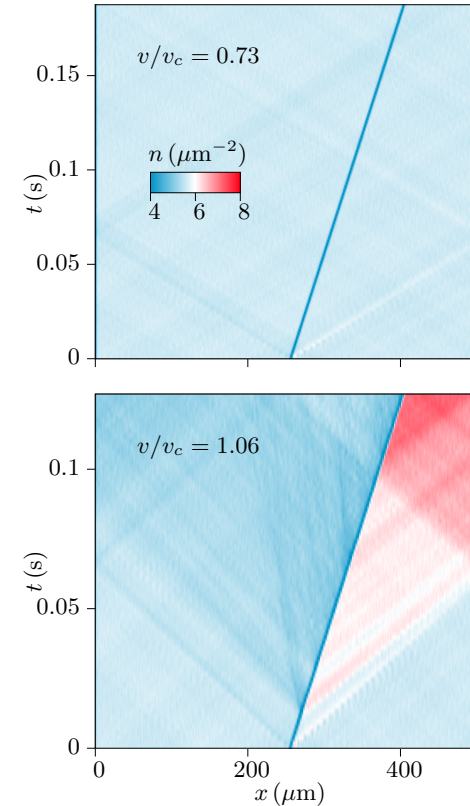
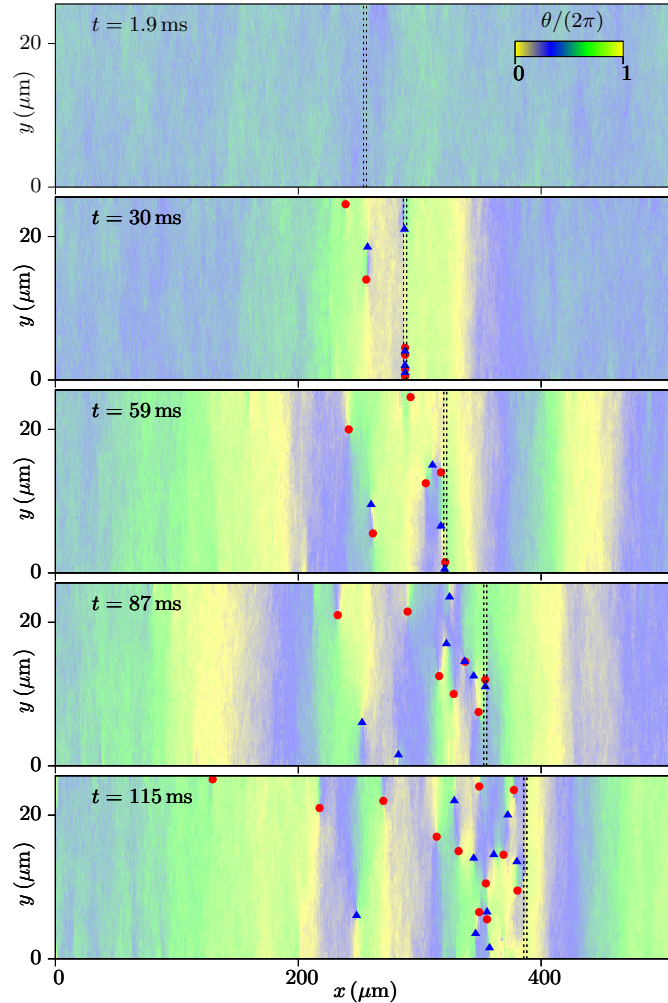


FIGURE 20. Résolution numérique de l'équation de Gross-Pitaevskii pour le gaz 2D de la figure 19. Ligne du haut,  $v < v_c$ , densité linéique  $\rho(x)$  dans le régime non dissipatif. Ligne du bas,  $v > v_c$ , idem pour le régime dissipatif, densité linéique  $\rho(x)$ . Figure extraite de SINGH, POLO *et al.* (2024) (supplément).



**FIGURE 21.** Résultats numériques dans la même configuration que les figures 19 et 20, avec  $v/v_c = 1.06$ . On a tracé ici le profil de phase dans le plan  $xy$  à différents instants. Les triangles bleus et les points rouges marquent la position de vortex d'enroulement  $+2\pi$  et  $-2\pi$ . Figure extraite de SINGH, POLO et al. (2024).

## 4 L'effet tunnel macroscopique

### 4-1 États quantiques macroscopiques

Depuis le célèbre exemple paradoxal de Schrödinger considérant un chat dans une superposition de "l'état vivant" et de "l'état mort", une recherche très active a été menée sur l'étude de systèmes macroscopiques – ou au moins mésoscopiques – préparés dans une telle superposition cohérente d'états antinomiques. Les jonctions Josephson sont vite apparues comme des candidats remarquables pour explorer cette frontière entre le monde classique et le monde quantique. A.J. Leggett a en particulier exploré plusieurs voies possibles de tests pouvant être menés avec ces jonctions, voir par exemple LEGGETT (1978) et LEGGETT (1980).

Une version simple d'un état quantique macroscopique concerne un système composé de  $N$  particules, pouvant chacune se trouver dans deux états microscopiques possibles  $a$  et  $b$ , décrits par les fonctions d'onde à un corps  $\psi_a(x)$  et  $\psi_b(x)$ . Un état du système à  $N$  corps est par exemple :

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \psi_a(x_1) \cdots \psi_a(x_N), \quad (37)$$

c'est-à-dire un condensat de Bose-Einstein avec chaque particule dans l'état  $a$ . On peut bien sûr considérer l'état obtenu avec chaque particule dans l'état  $b$  :

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \psi_b(x_1) \cdots \psi_b(x_N), \quad (38)$$

ou encore l'état où chaque particule est dans un état superposé  $\alpha\psi_a(x) + \beta\psi_b(x)$ , avec  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  :

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = [\alpha\psi_a(x_1) + \beta\psi_b(x_1)] \cdots [\alpha\psi_a(x_N) + \beta\psi_b(x_N)]. \quad (39)$$

Aucun des trois états à  $N$  corps que nous venons d'écrire ne correspond à un état "chat de Schrödinger". Ils peuvent décrire des phénomènes quantiques macroscopiques (si  $N \gg 1$ ), comme des condensats de Bose-Einstein spineurs, mais ils restent des états factorisés. Par exemple, pour l'état (39), la détection de la particule 1 dans l'état  $a$  ou dans l'état  $b$  n'apporte aucune information sur ce que pourrait donner une mesure ultérieure de l'état d'une autre particule.

Pour notre exemple d'un espace de Hilbert de dimension 2 pour chaque particule, un état "chat de Schrödinger" correspond par exemple à :

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \alpha \psi_a(x_1) \cdots \psi_a(x_N) + \beta \psi_b(x_1) \cdots \psi_b(x_N) \quad (40)$$

avec  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Cet état présente des corrélations fortes : la mesure de la particule 1 dans l'état  $a$  assure que l'on trouvera toutes les autres particules dans le même état si on effectue une mesure ultérieure sur elles. Par ailleurs, il s'agit d'une superposition cohérente, dans le sens où on doit être capable de distinguer expérimentalement cet état avec les coefficients  $(\alpha, \beta)$  de l'état qu'on obtiendrait en prenant par exemple  $(\alpha, -\beta)$  ou  $(\alpha, i\beta)$ . Ce deuxième point est essentiel pour caractériser la cohérence de cet état et le distinguer du simple mélange statistique de (37) et (38).

LEGGETT (1980) discute la possibilité d'atteindre un tel état à partir d'un effet tunnel faisant basculer les particules individuelles entre  $a$  et  $b$ , en s'intéressant plus particulièrement à un anneau supraconducteur comportant une jonction Josephson. Le point remarquable dans ce cas est que l'état du système peut être décrit avec une seule variable, par exemple le flux traversant le circuit. Toutefois, Leggett conclut à la difficulté pratique de cette expérience<sup>6</sup>, et s'intéresse alors à l'effet tunnel lui-même :

*"If quantum coherence is problematic from an experimental point of view, what of quantum tunnelling by itself? Here the prospects seem a great deal more favourable."*

L'obstacle à l'observation de l'effet tunnel pour une variable macroscopique est la dissipation, qui trouve son origine dans le couplage du système avec son environnement, mais CALDEIRA & LEGGETT (1981) ont montré que les circuits à base de jonctions Josephson possédaient les qualités requises pour que ce phénomène reste observable. La balle passait donc dans le camp des expérimentateurs.

## 4-2 Jonction au voisinage du courant critique

La recherche d'un effet tunnel macroscopique avec une jonction Josephson se fait à partir du potentiel en "planche à laver inclinée" que nous avons

6. Ces états sont désormais réalisés et exploités dans les dispositifs utilisant des qubits de flux. L'information quantique est alors encodée dans le sens du courant circulant dans une boucle supraconductrice contenant des jonctions Josephson (chapitre 6).

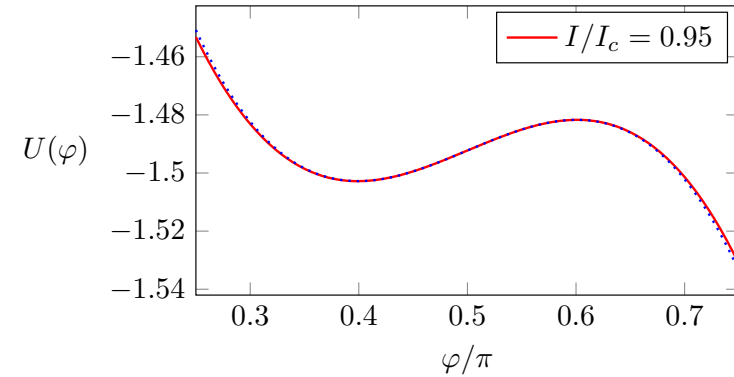


FIGURE 22. Le potentiel  $U(\varphi)$  en trait plein et son approximation cubique (42) en pointillés pour  $I = 0.95 I_c$ .

étudié en § 1. Le principe consiste à choisir  $I < I_c$  et à prendre l'état initial de la jonction dans l'état de tension moyenne nulle ( $\bar{V} = 0$ ) correspondant à un minimum local de

$$U(\varphi) = -I_c \cos \varphi - I\varphi, \quad (41)$$

puis à mesurer le temps caractéristique pour que la particule fictive s'échappe de ce puits de potentiel, la jonction passant alors dans un état  $\bar{V} \neq 0$ .

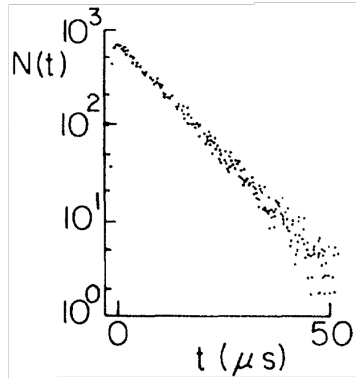
En pratique, on choisit  $I$  proche de  $I_c$  pour que les puits de potentiel de  $U(\varphi)$  soient peu profonds (figure 22). Les extrema (minima et maxima) de  $U(\varphi)$  sont alors tous deux proches de  $\pi/2$  (modulo  $2\pi$ ).

Posons  $\varphi = \frac{\pi}{2} + x$  pour faire un développement du potentiel en puissances de  $x$ ; on trouve, à l'ordre 3 inclus en  $x$  :

$$\begin{aligned} U(x) &= I_c \sin x - I \left( \frac{\pi}{2} + x \right) \\ &\approx -\frac{I\pi}{2} + (I_c - I)x - \frac{I_c}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^5). \end{aligned} \quad (42)$$

La force agissant sur la "particule" est

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -(I_c - I) + \frac{I_c}{2}x^2 \quad (43)$$



**FIGURE 23.** Distribution exponentielle des événements de bascule de la jonction de l'état de tension nulle ("particule" piégée dans le minimum local de  $U(\varphi)$ ) vers l'état de tension non nulle. Figure extraite de DEVORET, MARTINIS et al. (1984).

d'où la position des points stationnaires

$$x_{\pm} \approx \pm \sqrt{2(1-s)} \quad \text{pour } s \equiv \frac{I}{I_c} \approx 1. \quad (44)$$

Les signes + et - correspondent respectivement au maximum et au minimum local de  $U$ . La hauteur de la barrière à franchir pour s'échapper du minimum local est

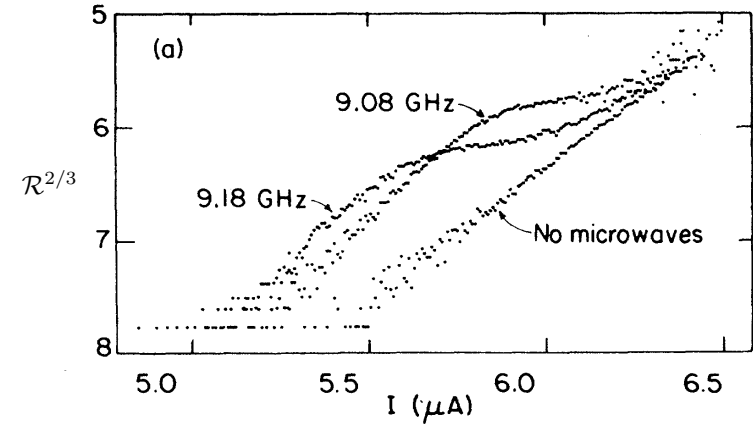
$$\Delta U(I) = U(x_+) - U(x_-) \approx \frac{4\sqrt{2}}{3} I_c (1-s)^{3/2} \quad \text{pour } s \approx 1 \quad (45)$$

et la fréquence d'oscillation  $\omega_p(I)$  autour du minimum local, calculée à partir de la courbure du potentiel  $d^2U/dx^2$  en ce point, est reliée à la fréquence plasma calculée précédemment,  $\omega_p(0)$ , par

$$\frac{\omega_p(I)}{\omega_p(0)} \approx [2(1-s)]^{1/4} \quad \text{pour } s \approx 1. \quad (46)$$

### 4-3 Activation thermique de la barrière

Avant d'aborder le régime quantique avec l'observation de l'effet tunnel macroscopique, DEVORET, MARTINIS et al. (1984) se sont intéressés à la



**FIGURE 24.** Variation de  $\mathcal{R}^{2/3}$  (où  $\mathcal{R}$  est défini en (48)) en fonction de  $I$ . La loi linéaire trouvée en absence de microonde permet de déduire la température du système. Noter l'inversion de l'axe des ordonnées. Figure extraite de DEVORET, MARTINIS et al. (1984).

possibilité pour la particule fictive de coordonnée  $\varphi$  de sortir du puits de potentiel centré en  $\pi/2 + x_-$  du fait des fluctuations thermiques. Le taux avec lequel la particule s'échappe est donné par une formule de type "loi d'Arrhenius" :

$$\Gamma(I, T) = \frac{\omega_p(I)}{2\pi} e^{-\Delta U(I)/k_B T} \quad (47)$$

à des corrections près pour le préfacteur devant l'exponentielle, sans importance ici.

Le nombre de particules " survivantes " après une durée  $t$  est montrée en figure 23. Comme attendu, c'est une loi exponentielle dont on déduit le taux  $\Gamma(I, T)$ . En pratique, chaque mesure de  $\Gamma$  requiert  $10^5$  événements.

Cette expérience peut être répétée pour différentes intensités  $I$ , le taux  $\Gamma$  devenant de plus en plus grand quand  $I$  s'approche de  $I_c$  puisque la barrière  $\Delta U$  devient plus faible. On attend la loi

$$\mathcal{R} \equiv \ln \left( \frac{\Gamma(I, T)}{\omega_p(I)/2\pi} \right) = \frac{-\Delta U(I)}{k_B T} \propto \frac{(I_c - I)^{3/2}}{T}. \quad (48)$$

Pour vérifier cette loi, DEVORET, MARTINIS et al. (1984) ont tracé la quantité  $\mathcal{R}^{2/3}$  en fonction de  $I$  et ils ont effectivement observé une variation linéaire, dont on peut déduire la température du système (figure 24). Le résultat trouvé, 4.2(1) K, est en parfait accord avec la température mesurée par ailleurs, ce qui constitue une validation importante du modèle. On déduit également de cette mesure la valeur de  $I_c$  avec une très bonne précision, en l'occurrence  $I_c = 8.77(5) \mu\text{A}$ .

DEVORET, MARTINIS et al. (1984) ont ensuite refait ces mesures du taux  $\Gamma$  en présence d'une microonde de fréquence voisine des  $\omega_p(I)$  attendues. Ils ont observé une activation résonante (figure 24) : quand l'intensité  $I$  est telle que  $\omega_p(I) = \omega_{\text{microonde}}$ , la particule fictive est éjectée beaucoup plus rapidement du puits de potentiel.

#### 4-4 Niveaux quantifiés dans le potentiel $U(\varphi)$

Comment nous l'avons mentionné au chapitre précédent pour le circuit  $LC$ , le mouvement de la particule fictive de coordonnée  $\varphi$  dans le puits de potentiel  $U(\varphi)$  peut être traité quantiquement. Si la fréquence d'oscillation au fond du puits  $\omega_p(I)$  est telle que  $\hbar\omega_p \ll \Delta U$  et si la température est assez grande ( $\hbar\omega_p \ll k_B T$ ), cette quantification est peu utile car les effets quantiques sont difficilement détectables. En revanche, si on se place dans une situation où  $\Delta U/\hbar\omega_p$  est proche de 1 et  $k_B T \ll \hbar\omega_p$ , la quantification devient alors essentielle pour décrire le système. C'est précisément cette situation que le groupe de Berkeley a abordé dans ses publications suivantes : DEVORET, MARTINIS et al. (1985) et MARTINIS, DEVORET et al. (1985).

Ces expériences sont faites à beaucoup plus basse température que celles décrites en § 4-3, autour de 20 mK (au lieu de 4 K). Par ailleurs, on utilise des courants  $I$  très proches de  $I_c$ , typiquement  $|I - I_c| \sim 0.01 I_c$ . Cela permet d'atteindre un régime où seuls deux ou trois états liés sont attendus dans la barrière (figure 25). En fait, ces états ne sont que quasi-liés en raison de la décroissance par effet tunnel que nous discuterons dans le paragraphe suivant. La transition de l'état fondamental vers un des états excités peut alors se détecter par une augmentation du taux de décroissance. Il faut pour cela que la largeur des niveaux associée à cette décroissance reste faible devant leur écart, on vérifiera sur l'équation (50) introduite un

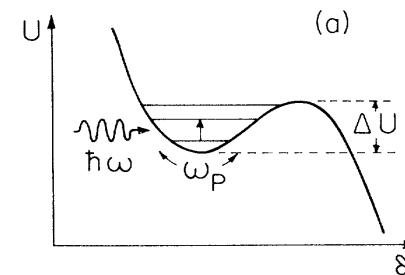


FIGURE 25. Structure de niveaux typique pour les jonctions utilisées par le groupe de Berkeley en 1985. Figure extraite de MARTINIS, DEVORET et al. (1985).

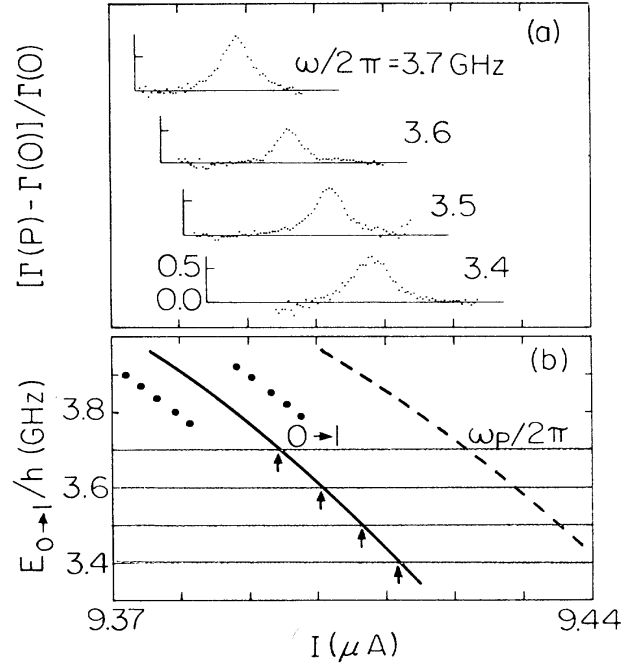
peu plus loin que cette inégalité est bien vérifiée.

L'expérience commence par une calibration précise des paramètres de la jonction dans le cadre du modèle RCSJ. Pour une des deux jonctions utilisées, MARTINIS, DEVORET et al. (1985) trouvent  $I_c = 9.489(7) \mu\text{A}$  et  $C = 6.35(40) \text{pF}$ , avec un facteur de qualité  $Q = 30(15)$ . La microonde est ajustée pour favoriser la transition du niveau fondamental  $n = 0$  vers le premier niveau excité  $n = 1$ . La figure 26 montre les résultats obtenus, avec la variation attendue de la fréquence de cette transition avec l'intensité  $I$ . Notons que cette fréquence de transition mesurée est très significativement différente de la fréquence plasma  $\omega_p(I)$ , ce qui constitue une signature claire de la quantification des niveaux dans ce puits non harmonique.

MARTINIS, DEVORET et al. (1985) ont également étudié une autre jonction, de surface 8 fois plus grande, pour laquelle ils ont mis en évidence les transitions  $0 \rightarrow 1$ ,  $1 \rightarrow 2$  et  $2 \rightarrow 3$ .

#### 4-5 Observation de l'effet tunnel macroscopique

Dans l'article de DEVORET, MARTINIS et al. (1985) publié quasi-simultanément avec celui décrit au paragraphe précédent, le groupe de Berkeley a étudié de façon précise le taux  $\Gamma$  avec lequel la particule fictive



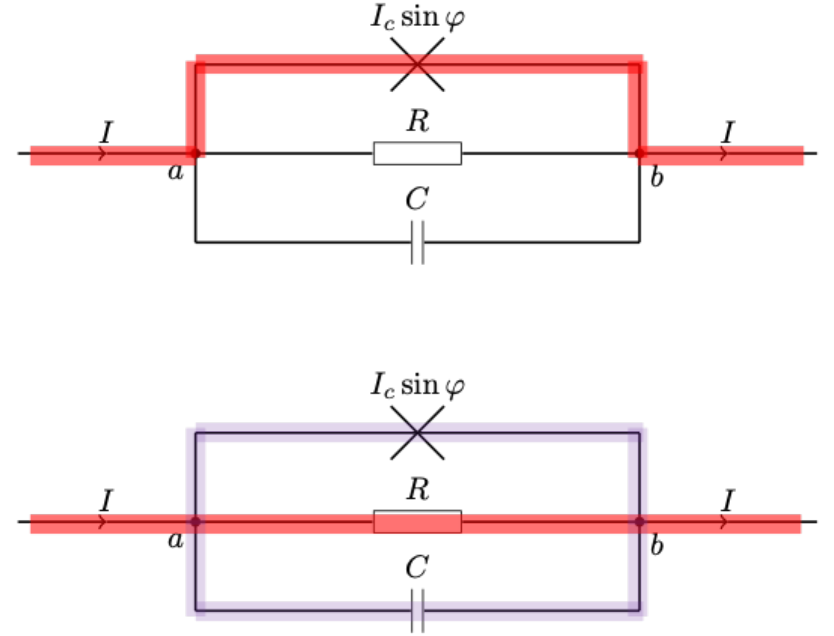
**FIGURE 26.** Augmentation du taux de décroissance dans le puits de la figure 25, induite par une microonde, quand on varie l'intensité électrique  $I$  traversant la jonction Josephson. Les résonances observées correspondent à la transition  $n = 0 \rightarrow n = 1$ . Figure extraite de MARTINIS, DEVORET et al. (1985).

s'échappe du puits de potentiel  $U(\varphi)$ , ce qui correspond la bascule entre les deux états de la jonction représentés en figure . Pour un mécanisme activé thermiquement, nous avons déjà donné le taux attendu

$$\Gamma_{\text{therm.}} \approx \frac{\omega_p}{2\pi} e^{-\Delta U/k_B T}. \quad (49)$$

Si ce mécanisme était le seul présent, on s'attendrait à ce que  $\Gamma$  s'annule quand  $T$  tend vers 0. Mais la possibilité pour la particule de s'échapper du puits par effet tunnel entraîne que ce taux tend vers une valeur finie non nulle dans la limite  $T \rightarrow 0$ .

Le calcul précis de cette limite a été fait par CALDEIRA & LEGGETT



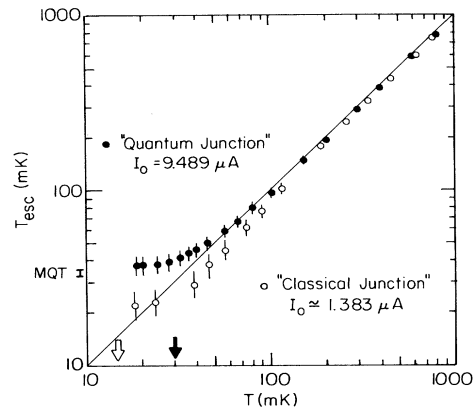
**FIGURE 27.** Les deux états macroscopiquement différents de la jonction pour  $I$  légèrement inférieure à  $I_c$ . L'effet tunnel permet de passer de l'état du haut, pour lequel  $\dot{\varphi} \approx 0$  et donc  $\bar{V} = 0$ , vers l'état représenté en bas, pour lequel la particule fictive roule le long de la planche à laver sans s'arrêter ( $\bar{V} \neq 0$ ).

(1981) et nous contenterons de donner ici la structure du résultat :

$$\Gamma_{\text{quant.}} \approx a_q \frac{\omega_p}{2\pi} e^{-b_q \Delta U/\hbar\omega_p}. \quad (50)$$

avec  $a_q \sim 75$  et  $b_q \sim 7$  pour le système considéré ici.

DEVORET, MARTINIS et al. (1985) ont effectué une mesure du coefficient  $\Gamma(I, T)$  pour une gamme de températures comprise entre 20 et 1000 mK. Pour chaque température, ils ont représenté leurs données pour les différentes intensités  $I$  par une loi d'Arrhenius en  $\exp(-\Delta U/k_B T_{\text{esc}})$ , où la température  $T_{\text{esc}}$  est un paramètre ajustable. Ceci nécessite bien sûr une bonne connaissance des paramètres de la jonction pour relier  $\Delta U$  et  $I$ .



**FIGURE 28.** Variation du paramètre ajustable  $T_{\text{esc}}$  en fonction de la température  $T$  du système. Le fait que  $T_{\text{esc}}$  ne tende pas vers 0 quand  $T \rightarrow 0$  est une signature directe de l'effet tunnel macroscopique pour la variable  $\varphi$ . Figure extraite de DEVORET, MARTINIS *et al.* (1985)

À haute température, on s'attend à ce que  $T_{\text{esc}}$  coïncide avec la température réelle. À basse température en revanche, les effets quantiques deviennent dominants et le passage par effet tunnel devient plus probable que l'activation thermique. On s'attend alors à ce que  $T_{\text{esc}}$  tende vers une valeur directement reliée à  $\omega_p$ . Comme on le voit sur la figure 28, c'est précisément ce qui est trouvé expérimentalement à très basse température. On trouve  $T_{\text{esc}} = 37(4)$  mK, à comparer à la prédiction  $T_{\text{esc}} = 36 \pm 1.4$  mK obtenue à partir du modèle de CALDEIRA & LEGGETT (1981).

Notons pour terminer que la modélisation que nous venons de présenter n'a pas nécessité d'un traitement quantique élaboré de la jonction. Le seul ingrédient que nous avons utilisé est le suivant : partant d'un oscillateur classique unidimensionnel de pulsation  $\omega_p$ , on aboutit pour son homologue quantique à des niveaux d'énergie  $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_p$ . Nous proposons aux chapitres 5 et 6 une approche quantique plus complète, en nous basant sur la relation de commutation entrevue au chapitre 1 entre l'opérateur phase et l'opérateur nombre de particules. Nous retrouverons bien sûr ce spectre en  $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_p$  et nous pourrons de plus caractériser la forme des états propres associés.

## Références

- AMBEGAOKAR, Vinay & Alexis BARATOFF (1963), « Tunneling between superconductors », in *Physical review letters* **10**, p. 486.
- AMICO, Luigi, Malcolm BOSHIER, Gerhard BIRKL, Anna MINGUZZI, Christian MINIATURA, L-C KWEK, Davit AGHAMALYAN, Veronica AHUFINGER, Dana ANDERSON, Natan ANDREI *et al.* (2021), « Roadmap on Atomtronics : State of the art and perspective », in *AVS Quantum Science* **3**.
- BARONE, Antonio & Gianfranco PATERNO (1982), *Physics and applications of the Josephson effect*, Wiley.
- BERNHART, Erik, Marvin RÖHRLE, Vijay Pal SINGH, Ludwig MATHEY, Luigi AMICO & Herwig OTT (2025), « Observation of Shapiro steps in an ultracold atomic Josephson junction », in *Science* **390**, p. 1130-1133.
- BUCKEL, Werner & Reinhold KLEINER (2008), *Superconductivity : fundamentals and applications*, John Wiley & Sons.
- CALDEIRA, Amir O & Anthony J LEGGETT (1981), « Influence of dissipation on quantum tunneling in macroscopic systems », in *Physical review letters* **46**, p. 211.
- DEL PACE, Giulia, Diego HERNÁNDEZ-RAJKOV, Vijay Pal SINGH, Nicola GRANI, Marcia Frómata FERNÁNDEZ, Giulio NESTI, Jorge Amin SEMAN, Massimo INGUSCIO, Luigi AMICO & Giacomo ROATI (2025), « Shapiro steps in strongly-interacting Fermi gases », in *Science* **390**, p. 1125-1129.
- DEVORET, Michel H, John M MARTINIS & John CLARKE (1985), « Measurements of macroscopic quantum tunneling out of the zero-voltage state of a current-biased Josephson junction », in *Physical review letters* **55**, p. 1908.
- DEVORET, Michel H, John M MARTINIS, Daniel ESTEVE & John CLARKE (1984), « Resonant activation from the zero-voltage state of a current-biased Josephson junction », in *Physical review letters* **53**, p. 1260.
- GIOVANAZZI, Stefano, Augusto SMERZI & Stefano FANTONI (2000), « Josephson effects in dilute Bose-Einstein condensates », in *Physical review letters* **84**, p. 4521.
- GRADSHTEYN, Izrail Solomonovich & Iosif Moiseevich RYZHIK (2014), *Table of integrals, series, and products*, Academic press.
- JENDRZEJEWSKI, Fred, Stephen ECKEL, Nicholas MURRAY, Calib LANIER, Mark EDWARDS, Christopher J LOBB & Gretchen K CAMPBELL (2014), « Resistive flow in a weakly interacting Bose-Einstein condensate », in *Physical review letters* **113**, p. 045305.

- KWON, Woo Jin, G DEL PACE, R PANZA, M INGUSCIO, W ZWERGER, M ZACCANTI, F SCAZZA & G ROATI (2020), « Strongly correlated superfluid order parameters from dc Josephson supercurrents », in *Science* **369**, p. 84-88.
- LEGGETT, AJ (1978), « Prospects in ultralow temperature physics », in *Le Journal de Physique Colloques* **39**, p. C6-1264.
- LEGGETT, Anthony J (1980), « Macroscopic quantum systems and the quantum theory of measurement », in *Progress of Theoretical Physics Supplement* **69**, p. 80-100.
- LEVY, Shahar, E LAHOUD, I SHOMRONI & J STEINHAEUER (2007), « The ac and dc Josephson effects in a Bose–Einstein condensate », in *Nature* **449**, p. 579-583.
- MARTINIS, John M, Michel H DEVORET & John CLARKE (1985), « Energy-level quantization in the zero-voltage state of a current-biased Josephson junction », in *Physical review letters* **55**, p. 1543.
- MEIER, F & W ZWERGER (2001), « Josephson tunneling between weakly interacting Bose-Einstein condensates », in *Physical Review A* **64**, p. 033610.
- PIAZZA, Francesco, LA COLLINS & A SMERZI (2010), « Current-phase relation of a Bose-Einstein condensate flowing through a weak link », in *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics* **81**, p. 033613.
- POLO, Juan, V AHUFINGER, Frank WJ HEKKING & Anna MINGUZZI (2018), « Damping of Josephson oscillations in strongly correlated one-dimensional atomic gases », in *Phys. Rev. Lett.* **121**, p. 090404.
- RYU, C, PW BLACKBURN, AA BLINOVA & MG BOSHIER (2013), « Experimental realization of Josephson junctions for an atom SQUID », in *Physical review letters* **111**, p. 205301.
- SINGH, Vijay Pal, Juan POLO, Ludwig MATHEY & Luigi AMICO (2024), « Shapiro steps in driven atomic Josephson junctions », in *Physical Review Letters* **133**, p. 093401.
- TINKHAM, Michael (2004), *Introduction to superconductivity*, Courier Corporation.
- XHANI, Klejdja, Luca GALANTUCCI, CF BARENGHI, Giacomo ROATI, Andrea TROMBETTONI & NP PROUKAKIS (2020), « Dynamical phase diagram of ultracold Josephson junctions », in *New Journal of Physics* **22**, p. 123006.
- XHANI, Klejdja, Elettra NERI, Luca GALANTUCCI, Francesco SCAZZA, Alessia BURCHIANTI, K-L LEE, CF BARENGHI, Andrea TROMBETTONI, Massimo INGUSCIO, Matteo ZACCANTI et al. (2020), « Critical transport and vortex dynamics in a thin atomic Josephson junction », in *Physical Review Letters* **124**, p. 045301.
- ZACCANTI, Matteo & Wilhelm ZWERGER (2019), « Critical Josephson current in BCS-BEC–crossover superfluids », in *Physical Review A* **100**, p. 063601.