

## Chapitre 3

# L'effet Josephson alternatif et les résonances de Shapiro

### Sommaire

<b>1</b>	<b>L'effet Josephson alternatif</b>	<b>2</b>
1-1	Le principe de l'effet	2
1-2	Expériences sur l'hélium	3
1-3	Gaz dilué et auto-piégeage	4
<b>2</b>	<b>Les résonances de Shapiro</b>	<b>6</b>
2-1	L'expérience de Shapiro	6
2-2	Utilisation du modèle RCSJ	8
2-3	Quelques résultats du modèle RCSJ	9
2-4	Modulation en tension sinusoïdale	10
<b>3</b>	<b>Un standard électrique</b>	<b>12</b>
3-1	Mise en série de jonctions	12
3-2	Plateaux de tension à courant nul	13
3-3	Le verrouillage sur un plateau $V_n$ donné	14
<b>4</b>	<b>Effet Shapiro pour des jonctions atomiques</b>	<b>15</b>
4-1	Effet Shapiro dans $^3\text{He}$ superfluide	15
4-2	Barrière mobile dans un gaz quantique	16
4-3	Observation expérimentale des plateaux	17
4-4	Les processus dissipatifs en jeu	18

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes concentrés sur le régime stationnaire des jonctions Josephson et sur leurs petites oscillations autour de la position d'équilibre, appelées oscillations plasmas. Nous allons maintenant passer à des situations où l'évolution temporelle est plus riche, soit en raison d'un déséquilibre initial de la jonction, soit grâce à une excitation modulée dans le temps.

Ces phénomènes dépendant explicitement du temps avaient été prédits<sup>1</sup> dans l'article initial de JOSEPHSON (1962). En particulier, si on applique un courant modulé à la fréquence  $\omega$  sur la jonction, Josephson avait mentionné la possibilité d'observer des plateaux dans la caractéristique courant tension  $(I, \bar{V})$  pour des valeurs quantifiées  $2e\bar{V} = n\hbar\omega$ , où  $n$  est un nombre entier. Ce phénomène a été observé expérimentalement par SHAPIRO (1963), et ces résonances portent désormais son nom.

Cette possibilité de relier un voltage à une fréquence est essentielle, car elle a ouvert la voie à des mesures des grandeurs électriques beaucoup plus précises que ceux qui existaient à l'époque. L'effet Josephson a ainsi joué un rôle central dans le nouveau système international d'unités, quand il s'agit de fixer la valeur de la charge élémentaire et de la constante de Planck. ANDERSON (1970) fait un parallèle très pertinent entre le rôle de l'effet Josephson pour les mesures électriques et les mesures d'interférométrie laser pour mesurer des distances.

1. ANDERSON (1970) écrit qu'il avait consulté l'avocat en charge des brevets aux Bell Labs et sa réponse avait été que "Josephson's paper was so complete that no one else was ever going to be very successful in patenting any substantial aspect of the Josephson effect".

Avant d'aborder les résonances de Shapiro, nous allons commencer par un effet plus simple, l'effet Josephson alternatif : il s'agit du courant oscillant qui apparaît quand on impose une différence de potentiel entre les bornes de la jonction (il s'agit du potentiel électrique pour les jonctions supraconductrices, et de la pression ou du potentiel chimique pour les jonctions atomiques).

Nous passerons ensuite aux résonances de Shapiro, dont nous rendrons compte dans le cadre du modèle RCSJ (*resistively capacitance shunted junction*) que nous avons déjà abondamment utilisé dans les chapitres précédents. Nous décrirons succinctement comment ces résonances sont utilisées pour mesurer avec une grande précision des différences de potentiel électrique.

Nous aborderons enfin des réalisations expérimentales qui ont mis en évidence ces résonances dans des jonctions atomiques, tout d'abord avec de l'hélium 3 liquide superfluide puis, beaucoup plus récemment, avec des jonctions atomiques utilisant l'idée de barrière mobile présentée au chapitre 2.

## 1 L'effet Josephson alternatif

### 1-1 Le principe de l'effet

L'effet Josephson alternatif est une conséquence directe des deux relations de Josephson pour une jonction idéale :

$$\begin{cases} I = I_c \sin \varphi \\ \hbar \dot{\varphi} = 2eV \end{cases} \quad (1)$$

Si on applique aux bornes de la jonction une tension continue  $V_0$ , la phase va défilier uniformément :

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{2eV_0}{\hbar} t, \quad (2)$$

ce qui va conduire à un courant alternatif dans la jonction :

$$I(t) = I_c \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (3)$$

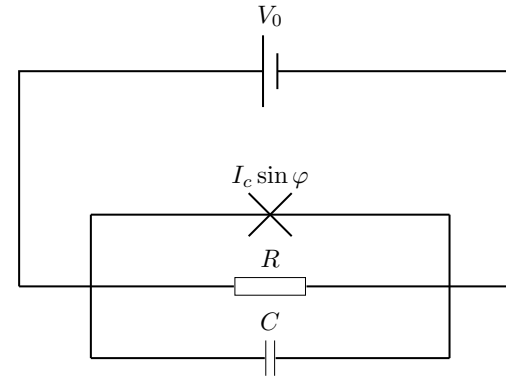


FIGURE 1. Jonction Josephson dans le modèle RCSJ, connectée ici à un générateur de tension constante  $V_0$ .

avec

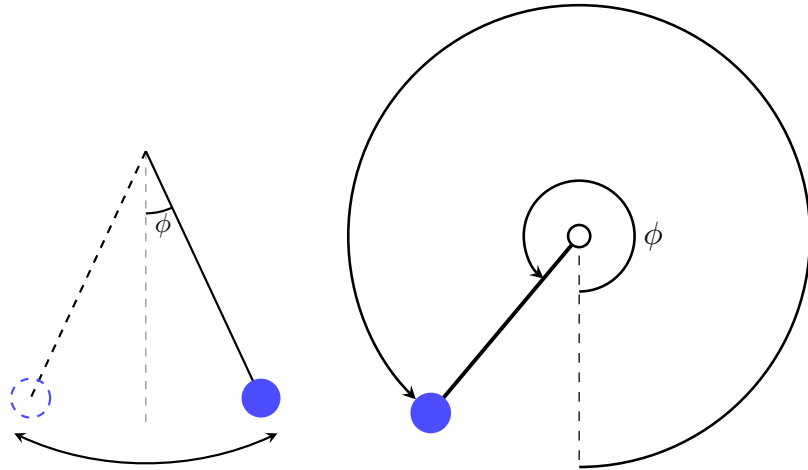
$$\hbar\omega = 2eV_0 \quad (4)$$

Dans la mesure où l'on impose la tension aux bornes de la jonction (et pas le courant comme au chapitre précédent), il n'est pas utile de revenir au modèle RCSJ représenté sur la figure 1 pour traiter ce problème. Plus précisément, chacune des trois composantes de ce modèle se comporte de manière indépendante :

- la jonction idéale donne naissance au courant alternatif donné ci-dessus ;
- la résistance est traversée par le courant continu  $V_0/R$  ;
- la capacité acquiert la charge  $q = CV_0$ .

Nous pouvons donc nous concentrer sur la jonction "idéale" dans ce qui suit.

Il est important de bien distinguer cet effet Josephson alternatif des oscillations plasma que nous avons décrites dans les chapitres précédents. Les oscillations plasma se produisent par exemple pour une jonction en circuit ouvert ( $I = 0$ ) et peuvent être rapprochées des oscillations d'un circuit  $LC$ , où l'inductance  $L$  est reliée à  $I_c$  par  $L = \hbar/2eI_c$  (cf. chapitre 1). Rappelons que dans la représentation "mécanique" de la jonction par un

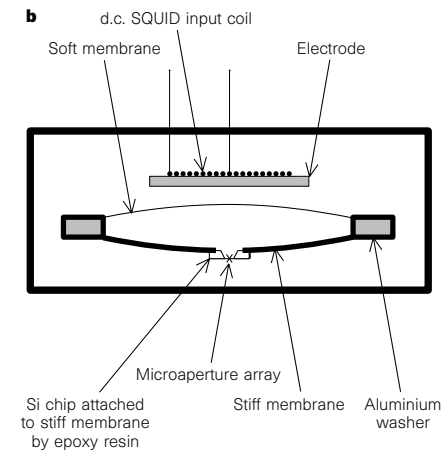
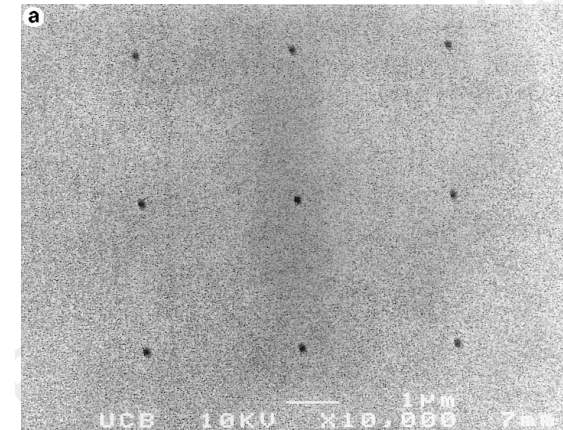


**FIGURE 2.** Analogie mécanique de la jonction Josephson. Les oscillations plasma correspondent au mouvement de faible amplitude autour de la position d'équilibre pour une jonction en circuit ouvert ( $I = 0$ ). L'effet Josephson alternatif correspond au mouvement de rotation à la fréquence angulaire  $\omega = 2eV_0/\hbar$  pour une jonction connectée à un générateur de tension  $V_0$ .

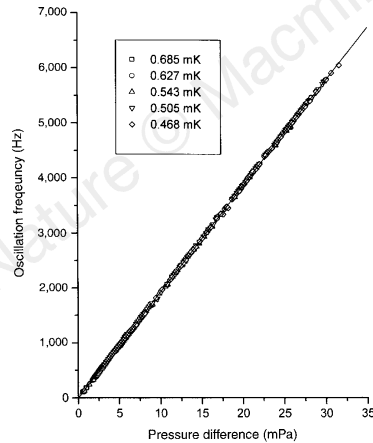
pendule pesant, la phase  $\varphi$  est associée à l'angle du pendule par rapport à la verticale. Les oscillations plasma sont un mouvement libre de faible amplitude autour de la position d'équilibre. L'effet Josephson alternatif est quant à lui un mouvement de rotation uniforme à la fréquence angulaire  $\omega_0$ , imposé de l'extérieur par le générateur de tension  $V_0$  (figure 2).

### 1-2 Expériences sur l'hélium

Nous n'allons pas passer ici en revue la littérature sur l'observation de l'effet Josephson alternatif sur des jonctions supraconductrices, et nous renvoyons les personnes intéressées vers les ouvrages classiques comme BARONE & PATERNO (1982) et TINKHAM (2004). Nous allons plutôt nous concentrer sur des réalisations plus récentes sur des atomes, en commen-



**FIGURE 3.** Dispositif d'étude de l'effet Josephson alternatif dans l'hélium  $^3\text{He}$  superfluide. Figure extraite de PEREVERZEV, LOSHAK *et al.* (1997).

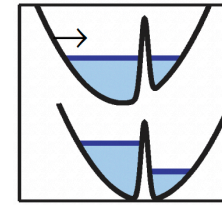


**FIGURE 4.** Lien entre fréquence d'oscillation et différence de pression appliquée dans l'expérience d'effet Josephson alternatif sur  $^3\text{He}$  superfluide. Figure extraite de PEREVERZEV, LOSHAK et al. (1997).

çant par l'hélium  $^3\text{He}$  superfluide.

Les premières expériences dans cette ligne de recherche ont été menées par AVENEL & VAROQUAUX (1988). Nous allons nous décrire ici sur une expérience plus récente faite à Berkeley par PEREVERZEV, LOSHAK et al. (1997). Dans ce système, la jonction Josephson est constituée par une membrane rigide de nitrure de silicium percée par une série de  $65 \times 65 = 4225$  trous, chacun de diamètre 100 nm (figure 3). De part et d'autre de cette membrane rigide se trouvent deux bains de  $^3\text{He}$  dans leur état superfluide. L'équivalent des paires de Cooper de l'état supraconducteur sont ici des paires d'atomes d'hélium, de masse  $m = 2m_{\text{He}}$ .

Dans cette expérience, le rôle du générateur de tension  $V_0$  est joué par une électrode qui déforme une paroi souple, ce qui a pour effet de créer une différence de pression  $\Delta P$  entre les deux côtés de la membrane rigide percée. On enregistre ensuite le mouvement oscillant de la paroi souple, ce qui permet de remonter au courant de particules qui traverse la membrane percée.



**FIGURE 5.** Procédure utilisée pour induire l'effet Josephson alternatif pour un gaz d'atomes de rubidium confinés dans un double puits. Figure extraite de LEVY, LAHOUD et al. (2007).

La transposition du résultat  $\hbar\omega = 2eV_0$  s'écrit ici

$$\hbar\omega = \frac{m}{\rho} \Delta P \quad (5)$$

où  $\rho = 82 \text{ kg/m}^3$  désigne la masse volumique du liquide. L'expérience confirme parfaitement ce résultat (figure 4). On trouve bien une relation linéaire entre  $\omega$  et  $\Delta P$  avec une pente de 194(15) kHz/Pa, en accord avec la valeur attendue théoriquement 183.7 kHz/Pa.

Notons que la même année, le groupe de Berkeley a publié un autre article dans lequel il teste, avec le même dispositif, la relation courant-phase à la base de l'effet Josephson (BACKHAUS, PEREVERZEV et al. 1997). Par ailleurs, après ces expériences sur  $^3\text{He}$ , l'effet Josephson a ensuite été observé sur l'hélium 4 (SUKHATME, MUKHARSKY et al. 2001).

### 1-3 Gaz dilué et auto-piégeage

La première mise en évidence de l'effet Josephson alternatif avec un gaz d'atomes froids a été faite par LEVY, LAHOUD et al. (2007). Les auteurs sont partis d'un gaz de  $10^5$  atomes de rubidium, confiné dans un piège harmonique allongé (fréquence longitudinale 26 Hz, fréquence transverse 224 Hz). Ce gaz est coupé en deux par une fine nappe de lumière de largeur totale à  $1/e^2$  de  $1.4 \mu\text{m}$ .

Le double puits est initialement assez fortement dissymétrique et le gaz est préparé dans son état fondamental (figure 5). Pour initier l'effet

Josephson alternatif, on ramène la barrière au centre du piège en un temps court (5 à 10 ms), ce qui crée une différence de potentiel chimique initiale  $\overline{\Delta\mu} = \bar{\mu}_a - \bar{\mu}_b$  importante entre les deux côtés de la barrière. Comme nous allons le voir, il est essentiel que  $|\overline{\Delta\mu}|/\hbar$  soit grand devant la fréquence plasma  $\omega_p$  pour que l'oscillation des nombres d'atomes  $N_{a,b}$  qui résulte du déplacement de la barrière puisse s'interpréter en terme d'effet Josephson alternatif.

Pour analyser l'évolution du gaz après le déplacement de la barrière, revenons aux équations de Josephson pour une jonction atomique que nous avons établies au chapitre 1. Nous introduisons la phase relative  $\varphi(t) = \varphi_a(t) - \varphi_b(t)$  et nous prenons ici  $\gamma(n) \approx 1$  car la variation de ce coefficient joue un rôle négligeable dans ce qui suit. Les équations établies au chapitre 1 s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \hbar \dot{n} = E_J \sin \varphi \\ \hbar \dot{\varphi} = -\overline{\Delta\mu} - nE_C \end{cases} \quad (6)$$

Les nombres d'atomes de part et d'autre de la barrière à l'instant  $t$  sont notés

$$N_a(t) = \bar{N}_a + n(t) \quad N_b(t) = \bar{N}_b - n(t), \quad (7)$$

où  $\bar{N}_{a,b}$  désignent les nombres d'atomes juste après le déplacement de la barrière (instant  $t = 0$ ). Les énergies  $E_J$  et  $E_C$  désignent comme précédemment le couplage Josephson et l'énergie de charge de la barrière, et on rappelle la valeur de la fréquence plasma (petites oscillations autour de la position d'équilibre  $N_a = N_b = N/2$ ) :  $\hbar\omega_p = \sqrt{E_C E_J}$ .

Supposons que l'amplitude de l'oscillation de  $n(t)$  soit suffisamment faible pour que le terme  $nE_C$  dans la seconde relation de Josephson reste petit devant  $\overline{\Delta\mu}$ , hypothèse que nous vérifierons à la fin du calcul. Le terme  $\overline{\Delta\mu}$  peut alors jouer le rôle de la tension constante de l'effet Josephson alternatif d'une jonction supraconductrice. On intègre cette seconde relation :  $\varphi(t) = -\overline{\Delta\mu} t/\hbar$ , et on reporte le résultat dans la première relation de Josephson pour en déduire l'évolution de  $n$  :

$$n(t) = -\frac{E_J}{\overline{\Delta\mu}} [1 - \cos(\overline{\Delta\mu} t/\hbar)]. \quad (8)$$

La valeur maximale de  $|n|$  est donc  $2E_J/|\overline{\Delta\mu}|$  et il reste à vérifier que l'hypothèse de départ,  $|nE_C| \ll |\overline{\Delta\mu}|$ , est valable à tout temps  $t$ . Cela impose

$2E_J E_C \ll \overline{\Delta\mu}^2$  ou encore  $\hbar\omega_p \ll |\overline{\Delta\mu}|$ , comme annoncé. La fréquence plasma est généralement petite<sup>2</sup> devant le potentiel chimique  $\mu$ , de sorte qu'il est tout à fait réaliste de satisfaire cette inégalité.

On déduit de l'analyse que nous venons de mener qu'en absence de processus de dissipation, le déséquilibre initial de population n'évolue que très peu. En particulier, bien que la barrière soit positionnée de manière symétrique à la fin de la phase de préparation, le gaz n'atteint pas le point  $N_a = N_b$  au cours de l'oscillation. Cet effet, appelé auto-piégeage (*self-trapping*), peut également se comprendre à partir des courbes iso-énergie d'une jonction atomique, nous y reviendrons au chapitre 4 (§4.4).

En se plaçant dans de telles conditions, LEVY, LAHOUD et al. (2007) ont effectivement trouvé que la différence de population  $N_a - N_b$  oscillait périodiquement à la fréquence  $\omega = \Delta\mu/\hbar$ , avec une amplitude beaucoup plus faible que le déséquilibre initial  $\bar{N}_a - \bar{N}_b$ . Les résultats expérimentaux pour  $\omega$  en fonction de  $\Delta\mu$  sont montrés en figure 6. Cette expérience d'effet Josephson alternatif a ensuite été reprise par plusieurs groupes [voir par exemple (SPAGNOLLI, SEMEGHINI et al. 2017)] et elle a également été étendue à un gaz de polaritons de cavité (ABBARCHI, AMO et al. 2013).

L'auto-piégeage lui-même avait été vu dès la première expérience menée sur un double puits par ALBIEZ, GATI et al. (2005). On montre en figure 7 leur résultat, obtenu sur le même montage que celui qui a permis d'observer l'oscillation plasma (cf. Chapitre 1). Ces auteurs n'ont pas détecté le régime Josephson alternatif (il se produirait ici avec une période de l'ordre de la milliseconde), mais ils ont clairement observé que la population du puits de gauche restait supérieure à celle du puits de droite sur une longue échelle de temps.

LEVY, LAHOUD et al. (2007) ont étudié la dépendance du phénomène d'auto-piégeage avec la température (figure 8). Pour  $T \approx 0.3 T_c$ , où  $T_c$  est la température de condensation, ils n'ont observé aucune décroissance de  $N_a - N_b$  sur une échelle de temps de 150 ms, soit plus d'une centaine d'oscillations dues à l'effet Josephson alternatif. En revanche, pour  $T \approx 0.5 T_c$ , ils ont mesuré une relaxation de  $N_a - N_b$  vers 0 sur cette échelle de temps.

2. Dans le régime Josephson  $\frac{E_J}{N^2} \ll E_C$ , on trouve pour la fréquence plasma l'inégalité  $\hbar\omega_p = \sqrt{E_C E_J} \ll N E_C$ . Or nous avons trouvé pour l'énergie de charge l'estimation  $E_C \sim \frac{\mu}{N}$ , d'où l'inégalité annoncé  $\hbar\omega_p \ll \mu$ .

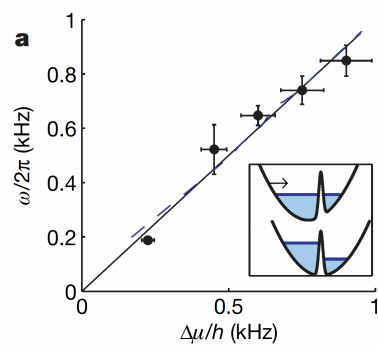


FIGURE 6. Fréquence  $\omega/2\pi$  de l'oscillation de  $N_a - N_b$  en fonction de la différence de potentiel chimique  $\Delta\mu$ . le potentiel chimique de chacun des gaz est déterminé à partir de leur taille. Figure extraite de LEVY, LAHOUD et al. (2007).

## 2 Les résonances de Shapiro

### 2-1 L'expérience de Shapiro

Dès les premières études expérimentales sur l'effet Josephson avec des supraconducteurs, l'influence d'une modulation à haute fréquence ( $\omega/2\pi \sim 10$  à  $100$  GHz) a été abordée, en particulier par SHAPIRO (1963). Pour une jonction alimentée par un générateur de courant délivrant l'intensité

$$I(t) = I_0 + I_1 \sin(\omega t), \quad (9)$$

l'observation principale est l'existence de plateaux dans la caractéristique  $(I_0, \bar{V})$  de la jonction (figure 9), où  $\bar{V}$  est la tension moyenne aux bornes de la jonction; plus précisément, certaines valeurs particulières de  $\bar{V}$  satisfaisant la condition de quantification

$$2e\bar{V} = n\hbar\omega \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z} \quad (10)$$

sont observables pour toute une plage de valeurs de l'intensité moyenne  $I_0$ . Dans cette expérience pionnière, Shapiro a utilisé une jonction Al-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Sn qu'il a placé dans une cavité microonde résonante. Les fréquences utilisées sont de 9.3 GHz et 24.85 GHz. Pour une fréquence de

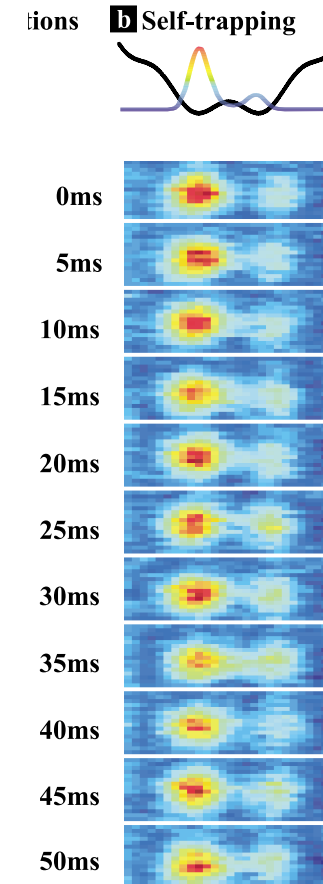
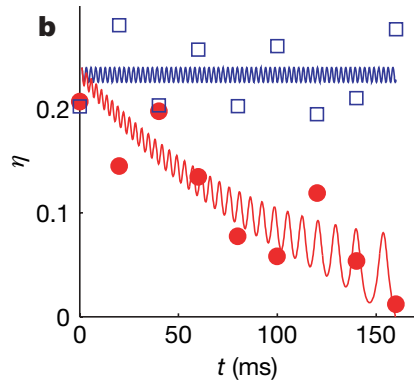


FIGURE 7. Auto-piégeage de la population dans un double puits initialement fortement déséquilibré. Figure extraite de ALBIEZ, GATI et al. (2005).



**FIGURE 8.** Influence de la température sur le phénomène d'auto-piégeage, avec  $\eta = (N_a - N_b)/N$ . Carrés bleus :  $T \approx 0.3 T_c$ , disques rouges :  $T \approx 0.5 T_c$ . La fréquence de l'effet Josephson alternatif (de l'ordre du kHz) est trop élevée pour être détectée expérimentalement compte tenu du faible échantillonnage des points. La courbe théorique rouge a été calculée dans le cadre du modèle RCJS avec une valeur ajustée pour  $R$ . Figure extraite de LEVY, LAHOUD et al. (2007).

10 GHz, le "quantum de tension" apparaissant sur (10) est

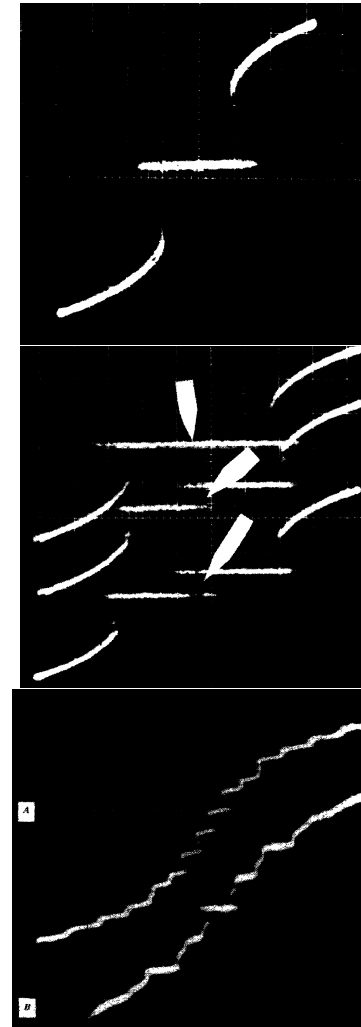
$$\frac{\omega}{2\pi} = 10 \text{ GHz} : \quad V_1 = \frac{\hbar\omega}{2e} = 20.7 \mu\text{V} \quad (11)$$

Les marches de Shapiro sont donc très proches les unes des autres pour ce domaine de fréquence.

Le résultat obtenu par Shapiro généralise celui obtenu en l'absence de modulation haute fréquence, où la tension  $\bar{V} = 0$  pouvait être obtenue pour la plage d'intensité  $[-I_c, I_c]$ . Comme nous l'avons écrit en introduction, son importance pratique est considérable puisque qu'il permet de relier une tension  $V$  à la fréquence  $\omega$  d'une micro-onde. La réalisation de fréquences extrêmement stables dans le domaine micro-onde étant bien maîtrisée, ce phénomène a ouvert de façon naturelle la voie vers des standards électriques de grande précision, nous y reviendrons en §3.

Les caractéristiques obtenues par SHAPIRO (1963) révèlent d'emblée un certain nombre de propriétés importantes.

— Les plateaux correspondant à différentes valeurs de l'entier  $n$  peuvent



**FIGURE 9.** Caractéristique  $(I, V)$  mesurées par SHAPIRO (1963). Haut : jonction non modulée. Milieu : apparition de deux paliers à  $V = \pm\hbar\omega/(2e)$ . Bas : paliers multiples observés pour deux fréquences de modulations, 9.3 GHz et 24.850 GHz.

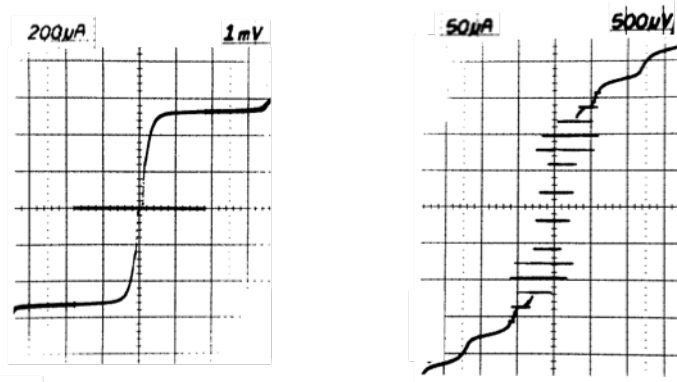


FIGURE 10. Caractéristique d'une jonction Josephson utilisée en métrologie en absence (gauche) et en présence (droite) d'un courant modulé. Figure extraite de KAUTZ (1996).

se recouvrir. Cela signifie que pour une intensité  $I$  donnée dans la zone de recouvrement entre ces plateaux, plusieurs tensions  $V_n$  sont observables. Cette possibilité apparaît clairement sur la figure 10, extraite de KAUTZ (1996).

- Pour une jonction alimentée en courant continu, nous avons mentionné un régime bistable : pour une plage de valeurs de  $I$ , la tension peut prendre la valeur  $V = 0$  ou une valeur non nulle. On atteint l'une ou l'autre valeur selon qu'on varie  $I$  dans le sens des intensités croissantes ou décroissantes. Dans le cas modulé, si trois valeurs de  $V_n$  sont possibles pour une valeur donnée de  $I$  (comme c'est le cas sur la figure 10), la situation est plus complexe et l'obtention de l'une ou l'autre de ces valeurs dépendra finement des conditions initiales. Un comportement chaotique peut même être observé pour certains domaines de paramètres.
- La possibilité d'obtenir une tension  $V_n$  quantifiée selon (10) existe même si le courant continu  $I$  traversant la jonction s'annule. La seule application de la microonde suffit à générer cette tension. Ce point est particulièrement important pour la réalisation de standard de tension dans le domaine du volt ou de la dizaine de volts.

- Une conséquence du point précédent est qu'il est possible, pour un courant continu (légèrement) négatif, d'observer une tension positive, par exemple  $+\hbar\omega/2e$ , et réciproquement. Ce point avait été particulièrement souligné par SHAPIRO (1963), qui mentionnait le terme de "résistance négative".

## 2-2 Utilisation du modèle RCSJ

Dans ce modèle représenté sur la figure 1, le courant total  $I(t)$  est donné par la loi de Kirchoff

$$I(t) = I_c \sin[\varphi(t)] + \frac{V(t)}{R} + C \frac{dV}{dt} \tag{12}$$

à laquelle on adjoint la seconde relation de Josephson :

$$\hbar \frac{d\varphi}{dt} = 2eV . \tag{13}$$

Dans le cas qui nous intéresse dans ce chapitre, le courant  $I(t)$  est la somme d'un courant continu  $I_0$  (éventuellement nul) et du courant modulé induit par la microonde  $I_1 \sin(\omega t)$ . En éliminant la tension  $V(t)$  au profit de la phase  $\varphi(t)$ , on obtient donc l'équation d'évolution

$$I_0 + I_1 \sin(\omega t) = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\varphi}{dt^2} . \tag{14}$$

Comme nous allons le voir, la résolution numérique de cette équation permet de reproduire les phénomènes que nous avons mentionnés dans le paragraphe précédent. Il faut noter malgré tout que ce modèle n'est pas véritablement quantitatif pour décrire les phénomènes à haute fréquence ou à grand voltage (KAUTZ 1996). Par exemple, il ne prend pas en compte la possibilité que la microonde casse des paires de Cooper, créant ainsi des processus tunnel assistés par les photons de cette micro-onde. Pour des jonctions étendues, la dépendance spatiale de la phase  $\varphi$  peut également jouer un rôle significatif non pris en compte dans le modèle RCSJ.

L'équation (14) dépend de six paramètres physiques :  $I_0, I_1, \omega, I_c, R, C$ . Comme toujours, il est utile de reformuler cette équation en terme de paramètres sans dimension pour limiter le domaine d'étude. L'intensité critique

$I_c$  fournit une unité naturelle pour exprimer  $I_0$  et  $I_1$  et nous posons :

$$i_0 \equiv \frac{I_0}{I_c} \quad i_1 \equiv \frac{I_1}{I_c}. \quad (15)$$

Par ailleurs, nous choisissons la même unité de temps qu'au chapitre précédent

$$t_0 \equiv \frac{\hbar}{2eRI_c} \quad (16)$$

et nous posons

$$\tau \equiv \frac{t}{t_0} \quad \tilde{\omega} \equiv \omega t_0 \quad \dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{d\tau} = t_0 \frac{d\varphi}{dt} \quad (17)$$

de sorte que (14) s'écrit :

$$\boxed{i_0 + i_1 \sin(\tilde{\omega}\tau) = \sin \varphi + \dot{\varphi} + \beta_c \ddot{\varphi}} \quad (18)$$

où l'on a introduit comme aux chapitres précédents le nombre sans dimension  $\beta_c$  (paramètre de Stewart-McCumber) :

$$\beta_c = \frac{2eI_c R^2 C}{\hbar}. \quad (19)$$

Rappelons que le régime  $\beta_c \ll 1$  correspond au régime très amorti, et  $\beta_c \gg 1$  au régime opposé. On est donc ramené à un problème à quatre paramètres sans dimension  $i_0, i_1, \tilde{\omega}$  et  $\beta_c$ .

La détermination d'une caractéristique courant-tension dans ce cadre passe donc par les étapes suivantes :

- Fixer les trois paramètres  $i_1, \tilde{\omega}, \beta_c$ .
- Chercher pour chaque valeur de  $i_0$  un ou plusieurs régimes forcés pour l'équation (18).
- Obtenir ainsi un point de la caractéristique  $(I_0, \bar{V})$ , où  $\bar{V}$  représente la tension moyenne aux bornes de la jonction. La moyenne est prise sur une période  $T = 2\pi/\omega$  de la microonde :

$$\bar{V} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt \quad (20)$$

ce qui donne en utilisant la seconde relation de Josephson  $\hbar \frac{d\phi}{dt} = 2eV$  :

$$\bar{V} = \frac{\hbar}{2eT} \int_0^T \frac{d\varphi}{dt} dt = \frac{\hbar\omega}{2e} \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \quad (21)$$

où  $\Delta\varphi = \varphi(T) - \varphi(0)$  représente l'accroissement de phase sur une période de la microonde. Dans ce qui suit, nous présenterons les caractéristiques pour les quantités réduites  $I_0/I_c = i_0$  et  $\bar{V}/RI_c$ , qui s'écrit aussi :

$$\frac{\bar{V}}{RI_c} = \tilde{\omega} \frac{\Delta\varphi}{2\pi}. \quad (22)$$

où nous avons injecté les définitions (16,17) dans (21).

La forme (21) permet de donner une interprétation simple à la condition de quantification  $2e\bar{V} = n\hbar\omega$ , ou de son équivalent en variables adimensionnées  $\frac{\bar{V}}{RI_c} = n\tilde{\omega}$ . Elle entraîne en effet que

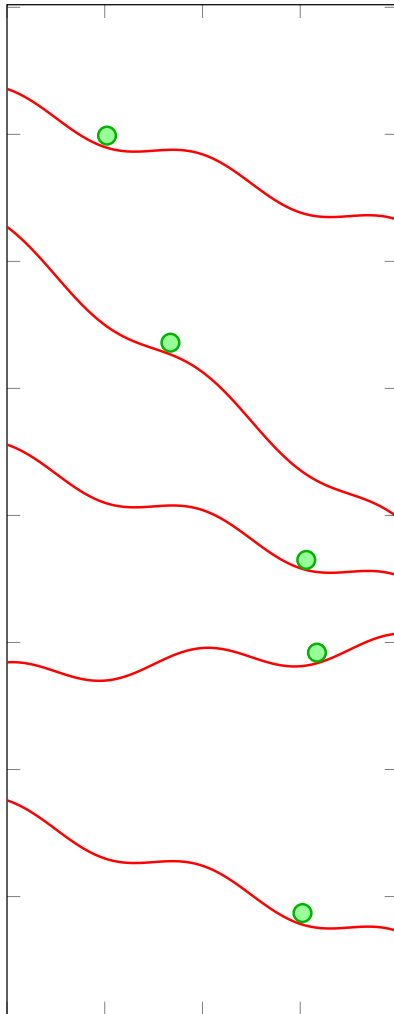
$$\boxed{\Delta\varphi = n 2\pi}, \quad (23)$$

ce qui correspond à un régime où la phase  $\varphi$  augmente d'un nombre entier de  $2\pi$  en une période de la microonde. Dans le modèle de la "planche à laver" inclinée, la microonde induit un mouvement oscillant de la planche et la particule fictive progresse de  $n$  périodes du potentiel  $\cos \varphi$  en une période  $T$  (voir la figure 11 pour le cas  $n = 1$ ).

Les caractéristiques des figures 9 et 10 montrent que ce verrouillage de la phase sur l'oscillation microonde peut se faire de manière stable, au moins sur le temps de mesure utilisé.

### 2-3 Quelques résultats du modèle RCSJ

Nous présentons sur les figures 12 et 13 quelques résultats obtenus par résolution numérique de l'équation d'évolution (18). La figure 12 correspond à  $\beta_c = 1$ , c'est-à-dire une jonction avec un amortissement résistif relativement fort, dont la caractéristique en absence de modulation ne présente pas d'hystérésis. La figure 13 est calculée pour  $\beta_c = 10$  pour lequel il existe un hystérésis significatif. Les caractéristiques en absence de modulation sont rappelées en haut de ces figures.



**FIGURE 11.** Régime forcé dans le modèle de la planche à laver : la microonde de fréquence  $\omega/2\pi$  induit un mouvement oscillant de la planche autour de la pente moyenne  $i_0$ . Le régime quantifié (10) est obtenu quand la particule fictive de position  $\varphi$  se déplace de  $n$  fois  $2\pi$  en une période d'oscillation  $2\pi/\tilde{\omega}$ , avec ici  $n = 1$ . Figure tracée pour  $\beta_c = 1$ ,  $i_0 = 0.82$ ,  $i_1 = 1$ ,  $\tilde{\omega} = 0.5$  (cf. paramètres de la figure 12, ligne du bas, colonne de droite).

Ces calculs sont faits en balayant le courant  $I_0$  dans le sens positif, puis dans le sens négatif, par pas de  $\delta i_0 = 10^{-3}$ . Pour chaque nouveau pas, on prend pour condition initiale le régime forcé utilisé au pas précédent, de manière à favoriser un suivi adiabatique. Pour chaque valeur de  $\beta_c$ , on a pris deux valeurs de l'intensité de modulation  $i_1$  et deux valeurs de la fréquence de modulation  $\tilde{\omega}$ .

On voit clairement apparaître les plateaux quantifiés  $V_n$  avec  $V_n/RI_c = n\tilde{\omega}$ . Quand on augmente  $i_1$ , le nombre de plateaux clairement identifiables croît et la largeur du plateau central ( $n = 0$ ), initialement égale à 2, décroît. Pour  $\beta_c = 1$ , on constate que l'absence d'hystérésis en l'absence de modulation subsiste pour  $i_1 \neq 0$ , au moins dans la gamme de valeurs étudiées. Pour  $\beta_c = 10$ , l'hystérésis demeure : une même intensité  $I_0$  peut conduire à deux valeurs  $n$  différentes selon le sens de balayage. On remarque également pour ce cas  $\beta_c = 10$  que certaines caractéristiques semblent très bruitées. Ce bruit peut être vu comme la signature d'un régime chaotique pour ce domaine de paramètres (KAUTZ 1996) et il ne dépend quasiment pas de la durée sur laquelle on moyenne la valeur de  $V$  (ici 1000 périodes  $T$ ).

#### 2-4 Modulation en tension sinusoïdale

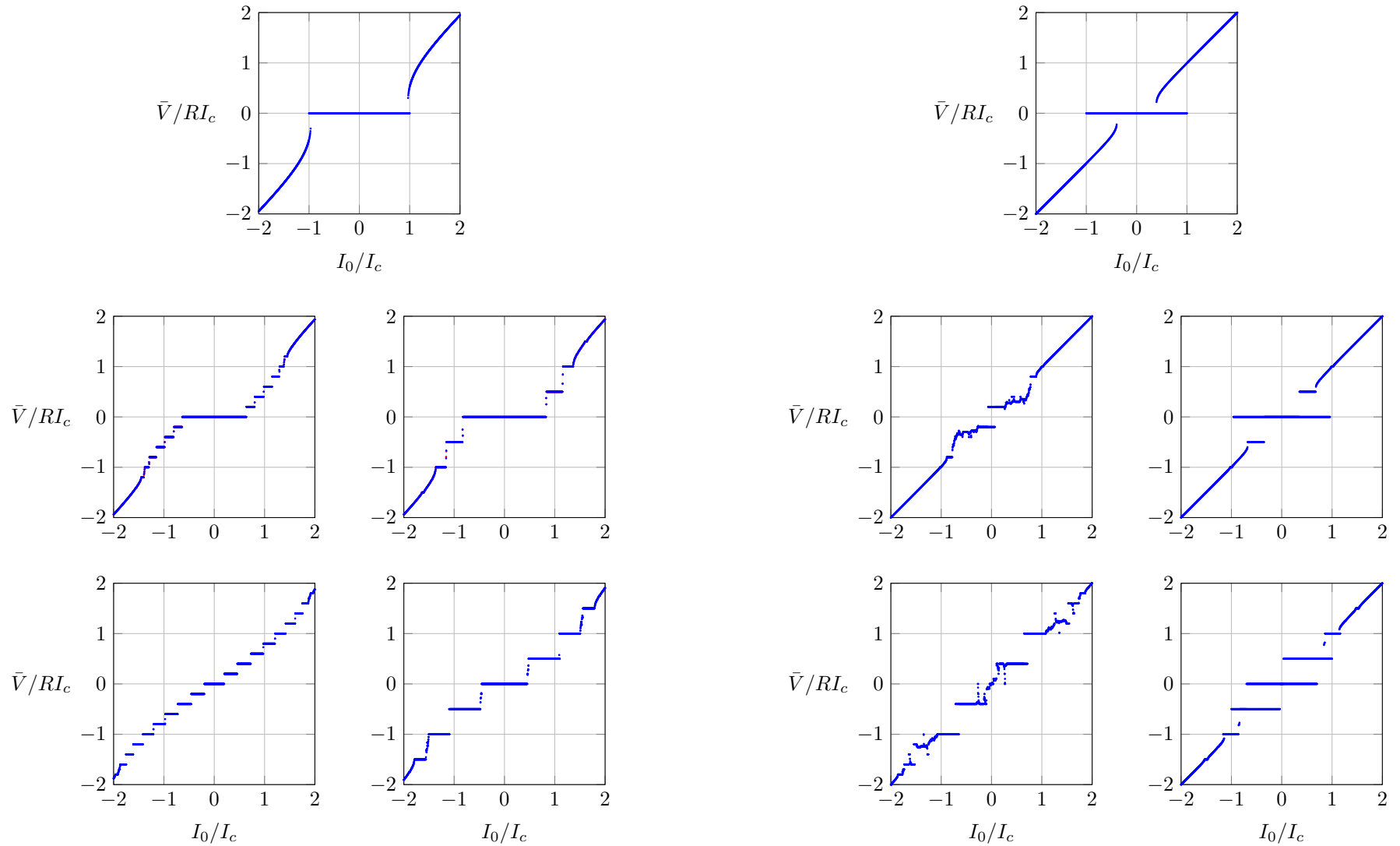
En pratique, la jonction Josephson est branchée sur un générateur de courant fournissant l'intensité sinusoïdale  $I_0 + I_1 \sin(\omega t)$ , comme étudié précédemment. Dans ce cas, il est nécessaire de se tourner vers une résolution numérique du problème RCSJ pour trouver la caractéristique courant-tension (§ 2-3).

Il existe une autre situation qui permet quant à elle d'obtenir des résultats analytiques; elle concerne le cas d'une modulation sinusoïdale en tension :

$$V(t) = V_0 + V_1 \sin(\omega t) . \quad (24)$$

Même si cette situation est rarement implémenté en pratique, ses résultats peuvent constituer une bonne approximation du cas d'une modulation sinusoïdale en intensité quand une des deux conditions est vérifiée

$$\omega \gg \omega_c \quad \text{ou} \quad \omega \gg \frac{\omega_c}{\sqrt{\beta_c}} . \quad (25)$$



**FIGURE 12.**  $\beta_c=1$ . Ligne du milieu :  $i_1 = 1/2$ , ligne du bas  $i_1 = 1$ . Colonne de gauche :  $\tilde{\omega} = 0.2$ , colonne de droite  $\tilde{\omega} = 0.5$ . Le graphe supérieur représente la caractéristique en absence de modulation pour cette valeur de  $\beta_c$ .

**FIGURE 13.**  $\beta_c=10$ . Ligne du milieu :  $i_1 = 1$ , ligne du bas  $i_1 = 3$ . Colonne de gauche :  $\tilde{\omega} = 0.2$ , colonne de droite  $\tilde{\omega} = 0.5$ . Le graphe supérieur représente la caractéristique en absence de modulation pour cette valeur de  $\beta_c$ .

où on a posé

$$\omega_c \equiv \frac{1}{t_0} = \frac{2eI_c R}{\hbar}. \quad (26)$$

Ces conditions expriment le fait que l'impédance  $L\omega$  de la jonction (avec  $L = \hbar/2eI_c$ ) est grande devant la résistance  $R$  ou devant l'impédance capacitive  $1/C\omega$  (KAUTZ 1996).

Une fois donné le voltage  $V(t)$  de l'équation (24), la seconde relation de Josephson permet de déduire par intégration la phase  $\varphi(t)$  :

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{2eV_0 t}{\hbar} - \frac{2eV_1}{\hbar\omega} \cos(\omega t). \quad (27)$$

Reprenons maintenant l'équation d'évolution

$$I(t) = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (28)$$

et prenons sa moyenne sur une période  $T$  de l'oscillation microonde en utilisant l'expression (27). La contribution de la dérivée seconde est toujours nulle et il reste :

$$\bar{I} = I_c \langle \sin \varphi \rangle + \frac{V_0}{R}. \quad (29)$$

Si la moyenne sur le temps de  $\sin \varphi$  s'annule, on retrouve la partie résistive de la caractéristique  $V_0 = R\bar{I}$ . Mais il se peut que cette moyenne soit non nulle, comme on le voit en utilisant le développement en fonctions de Bessel :

$$e^{-ia \cos(\omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n(a) e^{-in\omega t} \quad (30)$$

qui entraîne

$$\sin(\varphi(t)) = \text{Im} \left[ e^{i\varphi(t)} \right] = \text{Im} \left[ e^{i\varphi_0} e^{i\frac{2eV_0}{\hbar}t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n \left( \frac{2eV_1}{\hbar\omega} \right) e^{-in\omega t} \right]. \quad (31)$$

On remarque en effet qu'un terme de la somme sur  $n$  peut donner une contribution non nulle à la moyenne sur le temps si on a

$$\frac{2eV_0}{\hbar} = n\omega \quad (32)$$

ce qui n'est autre que la condition de quantification (10). La moyenne temporelle de  $\sin \varphi$  vaut alors

$$\langle \sin \varphi \rangle = J_n \left( \frac{2eV_1}{\hbar\omega} \right) \sin(\varphi_0 - n\pi/2). \quad (33)$$

Le terme  $\sin(\varphi_0 - n\pi/2)$  peut prendre n'importe quelle valeur entre  $-1$  et  $1$ , et on obtient donc un plateau de valeurs de  $\bar{I}$  compris entre les deux bornes :

$$\frac{n\hbar\omega}{2eR} - I_c J_n \left( \frac{2eV_1}{\hbar\omega} \right) \quad \text{et} \quad \frac{n\hbar\omega}{2eR} + I_c J_n \left( \frac{2eV_1}{\hbar\omega} \right) \quad (34)$$

ou encore

$$\left| \frac{\bar{I}}{I_c} - n \frac{\omega}{\omega_c} \right| < \left| J_n \left( \frac{2eV_1}{\hbar\omega} \right) \right|. \quad (35)$$

Chaque plateau est centré sur la droite résistive  $\bar{I} = V_0/R$  et sa largeur, donnée par la fonction de Bessel  $J_n(2eV_1/\hbar\omega)$ , va décroître rapidement aux grands  $n$ , à  $V_1/\omega$  fixé.

## 3 Un standard électrique

### 3-1 Mise en série de jonctions

Comme nous l'avons vu ci-dessus, le domaine de fréquences  $\omega/2\pi$  utilisable en pratique se situe dans le domaine s'étendant entre 10 et 100 GHz. Pour le choix  $\omega/2\pi = 100$  GHz, le quantum  $\hbar\omega/2e$  vaut 0.2 mV, ce qui est très faible. Même si on verrouille la diode sur un indice  $n$  supérieur à 1, on reste dans le domaine du millivolt alors que les besoins pratiques sont plutôt dans le domaine du volt, voire la dizaine de volts.

La solution à ce problème est simple sur le papier : il suffit de mettre un grand nombre de jonctions en série, de sorte que les tensions s'ajoutent et on peut atteindre ainsi des valeurs supérieures au volt. C'est effectivement ce qui est fait en pratique, mais cela passe par un certain nombre d'étapes délicates.

On voit sur la figure 14 extraite de l'article de HAMILTON (2000) le principe de la mise en série de jonctions Nb // Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> / Nb, avec une microonde

de fréquence 75 GHz. On dispose 16 lignes comportant 1263 jonctions chacune, soit 20 208 jonctions au total mises en série. Du point de vue de la propagation de la microonde, les 16 lignes sont en parallèle, ce qui permet d'assurer une bonne homogénéité de l'intensité  $I_1$ .

### 3-2 Plateaux de tension à courant nul

Les premiers dispositifs de séries de jonctions Josephson à fin métrologique comportaient une vingtaine de jonctions, chacune avec une capacité  $C$  relativement faible, conduisant à une caractéristique du type de celles montrées en figures 12-13. Pour ce type de jonction, il faut imposer un courant  $I_0$  non nul à chaque jonction pour se placer sur le plateau désiré.

Le courant  $I_0$  à appliquer diffère d'une jonction à l'autre du fait d'imperfections lors de la fabrication. Pour un dispositif utilisant une vingtaine de jonctions, il est possible (mais délicat) de contrôler chacun des 20 courants individuels  $I_0$ . Quand on passe à une assemblée de 20 000 jonctions, cela devient irréaliste.

Pour contourner ce problème, on se tourne vers des jonctions de plus grande capacité, donc de plus grand paramètre  $\beta_c$ , typiquement  $\beta_c \geq 100$ . Dans ce cas, la caractéristique comporte des segments de voltage quantifiés  $V_n$  pour un courant  $I_0$  nul. La figure 15 présente des caractéristiques calculées dans le modèle RCSJ et la figure 16 une caractéristique mesurée expérimentalement. Il n'est alors plus nécessaire de contrôler le courant biais de chaque jonction. Il faut simplement trouver un moyen de verrouiller la jonction – ou l'ensemble de jonctions – sur le segment  $n$  désiré. Pour les standards de 10 volts comme celui représenté en figure 14, l'entier  $n$  peut prendre toutes les valeurs entre -75 000 et +75 000 (HAMILTON 2000).

La caractéristique de la figure 16 résulte d'une optimisation du courant  $I_1$  induit par la microonde. Pour un courant plus faible, la plage en tension sur laquelle on observe des marches se réduit. Pour des courants plus forts, on observe plus de marches, mais leur longueur diminue et elles ne croisent plus l'axe  $I_0 = 0$ . On peut utiliser le résultat (35) pour estimer si la marche  $n$  croise l'axe de courant nul  $I = 0$ . Il faut pour cela que

$$n \frac{\omega}{\omega_c} < \left| J_n \left( \frac{2eV_1}{\hbar\omega} \right) \right| \tag{36}$$

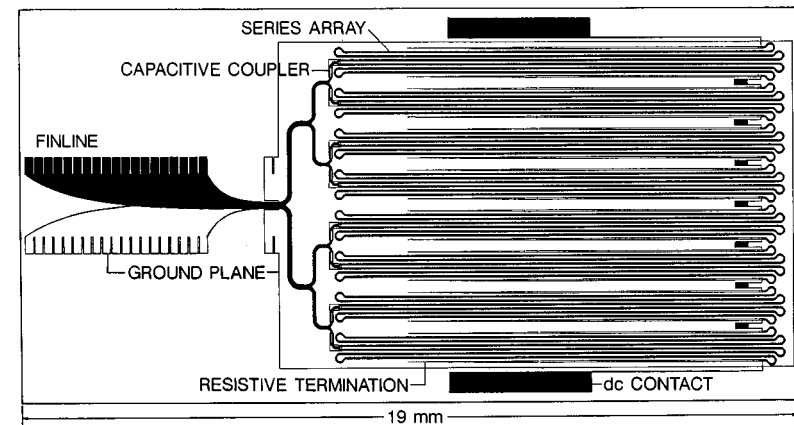
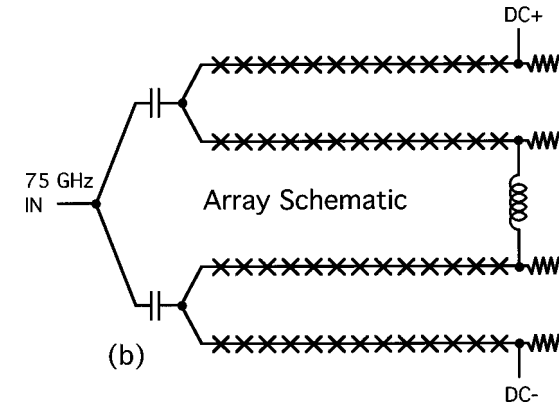
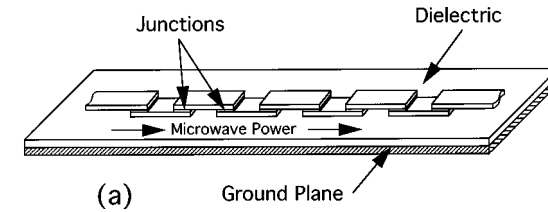
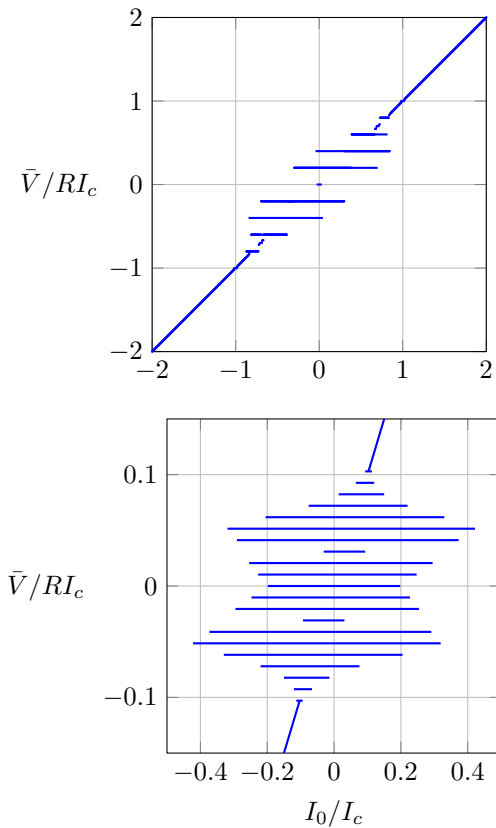
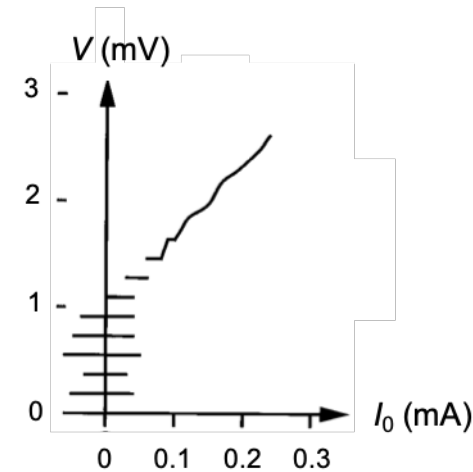


FIGURE 14. Dispositif comportant un grand nombre (> 20 000) jonctions Josephson en série permettant de réaliser un étalon de tension dans la gamme de la dizaine de volts. Figure adaptée à partir de HAMILTON (2000).



**FIGURE 15.** Exemples de caractéristiques calculées par le modèle RCSJ, présentant plusieurs plateaux  $V_n$  pour  $I_0 = 0$ . Calcul effectué dans le modèle RCSJ avec  $\beta = 100$ ,  $i_1 = 10$ ,  $\tilde{\omega} = 0.2$  (haut) et  $\beta \approx 10^5$ ,  $i_1 = 80$ ,  $\tilde{\omega} \approx 10^{-2}$  (bas). La caractéristique du bas est plus précisément obtenue pour les paramètres physiques fournis par KAUTZ (1996) pour sa figure 1(b) :  $I_c = 0.2 \text{ mA}$ ,  $R = 100 \Omega$ ,  $C = 20 \text{ pF}$ ,  $I_1 = 16 \text{ mA}$  et  $\omega/2\pi = 100 \text{ GHz}$ .



**FIGURE 16.** Exemple d'une observation expérimentale des marches de Shapiro pour une jonction de grande capacité. Figure adaptée de HAMILTON (2000).

Comme la valeur de la fonction de Bessel  $J_n(x)$  est toujours comprise entre  $-1$  et  $+1$ , on voit sur cette équation que les plateaux croisant l'axe  $I = 0$  ne peuvent être obtenus que si  $\omega < \omega_c$  (au moins dans le régime où l'approche en terme de tension modulée sinusoidalement est correcte).

### 3-3 Le verrouillage sur un plateau $V_n$ donné

Une fois réalisée la caractéristique courant-tension du système Josephson avec plusieurs dizaines de milliers de plateaux  $V_n$  quantifiés, traversant tous l'axe  $I_0 = 0$ , il reste à verrouiller ce dispositif sur le plateau désiré pour disposer d'un standard délivrant des valeurs discrètes de voltage. Le processus réel est complexe et son principe est résumé sur la figure 17.

On impose aux bornes du système une tension  $V_s$  avec une résistance de biais  $R_s$ . La tension  $V_s$  est proche de la tension recherchée et  $R_s$  est choisie de sorte que l'intersection de la caractéristique du système Josephson et de la droite  $V_s - R_s I$  ne comporte qu'un seul (ou quelques) points. Un contrôle judicieux de  $R_s$  et  $V_s$  permet alors d'amener le système Joseph-

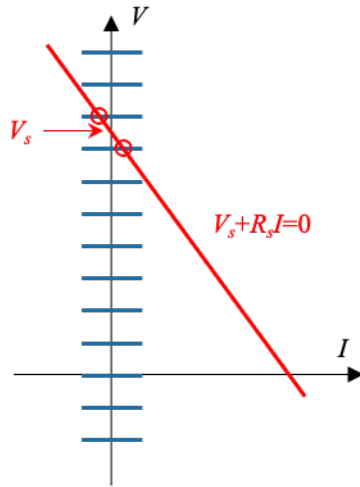


FIGURE 17. Principe du montage électrique permettant de verrouiller l'étalon de tension sur un pic  $V_n$  déterminé. Figure adaptée de HAMILTON (2000) .

son au point choisi :  $I_0 = 0, \bar{V} = V_n$ . Une fois ce plateau atteint, le système peut y rester verrouillé pendant plusieurs heures avec une stabilité relative meilleure que  $10^{-9}$ . On trouvera dans HAMILTON (2000) ou sur la page wikipedia "Josephson Voltage Standard" des exemples d'algorithmes permettant d'utiliser la tension ainsi réalisée pour déterminer une tension inconnue.

## 4 Effet Shapiro pour des jonctions atomiques

### 4-1 Effet Shapiro dans $^3\text{He}$ superfluide

Nous avons décrit en §1-2 le dispositif expérimental du groupe de Berkeley qui a permis l'observation de l'effet Josephson ac avec un bain de  $^3\text{He}$  superfluide (PEREVERZEV, LOSHAK et al. 1997). Ce même montage a permis quelques années plus tard la caractérisation de résonances de Shapiro pour l'hélium 3 par SIMMONDS, MARCHENKOV et al. (2001).

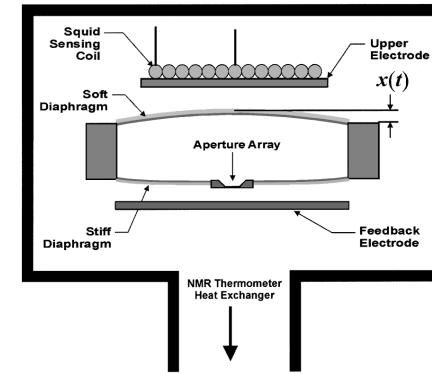


FIGURE 18. Montage expérimental de SIMMONDS, MARCHENKOV et al. (2001) similaire à celui montré en figure 3, avec cette fois-ci une modulation sinusoïdale de la position de la paroi souple (position repérée par  $x(t)$ ), ce qui conduit à une modulation de la pression, analogue mécanique du cas envisagé en §2-4.

Le principe de l'expérience est de moduler de façon contrôlée la pression d'un côté de la membrane rigide percée de trous (figure 18). Cette modulation est obtenue en agissant au moyen d'électrodes disposées sur la paroi souple. C'est l'équivalent mécanique de la modulation de la tension électrique pour une jonction supraconductrice. On est donc directement dans le cas de figure envisagé en §2-4, qui conduit à des plateaux en courant dont la largeur est donnée par des fonctions de Bessel [eq. (35)].

La différence de pression entre les deux côtés de la membrane percée s'écrit donc

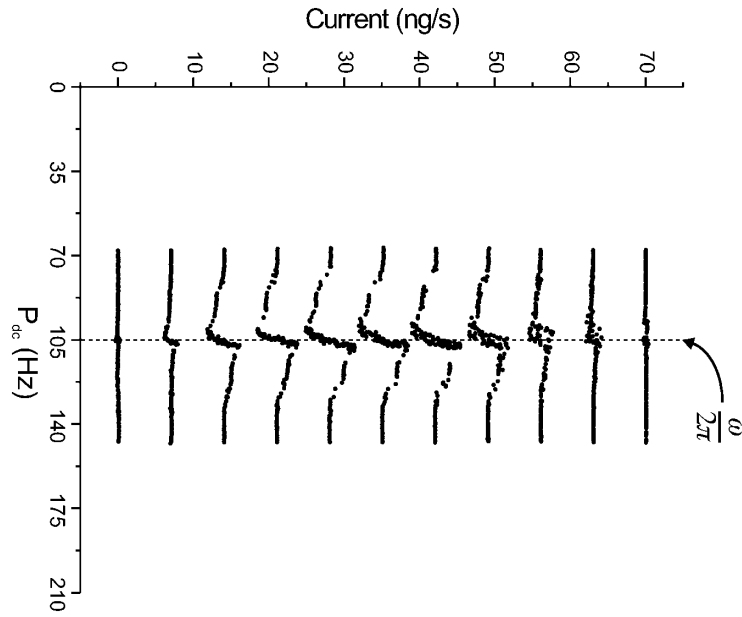
$$P(t) = P_0 + P_1 \sin(\omega t) \tag{37}$$

et un courant de particules de moyenne temporelle non nulle va pouvoir se produire à travers cette membrane si la condition de résonance

$$\frac{2mP_0}{\rho} = n \hbar \omega \tag{38}$$

est remplie (équivalent du résultat (32) avec la masse  $2m$  d'une paire de Cooper pour  $^3\text{He}$ ).

Intéressons-nous au cas  $n = 1$  pour lequel la résonance se produit pour  $\omega/2\pi = 105 \text{ Hz}$  pour la pression  $P_0$  choisie. Pour un choix donné de l'am-

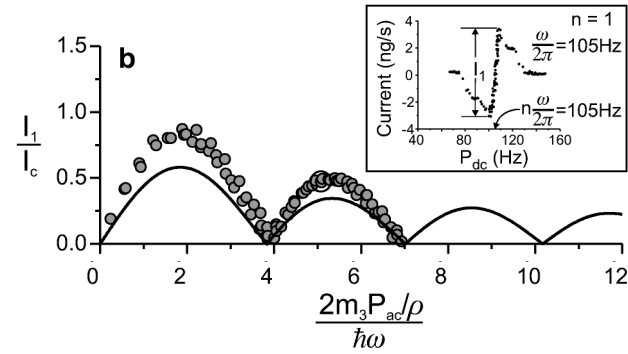


**FIGURE 19.** Caractéristique courant-pression (avec  $P_{dc} \equiv P_0$ ) permettant d'observer une résonance de Shapiro dans un bain de  $^3\text{He}$  superfluide. Les courbes, obtenues pour différentes valeurs de  $P_1$ , sont décalées les unes par rapport aux autres pour améliorer la lisibilité. Figure adaptée de SIMMONDS, MARCHENKOV et al. (2001).

plitude de modulation  $P_1$ , on s'attend alors à observer un plateau de courant de largeur  $2|J_1(2mP_1/\hbar\omega\rho)|$ . Ces plateaux sont bien visibles sur la figure 19 et leur largeur est en bon accord avec la variation en fonction de Bessel attendue (figure 20). SIMMONDS, MARCHENKOV et al. (2001) ont également observé la résonance correspondant à  $n = 2$ .

## 4-2 Barrière mobile dans un gaz quantique

Nous avons vu au chapitre précédent comment une barrière se déplaçant à vitesse constante dans un gaz quantique uniforme permettait de



**FIGURE 20.** Largeur du plateau de courant de la figure 19 en fonction de l'amplitude de modulation en pression  $P_{ac} \equiv P_1$ . Figure extraite de SIMMONDS, MARCHENKOV et al. (2001).

simuler l'équivalent d'un courant constant imposé à une jonction supraconductrice. La généralisation de ce dispositif pour observer l'équivalent de résonances de Shapiro est alors naturel : au lieu de bouger la barrière à vitesse constante, on lui donne un mouvement du type

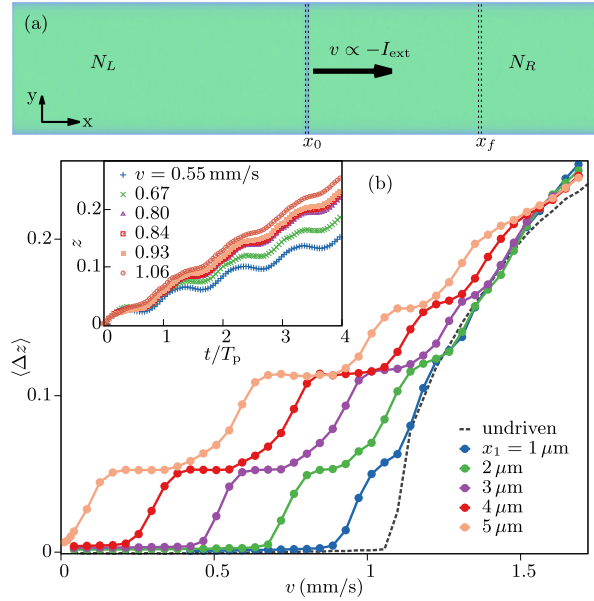
$$x(t) = vt + x_1 \sin(\omega t) \quad (39)$$

comme représenté sur la figure 21, extraite de la proposition théorique de SINGH, POLO et al. (2024).

Dans cette étude théorique, les auteurs ont considéré un gaz 2D de molécules de  $^6\text{Li}$  décrit par l'équation de Gross-Pitaevskii, avec une densité de 5.6 atomes par micron carré. Ils ont pris en compte les effets de température finie en ajoutant un bruit adéquat sur la fonction d'onde initiale. La taille du gaz est  $512 \times 27$  microns et le paramètre d'interaction (sans dimension à 2D) est  $\tilde{g} = 0.1$ .

Après le déplacement de la barrière, ils déterminent les nombres d'atomes  $N_a$  et  $N_b$  de part et d'autre de la barrière et calculent  $z = (N_a - N_b)/(N_a + N_b)$ . Cette valeur de  $z$  est comparée à  $\bar{z}$ , qui serait obtenu si les densités et donc les potentiels chimiques étaient restés parfaitement égaux de part et d'autre de la barrière.

La quantité  $\Delta z = z - \bar{z}$  (équivalent de la tension pour une jonction su-

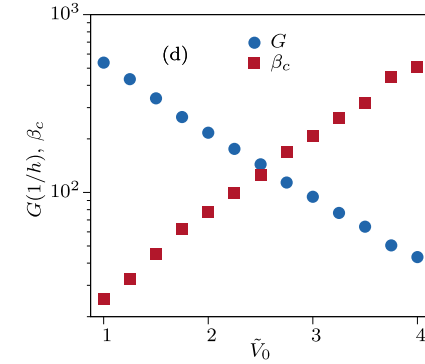


**FIGURE 21.** Barrière mobile dans un gaz 2D. La position de la barrière s'écrit  $x(t) = vt + x_1 \sin(\omega t)$ . Le mouvement donne naissance à des marches de Shapiro pour  $x_1 \neq 0$ . Ces résultats sont obtenus en intégrant numériquement l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps, avec une condition initiale qui simule une température non nulle (truncated Wigner approximation). Figure extraite de SINGH, POLO et al. (2024).

praconductrice), est tracée en figure 21 en fonction de la vitesse moyenne  $v$  (équivalent du courant) pour différentes valeurs de l'amplitude de modulation  $x_1$ , à fréquence  $\omega/2\pi = 45$  Hz fixée. Les résultats sont conformes à ce qu'on attend intuitivement : on trouve des plateaux pour  $\Delta z$ , correspondant à une différence de potentiel chimique  $\Delta\mu$  entre les deux côtés de la jonction :

$$\Delta\mu = n \hbar\omega \quad (40)$$

SINGH, POLO et al. (2024) ont procédé à une calibration soignée de la barrière à partir de la caractéristique calculée. Ils ont montré que l'on pouvait effectivement la décrire par les mêmes paramètres que ceux du



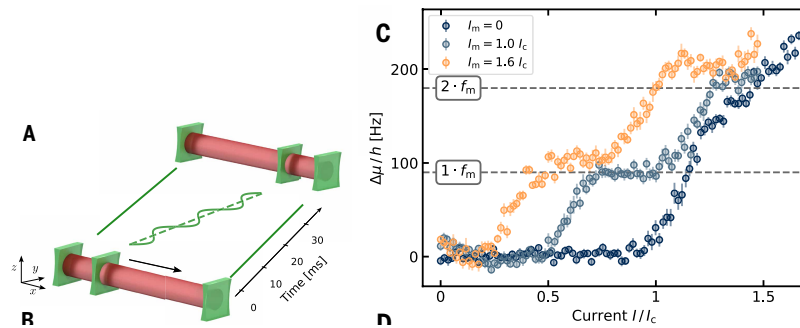
**FIGURE 22.** Paramètres de la barrière utilisée par SINGH, POLO et al. (2024).

modèle RCSJ des jonctions supraconductrices. Nous montrons en figure 22 leurs résultats pour les paramètres  $G \equiv 1/R$  et  $\beta_c$  en fonction de la hauteur  $\tilde{V}_0 = V_0/\mu$  de la barrière. Le potentiel créé par la barrière est supposé ici gaussien avec une demi-largeur à  $1/e^2$  (*waist*) fixée à  $1.1\xi$ , où  $\xi$  est la longueur de cicatrisation.

### 4-3 Observation expérimentale des plateaux

Fin 2025, deux équipes ont publié leur observation de résonances de Shapiro sur un gaz d'atomes froids grâce à une barrière tunnel modulée. BERNHART, RÖHRLE et al. (2025) ont utilisé un gaz 3D de  $^{87}\text{Rb}$  en géométrie cylindrique et DEL PACE, HERNÁNDEZ-RAJKOV et al. (2025) ont travaillé sur un gaz de  $^6\text{Li}$  (fermions) dans le régime unitaire et placé dans une géométrie quasi2D.

Nous montrons en figure 23 le résultat obtenu par BERNHART, RÖHRLE et al. (2025). On voit clairement apparaître des plateaux à  $\Delta\mu$  constant quand on varie la vitesse moyenne de la jonction (donc le courant moyen la traversant). La valeur des plateaux est proche de la valeur quantifiée attendue [eq. (40)] pour la fréquence de modulation choisie,  $\omega/2\pi = 90$  Hz. Quand on varie cette fréquence de modulation entre 50 et 200 Hz, on vérifie que la position des plateaux se déplace en suivant la loi  $\Delta\mu \propto \omega$  (figure



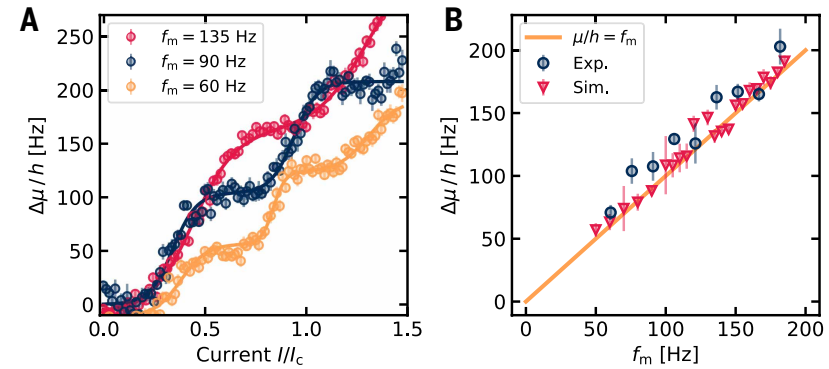
**FIGURE 23.** Gauche : schéma expérimental de BERNHART, RÖHRLE et al. (2025). Droite : caractéristiques courant - potentiel chimique mettant en évidence les deux premières résonances de Shapiro. Pour la plus grande amplitude de modulation (notée ici  $I_m$ ), on notera un écart par rapport à la relation attendue  $\Delta\mu = \hbar\omega$ ; cet écart peut être dû à une incertitude sur la mesure du nombre d'atomes et la forme du potentiel de confinement, qui interviennent dans la calibration du potentiel chimique. Figures extraites de BERNHART, RÖHRLE et al. (2025).

24).

#### 4-4 Les processus dissipatifs en jeu

Pour terminer cette description des expériences récentes sur les résonances Shapiro, il est intéressant de regarder les processus dissipatifs qui permettent à la jonction d'atteindre le régime stationnaire conduisant à la formation de plateaux. Les simulations numériques fondées sur l'équation de Gross-Pitaevskii sont très utiles pour cela, pourvu qu'elles aient été validées précédemment par comparaison avec l'expérience, en ce qui concerne le fonctionnement de la jonction elle-même.

Comme nous l'avons déjà indiqué pour une jonction statique, la nature de ces processus dissipatifs dépend de la dimensionalité du système. Dans l'expérience "tubulaire" de BERNHART, RÖHRLE et al. (2025), on constate que la dissipation est liée à l'émission de solitons sombres ou d'anneaux de vorticité en aval de la jonction, en phase avec le mouvement de la bar-

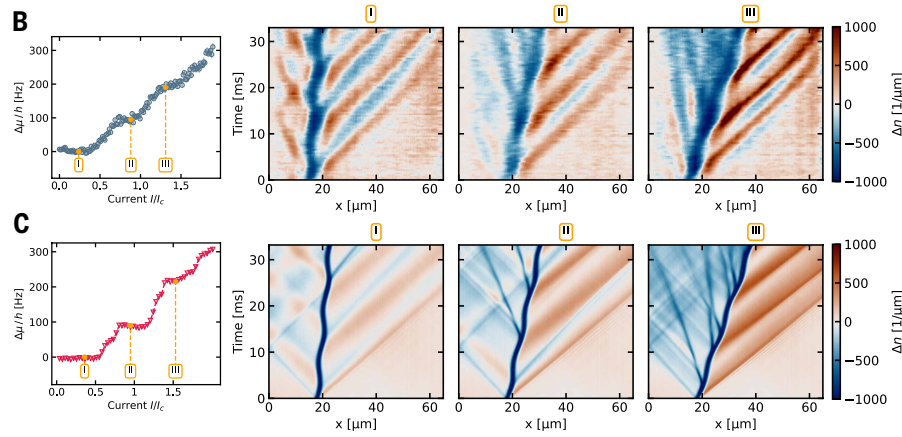


**FIGURE 24.**  volution de la position des plateaux  $\Delta\mu$  avec la fréquence de modulation de la barrière. Figures extraites de BERNHART, RÖHRLE et al. (2025).

ri re. Plus précisément, la stabilisation du plateau  $n$  est obtenue grâce à l'émission de  $n$  solitons en une période d'oscillation (figure 25). La nature solitonique de ces excitations est révélée par la simulation numérique, qui donne le profil de phase en plus de la distribution en densité. La formation de ces solitons est à l'origine de la différence de densité qui apparait entre les deux côtés de la jonction.

Nous montrons également en figure 26 le résultat obtenu par DEL PACE, HERNÁNDEZ-RAJKOV et al. (2025) sur un gaz de Fermi unitaire dans une géométrie quasi2D. Dans ce cas, le processus dissipatif dominant est la formation de paires de vortex de circulations opposées, à raison d'une paire par période de modulation pour le plateau  $n = 1$ .

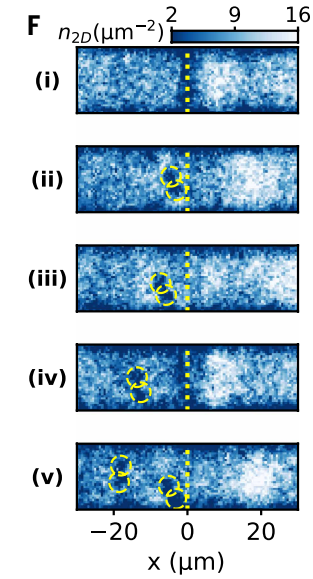
Une question ouverte à ce stade porte sur l'utilisation pratique de ces résonances de Shapiro : peuvent-elles, à l'instar du cas supraconducteur, avoir un intérêt métrologique pour mesurer très précisément des potentiels chimiques ?



**FIGURE 25.** Origine de la dissipation conduisant aux résonances de Shapiro. Haut : expérience, bas : résultats numériques. On voit que  $n$  solitons sont émis par période pour le plateau  $n$ . Il y a également émission de phonons se propageant à la vitesse  $c$ . Figure extraite de BERNHART, RÖHRLE et al. (2025)

## Références

- ABBARCHI, Marco, A AMO, VG SALA, DD SOLNYSHKOV, H FLAYAC, L FERRIER, I SAGNES, E GALOPIN, A LEMAÎTRE, G MALPUECH et al. (2013), « Macroscopic quantum self-trapping and Josephson oscillations of exciton polaritons », in *Nature Physics* **9**, p. 275-279.
- ALBIEZ, Michael, Rudolf GATI, Jonas FÖLLING, Stefan HUNSMANN, Matteo CRISTIANI & Markus K OBERTHALER (2005), « Direct Observation of Tunneling and Nonlinear Self-Trapping in a Single Bosonic Josephson Junction », in *Physical Review Letters* **95**, p. 010402.
- ANDERSON, Philip W (1970), « How Josephson discovered his effect », in *Physics Today* **23**, p. 23-29.
- AVENEL, O & E VAROQUAUX (1988), « Josephson effect and quantum phase slippage in superfluids », in *Physical Review Letters* **60**, p. 416.
- BACKHAUS, S, SV PEREVERZEV, A LOSHAK, JC DAVIS & RE PACKARD (1997), « Direct measurement of the current-phase relation of a superfluid  $^3\text{He-B}$  weak link », in *Science* **278**, p. 1435-1438.



**FIGURE 26.** Évolution d'un gaz de Fermi unitaire dans une géométrie quasi2D en présence d'une barrière modulée (position marquée par la ligne pointillée jaune). On s'est placé ici sur le plateau  $n = 1$  et les instants de mesure sont  $\omega t/2\pi = 1.03, 1.38, 1.7, 2.08, 2.43$ . Figure extraite de DEL PACE, HERNÁNDEZ-RAJKOV et al. (2025)

- BARONE, Antonio & Gianfranco PATERNO (1982), *Physics and applications of the Josephson effect*, Wiley.
- BERNHART, Erik, Marvin RÖHRLE, Vijay Pal SINGH, Ludwig MATHEY, Luigi AMICO & Herwig OTT (2025), « Observation of Shapiro steps in an ultracold atomic Josephson junction », in *Science* **390**, p. 1130-1133.
- DEL PACE, Giulia, Diego HERNÁNDEZ-RAJKOV, Vijay Pal SINGH, Nicola GRANI, Marcia Frómata FERNÁNDEZ, Giulio NESTI, Jorge Amin SEMAN, Massimo INGUSCIO, Luigi AMICO & Giacomo ROATI (2025), « Shapiro steps in strongly-interacting Fermi gases », in *Science* **390**, p. 1125-1129.
- HAMILTON, Clark A (2000), « Josephson voltage standards », in *Review of scientific instruments* **71**, p. 3611-3623.

- JOSEPHSON, Brian David (1962), « Possible new effects in superconductive tunnelling », in *Physics Letters* **1**, p. 251-253.
- KAUTZ, Richard L (1996), « Noise, chaos, and the Josephson voltage standard », in *Reports on Progress in Physics* **59**, p. 935.
- LEVY, Shahar, E LAHOUD, I SHOMRONI & J STEINHAEUER (2007), « The ac and dc Josephson effects in a Bose–Einstein condensate », in *Nature* **449**, p. 579-583.
- PEREVERZEV, Sergey V, A LOSHAK, Scott BACKHAUS, JC DAVIS & RE PACKARD (1997), « Quantum oscillations between two weakly coupled reservoirs of superfluid  $^3\text{He}$  », in *Nature* **388**, p. 449-451.
- POIRIER, Wilfrid, Sophie DJORDJEVIC, Félicien SCHOPFER & Olivier THÉVENOT (2019), « The ampere and the electrical units in the quantum era », in *Comptes Rendus Physique* **20**, p. 92-128.
- SHAPIRO, Sidney (1963), « Josephson currents in superconducting tunneling : The effect of microwaves and other observations », in *Physical Review Letters* **11**, p. 80.
- SIMMONDS, RW, A MARCHENKOV, JC DAVIS & RE PACKARD (2001), « Observation of the Superfluid Shapiro Effect in a  $^3\text{He}$  Weak Link », in *Physical Review Letters* **87**, p. 035301.
- SINGH, Vijay Pal, Juan POLO, Ludwig MATHEY & Luigi AMICO (2024), « Shapiro steps in driven atomic Josephson junctions », in *Physical Review Letters* **133**, p. 093401.
- SPAGNOLLI, G, G SEMEGHINI, L MASI, G FERIOLI, A TRENKWALDER, S COOP, M LANDINI, L PEZZÈ, Giovanni MODUGNO, Massimo INGUSCIO et al. (2017), « Crossing over from attractive to repulsive interactions in a tunneling bosonic Josephson junction », in *Physical Review Letters* **118**, p. 230403.
- SUKHATME, Kalyani, Yury MUKHARSKY, Talso CHUI & David PEARSON (2001), « Observation of the ideal Josephson effect in superfluid  $^4\text{He}$  », in *Nature* **411**, p. 280-283.
- TINKHAM, Michael (2004), *Introduction to superconductivity*, Courier Corporation.