

Chapitre 4

Les jonctions atomiques internes

Sommaire

1	Préliminaire : l'atome habillé	2
1-1	Système à deux niveaux et couplage cohérent . .	2
1-2	Approximation du champ tournant	3
1-3	États habillés et sphère de Bloch	4
1-4	Préparation d'un état habillé	5
2	L'approximation du mode spatial unique	6
2-1	Hamiltonien en seconde quantification	6
2-2	Représentation de Schwinger	7
2-3	Le terme d'interaction	8
3	La jonction Josephson retrouvée	10
3-1	L'approximation classique	10
3-2	Équations du mouvement	10
3-3	Comparaison entre jonctions internes et externes	11
4	États stationnaires et bifurcation	13
4-1	L'état quantique fondamental	14
4-2	Stationnarité des équations classiques	15
4-3	La transition para-ferromagnétique ($E_C < 0$) . .	16
4-4	Le cas $E_C > 0$	18
4-5	Première mise en évidence expérimentale	19
5	Appendice : interaction entre états habillés	20

Dans sa proposition initiale, JOSEPHSON (1962) a considéré deux supraconducteurs couplés par l'intermédiaire d'une barrière physique, formée par une fine couche d'isolant ou de métal normal. Quelques années plus tard, LEGGETT (1966) a proposé d'étendre cette idée à un couplage entre degrés de liberté interne. Dans cette première publication, Leggett considérait un modèle de supraconducteur à deux bandes et décrivait ce qu'il qualifiait "d'effet Josephson interne". Même si le modèle initial n'a pas été validé expérimentalement, cette idée s'est révélée extrêmement féconde par la suite, lorsque la superfluidité de l'hélium 3 a été découverte (1972). Elle a notamment permis d'expliquer les anomalies de la résonance magnétique nucléaire dans ce superfluide (LEGGETT 2004).

Cette idée de coupler deux états internes par une excitation cohérente pour former une jonction Josephson interne se généralise naturellement aux gaz d'atomes froids. Le formalisme que nous avons mis en place aux chapitres précédents va rester valable, avec notamment la description de la dynamique de la jonction à l'aide des deux énergies E_J et E_C . Rappelons que la première décrit le couplage entre les deux états de la jonction, et elle sera associée à la fréquence de Rabi du couplage; la seconde décrit l'énergie de charge de la jonction, c'est-à-dire le coût énergétique pour passer de la situation équilibrée $N_a = N_b = N/2$ à la situation voisine $N_a = N/2 - 1$, $N_b = N/2 + 1$.

Il va néanmoins y avoir des différences quantitatives entre les jonctions internes et les jonctions externes :

- Le couplage tunnel E_J peut être notablement plus grand : au lieu de reposer sur un effet tunnel à travers une paroi, donc un évènement localisé et de faible probabilité, le couplage entre deux états internes a et b se produit sur tout le volume de l'échantillon. Par ailleurs, son intensité peut être rendue arbitrairement grande en augmentant la puissance de l'onde électromagnétique qui couple a et b .
- Le terme de charge E_C est lui aussi modifié. Pour une jonction externe, seules comptent les interactions $a - a$ ou $b - b$, puisque deux atomes situés de part et d'autre de la barrière ne se "voient" quasiment pas. En revanche, pour une jonction interne, les atomes dans les états a et b occupent la même région de l'espace et les interactions $a - b$ jouent un rôle dans l'énergie de charge, au même titre que les interactions $a - a$ et $b - b$. Cela vient enrichir le problème en fournissant un paramètre de contrôle supplémentaire.

Dans les chapitres précédents consacrés aux jonctions externes, nous avons montré que différents régimes de fonctionnement de la jonction sont possibles, selon les valeurs relatives de E_C et de E_J/N^2 . Pour les jonctions externes, on a généralement $E_C \gg E_J/N^2$, de sorte qu'il est difficile d'explorer ces différents régimes. Les jonctions internes, qui offrent en pratique une plus grande plage de valeurs de E_J et E_C , vont permettre cette exploration, en particulier l'étude des bifurcations et des transitions de phase qui peuvent se produire quand $E_C \sim E_J/N^2$.

Dans ce chapitre, nous allons commencer par décrire le couplage d'un atome unique avec une onde électromagnétique résonnante ou quasi-résonnante. Nous adopterons un modèle d'atome à deux niveaux, décrit par un pseudo-spin 1/2. Nous passerons ensuite au cas de N atomes décrits tous par la même fonction d'onde spatiale, de sorte que seul le degré de liberté interne joue un rôle. Dans cette approximation du mode spatial unique, les N atomes peuvent être décrits comme un moment cinétique $J = N/2$, suivant la représentation de Schwinger que nous détaillerons. Nous vérifierons que la limite classique de cette représentation permet de retrouver les équations de Josephson. Nous étudierons pour finir les états stationnaires des jonctions internes et nous montrerons pourquoi la non-linéarité des équations du mouvement peut faire apparaître une transition de phase pour une valeur critique du rapport $\frac{E_C}{E_J/N^2}$.

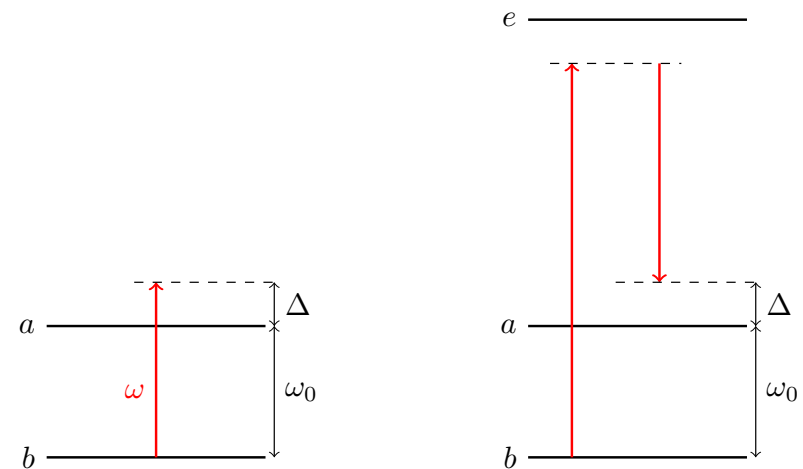


FIGURE 1. Couplage quasi-résonnant entre les deux états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ issus du niveau électronique fondamental. L'excitation peut être directe par une micro-onde (gauche), ou indirecte par un processus Raman stimulé, impliquant le passage virtuel par le niveau électronique excité $|e\rangle$ (droite).

1 Préliminaire : l'atome habillé

1-1 Système à deux niveaux et couplage cohérent

Considérons un atome modélisé par un système "à deux niveaux", notés $|a\rangle$ et $|b\rangle$ et séparés par l'énergie $\hbar\omega_0 > 0$ (figure 1). Cet atome est décrit par l'hamiltonien¹

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} (|a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b|) = \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z. \quad (2)$$

1. Toutes les matrices de cette section sont écrites dans la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ et on rappelle l'expression des matrices de Pauli :

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

On couple ces deux niveaux par un potentiel monochromatique de fréquence ω :

$$\begin{aligned}\hat{V}(t) &= -\hbar\Omega \cos(\omega t + \gamma) (|a\rangle \langle b| + |b\rangle \langle a|) , \\ &= -\hbar\Omega \cos(\omega t + \gamma) \hat{\sigma}_x ,\end{aligned}\quad (3)$$

où Ω est appelée *fréquence de Rabi* du couplage, prise ici positive par convention. En pratique, la paire d'états $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ que nous rencontrerons dans ce cours sera choisie à l'intérieur du niveau électronique fondamental. Le couplage cohérent \hat{V} sera induit par une onde radio-fréquence ou micro-onde, ou encore par une transition Raman, c'est-à-dire l'absorption d'un photon à une longueur d'onde optique suivie de l'émission stimulée d'un autre photon de fréquence voisine.

L'évolution d'un état quelconque du système à deux niveaux, noté

$$|\psi(t)\rangle = \alpha_a(t) |a\rangle + \alpha_b(t) |b\rangle , \quad (4)$$

est donné par l'équation de Schrödinger $i\hbar|\dot{\psi}\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{V})|\psi\rangle$, ce qui donne :

$$\begin{cases} i\dot{\alpha}_a = +\frac{\omega_0}{2}\alpha_a - \Omega \cos(\omega t + \gamma)\alpha_b \\ i\dot{\alpha}_b = -\frac{\omega_0}{2}\alpha_b - \Omega \cos(\omega t + \gamma)\alpha_a \end{cases} \quad (5)$$

Ce système différentiel dépendant du temps n'admet pas de solution analytique exacte, mais nous allons pouvoir le simplifier et le résoudre grâce l'approximation du champ tournant (*Rotative wave approximation, RWA*).

1-2 Approximation du champ tournant

Pour Ω nulle, l'évolution "naturelle" des coefficients α_a et α_b est

$$\alpha_a(t) = \alpha_a(0) e^{-i\omega_0 t/2} \quad \alpha_b(t) = \alpha_b(0) e^{+i\omega_0 t/2} . \quad (6)$$

Nous allons supposer dans tout ce qui suit que la fréquence de Rabi Ω et le désaccord à résonance Δ sont tous les deux petits devant la fréquence ω_0 :

$$\Delta \equiv \omega - \omega_0 : \quad \Omega, |\Delta| \ll \omega_0 \approx \omega . \quad (7)$$

Dans ces conditions, on peut simplifier le système différentiel (5) pour ne garder que la partie résonante du couplage. Plus précisément, on écrit :

$$\cos(\omega t + \gamma) = \frac{1}{2} \left(e^{i(\omega t + \gamma)} + e^{-i(\omega t + \gamma)} \right) \quad (8)$$

et on ne garde dans l'équation d'évolution de α_a que le terme $e^{-i(\omega t + \gamma)}$ qui, quand on le multiplie par $\alpha_b(t)$, donne un terme en $\sim e^{-i\omega t/2}$. Pour l'équation d'évolution de α_b , on ne garde au contraire que le terme $e^{+i(\omega t + \gamma)}$, ce qui conduit au système

$$\begin{cases} i\dot{\alpha}_a = +\frac{\omega_0}{2}\alpha_a - \frac{\Omega}{2}e^{-i(\omega t + \gamma)}\alpha_b \\ i\dot{\alpha}_b = -\frac{\omega_0}{2}\alpha_b - \frac{\Omega}{2}e^{i(\omega t + \gamma)}\alpha_a \end{cases} . \quad (9)$$

Pour trouver la solution exacte de ce système, on utilise le changement de fonctions :

$$\beta_a(t) = \alpha_a(t) e^{+i\omega t/2} \quad \beta_b(t) = \alpha_b(t) e^{-i\omega t/2} \quad (10)$$

qui obéissent au système différentiel indépendant du temps :

$$\begin{cases} i\dot{\beta}_a = -\frac{\Delta}{2}\beta_a - \frac{\Omega e^{-i\gamma}}{2}\beta_b \\ i\dot{\beta}_b = +\frac{\Delta}{2}\beta_b - \frac{\Omega e^{+i\gamma}}{2}\beta_a \end{cases} . \quad (11)$$

Ce système peut être vu comme l'équation de Schrödinger pour un système à deux niveaux évoluant sous l'effet d'un hamiltonien indépendant du temps qui s'écrit dans la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \Omega e^{-i\gamma} \\ \Omega e^{+i\gamma} & -\Delta \end{pmatrix} \quad (12)$$

ou encore

$$\hat{H} = -\hbar\Omega \left(\hat{S}_x \cos \gamma + \hat{S}_y \sin \gamma \right) - \hbar\Delta \hat{S}_z \quad (13)$$

où les trois opérateurs de spin \hat{S}_j , $j = x, y, z$ sont reliés aux trois matrices de Pauli par

$$\hat{S}_j = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_j . \quad (14)$$

Convention sur les opérateur de spins. Dans l'équation (14), nous avons supposé que l'opérateur de spin \hat{S} était sans dimension, de sorte que ses relations de commutation sont du type

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hat{S}_z, \quad (15)$$

avec les deux relations qui s'en déduisent par permutation circulaire. On peut revenir aux opérateurs dimensionnés conventionnels, en les multipliant par \hbar , ce qui conduit à remplacer le membre de droite de (15) par $i\hbar\hat{S}_z$.

1-3 États habillés et sphère de Bloch

Puisque nous nous sommes ramenés à l'étude de l'évolution d'un système à deux niveaux sous l'effet de l'hamiltonien indépendant du temps (12), il est naturel de rechercher les états propres de cet hamiltonien. Introduisons l'angle θ défini par

$$\cos \theta = \frac{\Delta}{\tilde{\Omega}} \quad \sin \theta = \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} \quad \text{avec} \quad \tilde{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}. \quad (16)$$

Comme la fréquence de Rabi Ω est prise ici positive, l'angle θ peut être choisi entre 0 et π . L'hamiltonien (12) se réécrit :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar\tilde{\Omega}}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\gamma} \sin \theta \\ e^{i\gamma} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (17)$$

ses énergies propres sont

$$\boxed{E_1 = -\frac{\hbar\tilde{\Omega}}{2} \quad E_2 = +\frac{\hbar\tilde{\Omega}}{2}} \quad (18)$$

et les états propres associés sont dans la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$:

$$\boxed{|1\rangle = \begin{pmatrix} C \\ e^{i\gamma} S \end{pmatrix} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} S \\ -C e^{i\gamma} \end{pmatrix}} \quad (19)$$

où on a posé

$$C = \cos \frac{\theta}{2} \quad S = \sin \frac{\theta}{2}. \quad (20)$$

L'état $|1\rangle$ est toujours l'état propre de plus basse énergie.

Une visualisation géométrique commode d'un état $|\psi\rangle$ d'un système à deux niveaux (i.e. un *qubit*) consiste à le représenter par un point à la surface d'une sphère, appelée *sphère de Bloch*. Plus précisément, on calcule les trois valeurs moyennes $\langle \psi | \hat{\sigma}_j | \psi \rangle$, ce qui donne un vecteur de norme 1 que l'on reporte sur la sphère. Pour l'état habillé $|1\rangle$ donné en (19), on trouve ainsi les trois composantes $(\sin \theta \cos \gamma, \sin \theta \sin \gamma, \cos \theta)$, de sorte que le point correspondant a pour latitude θ et pour azimuth γ . Le point représentant l'état $|2\rangle$ est diamétralement opposé à celui représentant $|1\rangle$.

Il est utile pour la suite d'avoir en tête quelques cas particuliers (cf. figure 2) :

Cas résonnant : $\Delta = 0$. Les états propres sont alors localisés sur l'équateur de la sphère de Bloch ($\theta = \pi/2$) :

$$\Delta = 0 : \quad |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\gamma} \end{pmatrix} \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\gamma} \end{pmatrix} \quad (21)$$

et ils ont pour énergies $\mp \hbar\Omega/2$.

Désaccord grand et positif : $\Delta \gg \Omega$. L'angle θ est proche de 0, de sorte que l'état $|1\rangle$ est alors proche de $|a\rangle$ et l'état $|2\rangle$ est proche de $|b\rangle$:

$$\Delta > 0 \text{ et } \Delta \gg \Omega : \quad \begin{cases} |1\rangle \approx |a\rangle & E_1 \approx -\hbar\Delta/2 \\ |2\rangle \approx |b\rangle & E_2 \approx +\hbar\Delta/2 \end{cases} \quad (22)$$

Désaccord grand et négatif : $|\Delta| \gg \Omega$. L'angle θ est proche de π , de sorte que l'état $|1\rangle$ est alors proche de $|b\rangle$ et l'état $|2\rangle$ est proche de $|a\rangle$:

$$\Delta < 0 \text{ et } |\Delta| \gg \Omega : \quad \begin{cases} |1\rangle \approx |b\rangle & E_1 \approx -\hbar|\Delta|/2 \\ |2\rangle \approx |a\rangle & E_2 \approx +\hbar|\Delta|/2 \end{cases} \quad (23)$$

Hiérarchie des états. On pourrait s'étonner de voir que pour $\Delta \gg \Omega > 0$, l'état habillé $|1\rangle$ peut être à la fois proche de $|a\rangle$ et constituer l'état de plus basse énergie, alors que l'état $|a\rangle$ a manifestement une énergie supérieure

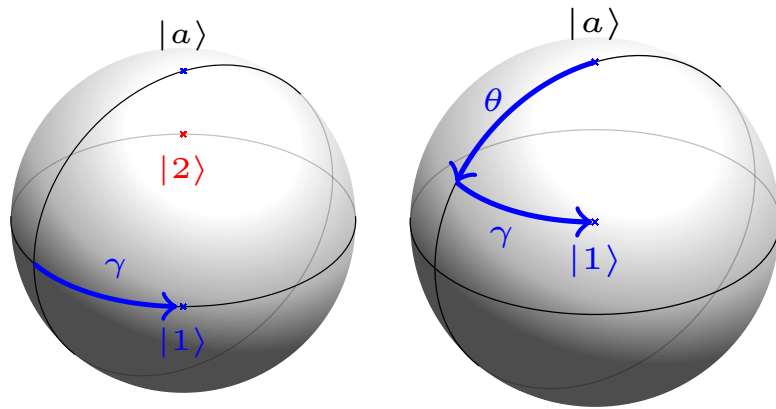


FIGURE 2. Sphère de Bloch et états habillés dans le cas résonnant ($\Delta = 0$) à gauche et de cas d'un désaccord positif à droite. Les états "nus" $|a\rangle$ et $|b\rangle$ sont situés respectivement au pôle nord et au pôle sud de la sphère. Les états habillés $|1\rangle$ et $|2\rangle$ sont toujours diamétralement opposés, l'état $|1\rangle$ est de coordonnées θ, γ et l'état $|2\rangle$ de coordonnées $\pi - \theta, \gamma + \pi$.

à $|b\rangle$ sur la figure 1. Ce paradoxe apparent est dû au passage dans le référentiel tournant. Il se résout simplement si on traite quantiquement le champ micro-onde. On doit alors comparer les énergies de $|1\rangle \approx |a, n\rangle$ et $|2\rangle = |b, n + 1\rangle$, où n désigne le nombre de photons dans le champ, et on en déduit immédiatement la hiérarchie des énergies donnée ci-dessus.

1-4 Évolution cohérente et préparation d'un état habillé

Considérons pour commencer le cas particulier simple d'une excitation résonnante ($\Delta = 0$), avec le choix de phase $\gamma = 0$. Les états habillés sont donc situés sur l'équateur aux longitudes 0 et π . Le système (11) s'écrit alors

$$i\dot{\beta}_a = -\frac{\Omega}{2}\beta_b \quad i\dot{\beta}_b = -\frac{\Omega}{2}\beta_a. \quad (24)$$

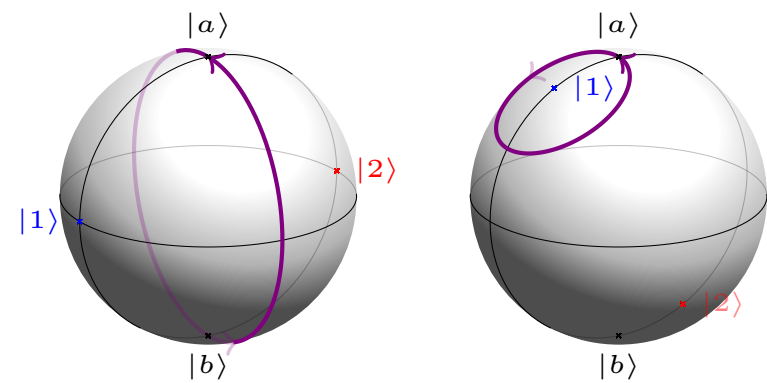


FIGURE 3. Trajectoire suivie sur la sphère de Bloch dans le cas résonnant ($\Delta = 0$) à gauche et dans le cas $\Delta > 0$ à droite. La trajectoire est toujours située sur un cercle orthogonal à l'axe passant par les états habillés $|1\rangle$ et $|2\rangle$. On a pris ici $\gamma = 0$ et $|\psi(0)\rangle = |a\rangle$.

Supposons que le système dans l'état $|a\rangle$ à l'instant initial ; l'état à l'instant t solution de ce système s'écrit alors :

$$\beta_a(t) = \cos \frac{\Omega t}{2} \quad \beta_b(t) = i \sin \frac{\Omega t}{2} \quad (25)$$

ce qui correspond sur la sphère de Bloch à un mouvement circulaire le long du méridien de longitude $\pi/2$. Ce mouvement correspond donc à une rotation autour de l'axe passant par les deux états habillés (figure 3).

Plus généralement, pour toute valeur du triplet (Δ, Ω, γ) , un état initial $|\psi(0)\rangle$ peut se décomposer sur la base des états habillés

$$|\psi(0)\rangle = c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle \quad (26)$$

et son évolution est ensuite donnée par :

$$|\psi(t)\rangle = c_1 e^{+i\tilde{\Omega}t/2} |1\rangle + c_2 e^{-i\tilde{\Omega}t/2} |2\rangle. \quad (27)$$

Cela correspond à un mouvement circulaire uniforme sur la surface de la sphère de Bloch, autour de l'axe joignant les deux états habillés. Les pro-

babilités p_1 et p_2 restent constantes au cours de l'évolution et la fréquence angulaire de ce mouvement est égale à $\tilde{\Omega}$.

Dans la suite de ce cours, nous décrirons des expériences où il faut préparer le système dans un état habillé donné, $|1\rangle$ ou $|2\rangle$, pour un triplet (Δ, Ω, γ) . Pour cela, on peut envisager deux classes de méthodes :

- La première consiste à effectuer un suivi adiabatique : on prépare le système dans l'état nu $|a\rangle$ ou $|b\rangle$, avec le couplage cohérent fortement désaccordé : $|\Delta_{\text{ini}}| \gg \Omega$. Les états habillés coïncident alors quasiment avec les états nus. On diminue ensuite lentement le désaccord pour l'amener à la valeur voulue Δ .
- La seconde méthode consiste à partir d'un autre triplet bien choisi $(\Delta', \Omega', \gamma')$, effectuer une fraction de tour sur le cercle correspondant (cf. figure 3) en s'arrangeant pour que ce cercle passe par l'état habillé désiré. À l'instant où l'état $|\psi(t)\rangle$ coïncide avec l'état habillé, on change soudainement le triplet à la valeur souhaitée (Δ, Ω, γ) et le système reste ensuite dans cet état stationnaire. Par exemple, si on veut préparer l'état habillé $|1\rangle$ à résonance pour la phase $\gamma = 0$, on peut partir de $|a\rangle$, appliquer le couplage $(\Delta' = 0, \Omega' = \Omega, \gamma' = \pi/2)$, puis faire passer soudainement la phase à $\gamma = 0$ après un quart d'oscillation de Rabi (pulse $\pi/2$), c'est-à-dire quand l'état est arrivé sur l'équateur de la sphère de Bloch.

2 L'approximation du mode spatial unique

Nous nous intéressons maintenant au cas de N atomes identiques (bosons) avec deux états internes $|a\rangle$ et $|b\rangle$, couplés de manière cohérente comme au paragraphe précédent. Nous allons considérer la situation la plus simple où tous les degrés de liberté spatiaux des atomes sont gelés grâce à un fort confinement. La seule dynamique possible est donc celle portant sur l'état interne.

Nous reprenons le couplage atome – champ cohérent décrit en §1 en prenant pour simplifier la phase γ égale à 0 (cela revient à faire le choix approprié pour l'orientation de l'axe x de la sphère de Bloch), ce qui donne

pour un atome unique :

$$\hat{H}_{\text{coh}} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \Omega \\ \Omega & -\Delta \end{pmatrix} = -\hbar\Omega \hat{S}_x - \hbar\Delta \hat{S}_z \quad (28)$$

2-1 Hamiltonien en seconde quantification

On considère un système de particules identiques bosoniques, pouvant chacune occuper les deux états $|a\rangle$ et $|b\rangle$. Une base de l'espace de Hilbert du problème est donc formée par les états $|N_a, N_b\rangle$, avec N_a particules dans l'état $|a\rangle$ et N_b particules dans l'état $|b\rangle$ ($N_{a,b} \in \mathbb{N}$). Si on dispose de N particules au total avec la possibilité de transférer les particules de l'état $|a\rangle$ vers l'état $|b\rangle$, la dimension de l'espace de Hilbert est donc $N + 1$ avec la base :

$$\{|N, 0\rangle, |N-1, 1\rangle, \dots, |1, N-1\rangle, |0, N\rangle\}. \quad (29)$$

Dans le formalisme de la seconde quantification, on introduit les opérateurs création \hat{a}^\dagger et \hat{b}^\dagger , et les opérateurs destruction associés \hat{a} et \hat{b} , caractérisés par leur action sur la base $\{|N_a, N_b\rangle\}$:

$$\begin{cases} \hat{a}^\dagger |N_a, N_b\rangle = \sqrt{N_a + 1} |N_a + 1, N_b\rangle \\ \hat{b}^\dagger |N_a, N_b\rangle = \sqrt{N_b + 1} |N_a, N_b + 1\rangle \end{cases} \quad (30)$$

et

$$\begin{cases} \hat{a} |N_a, N_b\rangle = \sqrt{N_a} |N_a - 1, N_b\rangle \text{ si } N_a \neq 0, & \hat{a} |0, N_b\rangle = 0 \\ \hat{b} |N_a, N_b\rangle = \sqrt{N_b} |N_a, N_b - 1\rangle \text{ si } N_b \neq 0, & \hat{b} |N_a, 0\rangle = 0 \end{cases} \quad (31)$$

Les opérateurs nombre de particules dans les états a et b sont donnés par :

$$\hat{N}_a = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad \hat{N}_b = \hat{b}^\dagger \hat{b} \quad (32)$$

et l'opérateur $\hat{N} = \hat{N}_a + \hat{N}_b$ est une constante du mouvement : il commute avec tous les hamiltoniens que nous serons amenés à considérer car le nombre total de particules est conservé.

Les états $|N_a, N_b\rangle$ se construisent par action des opérateurs \hat{a}^\dagger et \hat{b}^\dagger sur l'état vide $|0, 0\rangle$:

$$|N_a, N_b\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^{N_a}}{\sqrt{N_a!}} \frac{(\hat{b}^\dagger)^{N_b}}{\sqrt{N_b!}} |0, 0\rangle \quad (33)$$

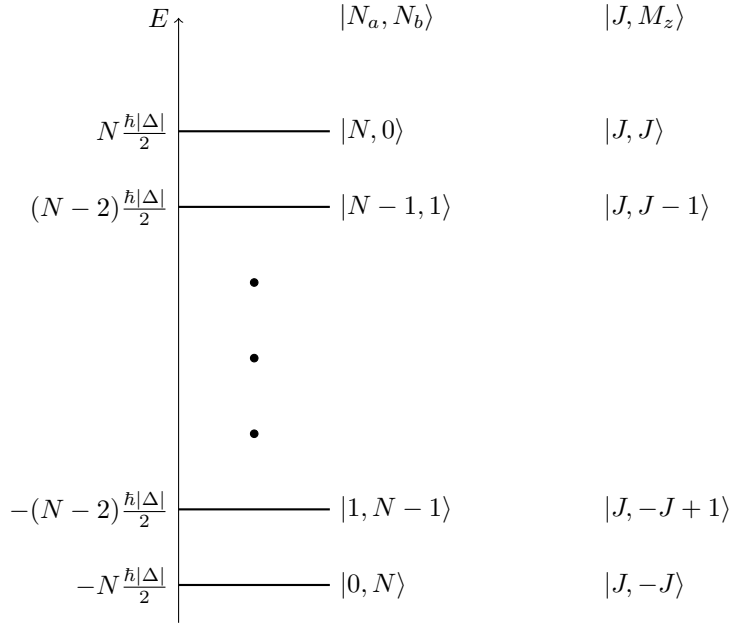


FIGURE 4. Niveaux d'énergie de (34) pour $\Omega = 0$. Les états propres indiqués correspondent au cas $\Delta < 0$, pour lequel l'énergie de l'état $|a\rangle$ est supérieure à l'énergie de l'état $|b\rangle$.

Dans ce formalisme de second quantification, l'hamiltonien (28) décrivant le couplage atome-champ s'écrit

$$\hat{H}_{\text{coh}} = -\frac{\hbar\Omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger) - \frac{\hbar\Delta}{2} (\hat{N}_a - \hat{N}_b). \quad (34)$$

Les niveaux d'énergie correspondants sont indiqués sur la figure 4 dans le cas particulier $\Omega = 0, \Delta < 0$.

2-2 Représentation de Schwinger

Il est utile de disposer d'une représentation de ce problème en termes d'opérateurs de moment cinétique (Schwinger, 1952). Introduisons les trois

opérateurs

$$\begin{cases} \hat{J}_x = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger) \\ \hat{J}_y = \frac{i}{2} (\hat{a} \hat{b}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{b}) \\ \hat{J}_z = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}) \end{cases} \quad (35)$$

qui vérifient les règles de commutation d'un opérateur moment cinétique :

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i \hat{J}_z \quad (36)$$

et les deux autres relations déduites par permutation circulaire (rappelons que nous choisissons ici des opérateurs de spin sans dimension, cf. §1-2). On a par ailleurs :

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 = \frac{\hat{N}}{2} \left(\frac{\hat{N}}{2} + 1 \right). \quad (37)$$

Puisque chaque atome est assimilé à un spin $1/2$, la valeur trouvée pour \hat{J}^2 indique que nous travaillons ici dans l'espace de spin $J = N/2$, c'est-à-dire la valeur maximale que l'on peut obtenir en additionnant les N spins. Une base de l'espace de Hilbert, qui est de dimension $N + 1 = 2J + 1$, est donnée par les états $|J, M_z\rangle$, c'est-à-dire les états propres de \hat{J}^2 et \hat{J}_z avec les valeurs propres $J(J + 1)$ et $M_z \in \{-J, \dots, +J\}$. Le lien avec la base $|N_a, N_b\rangle$ est immédiat (figure 4) :

$$|J, M_z\rangle = |N_a, N_b\rangle \quad \text{avec} \quad J = \frac{1}{2}(N_a + N_b), \quad M_z = \frac{1}{2}(N_a - N_b) \quad (38)$$

ce qui permet de construire explicitement les états $|J, M_z\rangle$ à partir de (33) :

$$|J, M_z\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^{J+M_z}}{\sqrt{(J+M_z)!}} \frac{(\hat{b}^\dagger)^{J-M_z}}{\sqrt{(J-M_z)!}} |0, 0\rangle \quad (39)$$

On vérifie par exemple que l'opérateur échelle,

$$\hat{J}_+ \equiv \hat{J}_x + i\hat{J}_y = \hat{a}^\dagger \hat{b} \quad (40)$$

agit sur un état $|J, M_z\rangle = |N_a, N_b\rangle$ selon

$$\hat{J}_+ |J, M_z\rangle = \alpha |J, M_z + 1\rangle \quad (41)$$

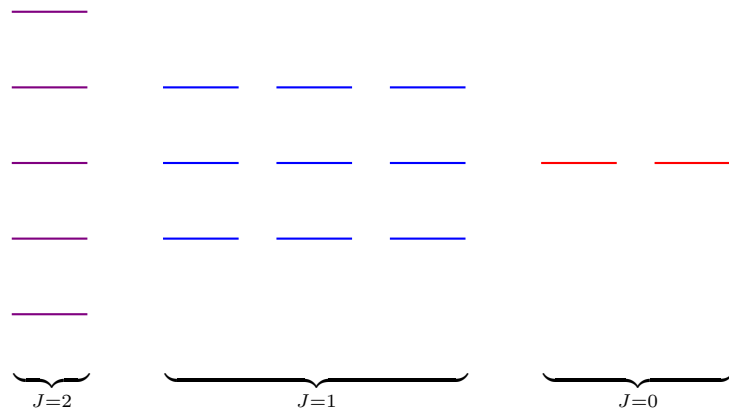


FIGURE 5. Représentation de l'espace de Hilbert de $N = 4$ spins $1/2$, de dimension $2^N = 16$. On travaille ici dans le sous-espace des états complètement symétriques (colonne de gauche), de dimension $2J + 1 = N + 1$, associé au moment cinétique $J = N/2$. L'espace total se décompose en ce sous-espace de moment cinétique $J = 2$, et des sous-espaces associés à des moments cinétiques $J = 1$ et $J = 0$. Ces derniers ne seront pas occupés dans ce qui suit.

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= [J(J+1) - M_z(M_z+1)]^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} [(N_a + N_b)(N_a + N_b + 2) - (N_a - N_b)(N_a - N_b + 2)]^{1/2} \quad (42) \\ &= \sqrt{(N_a + 1)N_b} \end{aligned}$$

Cette construction, proposée par Schwinger en 1952, est très commode pour aborder l'algèbre d'un moment cinétique quelconque (les opérateurs de rotation par exemple) à partir de celle d'un spin $1/2$. L'espace de Hilbert dans lequel on travaille, de dimension $N + 1$, est bien sûr beaucoup plus petit que l'espace total associé à N spins $1/2$, de dimension 2^N (figure 2 5), car on se restreint ici aux états complètement symétriques des spins.

2. La décomposition représentée sur cette figure est obtenue à partir de la procédure suivante. On commence par utiliser la décomposition de l'espace produit tensoriel de deux spins $1/2$ en une somme directe d'un espace associé à un spin 1 (triplet) et un espace associé à un

Partant par exemple de $|N_a = N, N_b = 0\rangle = |J = N/2, J_z = N/2\rangle$, ces états complètement symétriques sont les seuls que l'on peut atteindre par action d'opérateurs symétriques comme \hat{J}_x ou \hat{J}_z .

Si on pouvait agir de manière différenciée sur les spins individuels, ce sous-espace constitué par les états complètement symétriques ne serait pas suffisant et il faudrait travailler dans l'espace total, de dimension 2^N . En l'occurrence, puisque nous nous intéressons à N particules bosoniques indiscernables occupant toutes le même mode spatial, l'état de spin de ces particules doit être complètement symétrique.

L'hamiltonien (34) décrivant le couplage des N atomes avec le champ s'écrit avec ces opérateurs

$$\hat{H}_{\text{coh}} = -\hbar\Omega\hat{J}_x - \hbar\Delta\hat{J}_z \quad (43)$$

ce qui est une généralisation immédiate de (28), en remplaçant l'opérateur \hat{S} pour un spin $1/2$ par \hat{J} pour une assemblée de spins.

2-3 Le terme d'interaction

Nous allons maintenant prendre en compte les interactions binaires entre atomes qui vont venir modifier considérablement la dynamique par rapport à celle étudiée en §1 pour un atome unique.

Nous rappelons que pour un condensat placé dans un état interne donné et dans l'état externe décrit par la fonction d'onde $\Phi(\mathbf{r})$, l'énergie d'interaction s'écrit dans une description champ moyen

$$E_{\text{int}} = \frac{1}{2}gN^2 \int |\Phi(\mathbf{r})|^4 d^3r \quad \text{avec} \quad \int |\Phi(\mathbf{r})|^2 d^3r = 1, \quad (44)$$

où la constante g est reliée à la longueur de diffusion a_s par $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$.

spin 0 (singulet). En notant a, b, c, d les quatre spins $1/2$ de départ, cette décomposition peut se noter symboliquement comme $2_a \otimes 2_b = 3_{ab} \oplus 1_{ab}$ et $2_c \otimes 2_d = 3_{cd} \oplus 1_{cd}$. On couple ensuite les moments cinétiques des espaces (ab) et (cd) entre eux ; le couplage des deux états triplets donne ainsi naissance à un espace de spin 2, un espace de spin 1 et un espace de spin 0, ce qui s'écrit formellement $3_{ab} \otimes 3_{cd} = 5_{abcd} \oplus 3_{abcd} \oplus 1_{abcd}$. On procède même avec les couplages triplet-singulet et singulet-singulet, ce qui donne $3_{ab} \otimes 1_{cd} = 3'_{abcd}, 1_{ab} \otimes 3_{cd} = 3''_{abcd}$ et $1_{ab} \otimes 1_{cd} = 1'_{abcd}$, d'où le résultat final.

Si les atomes peuvent être préparés dans deux états internes a et b , il faut trois coefficients pour décrire les interactions binaires possibles (cf. §5)

- Les deux coefficients intra-espèce g_{aa} et g_{bb}
- Le coefficient inter-espèce g_{ab} .

Nous nous plaçons toujours dans l'approximation du mode externe unique : nous supposons que l'état externe des atomes est décrit par la même fonction d'onde spatiale $\Phi(\mathbf{r})$, qu'ils occupent l'état interne a , l'état interne b ou une superposition des deux. Dans ces conditions, l'énergie d'interaction du gaz préparé dans l'état $|N_a, N_b\rangle$ s'écrit

$$E_{\text{int}} = \frac{\mathcal{I}}{2} (g_{aa}N_a^2 + 2g_{ab}N_aN_b + g_{bb}N_b^2) \quad \text{avec} \quad \mathcal{I} = \int |\Phi(\mathbf{r})|^4 d^3r \quad (45)$$

ce qui correspond en seconde quantification à l'opérateur

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{\mathcal{I}}{2} (g_{aa}\hat{N}_a^2 + 2g_{ab}\hat{N}_a\hat{N}_b + g_{bb}\hat{N}_b^2). \quad (46)$$

Pour un gaz de densité uniforme dans un volume \mathcal{V} , la fonction d'onde normalisée $\Phi(\mathbf{r})$ est égale à $1/\sqrt{V}$ et l'intégrale \mathcal{I} est donnée par $\mathcal{I} = 1/\mathcal{V}$.

Considérons par exemple un gaz préparé dans l'état habillé $|1\rangle$ (celui de plus basse énergie défini en (19)), qui a pour amplitudes $C = \cos(\theta/2)$ et $S = \sin(\theta/2)$ sur a et sur b . Ces amplitudes correspondent à $N_a = NC^2$ et $N_b = NS^2$, d'où l'énergie de champ moyen

$$E_{\text{chp.moy.}} = \frac{\mathcal{I}}{2} g_{11} N^2 \quad \text{avec} \quad g_{11} = C^4 g_{aa} + 2S^2 C^2 g_{ab} + S^4 g_{bb}. \quad (47)$$

Nous montrons dans l'appendice de ce chapitre que l'on peut retrouver ce résultat, obtenu ici par une approche de champ moyen, en étudiant une collision entre deux atomes habillés préparés dans l'état $|1\rangle$.

Pour la suite, il est utile de réécrire l'hamiltonien \hat{H}_{int} en fonction des opérateurs moment cinétique \hat{J} introduit plus haut. Utilisons

$$\hat{N}_a = \frac{N}{2} + \hat{J}_z \quad \hat{N}_b = \frac{N}{2} - \hat{J}_z \quad (48)$$

où le spectre de \hat{J}_z s'étend de $-N/2$ à $N/2$. On peut mettre cet hamiltonien sous la forme

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \bar{g} N^2 \mathcal{I} + \hbar \Delta_{\text{int}} \hat{J}_z + \frac{E_C}{2} \hat{J}_z^2. \quad (49)$$

Pour le premier terme, nous avons défini le paramètre d'interaction moyen

$$\bar{g} \equiv \frac{1}{4} (g_{aa} + 2g_{ab} + g_{bb}). \quad (50)$$

Pour les petits écarts à la jonction équilibrée ($|\langle J_z \rangle| \ll N$), ce premier terme est dominant, mais il est constant. Nous l'omettrons donc dans la suite. Dans le deuxième terme, nous avons introduit le désaccord lié aux interactions

$$\hbar \Delta_{\text{int}} \equiv \frac{1}{2} N \mathcal{I} (g_{aa} - g_{bb}). \quad (51)$$

Enfin, nous avons posé pour le troisième terme

$$E_C \equiv \mathcal{I} (g_{aa} + g_{bb} - 2g_{ab}). \quad (52)$$

Le choix de la notation E_C n'est bien sûr pas anodin, et nous verrons que ce paramètre joue pour notre jonction interne le rôle de l'énergie de charge pour une jonction externe.

Nous pouvons maintenant écrire (à une constante additive près) l'hamiltonien total, somme du couplage cohérent \hat{H}_{coh} et de l'interaction \hat{H}_{int} :

$$\hat{H} = -\hbar\Omega \hat{J}_x - \hbar\tilde{\Delta} \hat{J}_z + \frac{E_C}{2} \hat{J}_z^2 \quad (53)$$

où nous avons réintégré le désaccord lié aux interactions Δ_{int} dans la définition du désaccord :

$$\tilde{\Delta} \equiv \Delta - \Delta_{\text{int}}. \quad (54)$$

L'hamiltonien (53) est connu sous le nom de modèle de Lipkin-Meshkov-Glick (LIPKIN, MESHKOV et al. 1965) et il admet dans certains cas des solutions exactes. Ces auteurs l'ont initialement proposé comme un banc d'essai pour tester différentes méthodes d'approximation, notamment en physique nucléaire. Il a récemment été étudié dans le régime quantique et avec des systèmes atomiques par LANYON, HEMPEL et al. (2011), ISLAM, EDWARDS et al. (2011) et MAKHALOV, SATOOR et al. (2019).

3 La jonction Josephson retrouvée

3-1 L'approximation classique

Une fois connu l'hamiltonien \hat{H} , on peut en déduire les équations du mouvement en point de vue de Heisenberg. Rappelons que dans ce point de vue, l'état du système est indépendant du temps et ce sont les opérateurs qui évoluent dans le temps.

En utilisant la forme générale pour l'évolution d'un opérateur \hat{O} :

$$i\hbar \frac{d\hat{O}}{dt} = [\hat{O}, \hat{H}] \quad (55)$$

on trouve pour les trois composantes du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}$:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{J}_x}{dt} = \bar{\Delta}\hat{J}_y - \frac{E_C}{2\hbar} (\hat{J}_y\hat{J}_z + \hat{J}_z\hat{J}_y) \\ \frac{d\hat{J}_y}{dt} = \Omega\hat{J}_z - \bar{\Delta}\hat{J}_x + \frac{E_C}{2\hbar} (\hat{J}_x\hat{J}_z + \hat{J}_z\hat{J}_x) \\ \frac{d\hat{J}_z}{dt} = -\Omega\hat{J}_y \end{cases} \quad (56)$$

Nous allons maintenant prendre la moyenne de ces équation de Heisenberg sur l'état du système, en supposant que cet état est tel qu'on peut négliger les corrélations entre les différentes composantes de $\hat{\mathbf{J}}$:

$$\langle \hat{J}_y\hat{J}_z \rangle \approx \langle \hat{J}_y \rangle \langle \hat{J}_z \rangle \quad (57)$$

et les deux autres relations déduites par permutation circulaire. Cela revient à remplacer les opérateurs \hat{J}_i par leur valeur moyenne $J_i = \langle \hat{J}_i \rangle$ dans les équations d'évolution ci-dessus

$$\begin{cases} \frac{dJ_x}{dt} = \bar{\Delta}J_y - \frac{E_C}{\hbar} J_y J_z \\ \frac{dJ_y}{dt} = \Omega J_z - \bar{\Delta}J_x + \frac{E_C}{\hbar} J_x J_z \\ \frac{dJ_z}{dt} = -\Omega J_y \end{cases} \quad (58)$$

Nous allons montrer au paragraphe suivant que ces trois équations couplées sont équivalentes à celles décrivant une jonction Josephson.

Auparavant, revenons brièvement sur cette approximation classique. Comme nous l'avons écrit, elle revient à négliger les corrélations entre les trois composantes de \mathbf{J} . Elle est raisonnable pour certains états de spin et dans la limite de grand nombres d'atomes, donc $J \gg 1$. Nous reviendrons sur ses limites et sur le traitement quantique de la jonction dans le prochain chapitre. Pour l'instant, nous pouvons noter que cette approximation de non-corrélation entre les composantes cartésiennes de $\hat{\mathbf{J}}$ entraîne

$$\langle \hat{\mathbf{J}}^2 \rangle \approx \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle \cdot \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle. \quad (59)$$

Nous savons que le membre de gauche est toujours égal à $J(J+1) \approx J^2$; nous en déduisons que dans l'approximation faite ici, le vecteur $\langle \hat{\mathbf{J}} \rangle$ est de norme J . Cette condition est effectivement réalisée pour les états $|M_i = J\rangle$ pour $i = x, y, z$ et plus généralement pour tous les états de type $|M_{\mathbf{u}} = J\rangle$, où le vecteur \mathbf{u} définit un axe de quantification arbitraire. Dans la suite de ce paragraphe, nous allons nous intéresser exclusivement à ce type d'états.

Plus spécifiquement, la relation de commutation entre les trois composantes de $\hat{\mathbf{J}}$, par exemple $[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hat{J}_z$, nous indique que pour les états tels que $\langle J_x \rangle \sim \langle J_y \rangle \sim J$, la non-commutation entre \hat{J}_x et \hat{J}_y peut effectivement être négligée, au moins en première approximation, puisque le membre de gauche est d'ordre J^2 alors que le membre de droite ne peut pas dépasser J . En revanche, pour un état comme $|M_z = J\rangle$, les écarts-types des distributions des valeurs possibles lors d'une mesure de \hat{J}_x et de \hat{J}_y sont $\sim \sqrt{J}$ et la non-commutation de ces opérateurs joue un rôle crucial.

3-2 Équations du mouvement

Puisque nous considérons des états tels que le moment cinétique moyen $\mathbf{J} = \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle$ a une longueur J , nous allons choisir une paramétrisation appropriée de ce vecteur, qui va nous permettre de retrouver les équations de la jonction externe. Pour cela, nous revenons à la définition des trois composantes de $\hat{\mathbf{J}}$ définies en (35) et nous faisons la même substitution qu'au

chapitre 1 :

$$\begin{aligned} \hat{a} &\longrightarrow c_a = \sqrt{N_a} e^{i\varphi_a} \\ \hat{b} &\longrightarrow c_b = \sqrt{N_b} e^{i\varphi_b} \end{aligned} \quad (60)$$

Introduisons les deux variables n et φ :

$$n = \frac{1}{2}(N_a - N_b) \quad \varphi = \varphi_a - \varphi_b \quad (61)$$

de sorte que \mathbf{J} s'écrit :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}N\gamma(n) \cos \varphi \\ -\frac{1}{2}N\gamma(n) \sin \varphi \\ n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \gamma(n) = \sqrt{1 - \frac{4n^2}{N^2}}, \quad (62)$$

ce qui correspond bien à un vecteur de norme $J = N/2$.

On peut alors visualiser l'état de la jonction sur une sphère de Bloch généralisée, tracée dans l'espace (J_x, J_y, J_z) ; cette sphère a pour rayon J , l'angle azimutal de \mathbf{J} correspond (au signe près) à la différence de phase $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$ entre les deux parties de la jonction, et l'écart à l'équateur repère le déséquilibre $n = (N_a - N_b)/2$ de la jonction (figure 6).

Reportons maintenant cette paramétrisation dans l'équation d'évolution (58). Nous obtenons les équations suivantes pour n et φ :

$$\begin{cases} \hbar \dot{n} = \frac{N\hbar\Omega}{2} \gamma(n) \sin \varphi \\ \hbar \dot{\varphi} = \hbar\tilde{\Delta} - nE_C + \frac{N\hbar\Omega}{2} \gamma'(n) \cos \varphi \end{cases} \quad (63)$$

et à l'énergie déduite de (53) :

$$E(\varphi, n) = -\frac{N\hbar\Omega}{2} \gamma(n) \cos \varphi - \hbar\tilde{\Delta} n + \frac{E_C}{2} n^2 \quad (64)$$

On reconnaît exactement les équations du mouvement et l'énergie de la jonction Josephson atomique étudiée dans les chapitres précédents avec la correspondance suivante :

$$\begin{aligned} E_J &\longleftrightarrow \frac{N\hbar\Omega}{2} \\ \overline{\Delta\mu} &\longleftrightarrow -\hbar\tilde{\Delta} \end{aligned} \quad (65)$$

l'énergie de charge E_C jouant le même rôle dans les deux cas.

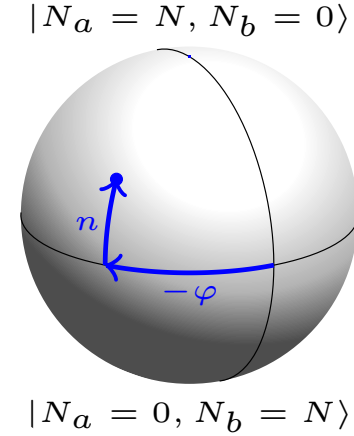


FIGURE 6. Sphère de rayon J permettant de visualiser l'état de la jonction selon la paramétrisation (62). L'angle azimutal repère (au signe près) la différence de phase $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$ entre les états a et b et l'écart à l'équateur la différence de population $n = (N_a - N_b)/2$. Les pôles correspondent aux états $|N, 0\rangle$ et $|0, N\rangle$.

3-3 Comparaison entre jonctions internes et externes

Nous venons de montrer que dans l'approximation d'un gaz mono-mode spatialement, nos modélisations des jonctions internes et des jonctions externes sont formellement équivalentes. Cette équivalence est résumée sur le tableau 4.1. Les différences entre les deux systèmes résident dans les valeurs pratiques des paramètres. Nous allons les passer en revue, d'abord E_C , puis E_J .

La structure du terme capacitif d'une jonction interne

$$E_C = \mathcal{I}(g_{aa} + g_{bb} - 2g_{ab}) \quad (66)$$

ouvre des perspectives intéressantes. Bien sûr, ce terme capacitif E_C est lié aux interactions aussi bien pour une jonction externe qu'interne. Toutefois, pour une jonction externe, il ne fait intervenir qu'un seul facteur de couplage g ; les interactions entre particules à gauche et à droite de la jonction

	Jonction supraconductrice (RCSJ)	Double puits atomique	Jonction interne (Schwinger)
Paramètres	I_c $E_J = \hbar I_c / (2e)$	$E_J = \frac{1}{2} (E[\Phi_1] - E[\Phi_0])$	$E_J = \frac{1}{2} N \hbar \Omega$
	C $E_C = (2e)^2 / C$	$E_C = g \left(\int \Phi_a ^4 + \Phi_b ^4 \right)$	$E_C = 2g_s \int \Phi ^4$ avec $g_s = \frac{1}{2}(g_{aa} + g_{bb}) - g_{ab}$
	R	-	-
Contrôle	I_{ext} (ou V)	déplacement de la jonction (ou $\overline{\Delta\mu}$)	Ω (ou $\tilde{\Delta}$)
Variables	φ et $Q = CV$	φ et $n = \frac{1}{2}(N_a - N_b)$	$\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ avec $J = \frac{N}{2}$ et $\hat{J}_z = \frac{1}{2}(\hat{N}_a - \hat{N}_b)$
Énergie	$\frac{E_C}{2} \left(\frac{Q}{2e} \right)^2 - E_J \cos \varphi - \frac{\hbar I_{\text{ext}}}{2e} \varphi$	$\frac{E_C}{2} n^2 - E_J \gamma(n) \cos \varphi + \overline{\Delta\mu} n$	$\frac{E_C}{2} \hat{J}_z^2 - \hbar \Omega \hat{J}_x - \hbar \tilde{\Delta} \hat{J}_z$
Dynamique	$I_{\text{ext}} = I_c \sin \varphi + \frac{V}{R} + \dot{Q}$ $\hbar \dot{\varphi} = 2eV$	$\hbar \dot{n} = E_J \gamma(n) \sin \varphi$ $\hbar \dot{\varphi} = -\overline{\Delta\mu} - n E_C + E_J \gamma'(n) \cos \varphi$	$\dot{\hat{J}}_z = -\Omega \hat{J}_y$ $i \dot{\hat{J}}_+ = \tilde{\Delta} \hat{J}_+ - \frac{E_C}{2\hbar} (\hat{J}_+ \hat{J}_z + \hat{J}_z \hat{J}_+) - \Omega \hat{J}_z$
Régime Josephson	toujours	$E_J / N^2 \ll E_C$ $\gamma(n) = 1$ $\gamma'(n) = 0$	$\hbar \Omega \ll \mu_s$ avec $\mu_s = N E_C$

TABLE 4.1. Description des principales jonctions rencontrées dans ce cours. Les jonctions supraconductrices sont principalement contrôlées par le courant extérieur I_{ext} . Pour le double puits atomique symétrique, traité ici classiquement, on a posé $\gamma(n) = \left(1 - \frac{4n^2}{N^2}\right)^{1/2}$ et $\gamma'(n)$ désigne la dérivée de $\gamma(n)$. Le cas de la jonction interne est traitée ici quantiquement et présentée dans l'approximation du mode spatial unique. La ligne "Énergie" correspond au cas sans dissipation ($R = \infty$ pour la jonction supraconductrice). Le passage à la limite classique pour la jonction interne, avec $J_+ = J\gamma(n)e^{-i\varphi}$ et $J_z = n$, est possible si $E_C \ll E_J$ et permet de retrouver les résultats du double puits.

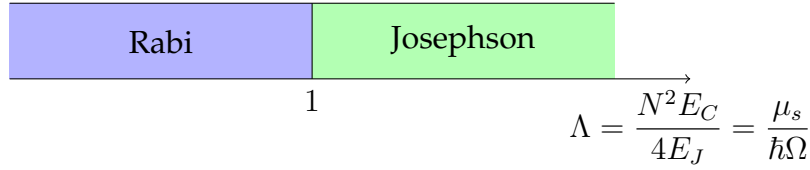


FIGURE 7. Séparation entre régime de Rabi et régime de Josephson.

sont négligeables, puisque ces deux zones sont séparées spatialement. Le terme E_C est généralement positif pour des interactions répulsives, nécessaires pour assurer la stabilité du gaz pour des jonctions étendues (l'expérience de TRENKWALDER, SPAGNOLLI et al. (2016) explore néanmoins le régime attractif dans la limite de faibles interactions). Pour une jonction interne, toutes les particules sont localisées dans la même région d'espace et les interactions contribuent par l'intermédiaire de $g_{aa} + g_{bb} - 2g_{ab}$, un paramètre qui peut être aussi bien positif que négatif³, même si chacun des g_{ij} est choisi positif pour assurer la stabilité du fluide. Dans la littérature, on définit souvent le potentiel chimique μ_s associé aux "excitations de spin", c'est-à-dire à la dynamique interne qui nous intéresse ici :

$$\mu_s = \frac{1}{2}NE_C. \quad (67)$$

Pour un fluide uniforme de volume \mathcal{V} , nous avons signalé que l'intégrale \mathcal{I} était égale à $1/\mathcal{V}$. Le potentiel chimique μ_s est donc proportionnel à la densité $\rho = N/\mathcal{V}$ du fluide :

$$\text{Fluide uniforme : } \mu_s = \left[\frac{1}{2}(g_{aa} + g_{bb}) - g_{ab} \right] \rho. \quad (68)$$

Nous avons vu que le couplage E_J pour une jonction externe est relativement faible, puisqu'il repose sur l'effet tunnel. Pour une jonction interne, la fréquence de Rabi Ω peut être rendue arbitrairement grande (en principe) en augmentant l'intensité de la radiofréquence ou de la micro-onde à l'origine du couplage entre $|a\rangle$ et $|b\rangle$. Plus précisément, nous avons mentionné à plusieurs reprises que la plupart des jonctions atomiques externes

3. Notons que si $g_{ab} > \sqrt{g_{aa}g_{bb}}$, le mélange $a - b$ est non miscible si on le place dans un volume arbitrairement grand.

opèrent dans le "régime Josephson" (figure 7) :

$$\frac{4E_J}{N^2} \ll E_C. \quad (69)$$

En utilisant le tableau de correspondance (65), le rapport entre ces deux énergies s'écrit :

$$\Lambda \equiv \frac{N^2 E_C}{4E_J} \longleftrightarrow \Lambda \equiv \frac{NE_C}{2\hbar\Omega} = \frac{\mu_s}{\hbar\Omega}. \quad (70)$$

Pour une jonction interne, le paramètre Λ peut être positif ou négatif selon le signe de E_C , et il peut être rendu (en valeur absolue) grand ou petit devant 1 selon l'effet recherché. Nous verrons un peu plus loin que le régime $|\Lambda| \sim 1$ est particulièrement intéressant car il se produit une bifurcation autour de ce point. Les jonctions internes permettent donc d'étudier cette transition plus facilement que les jonctions externes.

Notons finalement que l'expression de l'énergie obtenue pour une jonction externe résultait d'un développement de Taylor de l'énergie en fonction du nombre de particules. Ce développement n'était *a priori* valable que pour de faibles excursions $|n| \ll N/2$. Pour la jonction interne, pourvu que l'approximation à un mode spatial soit valide, il est possible d'explorer toute la gamme de valeurs de n entre $-N/2$ et $N/2$.

4 États stationnaires et bifurcation

L'hamiltonien quantique (53) est la somme de deux termes qui ne commutent pas, $-\hbar\Omega\hat{J}_x$ d'une part, $-\hbar\tilde{\Delta}\hat{J}_z + (E_C/2)\hat{J}_z^2$ d'autre part. Pour simplifier son étude, plaçons-nous à désaccord effectif⁴ $\tilde{\Delta}$ nul, et considérons l'hamiltonien

$$\hat{H} = -\hbar\Omega\hat{J}_x + \frac{E_C}{2}\hat{J}_z^2. \quad (71)$$

Nous allons dans ce qui suit nous intéresser à son état fondamental, puis revenir aux équations classiques pour déterminer les différents états stationnaires possibles.

4. Rappelons que $\tilde{\Delta}$ défini en (51) contient la contribution Δ_{int} du terme d'interaction. Par conséquent, le choix $\tilde{\Delta} = 0$ assure que les deux états $|N_a = N, N_b = 0\rangle$ et $|N_a = 0, N_b = N\rangle$ sont états propres de \hat{H} avec la même énergie dans la limite $\hbar\Omega \ll N^2 E_C$, même si $g_{aa} \neq g_{bb}$.

4-1 L'état quantique fondamental : discussion qualitative

La nature de l'état fondamental de l'hamiltonien (71) dépend de la valeur relative des éléments de matrices de ses deux composantes, $\sim N\hbar\Omega/2 = E_J$ d'une part, $E_C N^2/8$ d'autre part.

Si la condition $\hbar\Omega \gg NE_C$, équivalente à $E_J/N^2 \gg E_C$, est remplie, on retrouve le régime appelé "régime de Rabi" dans les chapitres précédents. Dans ce cas, le terme en $-\hbar\Omega\hat{J}_x$ est dominant et l'état fondamental du système est :

$$\hbar\Omega \gg N|E_C| : \quad \text{état fondamental } |M_x = J\rangle, \quad E = -\frac{1}{2}N\hbar\Omega = -E_J. \quad (72)$$

Les interactions jouent un rôle négligeable et tous les atomes sont dans l'état habillé $|1\rangle$.

Dans le régime opposé $\hbar\Omega \ll N|E_C|$, le terme en \hat{J}_z^2 est dominant et l'état fondamental dépend du signe de E_C . On trouve :

$$E_C > 0 \text{ et } \hbar\Omega \ll NE_C : \quad \text{état fondamental } |M_z = 0\rangle, \quad E = 0 \quad (73)$$

ou

$$E_C < 0 \text{ et } \hbar\Omega \ll N|E_C| : \quad \text{état fondamental } |M_z = \pm J\rangle, \quad E = -\frac{1}{8}N^2|E_C|. \quad (74)$$

Le cas $E_C > 0$ correspond à la situation où la moyenne des interactions intra-espèces $(g_{aa} + g_{bb})/2$ est plus grande que l'interaction inter-espèce g_{ab} . Il n'y a pas dans ce cas de comportement singulier : quand on varie le rapport $NE_C/\hbar\Omega$ de 0 à $+\infty$, on peut s'attendre (et c'est confirmé par le calcul) à ce que l'état propre évolue continûment dans l'espace de Hilbert associé au moment cinétique pour passer de $|M_x = -J\rangle$ à $|M_z = 0\rangle$ (pour J entier, donc N pair⁵). Dans les deux cas, les populations moyennes N_a et N_b restent égales à $N/2$.

Nous reviendrons dans le chapitre suivant, consacré aux condensats fragmentés, sur cette évolution continue entre les deux types d'états $|M_x = J\rangle$ et $|M_z = 0\rangle$. Pour l'instant, nous notons simplement que l'état

5. Si N est impair, donc J demi-entier, les états de plus basse énergie sont $|M_z = \pm 1/2\rangle$, c'est-à-dire $n = \pm 1$.

$|M_z = 0\rangle$, qui s'écrit aussi $|N_a = \frac{N}{2}, N_b = \frac{N}{2}\rangle$, conduit aux valeurs moyennes $\langle \hat{J}_i \rangle = 0$ pour les trois coordonnées $i = x, y, z$. Ce n'est donc pas un état pour lequel on peut négliger les corrélations entre composantes de $\hat{\mathbf{J}}$ puisque $\langle \hat{\mathbf{J}}^2 \rangle = J(J+1)$ est très différent de $\langle \hat{\mathbf{J}} \rangle \cdot \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle = 0$; en particulier, il n'est pas possible de le représenter comme un point à la surface de la sphère de rayon J montrée en figure 6.

Le cas $E_C < 0$ correspond à la situation où l'énergie d'interaction inter-espèce g_{ab} est plus grande que $(g_{aa} + g_{bb})/2$. Il peut alors être énergétiquement favorable de placer les atomes majoritairement dans l'état a ou dans l'état b , plutôt que garder un mélange équilibré. Plus précisément, l'existence des deux états propres dégénérés $|M_z = \pm J\rangle$ (tous les atomes en a ou tous les atomes en b) quand Ω devient négligeable indique la possibilité d'une bifurcation quand on varie $\hbar\Omega/|E_C|$. Cette bifurcation peut s'analyser dans la limite classique puisque les états en jeu sont bien du type $|M_i = J\rangle$ et elle correspond à une transition de phase avec brisure de la symétrie \mathbb{Z}_2 .

L'état de plus haute énergie. L'espace de Hilbert associé au spin J est de dimension finie, ce qui permet de s'intéresser également à l'état de plus haute énergie. En fait, il y a une dualité entre les résultats pour cet état et ce que nous venons de voir pour l'état fondamental. Plus précisément, on a les résultats suivants :

- Pour $\hbar\Omega \gg N|E_C|$, l'état de plus haute énergie est $|M_x = -J\rangle$, d'énergie $+N\hbar\Omega/2$.
- Pour $\hbar\Omega \ll N|E_C|$, cet état dépend lui aussi du signe de E_C . Pour $E_C > 0$, cet état est $|M_z = \pm J\rangle$, d'énergie $E = +\frac{1}{8}N^2|E_C|$. Pour $E_C < 0$, cet état est $|M_z = 0\rangle$ d'énergie $E = 0$.

La possibilité d'observer une bifurcation est donc inversée par rapport à ce qu'on a trouvé pour l'état fondamental : elle va se produire pour cet état de haute énergie dans le cas $E_C > 0$. Nous en verrons un exemple un peu plus loin.

4-2 Stationnarité des équations classiques

Nous nous plaçons à partir de maintenant dans le cas où le système a été préparé dans un état tel que les équations du mouvement classiques (63) et l'énergie associée (64) sont une bonne approximation de la dynamique du système. Pour simplifier les calculs, nous allons nous placer dans le cas d'un désaccord $\tilde{\Delta}$ nul et nous réécrivons l'énergie sous la forme

$$E(\varphi, n) = \frac{E_C}{2} n^2 - E_J \gamma(n) \cos \varphi \quad \text{avec} \quad \gamma(n) = \sqrt{1 - \frac{4n^2}{N^2}} \quad (75)$$

où on a utilisé la correspondance $E_J = N\hbar\Omega/2$. Rappelons que l'énergie E_J choisie positive par convention, alors que E_C peut être positive ou négative, selon le signe de $g_{11} + g_{22} - 2g_{12}$.

Recherchons les points où l'énergie $E(\varphi, n)$ est extrémale :

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0 & \Rightarrow & E_J \gamma(n) \sin \varphi = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial n} = 0 & \Rightarrow & E_C n - E_J \gamma'(n) \cos \varphi = 0 \end{cases} \quad (76)$$

La première équation impose⁶

$$\sin \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi = \pi, \quad (77)$$

et nous posons dans ce qui suit $\varepsilon = \cos \varphi$ avec :

$$\varepsilon = +1 \text{ si } \varphi = 0 \quad \varepsilon = -1 \text{ si } \varphi = \pi. \quad (78)$$

En utilisant

$$\gamma'(n) = -\frac{4n/N^2}{\gamma(n)}, \quad (79)$$

la seconde équation de (76) s'écrit alors

$$n \left(E_C + \frac{\varepsilon}{\gamma(n)} \frac{4E_J}{N^2} \right) = 0 \quad (80)$$

6. Nous écartons ici la possibilité $\gamma(n) = 0$, où tous les atomes occupent l'état a ou l'état b , qui ne serait pertinente qu'en l'absence de couplage.

On trouve alors deux types de solutions possibles :

$$\text{type 1 : } n = 0 \quad (81)$$

ce qui correspond à une jonction équilibrée avec $\bar{N}_a = \bar{N}_b$, d'énergie $-\varepsilon E_J$, et

$$\text{type 2 : } \gamma(n) = -\varepsilon \frac{4E_J}{N^2 E_C} = -\frac{\varepsilon}{\Lambda}, \quad (82)$$

où nous voyons apparaître une nouvelle fois le rapport

$$\Lambda \equiv \frac{N^2 E_C}{4E_J}. \quad (83)$$

La quantité $\gamma(n)$ étant par construction comprise entre 0 et 1, ce deuxième type de solution n'existe que si

$$|\Lambda| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{4E_J}{N^2} < E_C \quad \text{ou} \quad E_C < -\frac{4E_J}{N^2} < 0, \quad (84)$$

ce qui correspond au régime appelé "régime Josephson" (par opposition au "régime de Rabi"). Quand $|\Lambda| > 1$, l'énergie de cette solution de type 2 est :

$$E = \frac{E_J}{2} \left(\Lambda + \frac{1}{\Lambda} \right) \quad (85)$$

et le déséquilibre n de la jonction est donné par :

$$|\Lambda| > 1 : \quad n = \pm \frac{N}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}}. \quad (86)$$

En résumé, on peut donc distinguer deux cas :

- Si $|\Lambda| < 1$, c'est-à-dire pour une grande fréquence de Rabi Ω ou, de manière équivalente, un fort couplage tunnel E_J , alors seul le premier type de solution est acceptable et les deux valeurs possibles de φ conduisent aux états d'énergie extrémale :

$$\begin{aligned} \text{énergie minimale pour } \varphi = 0 : & \quad E = -E_J = \frac{1}{2} N \hbar \Omega \\ \text{énergie maximale pour } \varphi = \pi : & \quad E = +E_J = \frac{1}{2} N \hbar \Omega \end{aligned} \quad (87)$$

— Si $|\Lambda| > 1$, donc une faible fréquence de Rabi, les états stationnaires de type 1 ($n = 0$) restent possibles avec l'énergie $E = \pm E_J$, mais on trouve également ceux de type 2 avec l'énergie donnée en (85). La nature de ces points stationnaires (état d'énergie minimale ou maximale, point selle?) dépend du signe de Λ , donc de E_C , et nous la discutons dans les deux paragraphes suivants.

4-3 La transition para-ferromagnétique ($E_C < 0$)

Pour étudier la nature des points stationnaires que nous avons trouvés au paragraphe précédent, nous allons discuter séparément les cas $E_C < 0$ et $E_C > 0$.

Nous nous intéressons dans ce paragraphe au cas E_C négatif ou, de façon équivalente, Λ négatif. Rappelons que ce cas est peu fréquent pour des jonctions atomiques externes car il faut disposer d'interactions attractives entre atomes et choisir le potentiel de piégeage de façon judicieuse pour éviter l'effondrement du gaz sur lui-même (TRENKWALDER, SPAGNOLLI et al. 2016).

Pour une jonction interne, ce cas est obtenu pour :

$$E_C < 0 : \quad g_{ab} > \frac{1}{2}(g_{aa} + g_{bb}) . \quad (88)$$

Dans ce cas, l'énergie des points stationnaires de type 2 donnée en (85), est strictement inférieure à celle trouvée pour les points de type 1, c'est-à-dire $E = -E_J$. Ces points de type 2, quand ils existent, constituent donc l'état fondamental du système. Cet état est dégénéré puisque les deux possibilités $n = \pm \frac{N}{2}(1 - \frac{1}{\Lambda^2})^{1/2}$ sont possibles [cf (86)].

On est ici en présence de l'équivalent d'une transition de phase du second ordre quand on varie Λ autour de la valeur

$$\Lambda_c = -1 \quad (89)$$

Cette transition correspond précisément à la bifurcation que nous avons pressentie en §4-1. Pour la caractériser, commençons par remarquer que pour $E_C < 0$, les solutions de type 2 données en (82) sont obtenues pour $\epsilon = 1$, donc $\varphi = 0$. Considérons des valeurs de Λ proches de Λ_c pour

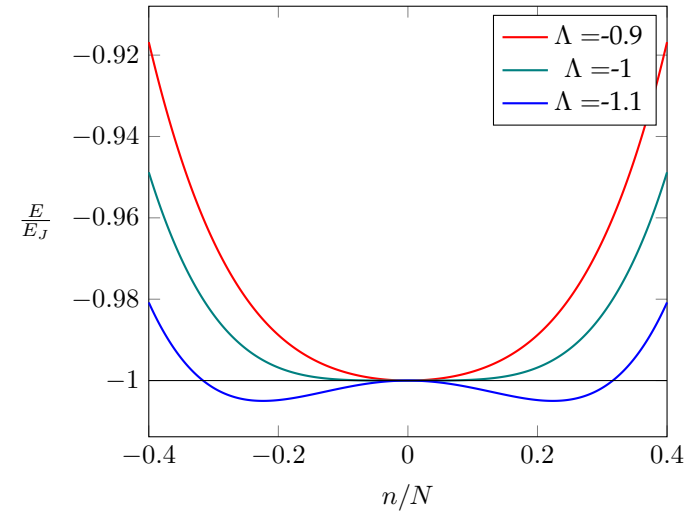


FIGURE 8. Cas $\Lambda < 0$: bifurcation pour l'énergie minimale quand on varie le paramètre Λ autour de la valeur critique $\Lambda_c = -1$.

lesquelles les valeurs n des minima de type 2 restent proches de 0. On peut alors utiliser l'énergie (75) et en faire un développement limité pour les petites valeurs de n :

$$E(n, \varphi = 0) \approx E_J \left[-1 + \frac{2n^2}{N^2}(1 + \Lambda) + \frac{2n^4}{N^4} \right] . \quad (90)$$

La recherche du ou des minima de cette énergie permet de retrouver les résultats de §4-2 :

- Pour $1 + \Lambda > 0$, donc $-1 < \Lambda < 0$ (grande fréquence de Rabi), cette fonction est minimale en $n = 0$ et son minimum vaut $-E_J$. On retrouve le minimum de type 1.
- Pour $\Lambda < -1$ (petite fréquence de Rabi), les minima sont situés en

$$n \approx \frac{N}{\sqrt{2}} \sqrt{|1 + \Lambda|} \quad (91)$$

en accord avec (86) pour $\Lambda \approx -1$.

On retrouve ici la phénoménologie habituelle d'une transition de phase du deuxième ordre (figure 10).

Il est instructif de visualiser cette transition en représentant les isocontours en énergie sur la sphère de rayon J de la figure 6. Rappelons que les points sont paramétrés par $(\frac{N}{2} \cos \varphi \gamma(n), \frac{N}{2} \sin \varphi \gamma(n), n)$. Pour $E_C < 0$, le minimum ou les minima d'énergie sont toujours situés sur le méridien $\varphi = 0$. Pour $-1 < \Lambda < 0$, il n'y a qu'un minimum et il est localisé sur l'équateur (figure 9, en haut à gauche). Pour $\Lambda < -1$, les deux minima sont localisés de manière symétrique de part et d'autre de l'équateur et le point $n = 0, \varphi = 0$ devient alors un point col (en bas à gauche). Son symétrique $n = 0, \varphi = \pi$ reste quant à lui le maximum absolu (colonne de droite de la figure 9).

Lien avec la transition magnétique para-ferro. La transition entre un état paramagnétique et un état ferromagnétique peut se modéliser par un système tri-dimensionnel de N moments magnétiques interagissant les uns avec les autres par un couplage modélisé⁷ par $V = -J \sum_{i,j} \mu_i \cdot \mu_j$, avec $J > 0$. L'état fondamental du système est donc obtenu quand tous les moments magnétiques sont alignés les uns avec les autres, la direction de cet alignement pouvant être quelconque.

Si l'assemblée de moments magnétique est à température non nulle, cet alignement est en compétition avec le désordre associé aux fluctuations thermiques. On a donc une compétition entre deux phases possibles, une phase ferromagnétique avec une aimantation moyenne $\langle \mu \rangle$ non nulle à basse température et une phase paramagnétique d'aimantation nulle au dessus d'une certaine température critique.

Dans ce que nous avons étudié ici, le rôle de la température est joué par l'excitation cohérente, qui tend à faire osciller les atomes entre les états a et b , et celui des interactions est décrit par le terme $E_C \hat{J}_z^2$ avec $E_C < 0$, qui tend à mettre tous les atomes dans le même état interne a ou b .

Remarque sur la dégénérescence des états d'énergie minimale. Dans un traitement quantique du problème pour $\Omega = 0$ (c'est-à-dire $E_J = 0$ ou

⁷. Ce couplage peut être seulement entre proches voisins ou à plus longue portée, cela n'a pas d'impact sur notre discussion qualitative.

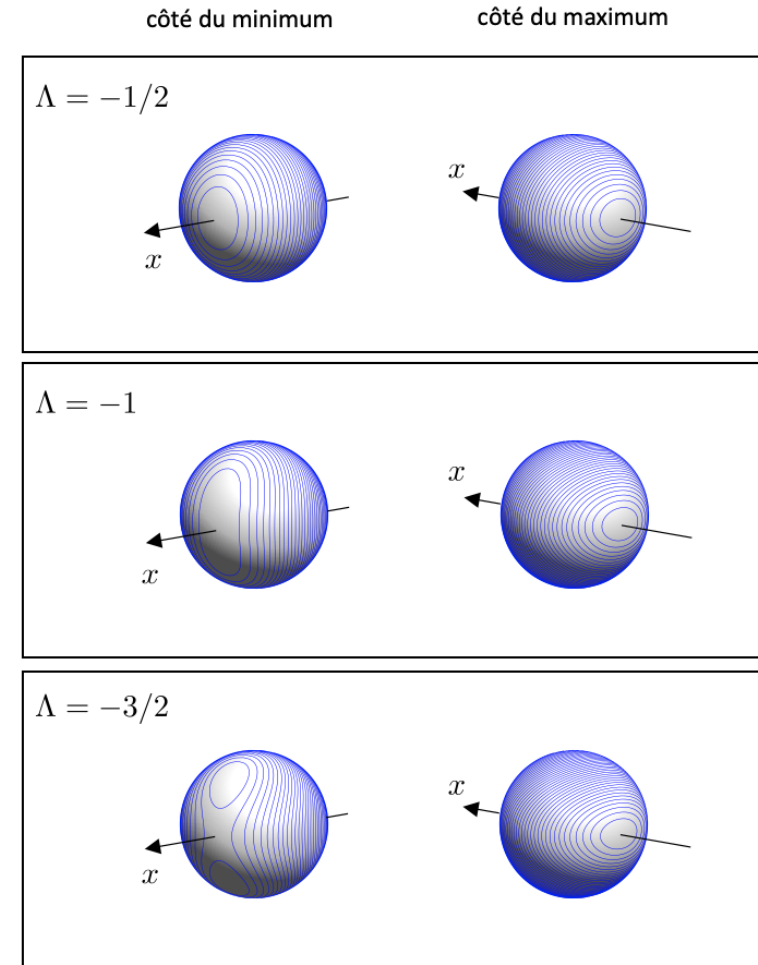


FIGURE 9. Cas d'une jonction avec une énergie de charge E_C négative. On a tracé les courbes iso-énergies sur la sphère de rayon $J = N/2$. La colonne de gauche montre la région du (ou des) minimum(s), toujours situé(s) sur le méridien $\varphi = 0$. La colonne de droite montre la région du maximum, situé sur le méridien $\varphi = \pi$. La première ligne est en deçà du point critique ($\Lambda = -1/2$) avec le minimum sur l'équateur, la deuxième au point critique ($\Lambda = -1$), et la troisième au delà ($\Lambda = -3/2$). La jonction est supposée ici être à résonance ($\tilde{\Delta} = 0$).

encore $\Lambda = 0$), les deux états d'énergie minimale de l'hamiltonien (71), $\hat{H} = \frac{E_C}{2} \hat{J}_z^2$, sont $|M_z = \pm J\rangle$, ce qui conduit à un niveau fondamental dégénéré d'énergie $-|E_C|J^2/2$. Ces deux états correspondent aux deux pôles de la sphère de la figure 9.

Dès que Ω est non nul, il se produit une levée de dégénérescence de ce niveau fondamental. Plus précisément, les deux états $|M_z = \pm J\rangle$ sont couplés par le terme en $\hbar\Omega\hat{J}_x$ de l'hamiltonien (71), qui possède des éléments de matrice non nuls entre $|M_z\rangle$ et $|M_z \pm 1\rangle$.

Les véritables états propres sont alors en bonne approximation les combinaisons⁸ symétriques et antisymétriques de $|M_z = \pm J\rangle$. Toutefois, ce couplage fait intervenir N actions de $\hbar\Omega\hat{J}_x$ avec des écart en énergie $\propto E_C$ entre niveaux intermédiaires, et son effet sera donc proportionnel à $(\hbar\Omega/E_C)^N$. Ce couplage devient donc exponentiellement petit quand N augmente : pour $N \gg 1$, l'écart en énergie entre les deux états symétrique et antisymétrique est très faible et on retombe sur les deux états dégénérés trouvés classiquement.

4-4 Le cas $E_C > 0$

Considérons maintenant le cas opposé du précédent, c'est-à-dire $E_C > 0$ (i.e. $\Lambda > 0$). Ce cas est celui ordinairement rencontré pour une jonction externe (interactions répulsives, donc $g > 0$). Pour une jonction interne, il est obtenu pour

$$g_{ab} < \frac{1}{2} (g_{aa} + g_{bb}). \quad (92)$$

La situation se déduit du cas $\Lambda < 0$ en inversant les rôles des maxima et des minima, et nous énonçons donc les différents résultats sans reprendre l'analyse détaillée :

- L'état $n = 0, \varphi = 0$ reste l'état fondamental quel que soit $\Lambda > 0$.
- Pour $0 < \Lambda < 1$ (grande fréquence de Rabi), le seul autre état stationnaire est l'état $n = 0, \varphi = \pi$, qui est l'état de plus haute énergie (cf. (87)).

8. Chaque combinaison constitue, pour $J \gg 1$, un état de type "chat de Schrödinger", c'est-à-dire la superposition cohérente de deux états classiquement très différents. Une réalisation expérimentale d'un tel chat (ou plutôt un "chaton") pour un moment cinétique $J = 8$, donc $N = 16$, est décrite par CHALOPIN, BOUAZZA et al. (2018).

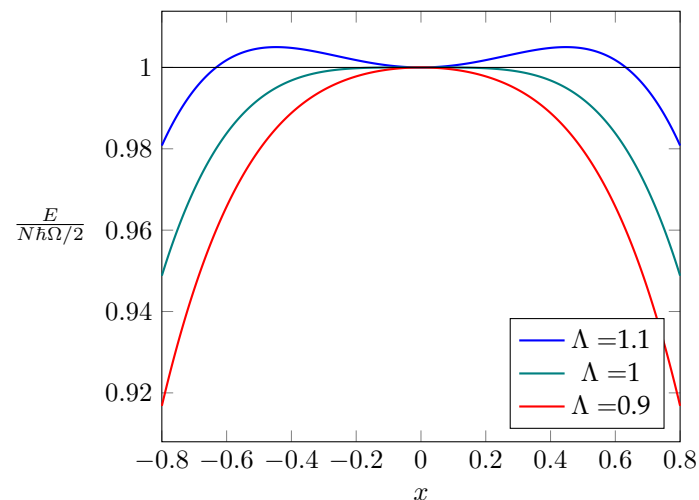


FIGURE 10. Cas $\Lambda > 0$: bifurcation pour l'énergie maximale quand on varie le paramètre Λ autour de la valeur critique $\Lambda_c = +1$.

- Pour $1 < \Lambda$ (petite fréquence de Rabi), l'état $n = 0, \varphi = \pi$ est un point selle et les deux états d'énergie maximale sont obtenus pour $n = \pm \frac{N}{2} (1 - \frac{1}{\Lambda^2})^{1/2}$ et $\varphi = \pi$.

Nous avons représenté sur la figure 11 les iso-contours en énergie dans le cas $E_C > 0$. Le fonctionnement habituel d'une jonction correspond à la ligne du bas, $\Lambda \gg 1$, c'est-à-dire $E_C \gg \frac{E_J}{N^2}$. On y retrouve deux régimes importants, identifiés aux chapitres précédents, correspondant à un mouvement sur un iso-contour (figure 12) :

- les oscillations plasmas autour du minimum, situé sur l'équateur en $\varphi = 0$, que nous avons décrites au chapitre 1.
- le régime d'auto-piégeage pour l'effet Josephson alternatif, décrit au chapitre 3, obtenu pour des conditions initiales s'écartant significativement de l'équateur. Ce mouvement correspond à un mouvement à latitude presque constante autour de la sphère. L'oscillation résiduelle de la latitude donne l'amplitude de l'oscillation du courant dans la jonction.

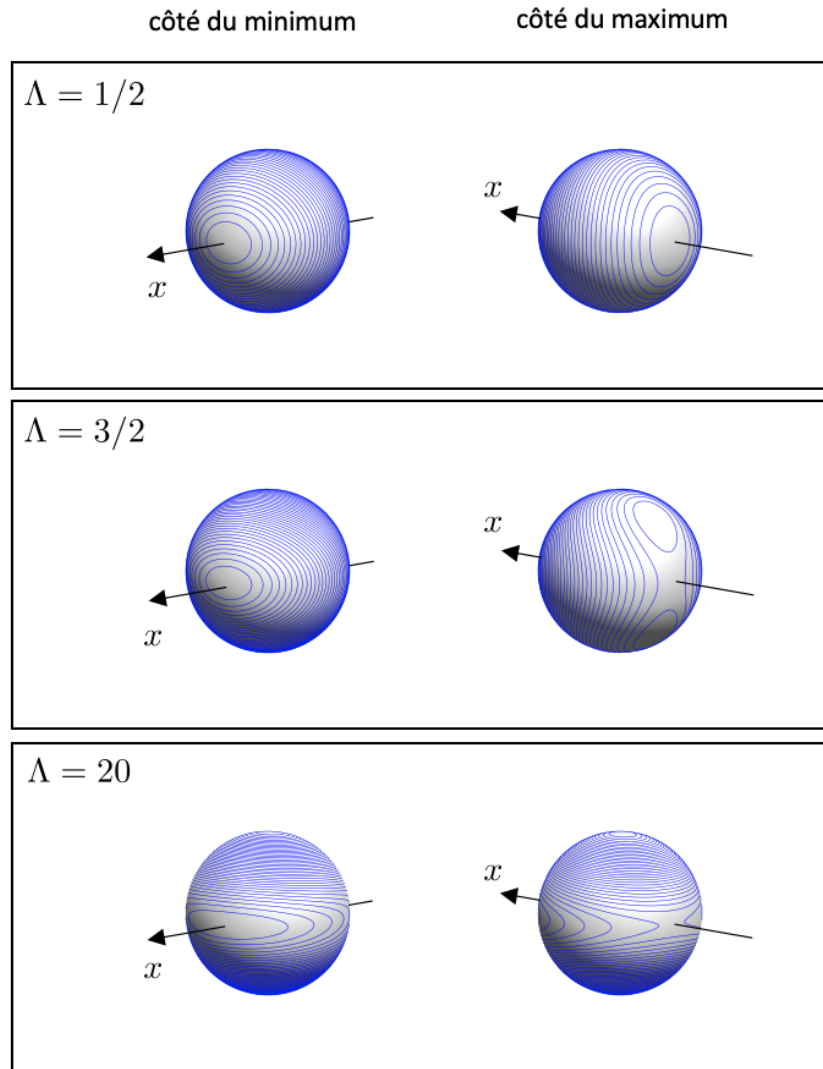


FIGURE 11. Cas d'une jonction "usuelle" : $E_C > 0$. Le tracé suit le même principe que celui de la figure 9 avec les trois lignes $\Lambda = 1/2$, $\Lambda = 3/2$ et $\Lambda = 20$. La position du minimum, visible sur la colonne de gauche, reste alors inchangée. La position du maximum, visible sur la colonne de droite, subit une bifurcation pour $\Lambda = 1$.

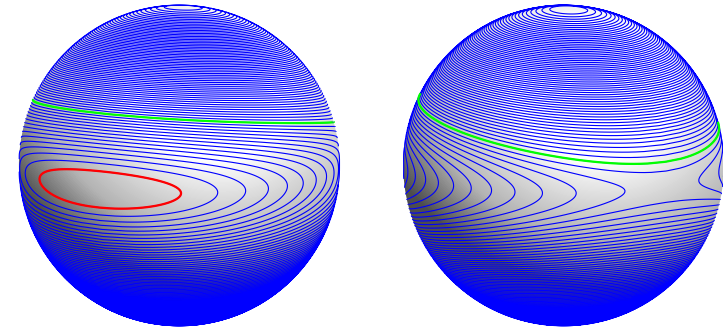


FIGURE 12. Visualisation de deux types de dynamique d'une jonction atomique pour $\Lambda = 20$: en rouge, les oscillations plasma au voisinage du minimum d'énergie (cf. chapitre 1); en vert, le régime d'autopiégeage (cf. chapitre 3), pour lequel la jonction reste en permanence déséquilibrée (ici $n > 0$ à chaque instant).

La figure 11 révèle un autre point sur lequel nous reviendrons en détail au prochain chapitre : quand E_C augmente, les courbes iso-énergie autour du minimum deviennent de plus en plus étendues le long de l'équateur, et de plus en plus comprimées quand on s'en écarte. Cette remarque est centrale quand on s'intéresse à l'état fondamental quantique de la jonction. Dans une représentation graphique que nous préciserons (Husimi), un état quantique doit recouvrir une certaine aire à la surface de la sphère. Cette déformation des courbes iso-énergie correspond alors au fait que l'état fondamental est comprimé, avec des fluctuations dans une mesure de \hat{J}_z en dessous de la limite quantique standard \sqrt{J} , et des fluctuations de la phase (la longitude sur la sphère) au dessus de cette limite quantique standard ($1/\sqrt{N}$). Nous verrons que la limite ultime est atteinte pour $E_C \gg E_J$: dans ce cas, l'état quantique fondamental est complètement délocalisé le long de l'équateur.

4-5 Première mise en évidence expérimentale

Comme nous l'avons indiqué plus haut, la réalisation de la condition $E_C < 0$ est tout à fait faisable avec des jonctions internes; il suffit pour cela

de travailler avec une paire d'états a, b telle que $g_{ab} > (g_{aa} + g_{bb})/2$. C'est par exemple le cas de l'expérience de ZENESINI, BERTI et al. (2024).

Toutefois, la première expérience réalisée avec une jonction interne et qui étudie la bifurcation que nous venons de décrire a été réalisée dans le cas $E_C > 0$, et c'est donc une bifurcation de l'état de plus haute énergie qui a été mise en évidence. Cette expérience, due à ZIBOLD, NICKLAS et al. (2010), a été menée sur un condensat de $N = 500$ atomes de rubidium ^{87}Rb , en utilisant les deux états hyperfins $|a\rangle = |F = 2, m = -1\rangle$ et $|b\rangle = |F = 1, m = 1\rangle$. Ces deux états sont couplés par une transition à deux photons, comprenant un photon micro-onde (6.8 GHz) et un photon radio-fréquence (6 MHz). L'énergie E_C décrivant les interactions entre atomes est ajustée grâce à une résonance de Feshbach et sa valeur est fixée à $\hbar \times 0.13$ Hz (rappelons que son ordre de grandeur est μ/N). Le paramètre Λ est varié en modifiant l'intensité de la radio-fréquence.

L'état interne des atomes est préparé en utilisant la méthode décrite en §1. Rappelons que cet état correspond à un point donné de la sphère de Bloch généralisée de la figure 6. On suit ensuite l'évolution de cet état en mesurant après un instant t la différence de population $N_a - N_b$ ou la différence de phase $\varphi_a - \varphi_b$. On obtient ainsi un "portrait de phase" permettant de suivre l'évolution d'une condition initiale donnée sur la sphère de Bloch généralisée.

Deux exemples d'évolution sont montrés en figure 13. Le premier correspond au cas d'une grande fréquence de Rabi Ω , plus précisément $\Lambda = 0.78$. On voit que le gaz préparé au voisinage du point $J_z = 0, \varphi = \pi$ reste au voisinage de ce point. Le second exemple correspond à $\Lambda = 1.55$, donc au dessus du point critique $\Lambda_c = 1$. L'oscillation du système autour des deux points stationnaires (ici des maxima d'énergie) est clairement visible. En variant la valeur du paramètre Λ , ZIBOLD, NICKLAS et al. (2010) ont mis en évidence la bifurcation du point stationnaire de plus haute énergie (figure 14).

5 Appendice : interaction entre états habillés

Dans les chapitres qui précèdent, nous nous sommes intéressés à un fluide d'atomes composé d'une seule espèce et nous avons caractérisé les

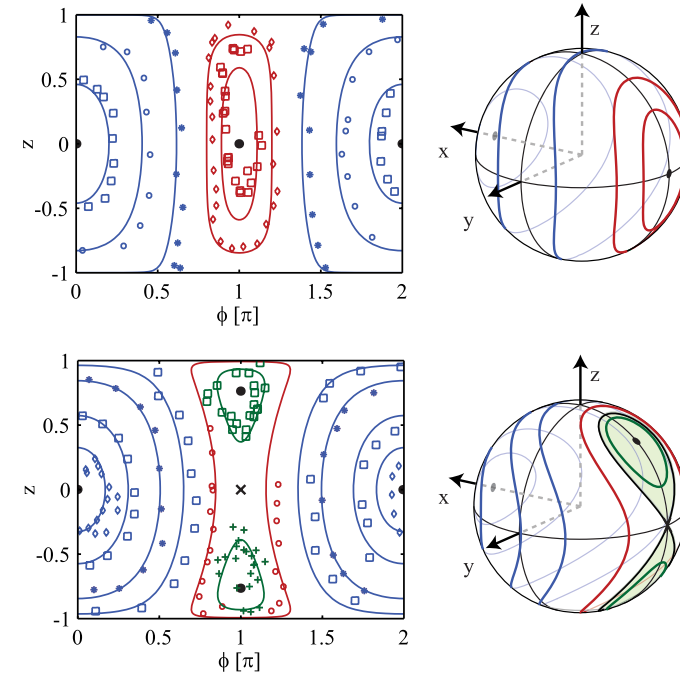


FIGURE 13. Trajectoires sur la sphère de Bloch généralisée pour un condensat de ^{87}Rb , avec $\chi > 0$. Ces figures sont obtenues pour $\Lambda = 0.78$ (haut) et $\Lambda = 1.55$ (bas). Figures extraites de ZIBOLD, NICKLAS et al. (2010).

interactions entre atomes par le paramètre g , relié à la longueur de diffusion en onde s :

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} . \quad (93)$$

Nous considérons ici des atomes avec deux états internes possibles, et il nous faut donc introduire trois longueurs de diffusion, a_{aa} , a_{ab} et a_{gg} , pour décrire les trois types de collisions binaires possibles. Une fois le couplage cohérent mis en place entre les niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$, les états pertinents pour décrire le système sont les états habillés $|1\rangle$ et $|2\rangle$ et il se pose alors la question de caractériser les interactions entre ces états habillés.

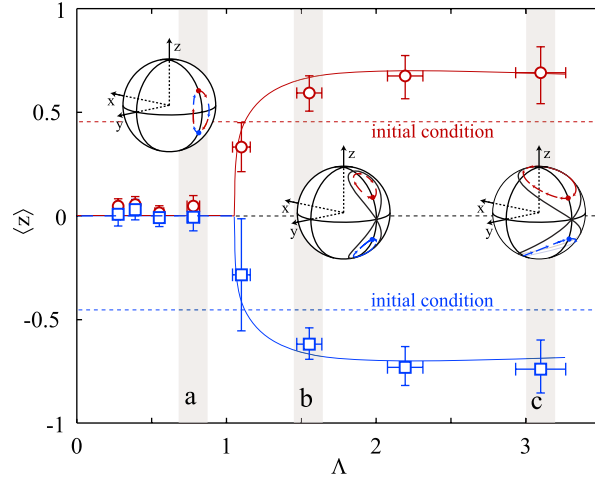


FIGURE 14. Variation avec Λ des points stationnaires de haute énergie. Deux conditions initiales différentes sont utilisées pour mettre en évidence les deux points stationnaires pour $\Lambda > 1$. Figure extraite de ZIBOLD, NICKLAS et al. (2010).

Le pseudo-potentiel

Commençons par indiquer la façon la plus simple pour décrire l'interaction à basse énergie entre deux atomes neutres (cf. cours 2020-21). On se place dans le référentiel du centre de masse et on considère un potentiel d'interaction à courte portée $V(r)$, où r désigne la variable relative de la paire d'atomes (figure 15). On néglige donc ici l'interaction dipolaire anisotrope (cf. cours 2023-24). On sait qu'à suffisamment basse énergie, cette interaction se produit essentiellement en onde s ; pour une collision de vecteur d'onde incident k , l'état stationnaire de diffusion associé peut donc s'écrire comme la somme de l'onde plane incidente e^{ikr} et de l'onde sphérique divergente e^{ikr}/r . En pratique, cette description est valable tant qu'on s'intéresse à des distances r supérieures au rayon de van der Waals, R_{vdW} , qui caractérise la portée des potentiels inter-atomiques (de l'ordre de quelques nanomètres).

Cette interaction peut être modélisée par le pseudo-potentiel (figure 16)

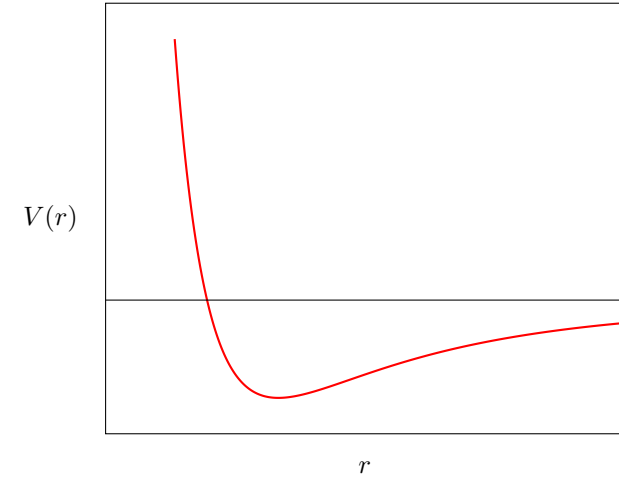


FIGURE 15. Un potentiel interatomique "typique", avec une partie attractive à longue distance et une partie répulsive à courte distance.

dont l'action sur des fonctions d'onde typiques s'écrit :

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{A}{r} + \psi_{\text{reg}}(\mathbf{r}) : \quad \hat{V}_{\text{pp}}[\psi(\mathbf{r})] = g \delta(\mathbf{r}) \psi_{\text{reg}}(0) \quad (94)$$

où ψ_{reg} est régulière en $r = 0$ et où g caractérise la force des interactions. On a donc

$$\hat{V}_{\text{pp}} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] = igk \delta(\mathbf{r}) \quad \hat{V}_{\text{pp}} \left[\frac{e^{-r/\ell}}{r} \right] = -\frac{g}{\ell} \delta(\mathbf{r}). \quad (95)$$

Dans ce qui suit, on aura également besoin de l'opérateur laplacien ∇^2 sur ces fonctions typiques :

$$\nabla^2 \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] = -4\pi \delta(\mathbf{r}) - k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \quad \nabla^2 \left[\frac{e^{-r/\ell}}{r} \right] = -4\pi \delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{\ell^2} \frac{e^{-r/\ell}}{r}. \quad (96)$$

Pour établir la relation entre la force du potentiel g et la longueur de

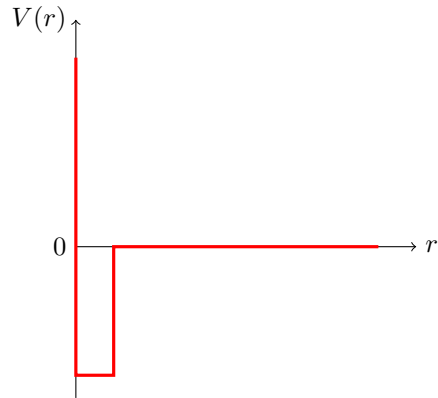


FIGURE 16. Puits carré dont on peut ajuster la largeur r_0 et la profondeur V_0 pour déduire le pseudo-potential par un passage à la limite bien choisi, en se plaçant au voisinage du seuil d'apparition du premier état lié.

diffusion a , considérons un état stationnaire de diffusion⁹

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{a_s}{1 + ik a_s} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (97)$$

et écrivons que cet état doit être état propre de l'hamiltonien

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_r} \nabla^2 + \hat{V}_{pp} \right) \psi(\mathbf{r}) = \epsilon_k \psi(\mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad \epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} \quad (98)$$

où $m_r = m/2$ représente la masse relative. On constate par un calcul relativement simple que cette équation aux valeurs propres est satisfaite si seulement si :

$$a \equiv \frac{gm_r}{2\pi\hbar^2} \quad \Leftrightarrow \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (99)$$

On trouve en particulier pour l'état d'énergie nulle

$$\psi_0(\mathbf{r}) = 1 - \frac{a_s}{r}, \quad (100)$$

⁹ La forme proposée en (97) est *a priori* une forme asymptotique pour r grand, mais elle est faite exacte en tout point dans le cas du pseudo-potential.

pour lequel on vérifie immédiatement :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_r} \nabla^2 + V_{pp} \right) \psi_0(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m_r} 4\pi a_s \delta(\mathbf{r}) + g\delta(\mathbf{r}) = 0. \quad (101)$$

On sait donc bien relier la force g du pseudo-potential et la longueur de diffusion correspondante.

Collision entre deux atomes habillés

Le problème à deux états a et b que nous considérons ici est caractérisé par trois longueurs de diffusion $a_{\alpha\beta}$ avec $\alpha, \beta = a, b$, ou encore par les trois constantes de couplage $g_{\alpha\beta} = 4\pi\hbar^2 a_{\alpha\beta}/m$. Pour une collision entre atomes nus, on a trois voies d'entrée possibles, $|aa\rangle$, $|bb\rangle$ et $|ab\rangle_s$, cette dernière correspondant à la combinaison symétrique $(|ab\rangle + |ba\rangle)/\sqrt{2}$ (nous supposons qu'on traite ici le cas de bosons). La modélisation la plus simple consiste à prendre pour chacun de ces canaux une interaction en pseudo-potential

$$\hat{V}_{\alpha\beta}[\psi(\mathbf{r})] = g_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} [r\psi(\mathbf{r})] \Big|_{r=0} \quad (102)$$

ce qui donne pour l'opérateur global :

$$\hat{V}_{pp}[\psi(\mathbf{r})] = \delta(\mathbf{r}) \sum_{(\alpha\beta)} g_{\alpha\beta} \hat{P}_{\alpha\beta} \psi_{reg}(0) \quad (103)$$

où $\hat{P}_{\alpha\beta} = |\alpha\beta\rangle\langle\alpha\beta|$ désigne le projecteur sur l'état $|\alpha\beta\rangle$.

En présence du couplage radio-fréquence, on doit envisager les trois canaux d'entrée possibles, $|11\rangle$, $|22\rangle$ et $|12\rangle_s$, ce dernier correspondant à l'état symétrisé $(|12\rangle + |21\rangle)/\sqrt{2}$. On va s'intéresser d'abord à la voie d'entrée $|11\rangle$, qui correspond à l'énergie la plus basse (figure 17). Les collisions correspondant aux deux autres voies d'entrée peuvent donner lieu à des processus inélastiques.

La fonction d'énergie nulle, repérée par rapport au canal d'entrée, s'écrit donc :

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \left(1 - \frac{a_{11}}{r} \right) |11\rangle + B \frac{e^{-r/\ell}}{r} |12\rangle_s + B' \frac{e^{-r/\ell'}}{r} |22\rangle \quad (104)$$

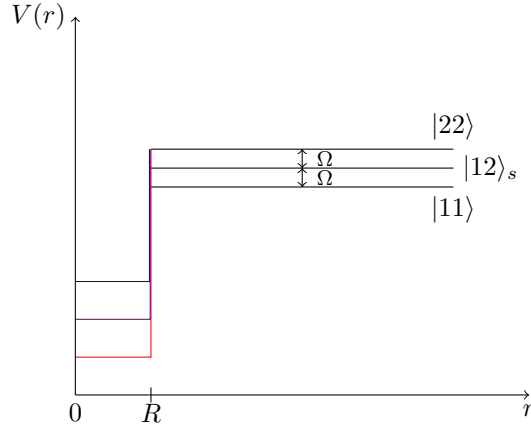


FIGURE 17. Les trois canaux couplés dans une collision entre états habillés (avec ici une interaction en puits carré). Dans le texte, on se concentre sur une collision avec le canal d'entrée $|11\rangle$, pour lequel il n'y a pas de collisions inélastiques (à suffisamment basse énergie).

avec

$$\frac{\hbar^2}{2m_r\ell^2} \equiv \hbar\Omega \quad \frac{\hbar^2}{2m_r\ell'^2} \equiv 2\hbar\Omega' \quad (\ell' = \ell/\sqrt{2}). \quad (105)$$

À ce stade, la longueur de diffusion a_{11} et les deux coefficients B et B' sont inconnus. Pour les déterminer, nous allons imposer à cette fonction d'onde d'être état propre de l'hamiltonien total.

L'opérateur énergie cinétique $-(\hbar^2/2m_r)\nabla^2$ agissant sur cet état donne :

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi\hbar^2}{m_r}\delta(\mathbf{r}) [-a_{11}|11\rangle + B|12\rangle_s + B'|22\rangle] \\ & - \frac{\hbar^2}{2m_r\ell^2} B \frac{e^{-r/\ell}}{r} |12\rangle_s - \frac{\hbar^2}{2m_r\ell'^2} B' \frac{e^{-r/\ell'}}{r} |22\rangle. \end{aligned} \quad (106)$$

Le couplage atome-lumière vient compenser les deux derniers termes de (106). Le terme en $\delta(\mathbf{r})$ est quant à lui compensé par le pseudo-potential écrit en (103), dont l'action fait intervenir la partie régulière de $\psi_0(\mathbf{r})$ en

$r = 0$:

$$\psi_{\text{reg}}(0) = |11\rangle - \frac{B}{\ell} |12\rangle_s - \frac{B'}{\ell'} |22\rangle. \quad (107)$$

On obtient alors un système linéaire de trois équations permettant de déterminer les trois inconnues a_{11} , B , B' .

Dans ce qui suit, nous donnons les résultats de la résolution de ce système pour une petite fréquence de Rabi, plus précisément :

$$a_{11}, a_{12}, a_{22} \ll \ell, \ell' \quad \Leftrightarrow \quad \hbar\Omega \ll E_{\text{vdW}} \quad (108)$$

où nous avons supposé que les longueurs de diffusion $a_{\alpha\beta}$ sont telles que $\hbar^2/ma_{\alpha\beta}^2 \sim E_{\text{vdW}}$. En pratique E_{vdW}/h est de l'ordre de quelques MHz à quelques dizaines de MHz selon les espèces atomiques. On obtient à l'ordre le plus bas :

$$a_{11} = C^4 a_{aa} + 2S^2 C^2 a_{ab} + S^4 a_{bb} \quad (109)$$

ce qui constitue le résultat recherché : on a réussi à caractériser l'interaction entre deux états habillés (ici l'état $|1\rangle$) en fonction du couplage entre les états nus $|a\rangle$ et $|b\rangle$.

On peut traiter de la même façon une collision entre deux atomes préparés tous deux dans l'état habillé $|2\rangle$, ou encore une collision entre un atome dans l'état $|1\rangle$ et l'autre dans l'état $|2\rangle$. Dans ces deux cas, on trouve une longueur de diffusion avec une partie imaginaire non nulle, qui permet d'évaluer le taux de collision inélastique sous l'effet des processus exothermiques $2 + 2 \rightarrow 2 + 2$, $2 + 2 \rightarrow 1 + 2$ et $1 + 2 \rightarrow 1 + 1$.

Pour une collision $2 - 2$, on trouve pour la partie réelle de la longueur de diffusion

$$a_{22} = S^4 a_{aa} + 2S^2 C^2 a_{ab} + C^4 a_{bb} \quad (110)$$

et de même pour une collision $1 - 2$:

$$a_{12} = 2C^2 S^2 (a_{aa} + a_{bb}) + (C^2 - S^2)^2 a_{ab} \quad (111)$$

Ces résultats pour les parties réelles des a_{ij} ont été obtenus par SEARCH & BERMAN (2001) par une approche consistant à évaluer l'énergie de champ moyen d'un condensat de Bose-Einstein en présence du couplage $a - b$.

L'avantage de la méthode que nous venons de présenter est de fournir également les taux de collisions inélastiques à partir de la partie imaginaire des a_{ij} .

Les prédictions qui précèdent ont été partiellement vérifiées dans la période 2010-2020 par plusieurs groupes (voir par exemple NICKLAS, MUESSEL et al. (2015)). Le test complet portant à la fois sur les effets élastiques et les effets inélastiques a été effectué par SANZ, FRÖLIAN et al. (2022) sur un gaz de ^{39}K sur les deux sous-niveaux Zeeman $|F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|F = 1, m_F = 0\rangle$ de l'état fondamental. Par ailleurs, LAVOINE, HAMMOND et al. (2021) ont mis en évidence des corrections à l'énergie provenant de contributions au delà du champ moyen pour un gaz d'atomes à deux niveaux en présence d'un couplage cohérent. HAMMOND, LAVOINE et al. (2022) ont également montré l'émergence d'un terme effectif à trois corps induit par ce couplage cohérent.

Références

- CHALOPIN, Thomas, Chayma BOUAZZA, Alexandre EVRARD, Vasilij MAKHALOV, Davide DREON, Jean DALIBARD, Leonid A SIDORENKOV & Sylvain NASCIMBENE (2018), « Quantum-enhanced sensing using non-classical spin states of a highly magnetic atom », in *Nature Communications* **9**, p. 4955.
- HAMMOND, A, L LAVOINE & Thomas BOURDEL (2022), « Tunable three-body interactions in driven two-component Bose-Einstein condensates », in *Physical Review Letters* **128**, p. 083401.
- ISLAM, R, EE EDWARDS, K KIM, S KORENBLIT, C NOH, H CARMICHAEL, G-D LIN, L-M DUAN, C-C JOSEPH WANG, JK FREERICKS et al. (2011), « Onset of a quantum phase transition with a trapped ion quantum simulator », in *Nature Communications* **2**, p. 377.
- JOSEPHSON, Brian David (1962), « Possible new effects in superconductive tunnelling », in *Physics Letters* **1**, p. 251-253.
- LANYON, Ben P, Cornelius HEMPEL, Daniel NIGG, Markus MÜLLER, Rene GERRITSMAN, F ZÄHRINGER, Philipp SCHINDLER, Julio T BARREIRO, Markus RAMBACH, Gerhard KIRCHMAIR et al. (2011), « Universal digital quantum simulation with trapped ions », in *Science* **334**, p. 57-61.
- LAVOINE, L, A HAMMOND, A RECATI, DS PETROV & Thomas BOURDEL (2021), « Beyond-mean-field effects in Rabi-coupled two-component Bose-Einstein condensate », in *Physical Review Letters* **127**, p. 203402.
- LEGGETT, AJ (1966), « Number-phase fluctuations in two-band superconductors », in *Progress of Theoretical Physics* **36**, p. 901-930.
- LEGGETT, Anthony J (2004), « Nobel Lecture : Superfluid He 3 : the early days as seen by a theorist », in *Reviews of Modern Physics* **76**, p. 999-1011.
- LIPKIN, Harry J, N MESHKOV & AJ GLICK (1965), « Validity of many-body approximation methods for a solvable model : (I). Exact solutions and perturbation theory », in *Nuclear Physics* **62**, p. 188-198.
- MAKHALOV, Vasilij, Tanish SATOOR, Alexandre EVRARD, Thomas CHALOPIN, Raphael LOPES & Sylvain NASCIMBENE (2019), « Probing quantum criticality and symmetry breaking at the microscopic level », in *Physical Review Letters* **123**, p. 120601.
- NICKLAS, E, W MUESSEL, H STROBEL, PG KEVREKIDIS & MK OBERTHALER (2015), « Nonlinear dressed states at the miscibility-immiscibility threshold », in *Physical Review A* **92**, p. 053614.
- SANZ, J, A FRÖLIAN, CS CHISHOLM, CR CABRERA & L TARRUELL (2022), « Interaction control and bright solitons in coherently coupled Bose-Einstein condensates », in *Physical Review Letters* **128**, p. 013201.
- SEARCH, CP & PR BERMAN (2001), « Manipulating the speed of sound in a two-component Bose-Einstein condensate », in *Physical Review A* **63**, p. 043612.
- TRENKHALDER, A, G SPAGNOLLI, Giulia SEMEGHINI, S COOP, M LANDINI, P CASTILHO, L PEZZE, Giovanni MODUGNO, Massimo INGUSCIO, A SMERZI et al. (2016), « Quantum phase transitions with parity-symmetry breaking and hysteresis », in *Nature Physics* **12**, p. 826-829.
- ZENESINI, Alessandro, Anna BERTI, Riccardo COMINOTTI, Chiara ROGORA, Ian G MOSS, Thomas P BILLAM, Iacopo CARUSOTTO, Giacomo LAMPORISI, Alessio RECATI & Gabriele FERRARI (2024), « False vacuum decay via bubble formation in ferromagnetic superfluids », in *Nature Physics* **20**, p. 558-563.
- ZIBOLD, Tilman, Eike NICKLAS, Christian GROSS & Markus K OBERTHALER (2010), « Classical bifurcation at the transition from Rabi to Josephson dynamics », in *Physical Review Letters* **105**, p. 204101.