

Chapitre 5

Les condensats fragmentés

Sommaire

1	Fraction condensée d'un fluide quantique	2
1-1	Le gaz parfait homogène	2
1-2	Gaz homogène avec interactions	2
1-3	Définition générale de la fraction condensée . . .	4
1-4	Fragmentation vs. énergie d'échange	5
2	L'état fondamental d'une jonction atomique	6
2-1	États cohérents de spin et distribution de Husimi	7
2-2	État fondamental de la jonction	9
2-3	Fragmentation de l'état fondamental	11
3	Spectre énergétique de la jonction	13
3-1	Rappel : représentation de Schwinger	13
3-2	L'oscillateur harmonique sous-jacent	13
3-3	La relation de commutation phase-nombre	14
4	Spins 1 et jonction Josephson	16
4-1	Les interactions entre atomes de spin 1	16
4-2	Le rôle de l'effet Zeeman	17
4-3	État fondamental en champ moyen	18
4-4	Fragmentation dans le cas antiferromagnétique .	19
4-5	Observation d'un état fragmenté	20

Dans les chapitres précédents, notre description d'une jonction Josephson, qu'elle soit interne ou externe, a été essentiellement basée sur une approximation de champ moyen. Celle-ci revient à supposer que les N atomes sont placés dans le même état à une particule, noté

$$|\psi(t)\rangle = \alpha_a(t) |a\rangle + \alpha_b(t) |b\rangle . \quad (1)$$

Les atomes forment donc un condensat de Bose-Einstein pur, décrit par l'état à N corps factorisé :

$$|\Psi(t)\rangle = (\alpha_a(t) |a\rangle + \alpha_b(t) |b\rangle)^{\otimes N} \quad (2)$$

et les relations de Josephson donnent l'évolution temporelle des coefficients complexes α_a et α_b .

Nous allons maintenant explorer les limites de cette description et montrer que dans certaines conditions, il est nécessaire d'aller au-delà de cette approximation de champ moyen en utilisant une modélisation quantique de la jonction. Plus précisément, nous allons montrer que l'état fondamental peut former un *condensat fragmenté*, pour lequel deux états à une particule ont une population significative, sans qu'il y ait de cohérence entre eux (MUELLER, HO et al. 2006).

Nous débuterons ce chapitre par une définition précise de la fraction condensée et de la notion de fragmentation, en nous appuyant sur la matrice densité à un corps et son spectre de valeurs propres. Nous appliquerons ensuite cette notion à une jonction Josephson et nous reviendrons sur

la séparation entre régime de Rabi et régime Josephson qui est déjà apparue à plusieurs reprises dans ce cours. Nous montrerons qu'il faut compléter cette description par un troisième régime, le régime de Fock, correspondant précisément à un état fondamental fragmenté pour la jonction.

Dans une description quantique de la jonction, des opérateurs nouveaux particulièrement pertinents apparaissent : il s'agit de l'opérateur \hat{n} qui décrit le déséquilibre en nombres d'occupation de part et d'autre de la jonction, et de l'opérateur phase $\hat{\varphi}$, associé à la différence de phase entre ces deux côtés. Nous construirons ces opérateurs en partant de la représentation de Schwinger, déjà introduite au chapitre précédent, et nous montrerons en particulier la relation de commutation :

$$[e^{i\hat{\varphi}}, \hat{n}] = e^{i\hat{\varphi}}, \quad (3)$$

tout en signalant les dangers de la notation $e^{i\hat{\varphi}}$. Cette relation joue un rôle central dans l'étude des qubits formés à partir de jonctions Josephson. Par ailleurs, elle limite la connaissance simultanée que l'on peut avoir pour les variables n et φ en imposant la relation de Heisenberg $\Delta n \Delta \varphi \gtrsim 1/2$.

Nous terminerons ce chapitre par la présentation d'un nouveau type de jonction Josephson interne, utilisant une assemblée d'atomes de spin 1. Cette jonction ne nécessite pas de couplage cohérent externe, ce rôle étant joué par les interactions entre particules. Cette jonction a permis l'observation directe d'un condensat fragmenté dans l'expérience de EVRARD, QU et al. (2021) que nous décrirons.

1 Fraction condensée d'un fluide quantique

1-1 Le gaz parfait homogène

Dans ses articles fondateurs (EINSTEIN 1924; EINSTEIN 1925a; EINSTEIN 1925b), Einstein a considéré un gaz parfait de N particules confiné dans une boîte de volume L^3 et obéissant à la statistique de Bose. Il a montré que ce gaz subit une transition de phase quand on le refroidit tout en maintenant sa densité constante. Cette transition se manifeste par l'apparition d'une population macroscopique, donc d'ordre N , de l'état

microscopique fondamental de la boîte :

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}}. \quad (4)$$

Nous prenons ici des conditions aux limites périodiques de sorte que cet état décrit une particule d'impulsion nulle, $\mathbf{p} = 0$.

L'existence de cette transition de phase est une conséquence directe de la statistique quantique proposée par Bose. Elle ne se produit pas pour un gaz obéissant à la statistique classique de Maxwell-Boltzmann. Néanmoins, à température strictement nulle, l'état du système est le même dans les deux cas : toutes les particules occupent l'état fondamental et la fonction d'onde à N corps s'écrit

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \psi_0(\mathbf{r}_1) \cdots \psi_0(\mathbf{r}_N). \quad (5)$$

Le système est alors complètement condensé : le nombre de particules N_0 occupant l'état ψ_0 est égal à N et la fraction condensée, définie ici comme

$$f \equiv \frac{N_0}{N} \quad (6)$$

est égale à 1.

Conservons pour l'instant les deux hypothèses du modèle d'Einstein, gaz sans interaction et confinement dans une boîte à fond plat. Quand on augmente la température, les particules ont une probabilité non nulle d'occuper des niveaux excités de la boîte et la fraction condensée, définie en (6), décroît. Pour un système de taille finie, elle tend vers 0 de façon régulière dans la limite des grandes températures. Quand on prend la limite thermodynamique, $N, V \rightarrow \infty$ avec $N/V = \text{Cte}$, on voit apparaître la transition de phase prédite par Einstein et mentionnée plus haut, avec f_c qui est rigoureusement nulle au dessus d'une température critique $T_c(\rho)$ (figure 1). Plus précisément, $f_c(T)$ est continue en T_c et sa dérivée première est discontinue.

1-2 Gaz homogène avec interactions

La situation se complique quand on prend en compte les interactions entre particules. Plaçons-nous dans le cas d'interactions à deux corps, décrites par une longueur de diffusion a positive, ce qui correspond à des

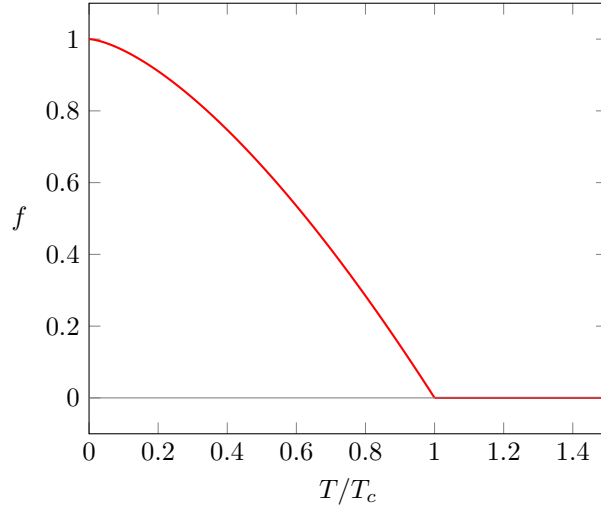


FIGURE 1. Fraction condensée pour un gaz de Bose idéal dans une boîte (conditions aux limites périodiques).

interactions répulsives. Dans ce cas, même à température nulle, la population moyenne de l'état ψ_0 n'est pas égale à 1. En effet, les interactions sont à l'origine des processus virtuels conservant l'impulsion (figure 2) :

$$(p_0 = 0) + (p_0 = 0) \rightleftharpoons (p) + (-p) \quad \text{avec } p \neq 0. \quad (7)$$

Pour caractériser plus précisément l'état du gaz dans ces conditions, PENROSE & ONSAGER (1956) introduisent la matrice densité à un corps

$$\hat{\rho}_1 = N \text{Tr}_{2,\dots,N}(\hat{\rho}) \quad (8)$$

obtenu en prenant la trace partielle sur $N - 1$ particules. L'opérateur $\hat{\rho}_1$ est hermitien, positif et sa trace vaut :

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_1) = N. \quad (9)$$

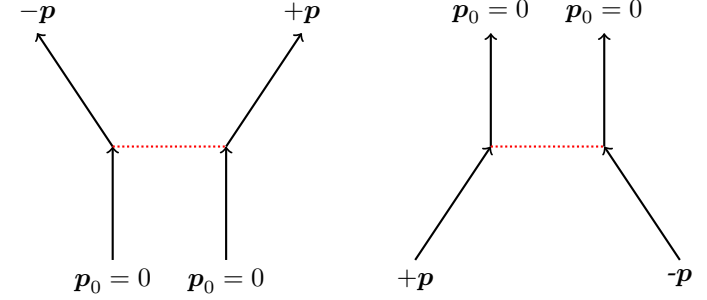


FIGURE 2. Interactions binaires entre particules dépeuplant et repeuplant un condensat.

Cette opération de trace partielle s'écrit en point de vue position

$$\langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle = N \int d^3r_2 \dots d^3r_N \langle \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}', \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N | \hat{\rho} | \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N \rangle \quad (10)$$

et, avec le formalisme de la seconde quantification :

$$\langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle = \text{Tr}(\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\rho}), \quad (11)$$

où l'opérateur champ $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ détruit une particule au point \mathbf{r} . La définition de la fraction condensée f_c , pour un système de densité spatiale ρ à la limite thermodynamique, est alors (figure 3) :

$$f_c \equiv \frac{1}{\rho} \lim_{\infty} \langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle \quad (12)$$

où la limite est prise pour $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$. Dans ce point de vue, la fraction condensée caractérise donc l'ordre en phase à longue portée du fluide.

Pour relier cette définition à celle du gaz parfait basée sur la population de l'état à une particule ψ_0 , commençons par utiliser le fait que l'opérateur $\hat{\rho}_1$ est hermitien et positif. On peut donc le diagonaliser et on sait que ses valeurs propres seront toutes positives ou nulles, de somme égale à N . Pour un gaz dans une boîte avec des conditions aux limites périodiques,

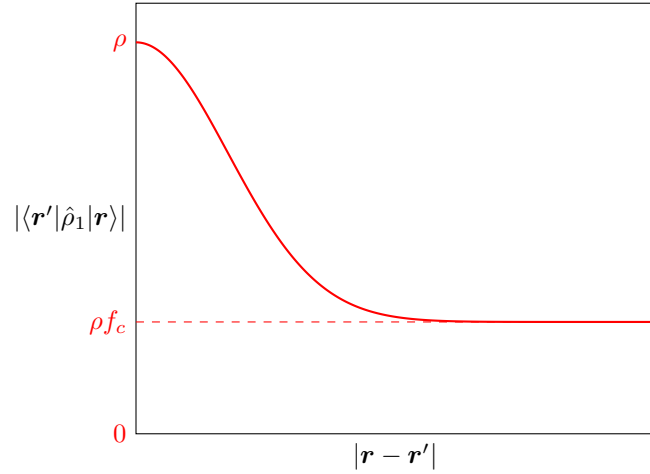


FIGURE 3. Variation de la fonction $|\langle r' | \hat{\rho}_1 | r \rangle|$ avec la distance $|r - r'|$ pour un gaz de Bose. La fraction condensée est définie à partir de la valeur asymptotique de cette fonction.

donc un système invariant par translation, les états propres sont les états d'impulsion bien déterminée, c'est-à-dire les ondes planes

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi_{\mathbf{k}} \rangle = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} / \sqrt{L^3}. \quad (13)$$

En notant $N_{\mathbf{k}}$ la valeur propre associée à $\psi_{\mathbf{k}}$, nous pouvons mettre $\hat{\rho}_1$ sous la forme

$$\hat{\rho}_1 = \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} |\psi_{\mathbf{k}}\rangle \langle \psi_{\mathbf{k}}| \quad \text{avec} \quad \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} = N, \quad (14)$$

ou encore, en point de vue position :

$$\langle r' | \hat{\rho}_1 | r \rangle = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}. \quad (15)$$

Isolons dans cette somme la contribution de $\mathbf{k} = 0$:

$$\langle r' | \hat{\rho}_1 | r \rangle = \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} N_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}. \quad (16)$$

Dans la limite $|r - r'| \rightarrow \infty$, la somme sur $\mathbf{k} \neq 0$, composée d'un grand nombre de termes oscillants avec des fréquences spatiales différentes, a une contribution négligeable. On trouve donc en utilisant la définition (12) de f_c :

$$f_c = \frac{1}{\rho} \frac{N_0}{L^3} \quad \Rightarrow \quad f_c = \frac{N_0}{N}. \quad (17)$$

On retrouve donc la définition de la fraction condensée proposée pour le gaz parfait. L'intérêt de ce passage par les valeurs propres de la matrice densité à un corps est la possibilité de généraliser cette définition au cas de systèmes non homogènes, comme nous le verrons en §1-3.

À température nulle, la fraction condensée du gaz de Bose en interaction a été calculée par BOGOLIUBOV (1947)

$$f_c \approx 1 - \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{\rho a^3} \quad (18)$$

et l'énergie correspondante a été obtenue par LEE, HUANG et al. (1957). Ces résultats sont valables si la quantité $\sqrt{\rho a^3}$ est petite devant 1, donc pour une faible déplétion de l'état $|\psi_0\rangle$. Nous renvoyons les lecteurs intéressés vers le cours 2021-22 où nous avons étudié en détail ce problème.

1-3 Définition générale de la fraction condensée

Nous nous intéressons maintenant à un fluide quelconque de N particules ; le confinement n'est pas nécessairement une boîte à fond plat et la structure interne des particules peut jouer un rôle dans le cas d'un gaz spinneur. Nous supposons seulement que les N particules sont identiques de sorte que l'on peut toujours définir la matrice densité à un corps :

$$\langle r', \alpha' | \hat{\rho}_1 | r, \alpha \rangle = \text{Tr} \left(\hat{\Psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\alpha'}(\mathbf{r}') \hat{\rho} \right), \quad (19)$$

où l'opérateur champ $\hat{\Psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r})$ crée une particule au point \mathbf{r} dans l'état interne α (généralement un état de spin).

Certaines propriétés mentionnées plus haut pour $\hat{\rho}_1$ restent vérifiées : c'est un opérateur à une particule, hermitien, positif, et sa trace est égale à N . On peut donc le diagonaliser et ranger ses valeurs propres par ordre

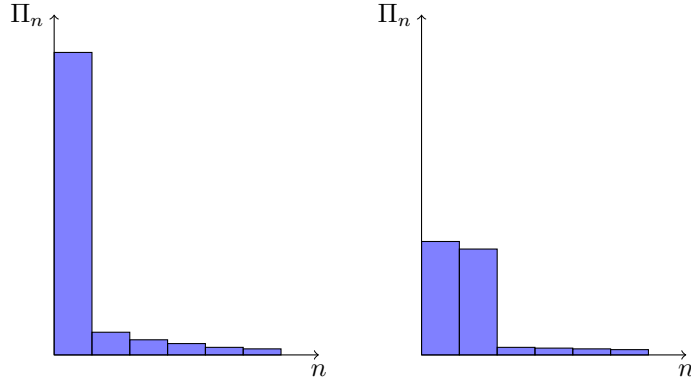


FIGURE 4. Valeurs propres de la matrice densité à un corps rangées par ordre décroissant dans le cas d'un condensat "usuel" (gauche) et d'un condensat fragmenté (droite).

décroissant :

$$\Pi_0 \geq \Pi_1 \geq \Pi_2 \geq \dots \quad \text{avec} \quad \sum_j \Pi_j = N. \quad (20)$$

Les fonction propres associées

$$\hat{\rho}_1 |\psi_j\rangle = \Pi_j |\psi_j\rangle \quad (21)$$

sont des états à une particule et forment une base orthonormée. Toutefois, contrairement au cas homogène où ces états sont facilement identifiables (ondes planes), leur calcul peut être compliqué et ils dépendent généralement du nombre de particules N .

Plusieurs situations sont alors possibles :

- La valeur propre la plus grande, Π_0 , est d'ordre N et toutes les autres sont petites devant Π_0 (figure 4, gauche). C'est le cas d'un condensat "usuel" et $|\psi_0\rangle$ représente la fonction d'onde du condensat.
- Toutes les valeurs propres sont petites devant N , voire nulles à la limite thermodynamique quand celle-ci est bien définie. Il n'y alors pas de condensat, ce qui peut se produire pour plusieurs raisons : la température peut être trop grande, au dessus du seuil de condensation;

ou alors les interactions sont suffisamment fortes pour empêcher l'accumulation de particules dans un même état, c'est par exemple le cas pour un isolant de Mott, même à température nulle.

- Quelques valeurs propres sont comparables et d'ordre N (figure 4, droite) : on a alors affaire à un *condensat fragmenté*. Par exemple, si Π_0 et Π_1 sont comparables entre elles et toutes les autres valeurs propres négligeables, $\hat{\rho}_1$ s'écrit

$$\hat{\rho}_1 \approx \sum_{j=0,1} \Pi_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| = \begin{pmatrix} \Pi_0 & 0 \\ 0 & \Pi_1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

où la matrice est écrite dans la base $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle\}$.

Dans le dernier cas, la matrice densité à un corps est donc un mélange statistique des deux états $|\psi_0\rangle$ et $|\psi_1\rangle$, ce qui correspond à une entropie statistique non nulle. Il ne faudrait pas en déduire que le système à N corps est également un mélange statistique. Pour $\Pi_0 = \Pi_1 = 1/2$, cette matrice densité à un corps peut par exemple être obtenue avec un état pur de type "chat de Schrödinger" :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0, \dots, 0\rangle + |1, 1, \dots, 1\rangle). \quad (23)$$

Plus généralement, la matrice densité à un corps est parfaitement adaptée pour décrire les quantités physiques elles-mêmes à un corps (densité spatiale, distribution en impulsion), mais ne donne pas accès aux corrélations entre particules.

1-4 Fragmentation vs. énergie d'échange

Dans un condensat usuel, composé d'un grand nombre de particules sans spin ou polarisées, et en présence d'interactions répulsives, la fragmentation est généralement empêchée par l'énergie d'échange (NOZIERES 1995). Pour montrer ce résultat, considérons un système tel que deux états à une particule, notés $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$ ont quasiment la même énergie $\epsilon_a \approx \epsilon_b$. En absence d'interaction, tous les états à N particules $|N_a, N_b\rangle$ (avec $N_a + N_b = N$) sont donc quasi-dégénérés.

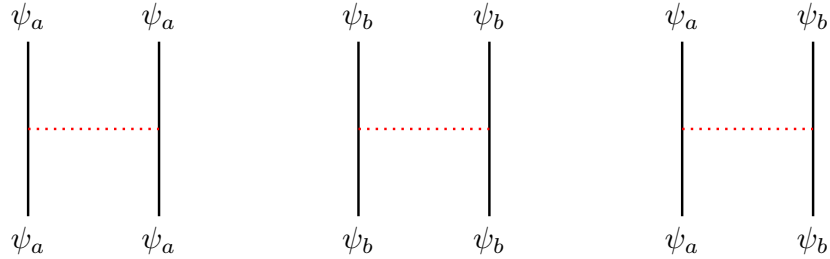


FIGURE 5. Processus d'interaction directs contribuant à la première partie de l'énergie donnée en (26).

Prenons maintenant en compte le potentiel d'interaction binaire $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ entre particules, décrit en seconde quantification par l'opérateur

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^3r d^3r' \quad (24)$$

où l'opérateur champ $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ détruit une particule au point \mathbf{r} et s'écrit :

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \psi_a(\mathbf{r}) \hat{a} + \psi_b(\mathbf{r}) \hat{b} + \dots \quad (25)$$

où \hat{a} et \hat{b} détruisent une particule dans les états ψ_a et ψ_b , et où la somme s'étend sur tous les états à une particule. Évaluons maintenant la moyenne de \hat{V} dans un état $|N_a, N_b, \dots\rangle$. En nous limitant aux contributions des états ψ_a et ψ_b , nous trouvons¹

$$\langle V \rangle = \frac{V_0}{2} [N_a(N_a - 1) + N_b(N_b - 1) + 2N_a N_b] + V_{\text{ech}} N_a N_b \quad (26)$$

où nous avons supposé que les éléments de matrice "directs" correspondant aux diagrammes de la figure 5

$$\langle \psi_a \psi_a | V | \psi_a \psi_a \rangle \quad \langle \psi_b \psi_b | V | \psi_b \psi_b \rangle \quad \langle \psi_a \psi_b | V | \psi_a \psi_b \rangle \quad (27)$$

étaient tous égaux entre eux pour conserver la symétrie entre les états a et b . Cette hypothèse est vérifiée si on prend par exemple $\psi_{a,b}(x) = e^{\pm i k x} / \sqrt{L^3}$

1. Pour simplifier, nous ne prenons pas compte les processus où les nombres n_a, n_b ne sont pas conservés, comme par exemple $a + a \rightarrow a + b$, en supposant par exemple qu'une règle de conservation (impulsion, moment cinétique) les interdit.

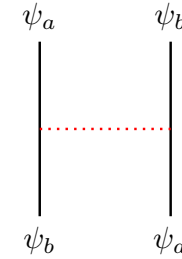


FIGURE 6. Processus d'interaction d'échange contribuant à la seconde partie de l'énergie donnée en (26).

pour des particules confinées sur un cube de côté L . Nous avons par ailleurs introduit le terme d'échange correspondant au diagramme de la figure 6

$$V_{\text{ech}} = \langle \psi_a \psi_b | V | \psi_b \psi_a \rangle = \langle \psi_b \psi_a | V | \psi_a \psi_b \rangle. \quad (28)$$

Pour des interactions de contact, ce terme d'échange est égal au terme direct V_0 .

Si ce terme était absent, l'interaction moyenne $\langle V \rangle$ ne lèverait pas la dégénérescence entre tous les états $|N_a, N_b\rangle$ puisqu'elle s'écrirait $\frac{V_0}{2} N(N-1)$: on aurait toujours une fragmentation maximale du condensat. En revanche, quand on le prend en compte en notant que V_0 doit être positif pour que le gaz n'implose pas, on constate que ce terme vient favoriser les deux états extrêmes $|N, 0\rangle$ et $|0, N\rangle$.

2 L'état fondamental d'une jonction atomique

Dans les trois premiers chapitres de ce cours, nous avons utilisé essentiellement une description de la jonction Josephson en terme de champ classique. Cela suppose que le fluide est entièrement condensé dans un état à une particule, noté $|\psi(t)\rangle$. Par exemple, dans le cas d'une jonction formée par un double puits de potentiel, nous avons écrit la fonction d'onde à un

corps sous la forme

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \alpha_a(t)\Phi_a(\mathbf{r}) + \alpha_b(t)\Phi_b(\mathbf{r}), \quad (29)$$

et nous avons étudié la dynamique de la jonction à l'aide des amplitudes $\alpha_j(t)$. Cette approche est tout à fait pertinente pour une grande partie des jonctions réalisées avec des gaz d'atomes froids, mais il importe de bien connaître ses limites.

2-1 États cohérents de spin et distribution de Husimi

Pour explorer ce problème, nous allons repartir de la description quantique de la jonction présentée au chapitre 4. Rappelons que dans ce modèle à deux états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ pour chaque particule, l'espace de Hilbert pour les N particules identiques composant la jonction est de dimension $N + 1$ et il est engendré par les états nombre $|N_a, N_b\rangle$, également appelés *états de Fock* :

$$|N, 0\rangle, |N - 1, 1\rangle, \dots, |1, N - 1\rangle, |0, N\rangle. \quad (30)$$

Dans la mesure où le nombre total $N = N_a + N_b$ est fixé une fois pour toutes, nous écrirons ces états plus simplement :

$$|n\rangle \equiv \left| N_a = \frac{N}{2} + n, N_b = \frac{N}{2} - n \right\rangle \quad n = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}. \quad (31)$$

Avec cette écriture, nous supposons que N est pair, donc $N/2$ entier, ce qui simplifie les notations. Dans la limite $N \gg 1$, cette hypothèse de parité n'a pas de conséquences physiques significatives, sauf dans des cas bien spécifiques que nous signalerons.

Nous écrirons l'hamiltonien du problème sous la forme²

$$\hat{H} = -\frac{E_J}{N}(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}) + \frac{E_C}{4}(\hat{N}_a^2 + \hat{N}_b^2) \quad (32)$$

où \hat{a} (resp. \hat{a}^\dagger) détruit (resp. crée) une particule sur le site a , et idem pour b . Les opérateurs nombres de particules $\hat{N}_{a,b}$ sont définis par $\hat{N}_a = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ et $\hat{N}_b = \hat{b}^\dagger \hat{b}$.

2. Au chapitre 4, nous avons écrit le terme correspondant à l'énergie de charge sous la forme $\frac{E_C}{2} \hat{J}_z^2$ avec $\hat{J}_z = \frac{1}{2}(\hat{N}_a - \hat{N}_b)$. Cette forme diffère de celle écrite en (32) par un terme additif constant, donc sans importance pour ce qui suit, puisque $\hat{J}_z^2 = \frac{1}{2}(\hat{N}_a^2 + \hat{N}_b^2) - \frac{N^2}{4}$.

Rappelons que le terme proportionnel à E_J décrit le couplage tunnel entre les composantes a et b pour une jonction externe, ou le couplage cohérent induit par une onde électromagnétique pour une jonction interne. Le terme proportionnel à E_C décrit les interactions entre particules. Dans ce chapitre, nous ferons l'hypothèse $E_C > 0$, que la jonction soit externe ou interne : l'état fondamental ne subit donc pas de bifurcation quand on varie le rapport E_C/E_J (cf. chapitre 4).

États cohérents de spin. Pour étudier les aspects quantiques d'une jonction, nous allons utiliser la famille d'états à N corps appelée *états cohérents de spin*, déjà introduite au chapitre 4. Cette famille est obtenue en mettant toutes les particules dans un même état combinaison linéaire de $|a\rangle$ et $|b\rangle$. Nous pouvons écrire cet état à une particule comme

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)e^{i\varphi/2}|a\rangle + \sin(\theta/2)e^{-i\varphi/2}|b\rangle \quad (33)$$

où l'angle θ repère les poids relatifs des états a et b et où φ représente la phase relative entre les deux puits. Nous avons omis la phase globale de $|\psi\rangle$, sans importance ici. En seconde quantification, l'état cohérent de spin s'écrit alors (LEGGETT & SOLS 1991) :

$$|\theta, \varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left[\cos(\theta/2)e^{i\varphi/2}\hat{a}^\dagger + \sin(\theta/2)e^{-i\varphi/2}\hat{b}^\dagger \right]^N |0\rangle. \quad (34)$$

En toute rigueur, il faudrait également spécifier la valeur de N dans cette définition et noter cet état $|\theta, \varphi\rangle_N$, mais N sera fixé dans tout ce qui suit et nous omettrons donc de le mentionner explicitement³. Pour l'état cohérent $|\theta, \varphi\rangle$, les nombres moyens de particules dans les états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ sont

$$\langle \hat{N}_a \rangle = N \cos^2(\theta/2) \quad \langle \hat{N}_b \rangle = N \sin^2(\theta/2). \quad (36)$$

Les états cohérents de spin sont en nombre infini, ce qui entraîne immédiatement qu'ils ne sont pas indépendants les uns des autres puisqu'ils sont tous éléments de l'espace de dimension finie $N + 1$. En revanche, ils

3. Notons néanmoins les relations

$$\hat{a}|\theta, \varphi\rangle_N = \sqrt{N} \cos(\theta/2) e^{i\varphi/2} |\theta, \varphi\rangle_{N-1} \quad \hat{b}|\theta, \varphi\rangle_N = \sqrt{N} \sin(\theta/2) e^{-i\varphi/2} |\theta, \varphi\rangle_{N-1} \quad (35)$$

qui seront des intermédiaires de calcul utiles dans la suite.

forment un système générateur et fournissent notamment une *résolution de l'identité* :

$$\int |\theta, \varphi\rangle \langle \theta, \varphi| d^2\Omega = \frac{4\pi}{N+1} \hat{1} \quad \text{avec} \quad d^2\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (37)$$

Le recouvrement entre deux états cohérents est donné par

$$|\langle \theta, \varphi | \theta', \varphi' \rangle|^2 = \cos^{2N}(\gamma/2) \approx e^{-N\gamma^2/4} \quad (38)$$

où γ désigne l'angle entre les deux directions (θ, φ) et (θ', φ') . La dernière expression (approchée) est valable si $\gamma \ll 1$ et elle montre que pour $N \gg 1$, un état cohérent $|\theta, \varphi\rangle$ n'a un recouvrement significatif qu'avec ses voisins immédiats, situés dans le secteur angulaire centré sur (θ, φ) et de largeur $\sim 1/\sqrt{N}$.

États cohérents équatoriaux ou "états de phase". Parmi l'ensemble des états cohérents, un sous-ensemble très utile est formé par les états de phase (CASTIN & DALIBARD 1997). Ces états sont centrés sur l'équateur de la sphère de Bloch ($\theta = \pi/2$) et ont donc le même nombre moyen de particules en a et b . En développant la définition (34) pour $\theta = \pi/2$, on obtient :

$$\left| \frac{\pi}{2}, \varphi \right\rangle = \sum_n c(n) e^{in\varphi} |n\rangle \quad \text{avec} \quad c(n) = \frac{1}{2^{N/2}} \sqrt{\frac{N!}{N_a! N_b!}}, \quad (39)$$

ce qui se simplifie dans la limite $N \gg 1$ en utilisant la formule de Stirling :

$$c(n) \approx \frac{e^{-n^2/N}}{(\pi N/2)^{1/4}}. \quad (40)$$

Les états de phase sont donc essentiellement concentrés sur les états de Fock $|n\rangle$ autour de $n = 0$ (c'est-à-dire $N_a = N_b = N/2$) avec une largeur $\Delta n \approx \frac{1}{2}\sqrt{N}$. On vérifiera que cette approximation de $c(n)$ conserve la normalisation de $|\Psi\rangle$ quand on passe à la limite continue :

$$\sum_n |c(n)|^2 \approx \int_{-\infty}^{\infty} |c(x)|^2 dx = 1. \quad (41)$$

L'extension des bornes $\pm N/2$ jusqu'à $\pm\infty$ est légitime dans la mesure où la largeur $\sim \sqrt{N}$ de la distribution est très petite devant $N/2$.

Notons qu'il est possible d'inverser la relation (39) et d'exprimer les états nombres en terme des états de phase ; en multipliant (39) par $e^{-in\varphi}$ et en intégrant sur φ entre $-\pi$ et $+\pi$, on obtient :

$$|n\rangle = \frac{1}{2\pi c(n)} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-in\varphi} \left| \frac{\pi}{2}, \varphi \right\rangle d\varphi. \quad (42)$$

Énergie d'un état cohérent de spin. Pour l'hamiltonien écrit en (32), l'énergie moyenne $E(\theta, \varphi) = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle$ d'un état cohérent de spin s'écrit

$$E(\theta, \varphi) = -E_J \sin\theta \cos\varphi + \frac{N(N-1)E_C}{8} (1 + \cos^2\theta) + \frac{NE_C}{4}. \quad (43)$$

Pour les états de phase ($\theta = \pi/2$), cette énergie vaut

$$E(\theta, \varphi) = -E_J \cos\varphi + \frac{N(N+1)E_C}{8}. \quad (44)$$

Elle est minimale pour l'état de phase $|\frac{\pi}{2}, 0\rangle$ et vaut $-E_J + \frac{1}{8}N(N+1)E_C$.

Distribution de Husimi. Une manière commode pour visualiser un état à N corps quelconque, noté ici $|\Psi\rangle$, consiste à s'intéresser à la fonction

$$\mathcal{Q}(\theta, \varphi) \equiv \frac{N+1}{4\pi} |\langle \theta, \varphi | \Psi \rangle|^2 \quad (45)$$

correspondant au recouvrement entre cet état et les états cohérents de spin. La résolution de l'identité (37) donne :

$$\int \mathcal{Q}(\theta, \varphi) d^2\Omega = 1, \quad (46)$$

ce qui indique que $\mathcal{Q}(\theta, \varphi)$ peut s'interpréter comme une distribution de probabilité.

Deux exemples de distributions de Husimi sont tracés en figure 7 pour des états qui joueront un rôle important dans la suite, l'état de phase $|\frac{\pi}{2}, \varphi = 0\rangle$ et l'état de Fock $|n = 0\rangle \equiv |N_a = N/2, N_b = N/2\rangle$.

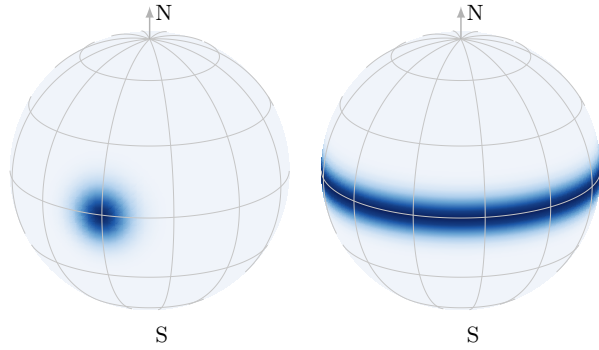


FIGURE 7. Distribution de Husimi pour $|\theta = \pi/2, \varphi = 0\rangle$ (gauche) et $|n = 0\rangle \equiv |N_a = N/2, N_b = N/2\rangle$ (droite). On a pris $N = 100$. Le code couleur est ajusté pour que le maximum soit complètement sombre sur chaque exemple.

2-2 État fondamental de la jonction

Nous revenons à l'hamiltonien (32) de la jonction symétrique et nous allons chercher à déterminer son état fondamental de manière approchée⁴ en utilisant la méthode variationnelle. Pour cela, nous allons prendre une famille de fonctions d'essai qui permet d'interpoler entre les deux situations limites aisément identifiables :

- En l'absence d'interaction entre particules, i.e. $E_C = 0$, l'état fondamental de cet hamiltonien est l'état de phase $|\frac{\pi}{2}, \varphi = 0\rangle$ avec l'énergie propre $-E_J$.
- En l'absence d'énergie tunnel, i.e. $E_J = 0$, l'état fondamental est l'état $|n = 0\rangle = |\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle$, puisqu'on minimise la somme $N_a^2 + N_b^2$ en mettant le même nombre $N_a = N_b = N/2$ de part et d'autre de la barrière tunnel.

Partant de l'état $|\frac{\pi}{2}, \varphi = 0\rangle$ qui s'écrit sur la base de Fock [cf. (39-40)]

$$|\frac{\pi}{2}, 0\rangle \approx \frac{1}{(\pi N/2)^{1/4}} \sum_n e^{-n^2/N} |n\rangle, \quad (47)$$

4. On peut également déterminer cet état fondamental de façon exacte au moyen de l'ansatz de Bethe (LINKS, FOERSTER et al. 2006; BARDIN, MINGUZZI et al. 2026).

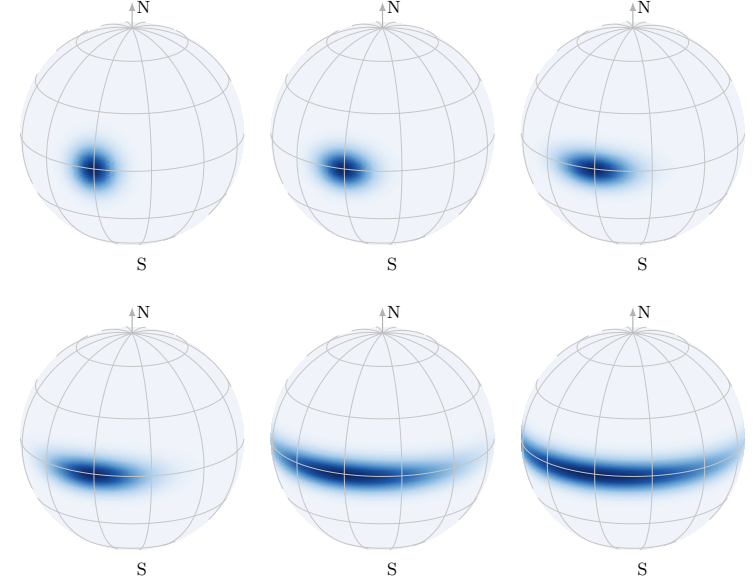


FIGURE 8. Exemples de distributions de Husimi pour les états variationnels $|\Psi(\zeta)\rangle$ pour $N = 100$. De gauche à droite et de haut en bas : $\zeta = 1$ (état de phase), $\zeta = 2$, $\zeta = 5$, $\zeta = 10$, $\zeta = 50$, $\zeta = 100$. Le code couleur est ajusté pour chaque exemple pour que le maximum soit complètement sombre.

nous allons nous intéresser à la famille d'états paramétrés par le nombre sans dimension ζ :

$$|\Psi(\zeta)\rangle = \frac{\zeta^{1/4}}{(\pi N/2)^{1/4}} \sum_n e^{-\zeta n^2/N} |n\rangle \quad (48)$$

On retrouve l'état $|\frac{\pi}{2}, 0\rangle$ pour $\zeta = 1$. Le choix $\zeta > 1$ permet d'avoir une distribution en n plus concentrée autour de $n = 0$. Quelques distributions de Husimi pour la famille $\{|\psi(\zeta)\rangle\}$ sont tracées en figure 8. En particulier, quand ζ devient comparable à N , seuls quelques états de Fock autour de $|n = 0\rangle$ sont significativement peuplés (au lieu de \sqrt{N} pour l'état $|\varphi = 0\rangle$).

Avant d'évaluer la valeur de ζ qui minimise l'énergie moyenne pour un couple E_J, E_C donné, il est intéressant de regarder la distribution en phase

des états $|\Psi(\zeta)\rangle$. On trouve, en remplaçant la somme discrète sur n par une intégrale :

$$\left\langle \frac{\pi}{2}, \varphi | \psi(\zeta) \right\rangle \approx \zeta^{1/4} \sqrt{\frac{2}{1+\zeta}} e^{-N\varphi^2/4(1+\zeta)} \quad (49)$$

de sorte que la distribution de phase de $|\Psi(\zeta)\rangle$ reste piquée autour de $\varphi = 0$ tant que $\zeta \ll N$. En revanche pour $\zeta \approx N$, $|\Psi(\zeta)\rangle$ a un recouvrement similaire avec tous les états de phase.

Le calcul de l'énergie moyenne de la jonction pour l'état $|\Psi(\zeta)\rangle$ se mène de façon similaire et on arrive à :

$$E(\zeta) \approx -E_J \left(1 + \frac{1}{N} - \frac{1}{2\zeta N}\right) e^{-\zeta/2N} + \frac{1}{8} N^2 E_C \left(1 + \frac{1}{N\zeta}\right). \quad (50)$$

Faisons l'hypothèse que la valeur de ζ qui minimise cette énergie est petite devant N , hypothèse que nous discuterons à la fin de l'analyse. On peut alors développer l'exponentielle $e^{-\zeta/2N}$ et mettre l'énergie sous la forme

$$E(\zeta) \approx \frac{1}{2N} \left[E_J \zeta + \left(E_J + \frac{1}{4} N^2 E_C \right) \frac{1}{\zeta} \right] + E_0 \quad (51)$$

avec

$$E_0 = -E_J \left(1 + \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{8} N^2 E_C. \quad (52)$$

Le minimum de cette quantité est atteint pour

$$\zeta_{\min} = \left(1 + \frac{N^2 E_C}{4E_J}\right)^{1/2} \quad (53)$$

ce qui permet de distinguer les trois régimes reportés sur la figure 9 (LEGGETT 2001) :

— **le régime de Rabi :**

$$E_C \ll 4E_J/N^2 \Rightarrow \zeta_{\min} \approx 1, \quad E(\zeta_{\min}) \approx -E_J. \quad (54)$$

Les interactions jouent un rôle négligeable et l'état fondamental de la jonction est égal à l'état de phase $|\frac{\pi}{2}, \varphi = 0\rangle$, avec une distribution gaussienne des probabilités d'occupation des différents états $|n\rangle$, de largeur $\Delta n \approx \frac{1}{2}\sqrt{N}$. La distribution de phase est centrée sur $\varphi = 0$ et très étroite : $\Delta\varphi \approx 1/\sqrt{N}$.

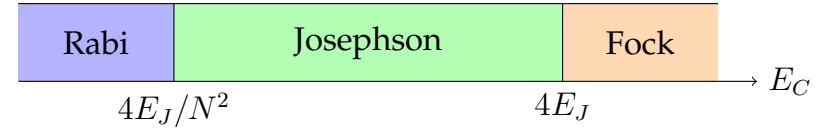


FIGURE 9. Les trois régimes identifiés pour le fonctionnement d'une jonction Josephson, selon la valeur du rapport E_C/E_J .

— **le régime Josephson :**

$$4E_J/N^2 \ll E_C \ll 4E_J \Rightarrow \zeta_{\min} \approx N \left(\frac{E_C}{4E_J}\right)^{1/2} \quad (55)$$

c'est-à-dire

$$1 \ll \zeta_{\min} \ll N. \quad (56)$$

L'énergie minimale est alors :

$$E(\zeta_{\min}) \approx \frac{1}{2} \hbar\omega_p + E_0 \quad \text{avec} \quad \hbar\omega_p = \sqrt{E_J E_C}. \quad (57)$$

La distribution des probabilités d'occupation des différents états $|n\rangle$ pour $|\psi(\zeta_{\min})\rangle$ reste relativement large :

$$\Delta n = \sqrt{\frac{N}{4\zeta_{\min}}} \sim \left(\frac{E_J}{4E_C}\right)^{1/4} \gg 1 \quad (58)$$

mais elle est plus resserrée que dans le cas sans interaction ($\Delta n \ll \sqrt{N}$). La distribution sur les états de phase est au contraire augmentée par rapport au cas sans interaction (on a ici encore $\Delta\varphi \Delta n \sim \frac{1}{2}$), mais reste petite devant 1. La phase de la jonction est donc toujours une quantité bien définie. L'état minimiseur est un *état comprimé en spin*, qui joue un rôle central en métrologie quantique (voir remarque ci-dessous).

— **le régime de Fock :**

$$4E_J \ll E_C \quad (59)$$

Dans ce régime, le résultat (53) conduit à $\zeta_{\min} > N$, ce qui contredit l'hypothèse $\zeta \ll N$ que nous avons faite pour arriver à (53). Plus

précisément, on trouve dans ce régime l'état fondamental

$$|\psi_{\text{fond}}\rangle \approx |n=0\rangle \equiv \left| \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \right\rangle \quad E_{\text{fond}} \approx \frac{1}{8} N^2 E_C. \quad (60)$$

Les deux composantes de cet état sont appelés *états jumeaux de Fock* (*Twin Fock states*). Cet état est séparé de ses "voisins"

$$|n = \pm 1\rangle \equiv \left| \frac{N}{2} \pm 1, \frac{N}{2} \mp 1 \right\rangle \quad (61)$$

par l'énergie d'interaction $E_C/2$, qui est grande devant l'élément de matrice de couplage $\sim E_J$ entre ces différents états. L'effet tunnel n'est donc pas résonnant dans ce régime extrême et les populations restent "verrouillées" sur la valeur centrale $N_a = N_b = N/2$. Cette situation rappelle celle d'un isolant de Mott pour des atomes piégés sur les sites d'un réseau optique.

Nous avons déjà identifié les deux premiers régimes au chapitre 1, en étudiant la dynamique de la jonction par une approche en terme de champ classique. En particulier, nous avons montré que dans le régime de Josephson, l'évolution de la jonction autour de sa position d'équilibre était donnée par la fréquence plasma ω_p . Il est donc satisfaisant de voir apparaître en (57) le demi-quantum d'énergie $\hbar\omega_p/2$ correspondant au mouvement de point zéro de cet oscillateur. Nous approfondirons l'émergence de cette structure d'oscillateur harmonique en §3-2.

En revanche, le troisième régime ne pouvait pas être obtenu par l'approche classique. Il correspond à un état localisé sur un seul état dans la base de Fock, avec un recouvrement uniforme de tous les états de phase entre $\varphi = -\pi$ et $\varphi = +\pi$ [cf. (42) pour $n = 0$]. Il a été réalisé de manière approchée avec des photons (THEKKADATH, MYCROFT et al. 2020) et avec des atomes (LUO, ZOU et al. 2017), mais dans un contexte différent de celui des jonctions Josephson. Nous retrouverons des états similaires au prochain chapitre pour des jonctions supraconductrices, quand nous nous intéresserons à la formation de qubits.

Applications métrologiques. Les états comprimés en spin, obtenus pour $\zeta > 1$, jouent un rôle central en métrologie quantique (PEZZE, SMERZI et

al. 2018; SINATRA 2022). Pour expliquer ce rôle, supposons que l'on s'intéresse à un phénomène physique qui transfère des atomes entre les états $|a\rangle$ et $|b\rangle$. Partons d'un état pour lequel $\langle N_a \rangle = \langle N_b \rangle = N/2$. Si l'on dispose d'atomes indépendants, donc non corrélés entre eux, une réalisation de l'expérience permettra de déterminer le nombre d'atomes ayant subi la transition à \sqrt{N} près : c'est le bruit quantique standard. Si l'on dispose d'un état initial comprimé, avec une dispersion en $n = (N_a - N_b)/2$ notablement réduite par rapport à \sqrt{N} , on aura naturellement une meilleure précision sur la mesure du nombre d'atomes ayant transité de $|a\rangle$ vers $|b\rangle$ pendant la durée du phénomène en jeu. L'état comprimé "ultime" $|\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle$, si on sait le préparer et compter les atomes à l'unité près pour le distinguer de $|\frac{N}{2} \pm 1, \frac{N}{2} \mp 1\rangle$, permet même de détecter la transition d'un seul atome!

2-3 Fragmentation de l'état fondamental

Comme nous l'avons vu de façon générale en §1, la fraction condensée se définit à partir de la matrice densité à un corps $\hat{\rho}_1$. Dans le cas présent, la situation est simple puisque l'espace de Hilbert à une particule est de dimension 2, avec comme base possible les deux états $|a\rangle$ et $|b\rangle$. La matrice densité à un corps est donc définie par

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \hat{b} \rangle \\ \langle \hat{b}^\dagger \hat{a} \rangle & \langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle \end{pmatrix} \quad (62)$$

où les valeurs moyennes sont prises dans l'état du système à N corps.

Intéressons-nous à l'état variationnel $|\Psi(\zeta)\rangle$ défini en (48). En passant comme précédemment à la limite continue pour le calcul des sommes sur n , on trouve pour les coefficients diagonaux

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle = \frac{N}{2} \quad (63)$$

et pour les coefficients non diagonaux :

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{b} \rangle = \langle \hat{b}^\dagger \hat{a} \rangle \approx \frac{N}{2} \left(1 + \frac{1}{N} - \frac{1}{2\zeta N} \right) e^{-\zeta/2N}. \quad (64)$$

Plaçons-nous d'abord dans le régime de Rabi ou dans le régime Josephson, pour lesquels $\zeta_{\min} \ll N$; les coefficients non diagonaux de $\hat{\rho}_1$ sont

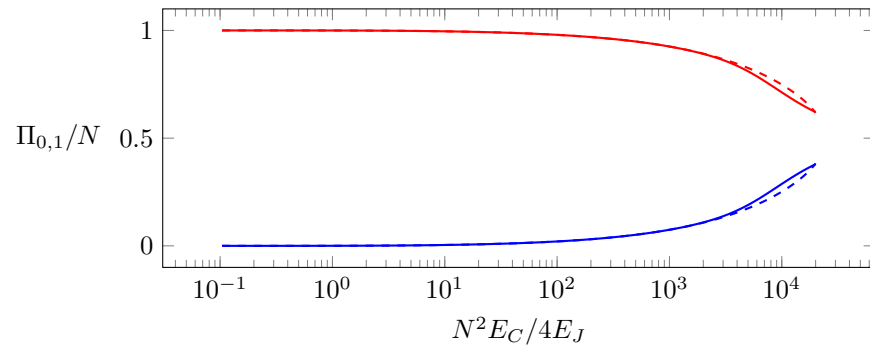


FIGURE 10. Variation des deux valeurs propres Π_0 (rouge) et Π_1 (bleu) avec le paramètre $N^2 E_C / 4 E_J$ pour $N = 100$. Le trait plein est obtenu par diagonalisation exacte de l'hamiltonien (32), le trait tireté correspond à l'approche variationnelle décrite dans le texte.

alors voisins des coefficients diagonaux, de sorte que les valeurs propres de $\hat{\rho}_1$ sont approximativement N et 0 . Plus précisément, en prenant $\zeta = \zeta_{\min}$, on trouve dans le régime de Rabi, à des termes d'ordre $1/N$ près :

$$\text{Rabi : } \quad \Pi_0 = N \quad \Pi_1 = 0 \quad (65)$$

et dans le régime Josephson :

$$\text{Josephson : } \quad \Pi_0 \sim N - \frac{N}{8} \sqrt{\frac{E_C}{E_J}} \quad \Pi_1 \sim \frac{N}{8} \sqrt{\frac{E_C}{E_J}} . \quad (66)$$

Le condensat est donc très peu fragmenté tant que $E_C \ll E_J$.

En revanche, dans le régime de Fock $E_C \gtrsim E_J$, la fragmentation du condensat devient très significative. Pour l'état $|N/2, N/2\rangle$, on a $\langle \hat{a}^\dagger \hat{b} \rangle = \langle \hat{b}^\dagger \hat{a} \rangle = 0$, de sorte que les deux valeurs propres de $\hat{\rho}_1$ sont

$$\text{État de Fock } \left| \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \right\rangle : \quad \Pi_0 = \frac{N}{2} \quad \Pi_1 = \frac{N}{2} , \quad (67)$$

ce qui correspond à la fragmentation maximale possible. On trouvera en figure 10 la variation de Π_0 et Π_1 avec le paramètre $N^2 E_C / 4 E_J$ pour le cas $N = 100$.

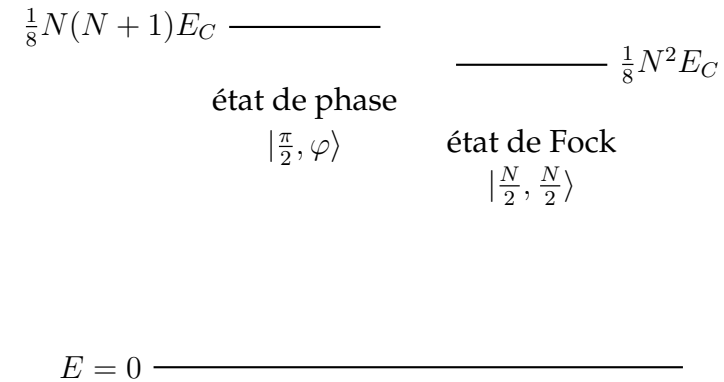


FIGURE 11. Dans le cas E_J négligeable, l'état fragmenté $|\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle$ a une énergie abaissée de $\frac{1}{8} N E_C$ par rapport à l'état de champ moyen, où tous les spins occupent le même état (état de phase).

Le gain en énergie de la fragmentation. Il est utile de comparer, pour une configuration donnée, l'énergie de l'état fondamental fragmenté par rapport au résultat prédit par une approche champ moyen. Prenons le cas limite $E_J = 0$, correspondant à l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{E_C}{4} (\hat{N}_a^2 + \hat{N}_b^2) \quad (68)$$

Comme nous l'avons déjà signalé, l'état de Fock $|n=0\rangle \equiv |N_a = N/2, N_b = N/2\rangle$ est état propre avec l'énergie $\frac{1}{8} N^2 E_C$. Prenons maintenant les états de phase $|\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi\rangle$ définis en (39). Leur énergie calculée en (44) est voisine, mais légèrement supérieure : $E(\varphi) = \frac{1}{8} N(N+1) E_C$. On voit donc que la fragmentation du condensat, qui conduit à l'état fondamental [cf. (42)]

$$|n=0\rangle \propto \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{\pi}{2}, \varphi \right\rangle d\varphi \quad (69)$$

c'est-à-dire une superposition cohérente à amplitudes égales de tous les états de champ moyen $|\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi\rangle$, permet d'abaisser l'énergie d'une quantité sub-extensive, avec un gain relatif en $1/N$ (figure 11). On s'attend donc

à ce que ce gain soit significatif uniquement pour des nombres de particules pas trop grands. Nous retrouverons un scénario similaire pour le cas d'un gaz de particules de spin 1 en § 4.

Remarque sur la parité de N . Nous avons supposé dans ce qui précède que nous prenions N pair pour simplifier les notations; nous avons également mentionné que cette hypothèse n'avait généralement pas de conséquences physiques. La fragmentation dans le régime de Fock est une exception à cette affirmation. Si N est impair, l'état d'énergie minimale dans le régime $E_C \gg E_J$ est

$$N \text{ impair : } |\psi_{\text{fond}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2} \right\rangle + \left| \frac{N+1}{2}, \frac{N-1}{2} \right\rangle \right) \quad (70)$$

ce qui conduit aux valeurs propres $\Pi_0 = 3N/4$ et $\Pi_1 = N/4$ pour la matrice densité à un corps. L'état est toujours fortement fragmenté, mais à un degré moindre que dans le cas des nombres N pairs.

3 Spectre énergétique de la jonction

3-1 Rappel : représentation de Schwinger

Au paragraphe précédent, nous avons utilisé une approche variationnelle pour déterminer l'état fondamental de la jonction. Il est intéressant de compléter cette étude en déterminant le spectre en énergie de ce système, au moins dans sa partie basse. Pour cela, revenons à la représentation de la jonction dans le formalisme de Schwinger, que nous avons développé au chapitre précédent. Rappelons que cette représentation consiste à introduire les trois opérateurs

$$\begin{cases} \hat{J}_x = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger) \\ \hat{J}_y = \frac{i}{2} (\hat{a} \hat{b}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{b}) \\ \hat{J}_z = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}) \end{cases} \quad (71)$$

qui vérifient les règles de de commutation d'un opérateur moment cinétique :

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i \hat{J}_z \quad (72)$$

et les deux autres relations déduites par permutation circulaire. On a par ailleurs :

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 = \frac{\hat{N}}{2} \left(\frac{\hat{N}}{2} + 1 \right). \quad (73)$$

L'espace de dimension $N+1$ dans lequel on décrit la jonction à deux modes et N atomes peut donc être vu comme l'espace associé à un moment cinétique de valeur $J = N/2$.

Nous avons donné au chapitre précédent l'hamiltonien décrivant la dynamique de ce moment cinétique. Nous le réécrivons ici en nous plaçant d'emblée à résonance ($\hat{\Delta} = 0$) :

$$\hat{H} = -\frac{E_J}{J} \hat{J}_x + \frac{E_C}{2} \hat{J}_z^2. \quad (74)$$

Pour $E_C = 0$, l'état fondamental de cet hamiltonien est l'état $|J_x = J\rangle$, c'est-à-dire l'état associé à la plus grande valeur propre possible de l'opérateur \hat{J}_x . Cet état n'est autre que l'état de phase déjà rencontré

$$|J_x = J\rangle = \left| \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0 \right\rangle \quad (75)$$

dont la représentation de Husimi est tracée en figure 7, gauche. Plus généralement, l'état cohérent $|\theta, \varphi\rangle$ coïncide avec l'état $|M_{\mathbf{u}} = J\rangle$, où le vecteur unitaire \mathbf{u} définissant l'axe de quantification est défini par les angles θ, φ en coordonnées sphériques.

3-2 L'oscillateur harmonique sous-jacent

Pour progresser, nous allons nous intéresser aux états "voisins" de l'état fondamental, en partant de

$$\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 = J(J+1) \approx J^2 \quad (76)$$

en faisant l'approximation suivante pour l'action de l'opérateur \hat{J}_x sur ces états :

$$\hat{J}_x \approx J - \frac{1}{2J} (\hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2). \quad (77)$$

Cette approximation est valable tant qu'on s'intéresse à des états donnant naissance à des éléments de matrice de \hat{J}_y et \hat{J}_z très petits devant J . On obtient alors un hamiltonien quadratique en \hat{J}_y et \hat{J}_z :

$$\hat{H} = \frac{E_J}{2J^2} \hat{J}_y^2 + \left(\frac{E_J}{2J^2} + \frac{E_C}{2} \right) \hat{J}_z^2 - E_J \quad (78)$$

Par ailleurs, la relation de commutation canonique entre \hat{J}_y et \hat{J}_z se simplifie dans ce régime :

$$[\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hat{J}_x \quad \Rightarrow \quad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] \approx iJ \quad (79)$$

ce qui correspond (à un coefficient multiplicatif près) à la relation de commutation usuelle entre position et impulsion.

Nous sommes donc ramenés à un problème typique d'oscillateur harmonique. En écrivant l'hamiltonien et la relation de commutation sous la forme compacte

$$\hat{H} = \frac{A}{2} \hat{J}_y^2 + \frac{B}{2} \hat{J}_z^2 \quad \text{avec} \quad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = iJ \quad (80)$$

nous obtenons les évolutions en point de vue de Heisenberg

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d\hat{J}_y}{dt} = [\hat{J}_y, \hat{H}] = iBJ \hat{J}_z \\ i\hbar \frac{d\hat{J}_z}{dt} = [\hat{J}_z, \hat{H}] = -iAJ \hat{J}_y \end{cases} \quad (81)$$

qui sont bien du type attendu pour un oscillateur harmonique et dont on déduit la fréquence d'oscillation $\hbar\omega = J\sqrt{AB}$. En utilisant les coefficients entrant explicitement dans (78), on arrive donc à

$$\hbar\omega_p = \left[E_J \left(\frac{4E_J}{N^2} + E_C \right) \right]^{1/2} \quad (82)$$

où l'on reconnaît la fréquence plasma ω_p déjà obtenue dans l'approche champ classique. Pour $N \gg 1$, le bas du spectre de la jonction est donc composée d'une série de niveaux équidistants :

$$E_j = \left(j + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_p - E_J \quad j \in \mathbb{N}. \quad (83)$$

Ce point de vue "moment cinétique" offre une interprétation physique intéressante du passage du régime de Rabi au régime Josephson, puis au régime de Fock, quand on augmente la force des interactions entre particules, donc le coefficient E_C :

- Dans le régime de Rabi, l'énergie de couplage proportionnelle à E_J domine et les coefficients de \hat{J}_y^2 et \hat{J}_z^2 dans (78) sont comparables. L'état fondamental en représentation de Husimi est alors celui montré en figure 7 (gauche), avec des extensions égales selon y et z .
- Quand la force des interactions (E_C) augmente, le coefficient de \hat{J}_z^2 est augmenté alors que celui de \hat{J}_y^2 est inchangé. Les interactions (répulsives) tendent en effet à égaliser les populations N_a et N_b , donc à diminuer la dispersion de la distribution de Husimi de part et d'autre de l'équateur : cette distribution prend donc une forme elliptique.
- L'état de Fock correspond au régime ultime où la compression est si forte que la localisation sur l'équateur est maximale, au prix d'une perte complète de l'information sur la phase.

3-3 La relation de commutation phase-nombre

La relation de commutation approchée $[\hat{J}_y, \hat{J}_z] \approx iJ$ trouvée ci-dessus a une interprétation physique intéressante entre termes d'opérateur nombre \hat{n} et "d'opérateur phase" $\hat{\varphi}$ (la raison des guillemets apparaîtra dans un instant). Pour obtenir cette relation, nous allons partir de l'action de ces opérateurs sur les états au voisinage de l'état $|J_x = J\rangle = |\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0\rangle$.

Pour relier \hat{J}_y à l'opérateur phase $\hat{\varphi}$ qui va être associé à la mesure de l'angle azimutal, regardons la moyenne de cet opérateur sur un état de phase $|\frac{\pi}{2}, \varphi\rangle$:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\pi}{2}, \varphi \left| \hat{J}_y \right| \frac{\pi}{2}, \varphi \right\rangle &= \frac{1}{2^N N!} \langle 0 | (e^{-i\varphi/2} \hat{a} + e^{i\varphi/2} \hat{b})^N \hat{J}_y (e^{i\varphi/2} \hat{a}^\dagger + e^{-i\varphi/2} \hat{b}^\dagger)^N | 0 \rangle \\ &= -\frac{N}{2} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (84)$$

Limitons pour l'instant à des états proches de $|J\rangle_x = J$, c'est-à-dire $\varphi \ll 1$; en utilisant $J = N/2$, nous sommes donc conduit à poser

$$\hat{J}_y = -J \hat{\varphi} \quad (85)$$

Par ailleurs, la définition de \hat{J}_z donnée en (71) correspond à $\hat{J}_z = \frac{1}{2} (\hat{N}_a - \hat{N}_b) = \hat{n}$. La relation de commutation (approchée) $[\hat{J}_y, \hat{J}_z] \approx iJ$ peut alors s'écrire

$$[\hat{n}, \hat{\varphi}] \approx i \quad (86)$$

Cette relation est à prendre avec précaution. Tout d'abord, puisque nous travaillons ici en dimension finie⁵, il est clair qu'elle ne peut pas être valable sur tout l'espace. Pour le prouver, prenons la trace des deux membres de cette relation. On sait que pour tout couple d'opérateurs (\hat{A}, \hat{B}) en dimension finie, $\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \text{Tr}(\hat{B}\hat{A})$. La trace d'un commutateur est donc toujours nulle, en particulier $\text{Tr}([\hat{n}, \hat{\varphi}]) = 0$, alors que la trace du membre de droite est égale à $i(N+1)$.

La relation (86) a toutefois une vertu importante. Elle va nous guider pour construire un opérateur \hat{E} que l'on pourra associer à $e^{i\hat{\varphi}}$ (avec certaines précautions). Pour cela, remarquons que d'un point de vue formel, la relation de commutation (86), si elle est supposée exacte, s'étend aux puissances de $\hat{\varphi}$:

$$[\hat{n}, \hat{\varphi}^k] = ik \hat{\varphi}^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad (87)$$

et donc à l'opérateur $e^{i\hat{\varphi}}$:

$$e^{i\hat{\varphi}} \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\hat{\varphi})^k}{k!} : \quad [e^{i\hat{\varphi}}, \hat{n}] = e^{i\hat{\varphi}}. \quad (88)$$

Cherchons donc un opérateur \hat{E} qui vérifie la relation de commutation inspirée de (88), $[\hat{E}, \hat{n}] = \hat{E}$, en lui imposant de conserver la norme, à une exception près qui va apparaître dans ce qui suit. Si on fait agir cette relation de commutation sur la base propre de \hat{n} , c'est-à-dire les états $|n\rangle \equiv |\frac{N}{2} + n, \frac{N}{2} - n\rangle$, on trouve

$$\hat{n} (\hat{E} |n\rangle) = (n-1) (\hat{E} |n\rangle). \quad (89)$$

On en déduit que si $n \neq -N/2$, on peut prendre simplement :

$$n > -N/2 : \quad \hat{E} |n\rangle = |n-1\rangle, \quad (90)$$

5. Quand on passe en dimension infinie, la définition précise d'un opérateur phase en physique quantique est également un problème délicat, que nous n'allons pas discuter ici. Nous renvoyons les lecteurs intéressés à l'analyse approfondie de CASTIN (2025), § 3.5.

ce qui conserve bien la norme. Pour l'action sur $|n = -N/2\rangle$, nous prendrons :

$$\hat{E} |-N/2\rangle = 0. \quad (91)$$

On peut donc écrire cet opérateur \hat{E} sous la forme générique :

$$\hat{E} = \sum_{n=1-N/2}^{N/2} |n-1\rangle \langle n|. \quad (92)$$

Vérifions maintenant que cet opérateur \hat{E} permet effectivement de retrouver la phase d'un état, quand celle-ci est bien définie. Pour cela, faisons agir \hat{E} sur un des états de phase définis plus haut :

$$\begin{aligned} \hat{E} \left| \frac{\pi}{2}, \varphi \right\rangle &= \sum_n c(n) e^{in\varphi} \hat{E} |n\rangle \\ &= \sum_n c(n) e^{in\varphi} |n-1\rangle = e^{i\varphi} \sum_n c(n+1) e^{in\varphi} |n\rangle \\ &\approx e^{i\varphi} \left| \frac{\pi}{2}, \varphi \right\rangle \end{aligned} \quad (93)$$

où nous avons (i) étendu les sommes sur n à $\pm\infty$ et (ii) fait l'approximation $c(n+1) \approx c(n)$, ce qui est légitime car (i) seuls les $c(n)$ avec $n \ll N$ prennent des valeurs appréciables et (ii) l'échelle de variation des $c(n)$ est $\sim \sqrt{N} \gg 1$. On voit sur ce résultat qu'un état de phase est "presque" état propre de \hat{E} avec la valeur propre $e^{i\varphi}$. Là encore, cette relation ne peut pas être exacte : un opérateur agissant en dimension finie ne peut pas avoir une infinité de valeurs propres distinctes. Mais elle montre que compte tenu des contraintes liées à cette dimension finie, \hat{E} est proche de ce qu'on attend d'un opérateur mesurant l'exponentielle complexe de la phase.

On trouve ainsi fréquemment dans la littérature les relations qui précèdent écrites en substituant la notation $e^{i\hat{\varphi}}$ à \hat{E} , en particulier

$$e^{i\hat{\varphi}} = \sum_n |n-1\rangle \langle n| \quad [e^{i\hat{\varphi}}, \hat{n}] = e^{i\hat{\varphi}}. \quad (94)$$

Il s'agit d'une notation commode, que l'on peut utiliser tant qu'on se rappelle que $\hat{E} \equiv e^{i\hat{\varphi}}$ n'est pas véritablement unitaire (contrairement à ce que cette notation suggère), puisque $\hat{E} |-N/2\rangle = 0$.

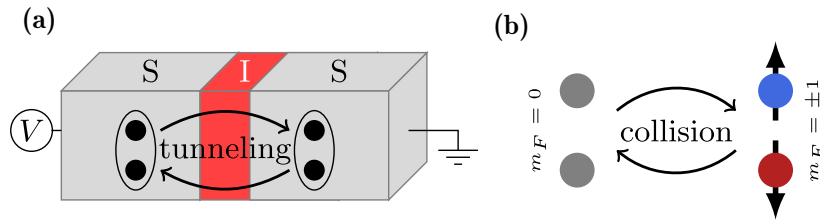


FIGURE 12. Équivalence entre une jonction Josephson avec l'effet tunnel de paires de Cooper (a) et un gaz de particules de spin 1 (b), dans l'approximation du mode spatial unique. Figure extraite de EVRARD, QU et al. (2019).

4 Spins 1 et jonction Josephson

Dans cette dernière partie, nous allons nous intéresser à un autre type de jonction Josephson interne, se produisant pour des atomes de spin 1. Nous considérons N atomes confinés dans un piège très raide, de sorte que les degrés de liberté spatiaux des atomes sont gelés. Nous nous plaçons donc dans l'approximation du mode spatial unique, déjà utilisée auparavant. Nous ne détaillerons pas ici tous les calculs (parfois longs) propres à la physique des gaz spineurs et nous renvoyons les lecteurs intéressés vers l'article de revue de STAMPER-KURN & UEDA (2013).

4-1 Les interactions entre atomes de spin 1

Contrairement aux atomes à deux niveaux, pour lesquels les nombres d'atomes N_a et N_b sont conservés si on n'applique pas un couplage cohérent extérieur, les interactions entre atomes de spin 1 autorisent une dynamique intrinsèque non triviale. Plus précisément, si on choisit un axe de quantification (noté z) et qu'on introduit les trois états $|m_z = -1\rangle$, $|m_z = 0\rangle$ et $|m_z = +1\rangle$ pour décrire l'état de spin d'un atome, l'interaction entre deux atomes donne naissance au processus

$$|0\rangle + |0\rangle \rightleftharpoons |+1\rangle + |-1\rangle . \quad (95)$$

Ce processus fournit l'équivalent d'une jonction Josephson. Pour l'expliquer, limitons-nous pour simplifier à un gaz de polarisation nulle, pour

lequel $N_{+1} = N_{-1}$. Cette polarisation est conservée sous l'effet de l'interaction (95) et les deux côtés de la jonction peuvent être vus comme une assemblée d'atomes dans l'état $|0\rangle$ d'une part, et une assemblée d'atomes dans les états $|\pm 1\rangle$ d'autre part (figure 12). Sur le plan mathématique, l'interaction (95) est décrite par un couplage proportionnel à

$$\hat{a}_{+1}^\dagger \hat{a}_{-1}^\dagger (\hat{a}_0)^2 + (\hat{a}_0^\dagger)^2 \hat{a}_{+1} \hat{a}_{-1} . \quad (96)$$

Pour comprendre comment le terme (96) émerge, résumons le principe du traitement théorique de l'interaction entre deux atomes de spin 1. Dans le régime de très basse température (onde s), on modélise le potentiel d'interaction sous la forme

$$\hat{V}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \otimes \hat{V}_{\text{spin}} . \quad (97)$$

La partie orbitale est donnée par le pseudo-potentiel $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, correspondant à une interaction de contact. Sa contribution apparaîtra dans un coefficient multiplicatif global faisant intervenir le mode spatial occupé par les atomes. La partie intéressante pour notre problème concerne la partie agissant sur le spin, qui peut se mettre sous la forme

$$\hat{V}_{\text{spin}} = g_0 \hat{1} + g_s \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 \quad (98)$$

Le terme en g_0 , proportionnel à l'identité sur l'espace de spin, ne contribue pas à la dynamique et ajoute simplement un terme constant à l'hamiltonien du problème. Nous allons donc nous concentrer dans ce qui suit sur le terme $\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2$.

Passons au cas de N atomes. Comme toutes les particules partagent la même fonction d'onde spatiale, tous les couples (i, j) possibles contribuent de la même façon à l'hamiltonien d'interaction, que nous écrivons sous la forme

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{U_s}{2N} \sum_{i \neq j} \hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{s}}_j = \frac{U_s}{2N} \left(\hat{\mathbf{S}}^2 - \sum_i \hat{\mathbf{s}}_i^2 \right) = \frac{U_s}{2N} \hat{\mathbf{S}}^2 - U_s \quad (99)$$

où nous avons introduit l'opérateur de spin total :

$$\hat{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{s}}_i \quad (100)$$

et utilisé le fait que chaque \hat{s}_i^2 est une constante, égale à 2 (comme précédemment, nos opérateurs de spin sont sans dimension). L'énergie U_s résulte de l'intégration sur r du potentiel de contact avec la fonction d'onde spatiale partagée par tous les atomes. Nous ne détaillerons pas son calcul [voir par exemple JACOB, SHAO et al. (2012)] et nous notons simplement que son signe⁶ est le même que celui de g_s ; il peut être positif ou négatif, selon l'espèce atomique utilisée.

L'écriture de cet opérateur en termes des opérateurs de création \hat{a}_m^\dagger et de destruction \hat{a}_m ($m = 0, \pm 1$) permet de mettre \hat{H}_{int} sous la forme :

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{U_s}{N} \left[\hat{a}_{+1}^\dagger \hat{a}_{-1}^\dagger (\hat{a}_0)^2 + (\hat{a}_0^\dagger)^2 \hat{a}_{+1} \hat{a}_{-1} \right] - \frac{U_s}{2N} \left[\hat{N}_0^2 + (\hat{N}_{+1} + \hat{N}_{-1})^2 \right] + \text{cte} \quad (101)$$

où nous avons utilisé le fait que nous restreignons à un gaz non polarisé ($S_z = 0$) et où nous avons négligé des termes d'ordre $1/N$ par rapport aux termes dominants.

On reconnaît sur cette expression les deux ingrédients principaux d'une jonction Josephson :

- la première ligne, pressentie en (96), décrit le couplage tunnel entre paires d'atomes;
- le deuxième ligne possède la structure du terme capacitif usuel en $\frac{E_C}{4} (N_a^2 + N_b^2)$.

Notons que pour ce type de jonction, le coefficient du terme tunnel et celui du terme capacitif sont liés (tous les deux proportionnels à U_s), alors que dans une jonction usuelle, E_J et E_C sont des paramètres indépendants.

Une fois cette correspondance établie entre l'assemblée de spins 1 et une jonction Josephson "traditionnelle", il est possible de mettre en évidence sur cette assemblée des phénomènes caractéristiques des jonctions comme les résonances de Shapiro, et d'étudier les mécanismes de dissipation liés à la partie résistive de la jonction (EVRARD, QU et al. 2019).

6. Il est positif pour l'état hyperfin de spin 1 de certaines espèces atomiques alcalines (²³Na par exemple) et négatif pour d'autres (⁸⁷Rb par exemple).

4-2 Le rôle de l'effet Zeeman

La présence d'un champ magnétique extérieur $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$ vient ajouter un terme supplémentaire à l'hamiltonien de l'assemblée de spins. Nous supposons ce champ magnétique suffisamment faible pour qu'il soit possible de limiter le calcul à l'ordre 2 inclus en B . Le déplacement des états $|m_z\rangle$ s'écrit à cet ordre

$$\Delta E_{\pm 1} = \pm \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 \quad \Delta E_0 = \beta_2 B^2. \quad (102)$$

Le terme en $\alpha_1 B$ est bien sûr dominant par rapport aux termes d'ordre 2, mais il n'a pas d'effet sur la dynamique liée aux processus (95) : la différence d'énergie entre le membre de droite et le membre de gauche est simplement égale à $q = (\alpha_2 - \beta_2)B^2$, les termes d'ordre 1 se compensant puisqu'ils sont opposés pour $m = +1$ et pour $m = -1$, et nuls pour $m = 0$.

La prise en compte de l'effet Zeeman se fait donc simplement en ajoutant le terme $-q\hat{N}_0$ à l'hamiltonien, plus un terme constant sans effet sur la dynamique du système. On arrive donc à l'hamiltonien total de notre assemblée de spin 1 (à une constante additive près) :

$$\hat{H} = \frac{U_s}{2N} \sum_{i \neq j} \hat{s}_i \cdot \hat{s}_j - q\hat{N}_0 \quad (103)$$

Signe de q . Pour les atomes alcalins de spin nucléaire $3/2$, on trouve effectivement un niveau (hyperfine) fondamental de spin $F = 1$, résultant du couplage entre le spin nucléaire et celui de l'unique électron de la couche externe. L'autre niveau hyperfin (de spin $F = 2$) est au dessus du niveau de spin 1, et l'effet Zeeman quadratique caractérisé par le coefficient q résulte du couplage induit par \mathbf{B} entre ces deux niveaux :

$$\text{états Zeeman issus de } F = 1 : \quad \Delta E_m^{(2)} = -\frac{(\mu_B B)^2}{4\hbar\omega_{\text{hf}}} (1 - m^2/4) \quad (104)$$

où μ_B est le magnéton de Bohr et $\hbar\omega_{\text{hf}}$ l'écart hyperfin. On trouve dans ces conditions que q est positif. Néanmoins, il est possible de changer ce signe en ajoutant une micro-onde quasi-résonnante avec la transition hyperfine [voir par exemple ZHAO, JIANG et al. (2014)].

4-3 État fondamental en champ moyen

Nous allons nous limiter dans ce paragraphe au cas $q \geq 0$ et utiliser une analyse en champ moyen, ce qui revient à négliger les corrélations entre les spins et prendre

$$\langle \hat{s}_i \cdot \hat{s}_j \rangle = \langle \hat{s}_i \rangle \cdot \langle \hat{s}_j \rangle \quad (105)$$

où $\langle \hat{s}_j \rangle$ désigne la valeur moyenne d'un spin individuel. Puisque nous considérons un état condensé, tous les spins sont supposés être dans le même état que nous paramétrons dans la base $\{|m_z = +1\rangle, |m_z = 0\rangle, |m_z = -1\rangle\}$ par

$$|\psi(\theta, \chi, \varphi)\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i(\chi-\varphi)} \\ \cos \theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i(\chi+\varphi)} \end{pmatrix} \quad (106)$$

où nous avons pris par convention une composante réelle pour $|m_z = 0\rangle$ (la phase globale de $|\psi\rangle$ est sans importance). Nous avons pris en compte l'hypothèse $\langle S_z \rangle = 0$ en imposant la même amplitude pour $|m_z = \pm 1\rangle$. On trouve alors (après un calcul un peu long...) l'énergie moyenne de l'état de champ moyen $|\psi(\theta, \chi, \varphi)\rangle^{\otimes N}$:

$$E(\theta, \chi, \varphi) = \frac{1}{2} N U_s \sin^2(2\theta) \sin^2 \chi - q N \cos^2 \theta \quad (107)$$

Notons que cette énergie fait intervenir la phase moyenne χ de $|m = \pm 1\rangle$ par rapport à $|m = 0\rangle$, mais est indépendante de la phase relative φ entre $|m = +1\rangle$ et $|m = -1\rangle$.

Cas antiferromagnétique, $U_s > 0$. Dans ce cas, la minimisation de l'énergie de champ moyen est simple :

- Pour q strictement positif, le terme de champ magnétique est minimum pour $\theta = 0$, ce qui minimise également le terme d'interaction. L'état fondamental est donc unique; il est obtenu en plaçant tous les spins dans l'état $|m_z = 0\rangle$.
- Pour $q = 0$, il suffit de prendre $\chi = 0$ en laissant θ et φ libres. On a donc, au niveau champ moyen, une infinité d'états dégénérés (parmi

lesquels l'état $|m_z = 0\rangle$ obtenu pour $q > 0$) :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \cos \theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (108)$$

permettant d'atteindre l'énergie minimale $E = 0$. La discontinuité de la dégénérescence du niveau fondamental entre $q \neq 0$ et $q = 0$ est un artefact de l'approximation de champ moyen. La zone de quasi-dégénérescence massive du niveau fondamental se produit plus précisément pour $q \lesssim U_s/N$. Nous verrons ci-dessous (§ 4-5) que cette zone correspond à la fragmentation du condensat.

On peut vérifier que les états ainsi obtenus sont les *états polaires* (ou *nématiques*), définis comme la famille $\{|m_{\mathbf{u}} = 0\rangle\}$, où \mathbf{u} est un vecteur unitaire pointant dans une direction (θ, φ) arbitraire. En effet, la matrice de rotation correspondant à une rotation de θ autour de l'axe y , puis de φ autour de l'axe z , qui amène le vecteur \mathbf{u}_z sur le vecteur \mathbf{u} d'angles sphériques (θ, φ) , est représentée dans la base $\{|m_z = +1\rangle, |m_z = 0\rangle, |m_z = -1\rangle\}$ par [cf. EDMONDS (1996)] :

$$D^{(1)}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos \theta}{2} e^{-i\varphi} & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} & \frac{1-\cos \theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos \theta}{2} e^{i\varphi} & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & \frac{1+\cos \theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (109)$$

et on constate qu'elle amène bien le ket $|m_z = 0\rangle$ sur celui écrit en (108).

Cas ferromagnétique, $U_s < 0$. Le minimum d'énergie est obtenu en prenant $\chi = 0$ (modulo π). Une fois ce choix fait, il reste à minimiser la quantité

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} E(\rho_0, 0, \varphi) &= -2|U_s| \rho_0 (1 - \rho_0) - q \rho_0 \\ &= 2|U_s| \rho_0^2 - (q + 2|U_s|) \rho_0 \quad \text{avec} \quad \rho_0 = \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (110)$$

Pour q suffisamment petit, le minimum est atteint pour $\rho_0 = \frac{1}{2} + \frac{q}{4|U_s|}$. Quand on augmente le champ magnétique, q atteint la valeur $q_c = 2|U_s|$ et ρ_0 prend sa valeur maximale : $\rho_0 = 1$ (STENGER, INOUEY et al. 1998). Il se produit donc une transition de phase continue en ce point, les populations

de $|m_z = \pm 1\rangle$ étant non nulles pour $q < q_c$ et s'annulant pour $q \geq q_c$. Cette transition a été observée par CHANG, HAMLEY et al. (2004) et CHANG, QIN et al. (2005).

4-4 Fragmentation dans le cas antiferromagnétique

Revenons au cas antiferromagnétique ($U_s > 0$) et intéressons-nous au cas spécifique $q = 0$, pour lequel l'hamiltonien est simplement

$$\hat{H} = \frac{U_s}{2N} \sum_{i \neq j} \hat{s}_i \cdot \hat{s}_j = \frac{U_s}{2N} \hat{S}^2 - U_s \quad (111)$$

Comme indiqué plus haut, dans l'approximation de champ moyen, la valeur moyenne de \hat{H} est minimisée pour un état polaire $|m_{\mathbf{u}} = 0\rangle^{\otimes N}$, quelle que soit la direction choisie pour \mathbf{u} . Cette dégénérescence massive au niveau champ moyen rappelle celle que nous avons rencontrée pour une jonction traditionnelle en §2-3. Nous avons alors montré que l'état fondamental exact était fragmenté et permettait d'abaisser l'énergie par une quantité sub-extensive par rapport à l'estimation obtenue en champ moyen.

La situation présente est similaire à celle trouvée pour une jonction "usuelle". Quand on dispose d'un nombre N pair de spins 1, il est possible de former un état complètement symétrique de ces spins (donc éligible en tant qu'état condensé de bosons) pour lequel le spin total est nul. Cet état que nous noterons $|S = 0\rangle$ est état propre de \hat{S}^2 avec la valeur propre 0, donc état propre de \hat{H} avec la valeur propre $-U_s$: il y a bien un abaissement d'énergie par rapport au résultat de la théorie de champ moyen ($E = 0$).

La construction explicite de cet état de spin total nul peut se faire de la façon suivante (LAW, PU et al. 1998; KOASHI & UEDA 2000; HO & YIP 2000) :

— Pour $N = 2$, on place la paire d'atomes dans l'état singulet de spin

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (|m_z = +1, m_z = -1\rangle - |m_z = 0, m_z = 0\rangle + |m_z = -1, m_z = +1\rangle) . \quad (112)$$

Cet état est bien symétrique par échange des deux particules et il s'écrit en seconde quantification

$$\hat{A}^\dagger |0\rangle \quad \text{avec} \quad \hat{A}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[(\hat{a}_0^\dagger)^2 - 2\hat{a}_{+1}^\dagger \hat{a}_{-1}^\dagger \right] . \quad (113)$$

— Pour N pair quelconque, on forme l'état à partir de $N/2$ paires, chacune dans l'état singulet :

$$|S = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{(N/2)!}} (\hat{A}^\dagger)^{N/2} |0\rangle . \quad (114)$$

L'état obtenu est (par construction) complètement symétrique par échange de deux particules. Son spin total est nul et il est donc invariant par rotation. Son expression ne dépend donc pas de l'axe de quantification z choisi pour écrire (112) et (113).

On pourra vérifier que cet état $|S = 0\rangle$ peut s'écrire comme une superposition cohérente de tous les états polaires avec des amplitudes identiques (CASTIN & HERZOG 2001; ASHHAB & LEGGETT 2002) :

$$|S = 0\rangle = \frac{\sqrt{N+1}}{4\pi} \int |m_{\mathbf{u}} = 0\rangle^{\otimes N} d^2u \quad (115)$$

où l'intégrale porte sur toutes les orientations possibles du vecteur unitaire \mathbf{u} . Cette relation est similaire à celle obtenue en (69) dans le cas d'une jonction "traditionnelle". C'est un état fragmenté, comme on peut le voir en calculant les éléments de matrice de $\hat{\rho}_1$:

$$\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_{m'} \rangle = \frac{N}{3} \delta_{m,m'} \quad \text{avec} \quad m, m' = -1, 0, +1 . \quad (116)$$

La matrice densité à un corps est donc diagonale, avec trois valeurs propres égales : on a bien affaire à un condensat fragmenté.

Le cas N impair. Dans ce cas, on peut procéder au même appariement pour $N - 1$ particules, et il reste un atome célibataire, ce qui fournit un spin total égal à 1 et conduit à l'énergie $-(2N - 1)U_s$. On a toujours une énergie abaissée par rapport aux états de champ moyen, avec cette fois-ci une dégénérescence 3 pour le niveau fondamental à N corps. Comme pour le cas N pair, la matrice densité à un corps est maximalelement fragmentée avec ses trois valeurs égales à $1/3$.

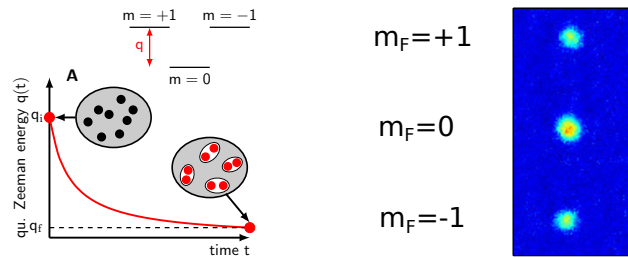


FIGURE 13. Gauche : Préparation d'un état fragmenté d'une assemblée de spins 1 par évolution adiabatique depuis l'état $|m_z = 0\rangle$. Droite : image du nuage après une expérience de Stern et Gerlach, donnant accès aux populations des trois composantes $|m_F\rangle$. Figure extraite de EVRARD, QU et al. (2021).

4-5 Observation d'un état fragmenté

L'observation d'un état fragmenté a été faite par EVRARD, QU et al. (2021) sur une assemblée de $N \approx 100$ atomes de sodium confinés dans un piège optique. La raideur du piège est suffisamment forte pour que l'approximation du mode spatial unique soit valable. Les atomes sont initialement refroidis dans ce piège en présence d'un champ magnétique orienté selon z , de l'ordre d'un gauss, ce qui est suffisant pour assurer que seul l'état $|m_z = 0\rangle$ est occupé ($q/h \sim 300$ Hz à comparer à $U_s/h \sim 20$ Hz).

On diminue ensuite le champ magnétique avec une rampe suffisamment lente (durée d'une seconde) pour que le gaz reste dans l'état fondamental du piège. À la fin de la rampe, le champ magnétique ne vaut que 4 mG, de sorte qu'on prédit un recouvrement supérieur à 90% avec l'état fondamental à N corps en champ nul, que N soit pair ou impair.

Pour accéder à la matrice densité à un corps, on utilise une procédure de type Stern-Gerlach : grâce à un gradient de champ magnétique appliqué soudainement, on sépare les trois composantes $|m\rangle$ selon l'axe z et un système d'imagerie optimisé permet de compter – à un atome près! – les populations N_m des trois sous-niveaux.

Si on applique directement cette mesure au gaz d'atomes, on accède aux éléments diagonaux $\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle$. Pour déterminer les éléments non-diagonaux, on utilise d'abord une impulsion radio-fréquence pour faire

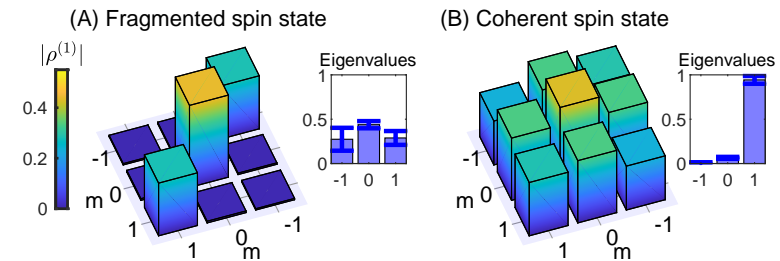


FIGURE 14. Matrice densité à un corps de l'assemblée de spins dans le cas fragmenté (gauche) et non fragmenté (droite). Cet état non fragmenté correspond à $|m_x = +1\rangle^{\otimes N}$. Figure extraite de EVRARD, QU et al. (2021).

tourner les spins autour des axes y et z avec des angles ajustables, avant d'appliquer la procédure Stern-Gerlach. Cette méthode, répétée plusieurs milliers de fois, donne accès à des combinaisons linéaires des $\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_{m'} \rangle$ avec des coefficients ajustables, dont on peut déduire les éléments de matrice recherchés.

Le résultat est montré en figure 14, et comparé avec celui obtenu pour l'état non fragmenté $|m_x = +1\rangle^{\otimes N}$. Dans le cas non fragmenté (figure de droite), tous les coefficients – diagonaux et non-diagonaux – sont comparables et une seule valeur propre de $\hat{\rho}_1$ diffère significativement de zéro. Dans le cas fragmenté (à gauche), $\hat{\rho}_1$ est diagonale et ses trois valeurs propres sont comparables, de l'ordre de $N/3$.

L'obtention d'une matrice densité $\hat{\rho}_1$ avec trois valeurs propres identiques ne suffit pas à prouver que l'on a préparé le système à N corps dans un état condensé fragmenté. Il faut s'assurer que l'on n'est pas simplement face à un système chaud, mélange statistique de tous les états possibles. Pour cela, on peut tracer l'histogramme des mesures des composantes $S_{x,y,z}$ obtenues par la procédure Stern-Gerlach. Les résultats sont montrés en figure 15. On obtient des distributions centrées sur 0 (comme attendu pour l'état (114)) et extrêmement étroites : leur largeur est essentiellement déterminée par le bruit résiduel de la mesure. Par comparaison, on a tracé sur la figure 15, droite, le résultat attendu pour l'état polaire $|m_z = 0\rangle^{\otimes N}$.

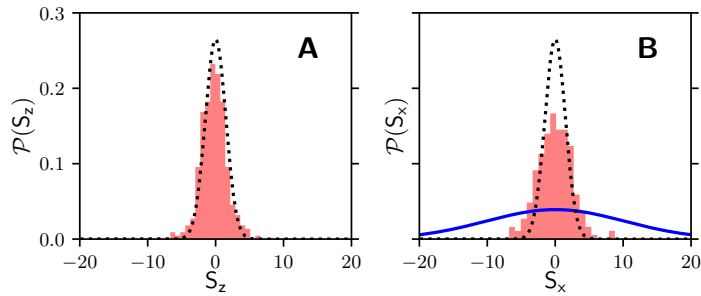


FIGURE 15. Histogramme des mesures du spin des N atomes de spin 1 selon les axes z et x . La ligne pointillée indique le bruit de détection. La courbe en trait plein sur l’histogramme de droite montre le résultat attendu pour un état non corrélé, l’état polaire $|m_z = 0\rangle^{\otimes N}$. Figure extraite de EVRARD, QU et al. (2021).

Ces histogrammes permettent de calculer les moyennes des observables à deux corps $\langle \hat{S}_m^2 \rangle$, et de leur somme $\langle \hat{S}^2 \rangle$. On trouve $\langle \hat{S}^2 \rangle \sim 9$, ce qui est 20 fois plus faible que la valeur attendue pour un état de champ moyen, sans corrélation entre particules ($\langle \hat{S}^2 \rangle \sim 2N$). Cela prouve qu’on a effectivement fabriqué un état très comprimé de l’assemblée de spins, même si $\langle \hat{S}^2 \rangle$ n’atteint pas exactement la valeur prédite pour l’état fondamental en champ strictement nul, 0 ou 2 selon que N est pair ou impair. Notons qu’on ne contrôle pas la parité de N dans cette expérience.

Finalement, on peut utiliser l’ensemble des mesures Stern-Gerlach pour reconstruire l’état à N corps. On ne peut pas procéder à une tomographie complète de l’état pour un nombre de particules aussi élevé ($N = 100$), mais on peut utiliser une méthode de maximum de vraisemblance. Le résultat est montré sur la figure 16 et il indique que les 4 premières valeurs possibles du spin total, $S = 0, 1, 2, 3$, concentrent 90% de la population (l’espace de Hilbert de spin est de dimension $N(N - 1) \sim 10\,000$). Il s’agit donc d’un état collectif à très faible entropie, alors même que les valeurs propres de la matrice densité à un corps sont égales entre elles : on a bien produit un condensat fragmenté.

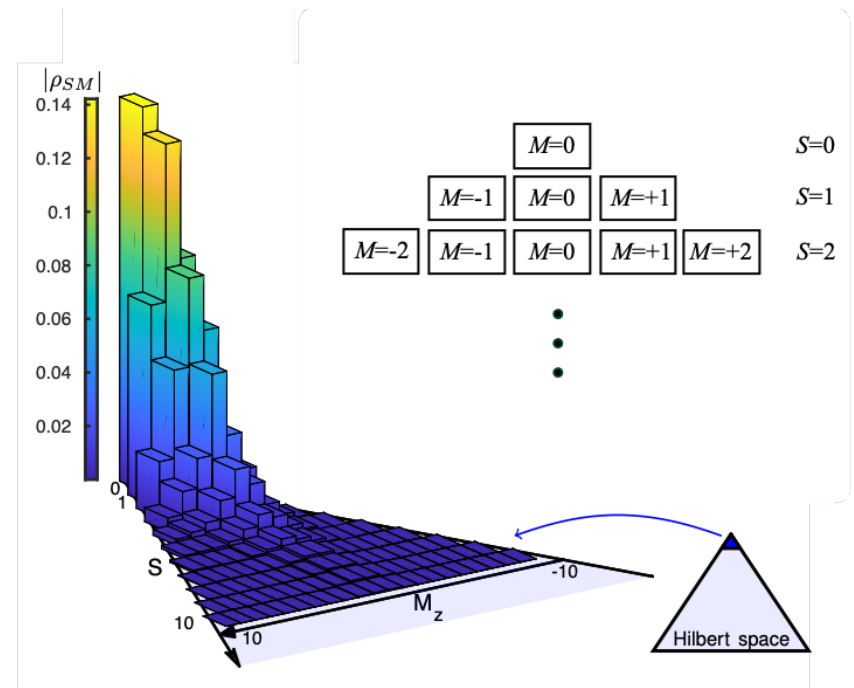


FIGURE 16. Populations des états à N corps $|S, M\rangle$, déduites des expériences Stern-Gerlach à partir d’une méthode de maximum de vraisemblance. Figure extraite de EVRARD, QU et al. (2021).

Références

- ASHHAB, S & AJ LEGGETT (2002), « Measurement theory and interference of spinor Bose-Einstein condensates », in *Physical Review A* **65**, p. 023604.
- BARDIN, A., A. MINGUZZI & L. SALASNISH (2026), « Macroscopic quantum self-trapping in bosonic Josephson junctions : An exact quantum treatment », arXiv :2602.22857.
- BOGOLIUBOV, N. N. (1947), « On the theory of superfluidity », in *J. Phys. (USSR)* **11**, p. 23.
- CASTIN, Yvan (2025), *Condensats de Bose-Einstein : La théorie, des fondements aux applications*, EDP sciences.
- CASTIN, Yvan & Jean DALIBARD (1997), « Relative phase of two Bose-Einstein condensates », in *Physical Review A* **55**, p. 4330.
- CASTIN, Yvan & Christopher HERZOG (2001), « Bose-Einstein condensates in symmetry breaking states », in *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IV-Physics* **2**, p. 419-443.
- CHANG, M-S, CD HAMLEY, MD BARRETT, JA SAUER, KM FORTIER, W ZHANG, L YOU & MS CHAPMAN (2004), « Observation of spinor dynamics in optically trapped Rb 87 Bose-Einstein condensates », in *Physical Review Letters* **92**, p. 140403.
- CHANG, Ming-Shien, Qishu QIN, Wenxian ZHANG, Li YOU & Michael S CHAPMAN (2005), « Coherent spinor dynamics in a spin-1 Bose condensate », in *Nature Physics* **1**, p. 111-116.
- EDMONDS, Alan Robert (1996), *Angular momentum in quantum mechanics*, t. 4, Princeton university press.
- EINSTEIN, A. (1924), « Quantentheorie des einatomigen idealen Gases », in *Sitzungsberichte/Physikalische Klasse, Preussische Akademie der Wissenschaften* **22**, p. 261.
- (1925a), « Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. II », in *Sitzungsberichte/Physikalische Klasse, Preussische Akademie der Wissenschaften* **1**, p. 3.
- (1925b), « Zur Quantentheorie des idealen Gases », in *Sitzungsberichte/Physikalische Klasse, Preussische Akademie der Wissenschaften* **3**, p. 18.
- EVRARD, Bertrand, An QU, Jean DALIBARD & Fabrice GERBIER (2021), « Observation of fragmentation of a spinor Bose-Einstein condensate », in *Science* **373**, p. 1340-1343.
- EVRARD, Bertrand, An QU, Karina JIMÉNEZ-GARCÍA, Jean DALIBARD & Fabrice GERBIER (2019), « Relaxation and hysteresis near Shapiro resonances in a driven spinor condensate », in *Physical Review A* **100**, p. 023604.
- HO, Tin-Lun & Sung Kit YIP (2000), « Fragmented and single condensate ground states of spin-1 Bose gas », in *Physical Review Letters* **84**, p. 4031.
- JACOB, David, Lingxuan SHAO, Vincent CORRE, Tilman ZIBOLD, Luigi DE SARLO, Emmanuel MIMOUN, Jean DALIBARD & Fabrice GERBIER (2012), « Phase diagram of spin-1 antiferromagnetic Bose-Einstein condensates », in *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics* **86**, p. 061601.
- KOASHI, Masato & Masahito UEDA (2000), « Exact eigenstates and magnetic response of spin-1 and spin-2 Bose-Einstein condensates », in *Physical Review Letters* **84**, p. 1066.
- LAW, CK, Han PU & NP BIGELOW (1998), « Quantum spins mixing in spinor Bose-Einstein condensates », in *Physical Review Letters* **81**, p. 5257.
- LEE, Tsin D, Kerson HUANG & Chen N YANG (1957), « Eigenvalues and eigenfunctions of a Bose system of hard spheres and its low-temperature properties », in *Physical Review* **106**, p. 1135.
- LEGGETT, Anthony J (2001), « Bose-Einstein condensation in the alkali gases : Some fundamental concepts », in *Reviews of Modern Physics* **73**, p. 307.
- LEGGETT, Anthony J & Fernando SOLS (1991), « On the concept of spontaneously broken gauge symmetry in condensed matter physics », in *Foundations of physics* **21**, p. 353-364.
- LINKS, Jon, Angela FOERSTER, Arlei Prestes TONEL & Gilberto SANTOS (2006), « The two-site Bose-Hubbard model », in *Annales Henri Poincaré*, t. 7, Springer, , p. 1591-1600.
- LUO, Xin-Yu, Yi-Quan ZOU, Ling-Na WU, Qi LIU, Ming-Fei HAN, Meng Khoon TEY & Li YOU (2017), « Deterministic entanglement generation from driving through quantum phase transitions », in *Science* **355**, p. 620-623.
- MUELLER, Erich J., Tin-Lun HO, Masahito UEDA & Gordon BAYM (2006), « Fragmentation of Bose-Einstein condensates », in *Phys. Rev. A* **74**, p. 033612.
- NOZIERES, P (1995), « Some comments on Bose-Einstein condensation », in *Bose-Einstein condensation*, sous la dir. d'A. GRFFIN, D.W. SNOKE & S. STRINGARI, Cambridge Univ. Press, , p. 15-30.
- PENROSE, O. & L. ONSAGER (1956), « Bose-Einstein condensation and liquid helium », in *Phys. Rev.* **104**, p. 576.

- PEZZE, Luca, Augusto SMERZI, Markus K OBERTHALER, Roman SCHMIED & Philipp TREUTLEIN (2018), « Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles », in *Reviews of Modern Physics* **90**, p. 035005.
- SINATRA, Alice (2022), « Spin-squeezed states for metrology », in *Applied Physics Letters* **120**, p. 140501.
- STAMPER-KURN, Dan M & Masahito UEDA (2013), « Spinor Bose gases : Symmetries, magnetism, and quantum dynamics », in *Reviews of Modern Physics* **85**, p. 1191-1244.
- STENGER, J, S INOUE, DM STAMPER-KURN, H-J MIESNER, AP CHIKKATUR & W KETTERLE (1998), « Spin domains in ground-state Bose–Einstein condensates », in *Nature* **396**, p. 345-348.
- THEKKADATH, GS, ME MYCROFT, BA BELL, CG WADE, A ECKSTEIN, DS PHILLIPS, RB PATEL, A BURACZEWSKI, AE LITA, Thomas GERRITS et al. (2020), « Quantum-enhanced interferometry with large heralded photon-number states », in *NPJ quantum information* **6**, p. 89.
- ZHAO, L, J JIANG, T TANG, M WEBB & Y LIU (2014), « Dynamics in spinor condensates tuned by a microwave dressing field », in *Physical Review A* **89**, p. 023608.