

# Chapitre 6

## Du SQUID supraconducteur au SQUID atomique

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Le SQUID supraconducteur</b> . . . . .	<b>2</b>
1-1	Champ magnétique et invariance de jauge . . . .	2
1-2	Effet Meissner et longueur de pénétration . . . .	3
1-3	Anneau supraconducteur et champ magnétique .	4
1-4	Le SQUID . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Qubits supraconducteurs</b> . . . . .	<b>7</b>
2-1	Critères pour obtenir des qubits utilisables . . . .	7
2-2	La boîte à paires de Cooper . . . . .	8
2-3	Le transmon . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Modélisation d'un SQUID atomique</b> . . . . .	<b>12</b>
3-1	Référentiel en rotation . . . . .	12
3-2	Anneau dans un référentiel tournant . . . . .	13
3-3	Principe du SQUID atomique . . . . .	14
3-4	L'inductance cinétique . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Expériences avec des SQUID atomiques</b> . . . . .	<b>16</b>
4-1	Hélium superfluide . . . . .	16
4-2	SQUID et barrières mobiles . . . . .	18
4-3	Collier de jonctions Josephson . . . . .	19

---

Les SQUIDs (*superconducting quantum interference devices*) occupent une place centrale dans les nombreuses applications des jonctions Josephson (CLARKE & BRAGINSKI 2004). Ce sont des dispositifs dans lesquels on exploite la phase quantique de l'assemblée de particules – les paires de Cooper pour les jonctions supraconductrices – pour fabriquer un interféromètre. Comme bien souvent en physique, la possibilité d'exploiter des interférences procure une très grande sensibilité à différents paramètres extérieurs, en l'occurrence le champ magnétique dans le cas supraconducteur.

Nous commencerons ce chapitre par la présentation des SQUIDs supraconducteurs, en expliquant comment la présence d'un champ magnétique vient modifier le formalisme mis en place dans les chapitres précédents. Nous nous intéresserons à un anneau sur lequel on a placé deux jonctions Josephson, et nous montrerons comment un signal d'interférence permet de mesurer le flux du champ à travers cet anneau.

Nous profiterons de cette présentation des SQUIDs supraconducteurs pour faire un bref détour du côté des qubits supraconducteurs, qui sont parmi les plateformes les plus prometteuses pour le traitement quantique de l'information. Nous présenterons le principe de deux types de qubits, la boîte à paires de Cooper et le transmon.

Nous passerons ensuite aux SQUIDs utilisant des fluides de particules neutres : de l'hélium liquide ou des gaz d'atomes froids. Pour ces particules neutres, le rôle du champ magnétique est remplacé par une mise en

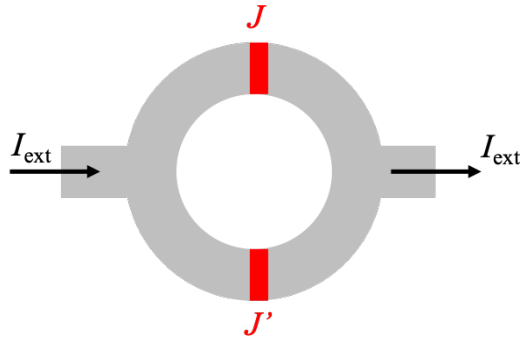


FIGURE 1. SQUID composé de deux jonctions identiques  $J$  et  $J'$  et alimenté par un courant total  $I_{\text{ext}}$ .

rotation du système. Nous décrirons une expérience réalisée avec de l'hélium 3 superfluide en géométrie de type SQUID et qui a mis en évidence la rotation terrestre. Nous terminerons avec quelques expériences menées avec des atomes froids au cours des dix dernières années.

## 1 Le SQUID supraconducteur

Un SQUID supraconducteur est constitué d'un anneau supraconducteur, sur lequel on a placé deux jonctions Josephson (figure 1). L'anneau est plongé dans un champ magnétique extérieur  $B$  perpendiculaire à son plan et on s'intéresse au courant total  $I_{\text{ext}}$  (imposé de l'extérieur) pouvant circuler dans ce dispositif formé par deux jonctions en parallèle. Pour modéliser ce système, nous allons commencer par indiquer comment décrire le mouvement quantique de particules chargées (les paires de Cooper) dans un champ magnétique, en insistant sur l'utilisation de quantités physiques invariantes de jauge. Nous présenterons un second élément préliminaire, l'effet Meissner, se produisant quand le supraconducteur utilisé est suffisamment épais : le champ magnétique est alors "éjecté" du matériau et le courant dans la région centrale du supraconducteur est négligeable. Nous aborderons ensuite le problème de l'anneau de la figure 1, d'abord en l'ab-

sence, puis en présence des deux jonctions.

### 1-1 Champ magnétique et invariance de jauge

Considérons un champ magnétique statique  $B(\mathbf{r})$  pouvant être décrit par le potentiel vecteur  $A(\mathbf{r})$  :

$$B = \nabla \times A. \quad (1)$$

L'hamiltonien d'une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  dans le champ magnétique est

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{p}} - qA(\hat{\mathbf{r}})]^2 \quad (2)$$

où  $\hat{\mathbf{r}}$  et  $\hat{\mathbf{p}}$  désignent les opérateurs position et impulsion de la particule, avec leur action sur une fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r})$  :

$$\hat{\mathbf{r}}[\psi(\mathbf{r})] = \mathbf{r}\psi(\mathbf{r}) \quad \hat{\mathbf{p}}[\psi(\mathbf{r})] = -i\hbar\nabla\psi(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Pour un champ magnétique  $B$  donné, il existe une infinité de choix possibles pour le potentiel vecteur  $A$ . Ces choix sont reliés entre eux par une transformation de jauge, qui peut se mettre sous la forme suivante (JACKSON 2012) :

$$A(\mathbf{r}) \longrightarrow A'(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r}), \quad (4)$$

où  $\chi(\mathbf{r})$  est une fonction scalaire que nous supposons régulière. Pour que les propriétés physiques déduites de l'équation de Schrödinger soient inchangées dans cette transformation de jauge, on doit l'accompagner d'un changement de la fonction d'onde décrivant la particule (COHEN-TANNOUJJI, DIU et al. (1973), chapitre 3, et cours 2013-14, chapitre 1) :

$$\psi(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \psi'(\mathbf{r}, t) = e^{iq\chi(\mathbf{r})/\hbar}\psi(\mathbf{r}, t). \quad (5)$$

L'opérateur vitesse se déduit alors de l'équation du mouvement

$$\hat{\mathbf{v}} \equiv \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\mathbf{r}}], \quad (6)$$

ce qui donne

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{m}(\hat{\mathbf{p}} - qA(\hat{\mathbf{r}})). \quad (7)$$

On peut vérifier que la valeur moyenne de cet opérateur est bien une quantité invariante de jauge, comme on l'attend pour toute grandeur physique. Pour cela, prenons une fonction d'onde localisée spatialement (normalisable), mettons-la sous la forme  $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\theta(\mathbf{r})}$  où  $\rho(\mathbf{r})$  désigne la densité de probabilité au point  $\mathbf{r}$ , et utilisons  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ . On constate d'abord que seul le gradient de la phase  $\theta$  va jouer un rôle dans le calcul de  $\langle \hat{v} \rangle$ , puis que l'on peut mettre sa contribution sous la forme

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{m} \int [\hbar\nabla\theta(\mathbf{r}) - q\mathbf{A}(\mathbf{r})] \rho(\mathbf{r}) d^3r. \quad (8)$$

On peut proposer une interprétation physique simple pour ce résultat. La quantité  $\langle \mathbf{v} \rangle$  est la moyenne de la vitesse locale

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{m} [\hbar\nabla\theta(\mathbf{r}) - q\mathbf{A}(\mathbf{r})] \quad (9)$$

avec la densité de probabilité  $\rho(\mathbf{r})$ . À partir de cette vitesse, on peut également définir la densité de courant électrique local

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = q\rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (10)$$

On vérifie immédiatement que les formes (9-10) sont invariantes quand on applique le double changement de jauge (4-5) :

$$\nabla\theta(\mathbf{r}) - \frac{q}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \longrightarrow \nabla \left[ \theta(\mathbf{r}) + \frac{q\chi(\mathbf{r})}{\hbar} \right] - \frac{q}{\hbar} [\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r})]. \quad (11)$$

Dans ce qui va suivre, il sera important de toujours se ramener à des quantités invariantes de jauge pour déterminer les propriétés physiques du système. Par exemple, si on considère un élément de circuit  $\mathcal{C}$  allant d'un point  $b$  à un point  $a$ , l'intégrale curviligne de la quantité (11) sur cet élément s'écrit :

$$\int_{\mathcal{C}} \left[ \nabla\theta(\mathbf{r}) - \frac{q}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right] \cdot d\mathbf{r} = \theta(a) - \theta(b) - \frac{q}{\hbar} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad [2\pi]. \quad (12)$$

La quantité invariante de jauge n'est donc pas la différence de phase "nue"  $\theta(a) - \theta(b)$ , mais cette différence corrigée par l'intégrale curviligne du potentiel vecteur sur l'élément de circuit. Cette quantité dépendra de la forme de  $\mathcal{C}$  si un champ magnétique est présent.

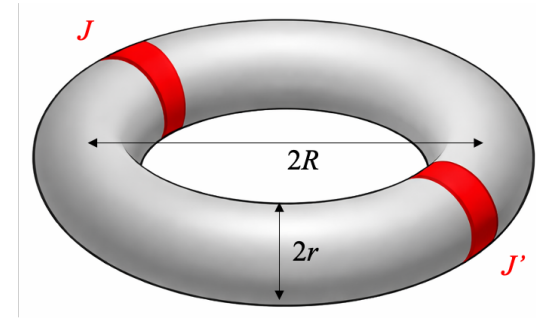


FIGURE 2. Anneau supraconducteur comportant deux jonctions Josephson.

## 1-2 Effet Meissner et longueur de pénétration

Dans cette partie, nous allons supposer que l'anneau supraconducteur formant le SQUID a une forme torique, comme celle indiquée sur la figure 2. Nous supposons que le rayon  $r$  de la section du tore est suffisamment grand pour que le champ magnétique sur le cercle médian du tore (de rayon  $R$ ) soit négligeable. Cette hypothèse n'est pas indispensable pour décrire le fonctionnement d'un SQUID, mais elle simplifiera notablement l'analyse. Mais pourquoi le champ magnétique peut-il être considéré comme négligeable au cœur d'un matériau supraconducteur ?

Cet effet, appelé *effet Meissner*, résulte de l'utilisation conjointe des deux expressions régissant l'établissement d'un courant dans ce système :

- Prenons une densité de charges  $\rho_s$  uniforme dans le supraconducteur. La relation (10) s'écrit donc

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{q\rho_s}{m} [\hbar\nabla\theta(\mathbf{r}) - q\mathbf{A}(\mathbf{r})] \quad (13)$$

où  $q = -2e < 0$  désigne la charge d'une paire de Cooper et  $m$  sa masse.

- Par ailleurs, le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est lié à la densité de courant  $\mathbf{j}$  par l'équation d'Ampère statique :

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (14)$$

Les deux champs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{j}$  sont donc couplés par ces deux équations et on peut éliminer (par exemple)  $\mathbf{j}$  au profit de  $\mathbf{B}$  en prenant le rotationnel de

la première relation. Nous arrivons alors à l'équation de London :

$$\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{q^2 \rho_s}{m} \mathbf{B}. \quad (15)$$

Reportons ce résultat dans la seconde relation. En utilisant  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}$  (puisque  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ), on arrive à l'équation

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} \quad \text{avec} \quad \lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 \rho q^2}}. \quad (16)$$

La quantité  $\lambda_L$  est appelée *longueur de pénétration de London*. Prenons pour simplifier une géométrie planaire, avec le demi-espace supraconducteur côté  $x > 0$  et un champ magnétique parallèle à la surface  $\mathbf{B} = B(x)\mathbf{u}_z$ . L'équation (16) devient à l'intérieur du supraconducteur  $B'' = B/\lambda_L^2$ , dont la solution bornée est  $B(x) = B_0 \exp(-x/\lambda_L)$ . Le champ  $B$  tend donc exponentiellement vite vers zéro à l'intérieur du supraconducteur et il en va de même pour le courant  $j$ . L'annulation de  $B$  provient de la compensation<sup>1</sup> entre le champ extérieur et celui créé par le courant d'écrantage  $\mathbf{j}$  qui circule parallèlement à la surface selon la direction  $y$ , dans une nappe d'épaisseur effective  $\lambda_L$ .

En pratique, l'ordre de grandeur de  $\lambda_L$  est de quelques dizaines de nanomètres. C'est donc une distance grande devant les distances interatomiques, mais généralement petite devant les dimensions typiques des fils supraconducteurs. Nous supposons que c'est le cas du fil représenté en figure 2 et nous poserons donc que le champ magnétique  $\mathbf{B}$  et le courant  $\mathbf{j}$  sont nuls sur le cercle médian de rayon  $R$  à l'intérieur du tore.

### 1-3 Anneau supraconducteur et champ magnétique

Avant d'aborder le SQUID dans le paragraphe suivant, nous allons considérer ici un simple anneau torique supraconducteur (donc sans jonction Josephson) de rayon moyen  $R$  (figure 3). Cet anneau est plongé dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$  perpendiculaire au plan de l'anneau, qui est donc traversé par le flux  $\Phi_{\text{ext}} = \pi R^2 B$ . Nous supposons que le rayon  $r$  de la section du tore est petit devant  $R$ , mais grand devant la longueur de London

1. Côté  $x < 0$ , le champ appliqué  $B_a$  et le champ créé par la nappe de courant s'ajoutent pour donner  $B_0 = 2B_a$ .

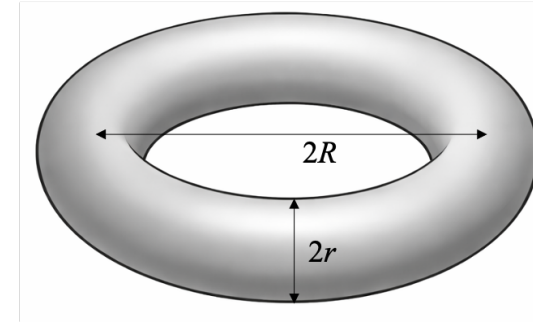


FIGURE 3. Anneau supraconducteur de rayon moyen  $R$ . Le rayon  $r$  de la section de l'anneau est supposé petit devant  $R$ . L'anneau est plongé dans un champ magnétique perpendiculaire au plan de l'anneau. On note  $\Phi_{\text{ext}} = \pi R^2 B$  le flux créé par ce champ.

$\lambda_L$  de sorte que le champ  $\mathbf{B}$  et le courant  $\mathbf{j}$  sont négligeables sur le cercle médian de rayon  $R$ .

Le relation (13) intégrée le long de ce cercle médian devient :

$$0 = \hbar \oint \nabla\theta(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - q \oint \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (17)$$

La fonction d'onde  $\sqrt{\rho_s} e^{i\theta(\mathbf{r})}$  décrivant l'assemblée de paires doit être mono-valuée, ce qui impose

$$\oint \nabla\theta(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 2\pi n \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (18)$$

Par ailleurs, l'intégrale de contour sur  $\mathbf{A}$  se transforme en une intégrale de surface du champ magnétique, égale au flux total  $\Phi$  traversant l'anneau. On a donc  $0 = 2\pi n\hbar - \Phi$  ou encore :

$$\Phi = n\Phi_0 \quad \text{avec} \quad \Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{|q|}. \quad (19)$$

Il est important de noter à ce stade que  $\Phi$  désigne le flux total traversant l'anneau, c'est-à-dire la somme du flux extérieur  $\Phi_{\text{ext}}$  et du flux  $LI$  généré par le courant  $I$  circulant dans l'anneau,  $L$  désignant l'inductance de l'anneau :

$$\Phi = \Phi_{\text{ext}} + LI. \quad (20)$$

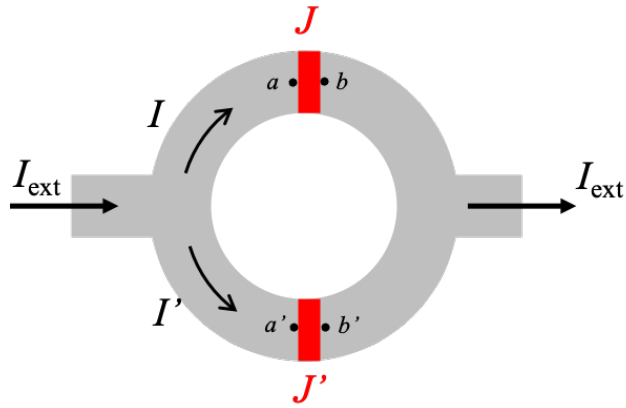


FIGURE 4. Anneau supraconducteur avec une double jonction.

Le supercourant  $I$  qui circule à la surface de l'anneau s'ajuste donc pour que le flux total passant à travers l'anneau soit quantifié.

**Quantification du fluxoïde.** Si on ne souhaite pas faire l'approximation d'un courant nul dans le cœur de l'anneau, la relation (17) s'écrit :

$$\mu_0 \lambda_L^2 \oint \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = n\Phi_0 - \Phi \quad \Leftrightarrow \quad \oint \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{m} \left( n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right), \quad (21)$$

relation appelée *quantification du fluxoïde*.

#### 1-4 Le SQUID

Nous passons maintenant au cas d'un anneau comportant deux jonctions Josephson  $J$  et  $J'$ , comme représenté sur la figure 2. Nous définissons les différences de phase aux bornes des deux jonctions sous la forme

invariante de jauge définie en (12) :

$$\begin{cases} \varphi = \theta(a) - \theta(b) - \frac{q}{\hbar} \int_b^a \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\ \varphi' = \theta(a') - \theta(b') - \frac{q}{\hbar} \int_{b'}^{a'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \end{cases} \quad (22)$$

et nous allons montrer la relation entre le flux total traversant l'anneau et les phases  $\varphi$  et  $\varphi'$  :

$$\boxed{\varphi - \varphi' = 2\pi \left( n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \quad n \in \mathbb{Z}} \quad (23)$$

Nous supposons que la phase  $\theta(x)$ , où  $x$  représente l'abscisse curviligne le long de l'anneau est bien définie en tout point  $x$ , en dehors des jonctions elles-mêmes.

Pour prouver cette relation, partons de nouveau de la nullité du courant défini en (13) sur le cercle médian de l'anneau. Intégrons cette relation sur les deux arcs de cercle  $aa'$  et  $b'b$  en tournant dans le sens trigonométrique :

$$0 = \left( \int_a^{a'} + \int_{b'}^b \right) \left[ \hbar \frac{d\theta}{dx} - qA(x) \right] dx \quad (24)$$

où nous avons projeté les vecteurs  $\nabla\theta$  et  $\mathbf{A}$  sur le vecteur unitaire azimutal. On peut simplifier cette relation en utilisant :

$$\int_a^{a'} \frac{d\theta}{dx} dx = \theta(a') - \theta(a) \quad [2\pi] \quad \int_{b'}^b \frac{d\theta}{dx} dx = \theta(b) - \theta(b') \quad [2\pi] \quad (25)$$

et

$$\left( \int_a^{a'} + \int_{b'}^b \right) A(x) dx = \oint A(x) dx - \left( \int_b^a + \int_{a'}^{b'} \right) A(x) dx. \quad (26)$$

L'intégrale sur le contour complet  $\oint A(x) dx$  est égale au flux  $\Phi$  du champ magnétique total à travers l'anneau, de sorte que (24) peut se réécrire :

$$0 = \hbar(\varphi' - \varphi) - q\Phi + 2\pi\hbar n \quad n \in \mathbb{Z} \quad (27)$$

ce qui n'est autre que (23) puisque  $\Phi_0 = 2\pi\hbar/|q|$ . Notons que cette preuve n'utilise pas la valeur de  $\theta(r)$  à l'intérieur même des jonctions  $J$  et  $J'$ , qui est une notion mal définie.

La relation (23) verrouille entre elles les phases de deux jonctions et elle joue un rôle central dans le fonctionnement d'un SQUID. Plus précisément, considérons la géométrie de cette figure 1 et relierons le courant  $I_{\text{ext}}$  au flux extérieur  $\Phi_{\text{ext}}$  imposé sur l'anneau. Ce courant  $I_{\text{ext}}$  s'écrit

$$I_{\text{ext}} = I + I' = I_c (\sin \varphi + \sin \varphi') , \quad (28)$$

où nous avons supposé pour simplifier que les deux jonctions avaient le même courant critique. Une relation trigonométrique simple donne alors

$$I_{\text{ext}} = \bar{I}_c(\Phi) \sin \bar{\varphi} \quad \text{avec} \quad \bar{I}_c(\Phi) \equiv 2I_c \cos \left( \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \quad (29)$$

où nous avons posé

$$\bar{\varphi} \equiv \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') . \quad (30)$$

L'équation (29),  $I_{\text{ext}} = \bar{I}_c \sin \bar{\varphi}$ , peut être vue comme la relation usuelle reliant courant et phase pour une jonction Josephson unique, mais avec un courant critique  $\bar{I}_c$  qui dépend du flux magnétique à travers le circuit. La phase  $\bar{\varphi}$  caractérisant cette jonction "globale" est la moyenne des deux phases  $\varphi$  et  $\varphi'$ . La dépendance sinusoïdale de  $\bar{I}_c$  vis-à-vis de  $\Phi$  résulte d'une interférence entre les deux chemins passant respectivement par la jonction  $A$  et la jonction  $B$ . L'argument  $\pi\Phi/\Phi_0$  du cosinus est égal à la phase d'Aharonov-Bohm que l'on calcule pour des particules chargées circulant dans cette géométrie (voir par exemple le cours 2013-14, Chap. 1, §4, et refs. in).

À ce stade, le flux  $\Phi$  représente le flux total traversant l'anneau, somme du flux extérieur et du flux généré par les courants  $I$  et  $I'$ . En pratique, pour les SQUIDs conçus pour détecter de faibles variations de flux magnétiques, on utilise des géométries telles que le flux maximal généré par le courant dans l'anneau,  $\sim LI_c$ , soit petit devant le quantum de flux  $\Phi_0$ . La contribution majeure à  $\Phi$  est alors le flux extérieur  $\Phi_{\text{ext}}$  et on peut négliger la contribution des courants  $I$  et  $I'$ .

Par conséquent, si on impose le courant  $I_{\text{ext}}$  et le flux extérieur  $\Phi_{\text{ext}}$ , la variable  $\bar{\varphi}$  va chercher à s'ajuster pour que la relation  $I_{\text{ext}} = \bar{I}_c(\Phi_{\text{ext}}) \sin \bar{\varphi}$

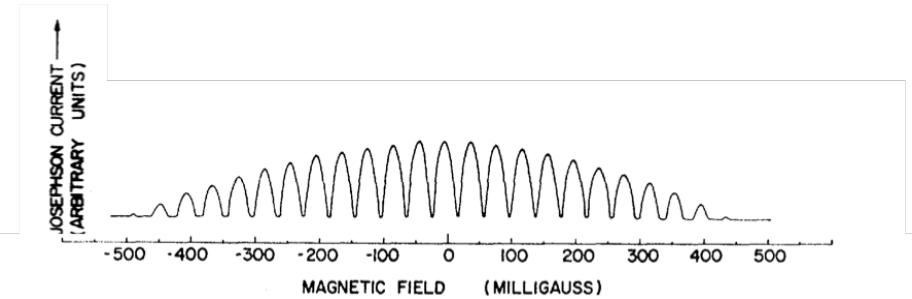
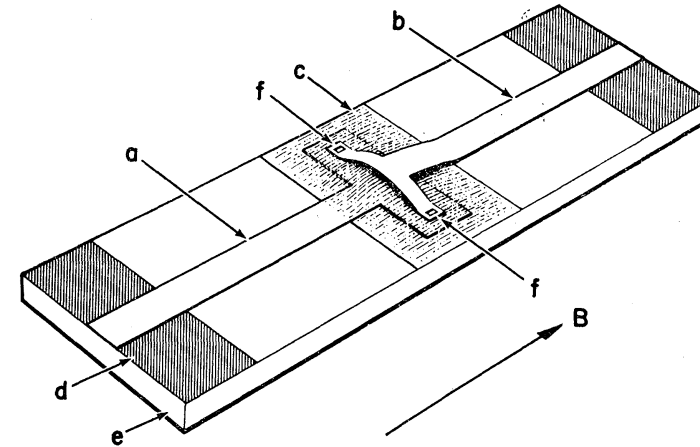


FIGURE 5. Variation du courant critique avec  $B$  dans un SQUID (maxima de courant d'environ 1 mA). Les supraconducteurs sont notés  $a$  et  $b$ , la couche d'isolant formant la barrière tunnel est désignée par  $c$ , et les deux jonctions par  $f$ . La séparation entre les deux jonctions est de 3 mm et la largeur d'une jonction est de 0.5 mm. La périodicité de  $\sim 40$  mG est due au phénomène d'interférence entre les deux jonctions décrit dans ce paragraphe. L'enveloppe en forme de sinus cardinal s'explique par l'influence du champ magnétique sur chaque jonction, de façon analogue à la figure d'interférences lumineuses avec deux fentes de largeur non nulle. Figures adaptées de JAKLEVIC, LAMBE *et al.* (1965).

soit satisfaite. Cela sera possible tant que le courant  $I_{\text{ext}}$  ne dépasse pas la valeur  $\bar{I}_c(\Phi_{\text{ext}})$ . La très grande sensibilité des SQUIDs pour la mesure des champs magnétiques découle directement de ce résultat : pour un SQUID de surface  $1 \text{ mm}^2$ , un changement de  $B$  de  $10^{-9} \text{ T}$  suffit à changer l'argument du cosinus de  $\pi/2$  dans l'expression de  $\bar{I}_c(\Phi)$ , ce qui fait basculer le dispositif du courant maximum  $2\bar{I}_c$  à un courant nul.

En pratique, les SQUIDs sont actuellement parmi les dispositifs les plus performants pour mesurer de faibles variations de champ magnétique, en particulier quand une bande passante élevée est requise (jusqu'à 100 MHz); SCHMELZ, STOLZ et al. (2012) présentent ainsi un dispositif dont la sensibilité atteint quelques  $10^{-16} \text{ T}$  pour un temps de mesure d'une seconde.

Les concurrents directs des SQUIDs sont les magnétomètres atomiques mesurant une précession de Larmor. Ces derniers ont l'avantage de ne pas requérir un environnement cryogénique et ils ont une exactitude qui peut atteindre quelques  $10^{-8}$ , bien meilleure que celle des SQUIDs. En revanche, leur sensibilité pour détecter de faibles variations de  $B$  (à ne pas confondre avec l'exactitude) n'est bonne qu'à faible fréquence, car leur bande passante est inférieure à la centaine de Hz.

## 2 Qubits supraconducteurs

### 2-1 Critères pour obtenir des qubits utilisables

Nous allons maintenant décrire très brièvement l'utilisation des SQUIDs pour la réalisation de qubits, la brique élémentaire de tout processeur quantique. Les différents critères pour disposer de qubits fiables sont détaillés dans l'article de DIVINCENZO (2000). Résumons-les ici :

- Il faut disposer d'un système quantique dont on peut restreindre la dynamique à un espace de Hilbert de dimension 2, dont on écrit une base possible  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ . Tous les états "combinaison linéaire" de type  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  avec  $\alpha, \beta$  complexes tels que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  doivent également être accessibles. La dimension réelle de l'espace de Hilbert est bien sûr beaucoup plus grande, voire infinie, et il faut donc que ces états soient bien isolés du reste du spectre.

- Il faut que le temps de cohérence du système à deux niveaux soit long devant le temps nécessaire pour effectuer des portes logiques. Le qubit doit donc être bien isolé de son environnement.
- Il faut disposer d'un moyen pour l'initialiser dans un état connu,  $|0\rangle$  par exemple.
- Il faut disposer d'un moyen pour effectuer des transformations unitaires dans l'espace de Hilbert de dimension 2.
- Il faut disposer d'un moyen pour lire l'état du qubit dans une base donnée, c'est-à-dire projeter l'état du qubit sur une base donnée,  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  par exemple.
- Il faut pouvoir coupler de manière contrôlée les qubits par paires pour réaliser des portes logiques à deux qubits.

Nous allons considérer (sans souci d'exhaustivité) deux réalisations de qubits à partir de jonctions supraconductrices, en nous restreignant aux premiers critères de cette liste, portant sur la production de qubits isolés. Nous allons nous concentrer sur la boîte à paires de Cooper, qui a constitué la première démonstration expérimentale de la cohérence pour un qubit supraconducteur, puis sur le transmon, son descendant direct, qui est l'ingrédient le plus utilisé actuellement dans les processeurs quantiques. D'autres types de qubits supraconducteurs, pour certains toujours dans la course vers l'ordinateur quantique, sont par exemple :

- les qubits de chat (MIRRAHIMI, LEGHTAS et al. 2014; GRIMM, FRATTINI et al. 2020), utilisés notamment par Alice & Bob et par Amazon;
- le fluxonium (MANUCHARYAN, KOCH et al. 2009; KOCH, MANUCHARYAN et al. 2009), utilisé par exemple par Atlantic Quantum;
- les qubits de phase (MARTINIS, NAM et al. 2002; STEFFEN, ANSMANN et al. 2006), qui utilisent le potentiel en "plaque à laver" décrit aux chapitres précédents.
- les qubits de flux (MOOIJ, ORLANDO et al. 1999; VAN DER WAL, TER HAAR et al. 2000; FRIEDMAN, PATEL et al. 2000) qui peuvent être considérés comme des ancêtres du fluxonium.

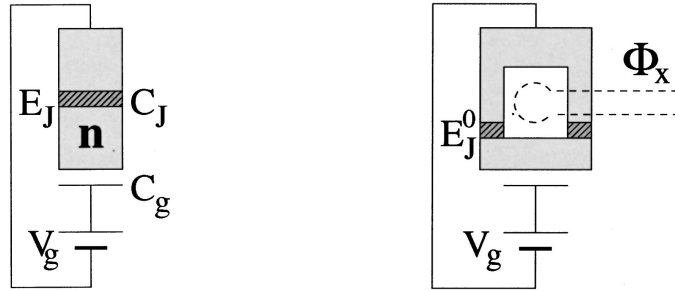


FIGURE 6. Gauche : boîte à paires de Cooper simple. Droite : boîte à paires de Cooper à deux jonctions, permettant de disposer d'un  $E_J(\Phi)$  ajustable. Figures extraites de MAKHLIN, SCHÖN et al. (2001).

## 2-2 La boîte à paires de Cooper

Un exemple spectaculaire d'utilisation d'un SQUID dans ce contexte concerne la réalisation des premiers qubits supraconducteurs cohérents (NAKAMURA, PASHKIN et al. 1999). Cette réalisation utilise la notion de boîte à paires de Cooper, proposée par BOUCHIAT, VION et al. (1998). Dans sa version de base, cette boîte utilise une seule jonction Josephson, comme représenté sur la figure 6, gauche. Elle est constituée d'une petite île supraconductrice connectée à un réservoir supraconducteur par une jonction Josephson de capacité  $C_J$  et d'énergie  $E_J$ . La tension de grille  $V_g$  est appliquée via la capacité  $C_g$ . Le paramètre de contrôle est la charge de grille :

$$n_g \equiv \frac{C_g V_g}{2e}. \quad (31)$$

Traitions quantiquement le nombre  $n$  de paires de Cooper et la phase  $\varphi$  entre les deux côtés de la jonction. L'hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H}(n_g) = \frac{E_C}{2} (\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\varphi} \quad (32)$$

avec  $E_C = (2e)^2 / (C_J + C_g)$ . Dans cette expression de  $\hat{H}$ ,  $\hat{n}$  est l'opérateur nombre de paires de Cooper sur l'île supraconductrice et la construction des opérateurs  $e^{\pm i\hat{\varphi}}$  a été détaillée au chapitre précédent. Rappelons le ré-

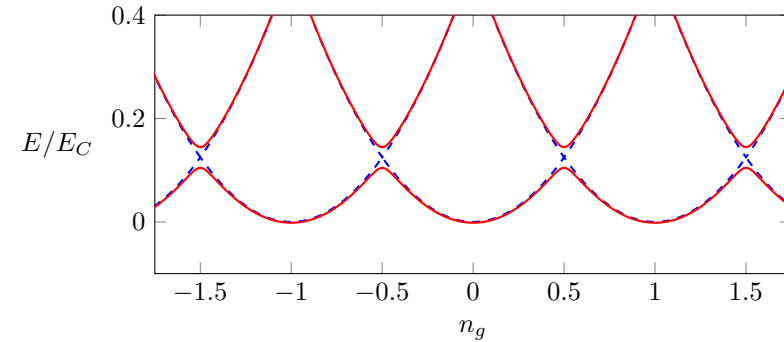


FIGURE 7. Premiers niveaux d'énergies de l'hamiltonien (32) pour  $E_J = 0$  (bleu tireté) et pour  $E_J = 0.04 E_C$  (trait plein rouge).

sultat<sup>2</sup> :

$$\cos \hat{\varphi} = \frac{1}{2} \sum_n (|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|) \quad (33)$$

Ce traitement quantique est nécessaire du fait de la faible valeur de la capacité  $C_J + C_g$ , de sorte que l'énergie de charge  $E_C$  est grande<sup>3</sup> devant  $k_B T$  : les fluctuations thermiques de  $n$  sont donc négligeables et on peut se concentrer sur des valeurs de  $n - n_g$  de l'ordre de l'unité.

La boîte à paires de Cooper opère dans le régime  $E_J \ll E_C$  (typiquement  $E_J/E_C \sim 0.1$ ), c'est-à-dire dans le régime de Fock selon la terminologie du chapitre précédent. Commençons par préciser les états propres et les énergies propres de  $\hat{H}$  pour  $E_J = 0$ , puis traitons  $E_J$  comme une petite perturbation.

Sans le terme  $E_J$ , les états propres de (32) sont les états à nombre

2. Pour des jonctions supraconductrices, la définition  $e^{i\hat{\varphi}} = \sum_n |n+1\rangle \langle n|$  présente un signe opposé à celui trouvé pour des atomes au chapitre précédent. Cela résulte de la définition du courant intervenant dans la première relation de Josephson  $I = I_c \sin \varphi$ . En effet, l'équation de Heisenberg donnant l'évolution de  $\hat{n}$  s'écrit  $\frac{d\hat{n}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{n}] = -\frac{E_J}{\hbar} \sin \hat{\varphi}$ , dont on déduit le courant traversant la jonction  $-2e\hat{n}$ .

3. Pour l'expérience de NAKAMURA, PASHKIN et al. (1999),  $E_C \sim 1$  meV,  $E_J \sim 0.1$  meV et  $k_B T \sim 3 \mu\text{eV}$ . L'excitation thermique de la boîte est donc négligeable, y compris au point de quasi-dégénérescence  $n_g = 1/2$ .

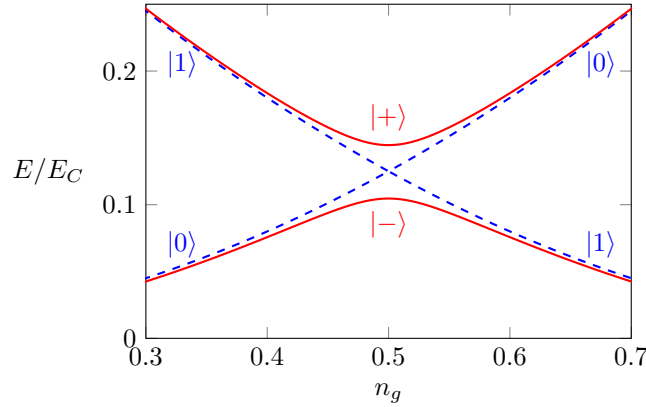


FIGURE 8. Premiers niveaux d'énergies de l'hamiltonien (32) pour  $E_J = 0$  (bleu tiré) et pour  $E_J = 0.04 E_C$  (trait plein rouge) au voisinage de  $n_g = 1/2$ .

bien défini de paires de Cooper, que nous notons  $|n\rangle$  (avec  $n \in \mathbb{Z}$ ). Plus précisément,  $n$  désigne le nombre de paires en excès ou en défaut par rapport à l'état fondamental pour  $V_g = 0$ . Les niveaux d'énergie sont des paraboles indexées par la valeur de  $n$  (figure 7, trait bleu tiré) :  $E_n(n_g) = \frac{E_C}{2}(n - n_g)^2$ . Ces paraboles se croisent aux valeurs demi-entières de  $n_g$ . Dans ce qui suit, nous allons nous concentrer sur le croisement entre  $E_0(n_g)$  et  $E_1(n_g)$ , se produisant pour  $n_g = 1/2$ .

En nous restreignant aux deux états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  pour  $n_g \approx 1/2$ , on isole ainsi un système à deux niveaux d'hamiltonien :

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{E_C}{8} - \frac{1}{2} [\epsilon(V_g)\hat{\sigma}_z + E_J\hat{\sigma}_x] \quad \text{avec} \quad \epsilon(V_g) \propto (n_g - 1/2). \quad (34)$$

Ce système à deux niveaux constitue le qubit recherché et ses énergies propres sont représentées sur la figure 8 en traits pleins; ses états propres à résonance ( $n_g = 1/2$ ) sont :

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \pm |1\rangle) \quad E_{\pm} = \frac{E_C}{8} \pm \frac{E_J}{2}. \quad (35)$$

L'isolation (souvent appelée *anharmonicité*) de ce sous-système à deux niveaux est excellente puisque les autres niveaux les plus proches sont ceux

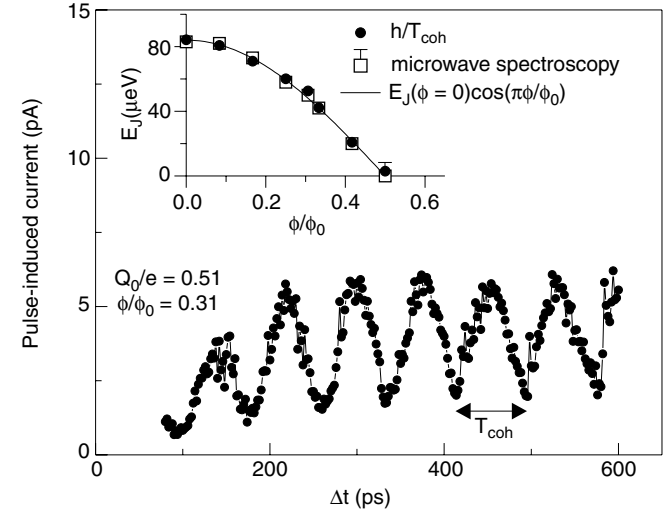


FIGURE 9. Mesure de la probabilité pour trouver le qubit dans l'état  $|2\rangle$  en fonction du temps [cf. (36)]. Insert : variation de l'énergie  $E_J$  (déduite de la période d'oscillation) en fonction du flux appliqué. Figure extraite de NAKAMURA, PASHKIN *et al.* (1999).

issus de la paire  $\{|-1\rangle, |2\rangle\}$ , d'énergie  $\frac{9}{8}E_C$  pour  $n_g = 1/2$ , ce qui est bien supérieur à l'écart entre  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$  (rappelons que nous avons pris  $E_C \gg E_J$ ).

La question se pose alors du contrôle de l'énergie  $E_J$  et de sa reproductibilité. La possibilité de scinder la jonction Josephson en deux, avec un flux  $\Phi$  contrôlé, permet de répondre à ce besoin (figure 6, droite). Cette approche a été mise en œuvre par NAKAMURA, PASHKIN *et al.* (1999). L'île supraconductrice utilisée avait une taille de  $700 \times 50 \times 15$  nm et contenait  $\sim 10^8$  électrons de conduction.

Pour étudier la fiabilité et l'accordabilité de ce qubit, on utilise le protocole suivant : on prépare le qubit hors résonance dans l'état  $|0\rangle$ ; on amène soudainement le système à résonance ( $n_g = 1/2$ ) par un changement de la

tension  $V_g$ , puis on le laisse évoluer pendant un temps  $t$  :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle e^{-iE_J t/\hbar} + |-\rangle e^{iE_J t/\hbar}) \\ &= \cos(E_J t/\hbar) |0\rangle - i \sin(E_J t/\hbar) |1\rangle . \end{aligned} \quad (36)$$

On rebascule enfin la tension vers une valeur pour laquelle les états propres sont en bonne approximation  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ . La paire présente quand le qubit est dans l'état  $|1\rangle$  est évacuée dans un circuit auxiliaire.

En répétant l'expérience avec un taux élevé (60 MHz), on génère un courant dans ce circuit auxiliaire, dont l'amplitude est proportionnelle à la probabilité d'occupation  $\sin^2(E_J t/\hbar)$  de l'état  $|1\rangle$  (figure 9). On a ainsi directement accès à la fréquence  $E_J/\hbar$ , dont on peut vérifier qu'elle varie selon la loi attendue en  $\cos(\pi\Phi/\Phi_0)$  (figure 9, insert).

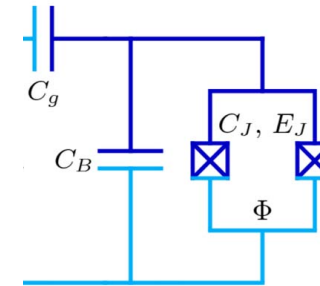
Les performances de la boîte à paires de Cooper ont ensuite été significativement améliorées, en particulier en termes de temps de cohérence, par VION, AASSIME et al. (2002), en passant à un régime où  $E_J$  et  $E_C$  sont comparables (dispositif appelé *quantronium*).

### 2-3 Le transmon

Un point faible de la boîte à paires de Cooper telle que nous l'avons décrite ci-dessus est sa grande sensibilité au bruit de charge : si  $n_g$  fluctue dans le temps, la position des niveaux d'énergies des deux états propres, combinaisons linéaires de  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ , est directement affectée dès qu'on se place en dehors du point particulier (*sweet spot*)  $n_g = 1/2$ .

Le transmon<sup>4</sup>, proposé et réalisé par KOCH, YU et al. (2007) et SCHREIER, HOUCK et al. (2008), permet de remédier à ce problème au prix d'une diminution de l'anharmonicité. Son schéma de base reste similaire à celui de la boîte à paires de Cooper, mais la capacité intervenant dans la définition de  $E_C$  est fortement augmentée, pour atteindre le régime opposé à celui étudié plus haut :  $E_J \gg E_C$  (régime de Josephson). On garde donc l'hamiltonien

$$\hat{H}(n_g) = \frac{E_C}{2} (\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\varphi} , \quad (37)$$



**FIGURE 10.** Principe du circuit du transmon. On retrouve les ingrédients de la boîte à paires de Cooper, avec la capacité supplémentaire  $C_B$  dont la grande valeur permet d'abaisser considérablement la valeur de  $E_C$  pour passer dans le régime Josephson ( $E_C < E_J$ ). Figure adaptée de KOCH, YU et al. (2007).

mais on doit chercher ses états et énergies propres dans un régime de paramètres radicalement différent de celui étudié en §2-2.

Pour cela, il est intéressant de faire un parallèle entre ce problème et le mouvement d'une particule de masse  $m$  en mouvement (à une dimension) dans le potentiel périodique  $V(x) = -V_0 \cos(kx)$ . Comme on a affaire à un potentiel périodique, on sait que l'on peut chercher les états propres de l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - V_0 \cos(k\hat{x}) \quad \text{avec} \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (38)$$

sous forme de fonctions de Bloch indexées par le quasi-moment  $q$

$$\psi_q(x) = e^{iqx} u_q(x) , \quad (39)$$

où la fonction  $u_q(x)$  est périodique, de période  $2\pi/k$ . L'équation vérifiée par  $u_q(x)$  s'écrit

$$\hat{H}_{\text{per}}(q) u_q(x) = E(q) u_q(x) \quad (40)$$

avec l'hamiltonien périodique

$$\hat{H}_{\text{per}}(q) = \frac{1}{2m} (\hat{p} + \hbar q)^2 - V_0 \cos(k\hat{x}) \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar . \quad (41)$$

Les deux problèmes sont donc formellement identiques, la variable  $n_g$  jouant le rôle du quasi-moment  $q$ . Plus précisément, on peut introduire

4. acronyme pour *transmission line shunted plasma oscillation qubit*.

les quantités sans dimension  $X = kx$ ,  $P = p/\hbar k$ ,  $Q = q/k$ , pour récrire (41) sous la forme

$$\hat{H}(Q) = E_{\text{rec}}(\hat{P} + Q)^2 - V_0 \cos \hat{X} \quad \text{avec} \quad [X, P] = i \quad (42)$$

et avec l'énergie de recul  $E_{\text{rec}} = \hbar^2 k^2 / 2m$ . Sous cette forme, on voit que la boîte à paires de Cooper étudiée en §2-2 correspond aux régimes des liaisons faibles pour notre particule fictive ( $V_0 \ll E_{\text{rec}}$ ) alors que le transmon correspond au régime des liaisons fortes ( $V_0 \gg E_{\text{rec}}$ ) [cf. cours 2012-13, Chap.2].

Nous donnons en figure 11 le spectre de l'hamiltonien (37) pour quatre valeurs du rapport  $E_J/E_C$ . On trouve comme prévu des bandes d'énergie, qui deviennent de plus en plus fines quand le rapport  $E_J/E_C$  (équivalent à  $V_0/E_{\text{rec}}$ ) augmente. La largeur d'une bande décroît exponentiellement vite avec ce rapport; elle est en effet reliée au couplage tunnel entre deux minima adjacents du potentiel  $V(x)$ .

Cette réduction exponentielle représente l'avantage majeur du transmon par rapport à la boîte à paires de Cooper étudiée en §2-2 : la sensibilité vis-à-vis des fluctuations de  $n_g$  est exponentiellement réduite. Pour cette raison, le transmon est actuellement l'élément privilégié par plusieurs compagnies privées cherchant à réaliser un ordinateur quantique à base de qubits supraconducteurs (IBM, Google, Rigetti, Intel, Oxford Quantum Circuits, ...).

Dans la limite  $E_J \gg E_C$ , l'écart entre les deux bandes les plus basses, donné par  $\sqrt{E_J E_C}$ , se déduit (pour la particule fictive) de la fréquence d'oscillation au voisinage d'un minimum de  $V_0$ . Pour la jonction Josephson, cette fréquence correspond à celle de l'oscillation plasma. L'anharmonicité des niveaux d'énergie est caractérisée par la différence entre les transitions "bande 0  $\rightarrow$  bande 1" et "bande 1  $\rightarrow$  bande 2". Pour les transmons utilisés dans les processeurs quantiques de type Sycamore (Google), on a  $\omega_{0 \rightarrow 1} / 2\pi \sim 6$  GHz et une anharmonicité  $\sim 0.2$  GHz. Notons que l'initialisation thermique du qubit est garantie ici par le fait que  $\hbar\omega_{0 \rightarrow 1} \sim 10$  à  $20 k_B T$ .

**Remarque.** Comme indiqué plus haut, le SQUID permet ici d'accorder la valeur de  $E_J$ , ce qui est utile pour amener deux qubits en résonance et réaliser une porte logique entre eux, par exemple. Chaque qubit dispose donc

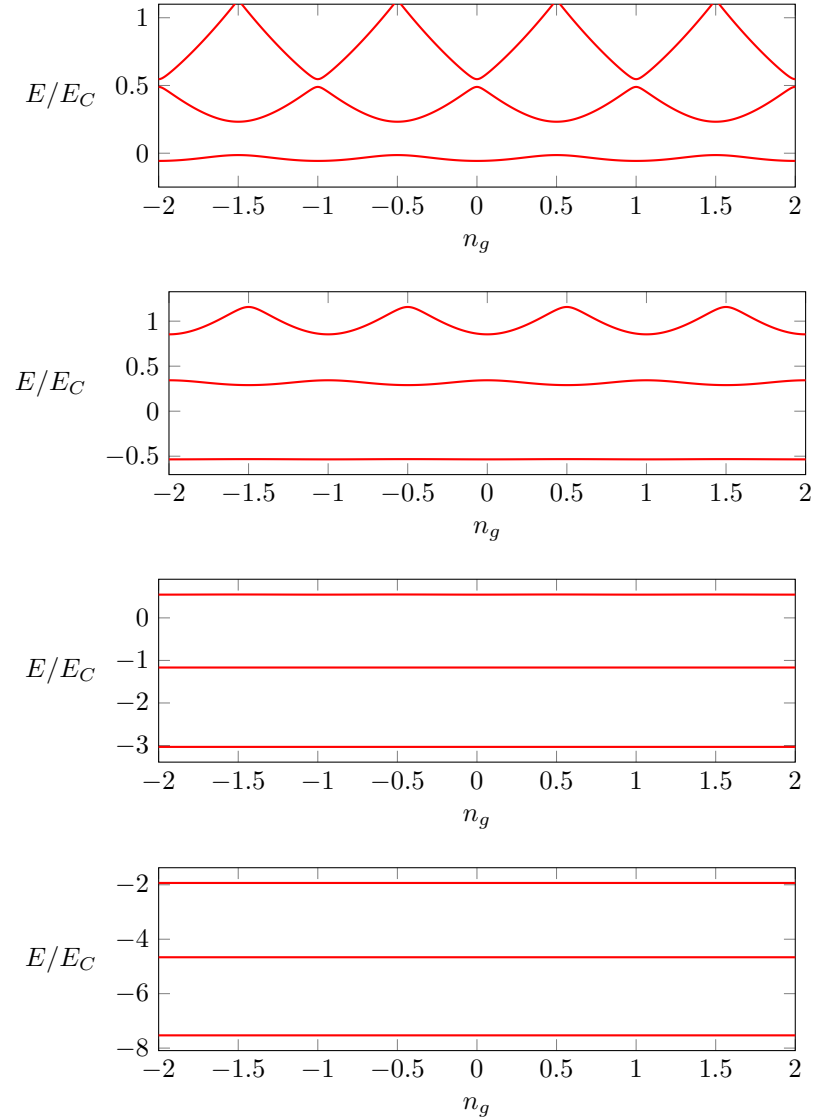


FIGURE 11. Spectre de l'hamiltonien (37) pour  $E_J/E_C = 0.25, 1, 4, 9$ .

d'une boucle de courant permettant d'ajuster le flux local. Toutefois, cette accordabilité a un prix : l'exposition au bruit de flux magnétique. C'est pourquoi certaines plateformes à base de transmons privilégient à l'heure actuelle des qubits avec une seule jonction Josephson.

### 3 Modélisation d'un SQUID atomique

Le fonctionnement d'un SQUID supraconducteur est directement lié au champ magnétique dans lequel il est plongé. Pour des atomes neutres, cette sensibilité au champ magnétique disparaît, mais on peut retrouver des phénomènes physiques équivalents grâce à des champs de jauge artificiels.

Nous avons consacré dans le passé deux cours à cette simulation du magnétisme orbital pour des atomes neutres (2013-14 et 2017-18). Parmi les différentes voies dégagées dans ces cours, nous allons nous concentrer ici sur la plus simple : la mise en rotation du système. L'analogie avec le magnétisme est alors bien claire, car elle tire parti de la structure mathématique identique pour la force de Lorentz agissant sur une particule chargée,  $qv \times \mathbf{B}$ , et pour la force de Coriolis dans un référentiel tournant,  $2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$ .

#### 3-1 Référentiel en rotation

Considérons pour commencer une particule quantique évoluant sous l'effet de l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}}). \quad (43)$$

Le potentiel  $V(\mathbf{r})$  est supposé indépendant du temps et l'hamiltonien est écrit dans un référentiel inertiel : nous pouvons donc utiliser le formalisme habituel de l'équation de Schrödinger. Notons que nous prenons ici une particule unique, mais ce qui suit se généralise sans difficulté à une assemblée de particules en interaction.

Supposons maintenant que les sources créant le potentiel  $V(\mathbf{r})$  sont mises en rotation autour de l'axe  $z$  à vitesse angulaire  $\Omega$  constante. Ces sources peuvent être les parois du récipient contenant de l'hélium liquide,

les faisceaux laser piégeant des particules, ou encore les bobines magnétiques réalisant un piège à atomes. Leur nature n'est pas importante ici, le seul point à retenir est que le potentiel ressenti par notre particule dépend désormais explicitement du temps. Dans cette mise en rotation, le potentiel initial  $V(\mathbf{r})$  devient :

$$W(\mathbf{r}, t) = V[x \cos(\Omega t) + y \sin(\Omega t), -x \sin(\Omega t) + y \cos(\Omega t), z] \quad (44)$$

Nous devons donc traiter un problème dépendant du temps dans le référentiel inertiel, ce qui complique l'analyse. Toutefois, il est possible de se ramener à un problème indépendant du temps en nous plaçant dans le référentiel tournant. Ce changement de référentiel se fait en utilisant la transformation unitaire générée par l'opérateur

$$\hat{U}(t) = \exp(i\Omega t \hat{L}_z / \hbar) \quad (45)$$

où la composante  $\hat{L}_z$  de l'opérateur moment cinétique s'écrit en coordonnées cylindriques  $(\rho, \phi, z)$  :

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (46)$$

Pour vérifier que cette transformation correspond bien au changement de référentiel attendu, considérons sa forme infinitésimale

$$\Omega t \ll 1 : \quad \hat{U} \approx 1 + \frac{i}{\hbar} \Omega t \hat{L}_z \quad (47)$$

et regardons la transformation de l'opérateur position :

$$\hat{\mathbf{r}}' = \hat{U} \hat{\mathbf{r}} \hat{U}^\dagger \approx \hat{\mathbf{r}} + \frac{i}{\hbar} \Omega t [\hat{L}_z, \hat{\mathbf{r}}] \quad (48)$$

dont on déduit

$$\Omega t \ll 1 : \quad \hat{x}' \approx \hat{x} - \Omega t \hat{y} \quad \hat{y}' = \hat{y} + \Omega t \hat{x}, \quad (49)$$

l'opérateur  $\hat{z}$  étant inchangé. Plus généralement, on peut montrer que :

$$\hat{U} [\hat{x} \cos(\Omega t) + \hat{y} \sin(\Omega t)] \hat{U}^\dagger = \hat{x} \quad \hat{U} [-\hat{x} \sin(\Omega t) + \hat{y} \cos(\Omega t)] \hat{U}^\dagger = \hat{y} \quad (50)$$

Ces deux relations correspondent bien au changement de référentiel recherché; plus précisément, l'opérateur  $\hat{r}$  après transformation correspond à la position de la particule dans le référentiel tournant. De même, l'opérateur  $\hat{p}$  après transformation est égal à  $-i\hbar\nabla$  où les dérivées sont maintenant prises par rapport aux positions dans le référentiel tournant. On pourra consulter le cours 2013-14, chap. IV, §1, pour une discussion détaillée de cette transformation.

Dans cette transformation unitaire, l'état  $\tilde{\psi} = \hat{U}\psi$  de la particule évolue sous l'effet de l'hamiltonien

$$\hat{H} = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger + i\hbar\frac{d\hat{U}}{dt}\hat{U}^\dagger. \quad (51)$$

Le terme d'énergie cinétique est invariant par rotation, le terme lié au potentiel  $W(\mathbf{r}, t)$  se transforme en  $V(\mathbf{r})$  d'après ce qui précède, et on arrive donc à :

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}}) - \Omega\hat{L}_z \quad (52)$$

Nous nous sommes donc bien ramenés à un hamiltonien indépendant du temps, au prix d'une complication : le terme additionnel  $-\Omega\hat{L}_z$  dans l'hamiltonien.

Une conséquence directe de ce terme est la modification de la relation entre vitesse et impulsion. Alors que pour l'hamiltonien (43) dans le référentiel inertiel, on a  $\hat{\mathbf{p}} = m\hat{\mathbf{v}}$ , nous trouvons maintenant

$$\hat{\mathbf{v}} \equiv \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\mathbf{r}}] = \frac{1}{m}[\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})] \quad (53)$$

où le "potentiel vecteur"  $\mathbf{A}$  est défini par

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{u}_z. \quad (54)$$

La structure de  $\mathbf{A}$  est identique au potentiel vecteur généré par un champ magnétique  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$  uniforme quand on l'écrit en jauge symétrique :  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ .

On peut par ailleurs écrire l'hamiltonien (52) sous la forme

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}[\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})]^2 + V(\hat{\mathbf{r}}) - \frac{1}{2}m\Omega^2(x^2 + y^2) \quad (55)$$

ce qui fait ainsi apparaître clairement le lien entre rotation et magnétisme : le mouvement de notre particule dans le référentiel tournant est équivalent à celui d'une particule de charge  $q$  dans le champ magnétique  $\mathbf{B}$  tel que  $q\mathbf{B} = 2m\boldsymbol{\Omega}$ , pourvu que l'on ajoute au potentiel  $V(\mathbf{r})$  le potentiel centrifuge  $\frac{1}{2}m\Omega^2(x^2 + y^2)$ . En d'autres termes, quand on passe dans le référentiel tournant, on voit apparaître deux forces :

- la force de Coriolis  $2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$  de structure identique à la force de Lorentz  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ;
- la force centrifuge, qui n'a pas d'équivalent direct dans le cas magnétique.

**Remarque : conditions aux limites périodiques ou distordues?** Dans l'approche qui précède, la transformation unitaire  $\hat{U}$  ne modifie pas les conditions aux limites, qui restent périodiques vis-à-vis de la variable  $\phi$  :  $\psi(\rho, \phi + 2\pi, z) = \psi(\rho, \phi, z)$ . Le passage dans le référentiel tournant se traduit par l'ajout du terme  $-\Omega\hat{L}_z$  à l'hamiltonien. Il est possible d'éliminer ce terme  $-\Omega\hat{L}_z$  par une deuxième transformation unitaire, le prix à payer étant des conditions aux limites distordues :  $\psi(\rho, \phi + 2\pi, z) = e^{i\gamma}\psi(\rho, \phi, z)$ , avec  $\gamma = 2\pi m\Omega R^2/\hbar$  (cf. cours 2023-24, chap. VI, §2). Nous n'utiliserons pas ce point de vue dans ce qui suit.

### 3-2 Anneau dans un référentiel tournant

Avant de passer au SQUID atomique, il est intéressant de reposer le problème d'un anneau simple superfluide dans un référentiel en rotation (figure 12). Considérons pour simplifier un anneau très fin de rayon  $R$ , de sorte que la seule variable d'espace pertinente est l'angle azimutal  $\phi$ . Des particules circulent sur l'anneau et elles sont décrites par une fonction d'onde macroscopique dont la phase est notée  $\theta(\phi)$ .

Notons  $v$  la vitesse locale des particules. En utilisant un raisonnement semi-classique de même nature que pour l'anneau supraconducteur, nous trouvons en utilisant la relation (53) entre impulsion et vitesse

$$mv = \hbar\nabla\theta - \mathbf{A}. \quad (56)$$

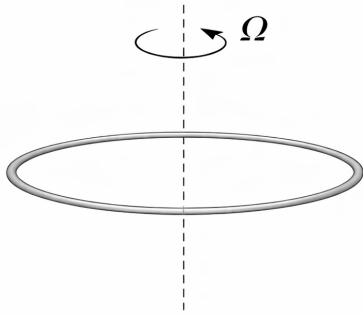


FIGURE 12. Anneau superfluide dans un référentiel en rotation.

Par ailleurs, la fonction d'onde étant monovaluée, on trouve pour le potentiel  $\theta$  après intégration sur le contour

$$\oint \nabla \theta \cdot d\mathbf{r} = 2\pi n \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z} \quad (57)$$

et pour le potentiel vecteur

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint (\nabla \times \mathbf{A}) \, d^2r = 2m\Omega S \quad (58)$$

où  $S$  désigne la surface de l'anneau :  $S = \pi R^2$ . On trouve donc

$$\boxed{\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{m} \left( n - \frac{\Omega}{\Omega_0} \right) \quad \text{avec } \Omega_0 \equiv \frac{\hbar}{mR^2}} \quad (59)$$

Cette relation est l'équivalent atomique de la quantification du fluxoïde (21) pour un anneau supraconducteur. Rappelons toutefois que la fréquence de rotation  $\Omega$  est ici un paramètre imposé de l'extérieur alors que le flux  $\Phi$  figurant dans (21) est une variable dynamique, somme du flux extérieur et du flux généré par le courant circulant dans l'anneau.

Les états stationnaires sont obtenus pour une densité et une vitesse uniformes le long de l'anneau, de sorte que (59) donne pour la vitesse du su-

perfluide dans le référentiel tournant :

$$v = \frac{\hbar}{mR} \left( n - \frac{\Omega}{\Omega_0} \right) = n \frac{\hbar}{mR} - \Omega R. \quad (60)$$

**Remarque.** Dans l'expression (59),  $v$  désigne la vitesse dans le référentiel tournant. La vitesse dans le référentiel inertiel est  $v + \Omega R$  de sorte que cette expression exprime simplement la quantification de la circulation de la vitesse en unité de  $\hbar/m$  pourvu qu'on soit dans un référentiel inertiel. Le résultat (60) obtenu pour une vitesse uniforme correspond donc simplement à la vitesse (quantifiée) usuelle dans un référentiel d'inertie,  $n\hbar/mR$ , à laquelle on soustrait la vitesse locale du référentiel tournant  $\Omega R$ .

### 3-3 Principe du SQUID atomique

Passons maintenant au cas d'un SQUID atomique avec deux jonctions  $J$  et  $J'$  (figure 13) placées sur un anneau, le tout étant étudié dans un référentiel en rotation. Comme pour l'anneau simple, nous partons de la relation

$$\frac{m}{\hbar} \mathbf{v} = \nabla \theta - \frac{1}{\hbar} \mathbf{A} \quad (61)$$

que nous allons intégrer sur les deux portions  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  extérieures aux jonctions. Nous notons

$$\varphi_{\mathcal{C}_j} = \frac{m}{\hbar} \int_{\mathcal{C}_j} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}, \quad j = 1, 2, \quad (62)$$

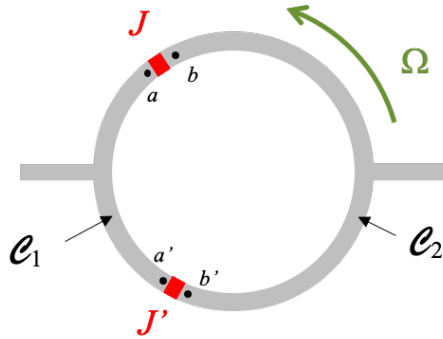
qui sont des nombres sans dimension, et nous obtenons

$$\varphi_{\mathcal{C}_1} + \varphi_{\mathcal{C}_2} = \theta(a') - \theta(a) + \theta(b) - \theta(b') - \frac{1}{\hbar} \int_{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad [2\pi]. \quad (63)$$

L'intégrale du potentiel vecteur peut se réécrire

$$\int_{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - \left( \int_b^a + \int_{a'}^{b'} \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (64)$$

où le premier terme fait apparaître comme en (58) la quantité  $2m\Omega S$  et le second terme se regroupe avec les différences  $\theta(a) - \theta(b)$  et  $\theta(a') - \theta(b')$



**FIGURE 13.** Anneau superfluide avec deux jonctions Josephson dans un référentiel en rotation.

pour former les quantités invariantes de jauge

$$\varphi = \theta(a) - \theta(b) - \frac{1}{\hbar} \int_b^a \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad \varphi' = \theta(a') - \theta(b') - \frac{1}{\hbar} \int_{b'}^{a'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (65)$$

On obtient alors la relation

$$\varphi - \varphi' = 2\pi \left( n - \frac{\Omega}{\Omega_0} \right) - (\varphi_{c_1} + \varphi_{c_2}) \quad (66)$$

qui est à rapprocher de celle trouvée pour un SQUID supraconducteur :

$$\varphi - \varphi' = 2\pi \left( n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right). \quad (67)$$

Dans le cas supraconducteur,  $\Phi$  représente le flux total, somme du flux imposé de l'extérieur  $\Phi_{\text{ext}}$  et du flux  $LI$  généré par le courant  $I$  circulant dans l'anneau d'inductance  $L$  :

$$\varphi - \varphi' = 2\pi \left( n - \frac{\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_0} \right) - \frac{|q|LI}{\hbar}. \quad (68)$$

Dans le cas du fluide neutre en rotation, le terme  $\varphi_{c_1} + \varphi_{c_2}$  dans (66) joue un rôle similaire à la contribution du courant induit, et il est appelé *inductance*

*cinétique*. La fréquence de rotation  $\Omega$ , imposée de l'extérieur, joue le même rôle que  $\Phi_{\text{ext}}$ .

Si l'inductance cinétique  $\varphi_{c_1} + \varphi_{c_2}$  est négligeable (ce que nous discuterons dans le paragraphe suivant), on trouve que la différence de phase entre les deux jonctions est "verrouillée" (modulo  $2\pi$ ) par la relation :

$$\varphi - \varphi' \approx 2\pi \left( n - \frac{\Omega}{\Omega_0} \right). \quad (69)$$

La détermination du courant circulant dans le SQUID est donc inchangée par rapport à ce que nous avons présenté en §1-4. En particulier, le courant total  $I_{\text{ext}}$  se met sous la forme

$$I_{\text{ext}} = \bar{I}_c(\Omega) \sin \bar{\varphi} \quad \text{avec} \quad \bar{I}_c(\Omega) \equiv 2I_c \cos \left( \pi \frac{\Omega}{\Omega_0} \right) \quad (70)$$

où  $\bar{\varphi}$  désigne la phase moyenne

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{2} (\varphi + \varphi'). \quad (71)$$

### 3-4 L'inductance cinétique

La relation simple (70) repose sur le fait que l'inductance cinétique  $\varphi_{c_1} + \varphi_{c_2}$  qui apparaît dans (66) est négligeable. Pour évaluer la validité de cette approximation, nous allons considérer le cas simple où la densité linéique du superfluide  $\rho_s$  est constante sur l'ensemble du circuit, en dehors des jonctions elles-mêmes où cette densité est bien sûr beaucoup plus faible.

Dans cette hypothèse de densité uniforme, la vitesse de l'écoulement superfluide est constante le long d'une branche de circuit. En notant  $I$  et  $I'$  les courants de particules sur les demi-cercles supérieurs et inférieurs, et  $v$  et  $v'$  les vitesses correspondantes, on a  $I = \rho_s v$  et  $I' = \rho_s v'$ . Le terme d'inductance cinétique s'écrit alors

$$\varphi_{c_1} + \varphi_{c_2} \approx \frac{\pi R m}{\hbar} (v' - v) \quad (72)$$

où nous avons négligé l'épaisseur des barrières  $J$  et  $J'$  devant le périmètre de l'anneau  $2\pi R$ .

Dans le régime de fonctionnement attendu pour ce SQUID, on attend des courants  $I$  et  $I'$  de l'ordre de  $I_c$ , et des phases  $\varphi$  et  $\varphi'$  dans (66) de l'ordre de  $\pi/2$ . La contribution de l'inductance cinétique sera négligeable si

$$|\varphi_{C_1} + \varphi_{C_2}| \ll \pi \quad \Rightarrow \quad I_c \ll \frac{\hbar \rho_s}{mR}. \quad (73)$$

En d'autres termes, il faut que les barrières tunnel soient suffisamment épaisses et/ou élevées pour que leur intensité critique soit petite devant  $\hbar \rho_s / mR$ . Cette dernière quantité a une signification physique simple : c'est l'intensité qui circule dans l'anneau sans jonction quand le fluide possède un quantum de circulation, c'est-à-dire la vitesse  $\frac{\hbar}{mR}$ .

Quand cette condition est réalisée, la variation de phase entre le point d'entrée et le point de sortie de l'anneau est essentiellement concentrée au niveau des jonctions elles-mêmes. La vitesse du superfluide dans les autres parties du circuit est suffisamment faible pour que la différence de phase associée (i.e. l'inductance cinétique) ne joue pas de rôle significatif.

**Remarque 1.** Notons que nous nous sommes intéressés dans ce qui précède au régime non dissipatif, pour lequel le courant  $I$  reste inférieur au courant critique donné en (70). Quand le courant dépasse cette valeur critique, une différence de densité apparaît entre les deux arcs de cercle  $C_1$  et  $C_2$ , qui peut être calculée à partir du modèle RCSJ développé au chapitre 2. Cette situation est étudiée en détail par KIEHN, SINGH et al. (2022) (voir également GÖRG, MATHEY et al. (2025) pour une géométrie légèrement différente).

**Remarque 2.** On peut mettre la contribution de l'inductance cinétique à (66) sous une forme parlante en introduisant les deux vitesses  $v_{\text{ext}} = v + v'$  et  $v_{\text{dif}} = \frac{1}{2}(v' - v)$ . La vitesse  $v_{\text{ext}}$  est la vitesse du fluide imposée dans le circuit extérieur via l'intensité  $I_{\text{ext}} = \rho_s v_{\text{ext}}$ , avec  $I_{\text{ext}} = I + I'$ . Ces deux relations s'inversent pour donner :

$$v = \frac{1}{2}v_{\text{ext}} - v_{\text{dif}} \quad v' = \frac{1}{2}v_{\text{ext}} + v_{\text{dif}} \quad (74)$$

ce qui conduit à  $\varphi_{C_1} + \varphi_{C_2} = 2\pi R m v_{\text{dif}} / \hbar$  ou encore

$$\varphi_{C_1} + \varphi_{C_2} = 2\pi \frac{\Omega_{\text{dif}}}{\Omega_0} \quad \text{avec} \quad v_{\text{dif}} = R\Omega_{\text{dif}}. \quad (75)$$

La relation (66) s'écrit alors :

$$\varphi - \varphi' = 2\pi \left( n - \frac{\Omega + \Omega_{\text{dif}}}{\Omega_0} \right) \quad (76)$$

et l'approximation d'une inductance cinétique négligeable revient à traiter  $\Omega_{\text{dif}}$  comme une petite correction à  $\Omega$ , tout comme on traite  $LI$  comme une petite correction à  $\Phi_{\text{ext}}$  pour le SQUID supraconducteur.

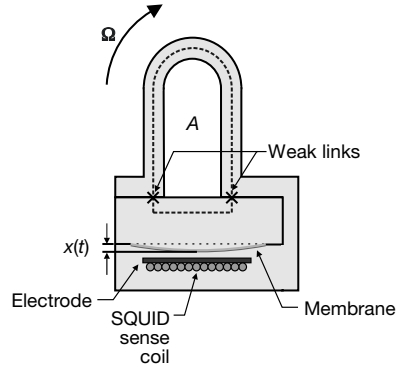
Pour un anneau qui n'est pas alimenté de l'extérieur ( $v_{\text{ext}} = 0$ ), le mouvement du superfluide décrit par (74) correspond à une rotation à la vitesse  $\Omega_{\text{dif}}$  dans le référentiel lui-même en rotation à la vitesse  $\Omega$  par rapport à un référentiel galiléen. La quantité  $\Omega + \Omega_{\text{dif}}$  qui apparaît dans (76) est donc simplement la vitesse de rotation du superfluide par rapport à un référentiel galiléen.

## 4 Expériences avec des SQUID atomiques

### 4-1 Hélium superfluide

Les premiers SQUIDs atomiques ont été mis en œuvre sur des bains d'hélium liquide superfluide. Un résultat spectaculaire a été la détection directe de la rotation de la terre à partir du signal d'interférence de la fonction d'onde d'un superfluide de  $^4\text{He}$  (AVENEL, HAKONEN et al. 1997). Nous allons nous concentrer ici sur le travail plus récent de SIMMONDS, MARCHENKOV et al. (2001), qui décrit une implémentation directe du concept de SQUID sur un bain de  $^3\text{He}$  superfluide, comportant une boucle "en U" d'aire  $S \approx 6 \text{ cm}^2$  se terminant par deux jonctions ("liens faibles"), similaires à celle décrite au chapitre 3 (figure 14). Ces jonctions se composent chacune de 4225 trous de 100 nm de diamètre percés dans une paroi de niture de silicium.

Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, cette double jonction peut être assimilée à une jonction simple, avec la loi reliant le courant et la phase mise sous la forme  $I = \bar{I}_c \sin \varphi$ , où l'intensité critique  $\bar{I}_c$  est une fonction du flux traversant la boucle, donc de la fréquence de rotation  $\Omega$  du référentiel terrestre par rapport à un référentiel inertiel.

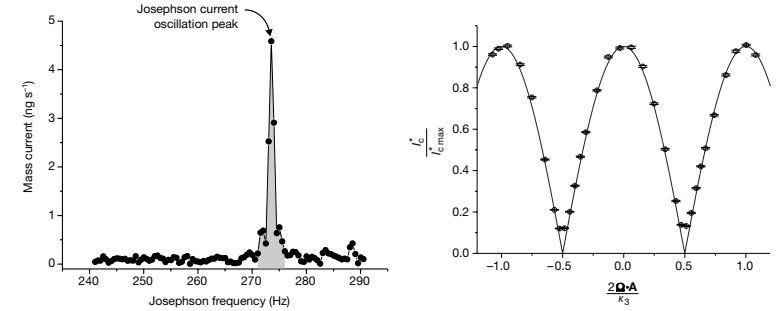


**FIGURE 14.** SQUID atomique réalisé avec  $^3\text{He}$  superfluide. Deux "liens faibles" sont disposés aux deux extrémités d'une boucle "en U". L'aire de la boucle ( $6\text{ cm}^2$ ) est suffisante pour détecter la rotation terrestre à partir de l'intensité critique  $\bar{I}_c(\Omega)$  du SQUID. Figure extraite de SIMMONDS, MARCHENKOV et al. (2001).

Dans l'expérience de SIMMONDS, MARCHENKOV et al. (2001), on module la pression du bain d'hélium à une fréquence  $\nu$  ajustable, en faisant vibrer une membrane souple. Cette modulation de pression est l'équivalent d'une modulation de la tension pour une jonction supraconductrice. Quand la fréquence  $\nu$  est égale à la fréquence plasma  $\sqrt{E_C \bar{E}_J}/h$  (avec  $\bar{E}_J = \hbar \bar{I}_c$ ), le courant traversant la double jonction varie de manière résonnante (figure 15, gauche). Cette résonance permet de détecter des variations de  $\bar{I}_c$  avec  $\Omega$ .

La dépendance de  $\bar{I}_c$  vis-à-vis de  $\Omega$  est montrée sur la figure 15, droite. On ne varie pas (bien sûr!) la fréquence de rotation de la Terre dans cette expérience. La boucle est disposée dans un plan vertical à la latitude de Berkeley ( $\Theta = 38$  degrés) et le terme  $\Omega$  à prendre en compte est le produit scalaire  $\Omega_{\text{terre}} \cdot \mathbf{n}$ , où  $\Omega_{\text{terre}}$  est orienté selon l'axe des pôles et  $\mathbf{n}$  désigne la normale au plan de la boucle. Quand  $\mathbf{n}$  est parallèle à la ligne est-ouest du laboratoire, le produit scalaire s'annule. Quand il est parallèle à la direction nord-sud, le produit scalaire est maximal et donné par  $\Omega = \Omega_{\text{terre}} \cos \Theta$ .

L'aire de la boucle est suffisante pour faire varier l'argument du cosinus entrant dans l'expression de  $\bar{I}_c(\Omega)$  par plus que  $\pi$  [cf. (70)], ce qui permet



**FIGURE 15.** Gauche : résonance correspondant aux oscillations plasma, permettant de détecter une éventuelle variation de  $\bar{E}_J = \hbar \bar{I}_c$ . Droite : variation de  $\bar{I}_c(\Omega)$  avec l'angle entre le plan de la boucle et l'axe est-ouest du laboratoire. Figure extraite de SIMMONDS, MARCHENKOV et al. (2001).

d'explorer environ une période de l'oscillation prévue :

$$\Omega_{\text{terre}} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \quad \Omega_0 = \frac{\pi \hbar}{(2m)\mathcal{S}} \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \quad (77)$$

où  $m$  désigne la masse d'un atome de  $^3\text{He}$ , et donc  $2m$  la masse d'une paire de Cooper. L'incertitude principale provient de la détermination de l'aire effective  $\mathcal{S}$  de la boucle.

Une expérience équivalente avec des gaz d'atomes froids n'a pas (encore?) été réalisée. Notons que la fréquence  $\Omega_0$  est inversement proportionnelle à la masse des particules : si on utilise un atome lourd, un isotope bosonique de Yb par exemple, le gain d'un facteur 30 sur  $m$  permet de réduire l'aire  $\mathcal{S}$  par ce même facteur 30 (donc  $\mathcal{S} \sim 20\text{ mm}^2$ ) tout en gardant la même sensibilité pour  $I_c(\Omega)$ . Toutefois, les surfaces utilisées en pratique dans les SQUIDs atomiques restent très inférieures à cette valeur<sup>5</sup>, puisqu'elles sont de l'ordre de  $10^{-3}\text{ mm}^2$ . En revanche, les interféromètres utilisant des atomes libres atteignent une sensibilité à long terme de quelques  $10^{-9}\text{ rad/s}$ , soit une très faible fraction de la rotation terrestre (pour une revue, voir BARRETT, GEIGER et al. (2014)).

5. Des interféromètres à effet Sagnac, utilisant des atomes guidés avec des aires de plusieurs  $\text{mm}^2$ , ont récemment été réalisés (BEYDLER, MOAN et al. 2024; PANDEY, UZUN et al. 2026). Leur géométrie est différente de celle des SQUIDs.

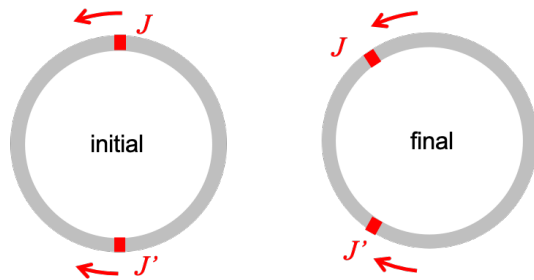


FIGURE 16. Deux barrières mobiles de vitesses opposées sur un anneau superfluide simulent un SQUID dans un référentiel inertiel ( $\Omega = 0$ ).

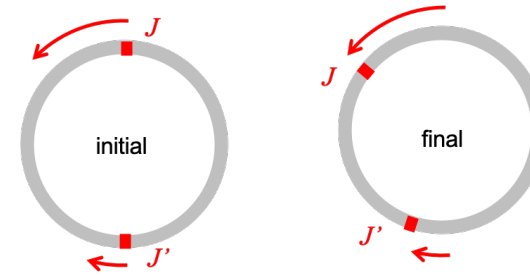


FIGURE 17. Deux barrières mobiles se déplaçant à des vitesses différentes sur un anneau superfluide simulent un SQUID en rotation.

## 4-2 SQUID et barrières mobiles

La première réalisation d'un SQUID à deux jonctions avec un gaz d'atomes froids est due à RYU, BLACKBURN et al. (2013), au laboratoire de Los Alamos. Ce dispositif a ensuite été perfectionné dans ce même laboratoire par RYU, SAMSON et al. (2020). Des expériences similaires ont été menées au NIST par WRIGHT, BLAKESTAD et al. (2013), ECKEL, JENDRZEJEWSKI et al. (2014) et JENDRZEJEWSKI, ECKEL et al. (2014).

Les chercheurs de Los Alamos ont utilisé une géométrie annulaire (rayon  $R$  entre 3 et 5  $\mu\text{m}$ ) dans laquelle ils ont placé deux barrières identiques de largeur totale à mi-hauteur 2  $\mu\text{m}$ . Ces deux barrières sont initialement diamétralement opposées. Les potentiels de confinement sont réalisés grâce à des faisceaux laser dont on module la position à fréquence élevée (*painted potentials*). Un condensat de quelques milliers d'atomes de rubidium 87 est confiné sur l'anneau.

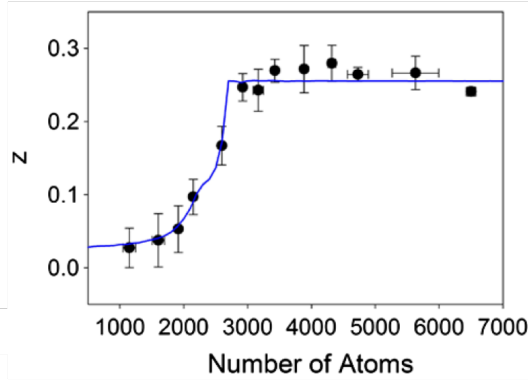
Pour se placer dans la situation où des courants  $I$  et  $I'$  traversent les barrières, RYU, BLACKBURN et al. (2013) ont utilisé la méthode proposée par GIOVANAZZI, SMERZI et al. (2000) et que nous avons décrite au chapitre 2 : ils ont mis chaque barrière en mouvement à vitesse uniforme. Quand la barrière bouge à une vitesse  $v$  inférieure à la vitesse critique  $v_c$ , elle est traversée par le courant de particules  $I = \rho v$ , les densités restent égales de part et d'autre de la barrière et une différence de phase  $\varphi$  satisfaisant la relation de Josephson  $I = I_c \sin \varphi$  apparaît entre les deux côtés de cette bar-

rière. En revanche, quand  $v > v_c$ , un surplus de densité apparaît en amont de la barrière et un déficit apparaît en aval.

Dans l'expérience de 2013, les vitesses des barrières étaient égales en valeur absolue et opposées :  $v = -v'$  (figure 16). Cette situation simule des intensités et des sauts de phase égaux pour les deux jonctions, donc un anneau au repos dans un référentiel inertiel ( $\Omega = 0$ ). Dans l'expérience de 2020, les valeurs absolues des vitesses des barrières étaient différentes, ce qui permet de simuler une rotation (figure 17).

Pour déterminer la transition entre un écoulement superfluide ( $I < I_c$ ) et un écoulement résistif ( $I > I_c$ ), le groupe de Los Alamos mesure, après un déplacement donné des jonctions, la différence de population entre les deux arcs de cercle (gauche et droite) séparant ces jonctions. Il répète ensuite cette expérience pour différents nombres d'atomes sur l'anneau. Un résultat typique est montré sur la figure 18 pour  $\Omega = 0$ . Pour un nombre d'atomes suffisamment grand (ici  $N > N_c \sim 3000$ ), la valeur de  $z = (N_1 - N_2)/(N_1 + N_2)$  correspond à la valeur attendue pour un écoulement totalement superfluide.

Quand on prend  $\Omega \neq 0$ , on s'attend à ce que le courant critique  $\bar{I}_c(\Omega)$  soit une fonction oscillante de  $\Omega$ , avec  $\bar{I}_c(\Omega) \leq \bar{I}_c(0)$ . De manière équivalente, le nombre d'atomes critique  $N_c(\Omega)$  doit varier périodiquement avec  $\Omega$ , avec  $N_c(\Omega) \geq N_c(0)$ . Dans le cas d'une inductance cinétique négligeable, on s'attendrait à une annulation complète de  $\bar{I}_c(\Omega)$  pour  $\Omega/\Omega_0 = 1/2 \pmod{\pi}$ , et donc une divergence du nombre critique en ces points [cf. (70)]. Tou-



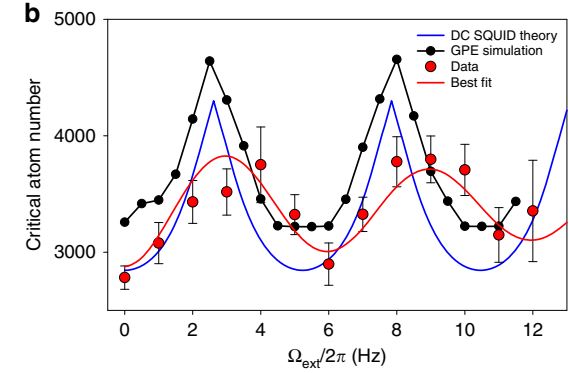
**FIGURE 18.** Évolution du rapport  $z = (N_1 - N_2)/(N_1 + N_2)$  mesuré après le mouvement des barrières. Initialement, les jonctions sont diamétralement opposées et les deux arcs de cercle joignant les deux jonctions ont la même longueur. On trouve donc  $z = 0$ . À la fin du mouvement, la longueurs de ces arcs sont dans un rapport 5/3, de sorte qu'on attend  $z = \frac{5-3}{5+3} = \frac{1}{4}$  pour un écoulement complètement superfluide. Cela correspond à la valeur mesurée pour un nombre d'atomes dépassant la valeur critique  $N_c \approx 3000$ . Cette expérience a été réalisée avec  $\Omega = 0$  (figure 16). Figure extraite de RYU, BLACKBURN *et al.* (2013).

tefois, dans l'expérience de RYU, SAMSON *et al.* (2020), l'inductance cinétique est significative, ce qui vient limiter l'amplitude de variation du nombre critique  $N_c$ . Un exemple de résultat est montré en figure 19, qui montre la périodicité attendue.

### 4-3 Collier de jonctions Josephson

Pour terminer ce chapitre, il est intéressant de regarder l'évolution du courant critique pouvant traverser un anneau quand on augmente le nombre  $N$  de jonctions Josephson, régulièrement réparties le long de l'anneau. Cette étude a été menée expérimentalement par PEZZÈ, XHANI *et al.* (2024) et nous résumons ici ses résultats principaux.

Nous nous plaçons dans le cas d'un anneau immobile dans un référentiel inertiel. Cet anneau contient un condensat de Bose-Einstein à tempéra-

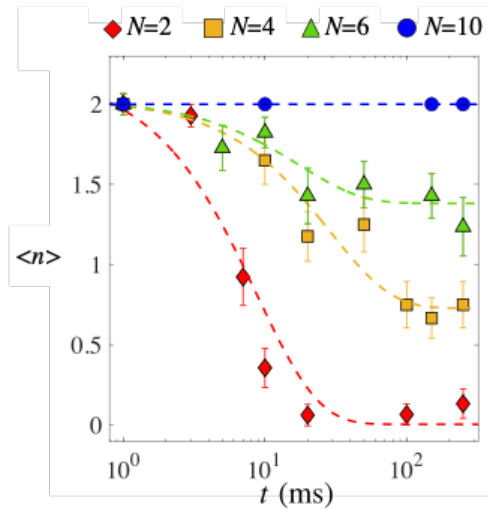


**FIGURE 19.** Variation du nombre critique d'atomes sur l'anneau en fonction de la fréquence de rotation simulée (figure 17). Le rayon de l'anneau est  $R = 4.8 \mu\text{m}$ , ce qui correspond à  $\Omega_0/2\pi \approx 5 \text{ Hz}$ . Figure extraite de RYU, SAMSON *et al.* (2020).

ture nulle et il est parcouru par un courant quantifié, avec un enroulement de phase  $2\pi n$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ . La question à laquelle il s'agit de répondre est la suivante : ce courant peut-il être stable et si c'est le cas, comment sa stabilité dépend-elle du nombre  $N$  de jonctions ? Nous allons voir qu'augmenter le nombre de jonctions permet d'augmenter la stabilité du courant et donc d'atteindre des valeurs plus élevées pour le nombre d'enroulement  $n$  (figure 20).

Cette conclusion est en fait relativement intuitive. On sait qu'une jonction idéale atteint son courant critique quand la différence de phase  $\varphi$  à ses bornes est égale à  $\pi/2$ . Dans le cas de jonctions à faible transmission, on peut négliger la différence de phase sur les segments séparant les jonctions (inductance cinétique faible) et l'enroulement de phase maximum sur l'anneau est donc  $N\pi/2$ , ou plus précisément  $2\pi n$ , où  $n$  est l'entier immédiatement inférieur à  $N/4$ . Ainsi, un nombre d'enroulement  $n = 2$  correspondant à un enroulement de phase de  $4\pi$  pourra certainement être stable si on dispose plus de 8 jonctions sur l'anneau.

Pour aller plus loin et estimer précisément la valeur de la différence de phase  $\varphi$  aux bornes de chaque jonction, reprenons et adaptons le raisonne-



**FIGURE 20.** Évolution temporelle du nombre d'enroulement moyen  $\langle n \rangle$  (mesuré par interférométrie) à partir d'un enroulement initial de  $4\pi$  (i.e.  $n = 2$ ). Les différentes couleurs correspondent à différents nombres  $N$  de jonctions. Cette expérience a été menée avec un condensat de  $\sim 7000$  molécules di-atomiques  $^6\text{Li}_2$  et un anneau de rayon moyen  $16 \mu\text{m}$ . Les jonctions ont une hauteur de  $1.3 \mu$  où  $\mu$  est le potentiel chimique du gaz et une demi-largeur à  $1/e^2$  de  $1.2 \xi$ , où  $\xi = 0.68 \mu\text{m}$  est la longueur de cicatrization. Figure adaptée de PEZZÈ, XHANI et al. (2024).

ment déjà utilisé en §3-3. On considère la relation

$$\frac{m}{\hbar} \mathbf{v} = \nabla \theta - \frac{1}{\hbar} \mathbf{A} \quad (78)$$

et on fait le choix de jauge  $\mathbf{A} = 0$  puisqu'on travaille ici dans un référentiel inertiel. Nous allons intégrer cette relation sur deux domaines différents :

— Considérons l'intégrale sur l'anneau entier, en le parcourant dans le sens trigonométrique. La vitesse  $v(x)$  en un point d'abscisse curviligne  $x$  s'écrit  $v(x) = J/\rho(x)$  où  $J$  est le courant circulant dans l'anneau, ce qui donne

$$\frac{mJ}{\hbar} \oint \frac{dx}{\rho(x)} = 2\pi n. \quad (79)$$

Nous noterons

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle = \frac{1}{L} \oint \frac{dx}{\rho(x)} \quad (80)$$

où  $L = 2\pi R$  est le périmètre de l'anneau, ce qui permet d'écrire (79) sous la forme

$$\frac{mJL}{\hbar} \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle = 2\pi n. \quad (81)$$

Cette relation correspond au résultat connu pour la fraction superfluide. Celle-ci est définie comme le courant qui apparaît en réponse à une torsion de phase  $\Theta$  :  $J = \frac{\hbar}{mL} \langle \rho \rangle f_s \Theta$  (avec ici  $\Theta = 2\pi n$ ) et on trouve pour un fluide décrit par une fonction d'onde macroscopique la formule de Leggett (cf. CHAUVEAU, MAURY et al. (2023) et cours 2023-24, chap. 6) :

$$f_s = \frac{1}{\langle \rho \rangle \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle}. \quad (82)$$

— Considérons maintenant l'intégrale sur les arcs de cercle situés entre les jonctions, ce qui représente la longueur  $L' = L - N\ell$ , où  $\ell$  est l'épaisseur d'une jonction. Sur ces arcs de densité  $\rho_0$ , la vitesse est simplement  $v_0 = J/\rho_0$  et on trouve

$$\frac{mJL'}{\hbar\rho_0} = 2\pi n - N\varphi. \quad (83)$$

Les jonctions contribuent avec un signe négatif car on fait apparaître dans l'intégrale la quantité  $\theta(b_j) - \theta(a_j) = -\varphi$  quand on adopte le sens trigonométrique.

Prenons maintenant le rapport entre (83) et (81), et négligeons de plus l'épaisseur  $N\ell$  des  $N$  jonctions devant le périmètre total  $L$  (i.e.,  $L' \approx L$ ). Cela fournit la valeur de  $\varphi$  pour un enroulement de phase  $n$  donnée :

$$\varphi = \frac{2\pi n}{N} \left( 1 - \frac{1}{\rho_0 \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle} \right). \quad (84)$$

On constate sur ce résultat que la variation de phase aux bornes de chaque jonction est inférieure à  $2\pi n/N$ , car les arcs de cercle contribuent eux aussi à l'enroulement de  $2\pi n$ . Ce n'est que dans la limite où  $\rho$  s'annule au centre de chaque jonction (donc quand  $\left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle$  tend vers l'infini) que l'enroulement de phase est concentré uniquement sur les jonctions.

## Références

- AVENEL, O, P HAKONEN & E VAROQUAUX (1997), « Detection of the rotation of the Earth with a superfluid gyrometer », in *Physical Review Letters* **78**, p. 3602.
- BARRETT, Brynle, Rémy GEIGER, Indranil DUTTA, Matthieu MEUNIER, Benjamin CANUEL, Alexandre GAUGUET, Philippe BOUYER & Arnaud LANDRAGIN (2014), « The Sagnac effect : 20 years of development in matter-wave interferometry », in *Comptes Rendus. Physique* **15**, p. 875-883.
- BEYDLER, MM, ER MOAN, Z LUO, Z CHU & CA SACKETT (2024), « Guided-wave Sagnac atom interferometer with large area and multiple orbits », in *AVS Quantum Science* **6**.
- BOUCHIAT, Vincent, Denis VION, Philippe JOYEZ, Daniel ESTEVE & Michel H DEVORET (1998), « Quantum coherence with a single Cooper pair », in *Physica Scripta* **1998**, p. 165-170.
- CHAUVEAU, G, C MAURY, F RABEC, C HEINTZE, G BROCHIER, S NASCIMBENE, J DALIBARD, J BEUGNON, SM ROCCUZZO & S STRINGARI (2023), « Superfluid fraction in an interacting spatially modulated Bose-Einstein condensate », in *Physical Review Letters* **130**, p. 226003.
- CLARKE, John & Alex I BRAGINSKI (2004), *The SQUID handbook*, t. 1, Wiley Online Library.
- COHEN-TANNOUDJI, Claude, Bernard DIU & Franck LALOË (1973), *Mécanique quantique*, t. 2, Hermann Paris.
- DIVINCENZO, David P (2000), « The physical implementation of quantum computation », in *Fortschritte der Physik : Progress of Physics* **48**, p. 771-783.
- ECKEL, Stephen, Fred JENDRZEJEWSKI, Avinash KUMAR, Christopher J LOBB & Gretchen K CAMPBELL (2014), « Interferometric measurement of the current-phase relationship of a superfluid weak link », in *Physical Review X* **4**, p. 031052.
- FRIEDMAN, Jonathan R, Vijay PATEL, Wei CHEN, SK TOLPYGO & James E LUKENS (2000), « Quantum superposition of distinct macroscopic states », in *nature* **406**, p. 43-46.
- GIOVANAZZI, Stefano, Augusto SMERZI & Stefano FANTONI (2000), « Josephson effects in dilute Bose-Einstein condensates », in *Physical Review Letters* **84**, p. 4521.
- GÖRG, Kaspar, Ludwig MATHEY & Vijay Pal SINGH (2025), « Realizing an atomic quantum interference device in a rotating-box potential », in *Physical Review Research* **7**, p. 043340.
- GRIMM, Alexander, Nicholas E FRATTINI, Shruti PURI, Shantanu O MUNDHADA, Steven TOUZARD, Mazyar MIRRAHIMI, Steven M GIRVIN, Shyam SHANKAR & Michel H DEVORET (2020), « Stabilization and operation of a Kerr-cat qubit », in *Nature* **584**, p. 205-209.
- JACKSON, John David (2012), *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons.
- JAKLEVIC, RC, J LAMBE, JE MERCEREAU & AH SILVER (1965), « Macroscopic quantum interference in superconductors », in *Physical Review* **140**, A1628.
- JENDRZEJEWSKI, Fred, Stephen ECKEL, Nicholas MURRAY, Calib LANIER, Mark EDWARDS, Christopher J LOBB & Gretchen K CAMPBELL (2014), « Resistive flow in a weakly interacting Bose-Einstein condensate », in *Physical Review Letters* **113**, p. 045305.
- KIEHN, Hannes, Vijay Pal SINGH & Ludwig MATHEY (2022), « Implementation of an atomtronic SQUID in a strongly confined toroidal condensate », in *Physical Review Research* **4**, p. 033024.
- KOCH, Jens, V MANUCHARYAN, MH DEVORET & LI GLAZMAN (2009), « Charging effects in the inductively shunted Josephson junction », in *Physical Review Letters* **103**, p. 217004.
- KOCH, Jens, Terri M YU, Jay GAMBETTA, Andrew A HOUCK, David I SCHUSTER, Johannes MAJER, Alexandre BLAIS, Michel H DEVORET, Steven M GIRVIN & Robert J SCHOELKOPF (2007), « Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box », in *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics* **76**, p. 042319.
- MAKHLIN, Yuriy, Gerd SCHÖN & Alexander SHNIRMAN (2001), « Quantum-state engineering with Josephson-junction devices », in *Reviews of Modern Physics* **73**, p. 357.
- MANUCHARYAN, Vladimir E, Jens KOCH, Leonid I GLAZMAN & Michel H DEVORET (2009), « Fluxonium : Single cooper-pair circuit free of charge offsets », in *Science* **326**, p. 113-116.
- MARTINIS, John M, Sae NAM, Joe AUMENTADO & C URBINA (2002), « Rabi oscillations in a large Josephson-junction qubit », in *Physical Review Letters* **89**, p. 117901.
- MIRRAHIMI, Mazyar, Zaki LEGHTAS, Victor V ALBERT, Steven TOUZARD, Robert J SCHOELKOPF, Liang JIANG & Michel H DEVORET (2014), « Dynamically protected cat-qubits : a new paradigm for universal quantum computation », in *New Journal of Physics* **16**, p. 045014.

- MOOIJ, JE, TP ORLANDO, L LEVITOV, Lin TIAN, Caspar H Van der WAL & Seth LLOYD (1999), « Josephson persistent-current qubit », in *Science* **285**, p. 1036-1039.
- NAKAMURA, Yasunobu, Yu A PASHKIN & JS TSAI (1999), « Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box », in *nature* **398**, p. 786-788.
- PANDEY, Saurabh, Ceren UZUN, Katarzyna A. KRZYZANOWSKA & Malcolm G. BOSHIER (2026), *Multi-loop and Multi-axis Atomtronic Sagnac Interferometry*, arXiv : 2504.20345 [physics.atom-ph].
- PEZZÈ, Luca, Klejdja XHANI, Cyprien DAIX, Nicola GRANI, Beatrice DONELLI, Francesco SCAZZA, Diego HERNANDEZ-RAJKOV, Woo Jin KWON, Giulia DEL PACE & Giacomo ROATI (2024), « Stabilizing persistent currents in an atomtronic Josephson junction necklace », in *Nature Communications* **15**, p. 4831.
- RYU, C, PW BLACKBURN, AA BLINOVA & MG BOSHIER (2013), « Experimental realization of Josephson junctions for an atom SQUID », in *Physical Review Letters* **111**, p. 205301.
- RYU, Changhyun, EC SAMSON & Malcolm Geoffrey BOSHIER (2020), « Quantum interference of currents in an atomtronic SQUID », in *Nature Communications* **11**, p. 3338.
- SCHMELZ, M, R STOLZ, V ZAKOSARENKO, T SCHÖNAU, S ANDERS, L FRITZSCH, M MÜCK, M MEYER & H-G MEYER (2012), « Sub-fT/Hz<sup>1/2</sup> resolution and field-stable SQUID magnetometer based on low parasitic capacitance sub-micrometer cross-type Josephson tunnel junctions », in *Physica C : Superconductivity and Its Applications* **482**, p. 27-32.
- SCHREIER, Joseph A, Andrew A HOUCK, Jens KOCH, David I SCHUSTER, Bradley R JOHNSON, Jerry M CHOW, Jay M GAMBETTA, J MAJER, Luigi FRUNZIO, Michel H DEVORET et al. (2008), « Suppressing charge noise decoherence in superconducting charge qubits », in *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics* **77**, p. 180502.
- SIMMONDS, RW, A MARCHENKOV, JC DAVIS & RE PACKARD (2001), « Observation of the Superfluid Shapiro Effect in a H<sub>3</sub>e Weak Link », in *Physical Review Letters* **87**, p. 035301.
- STEFFEN, Matthias, M ANSMANN, R MCDERMOTT, Nadav KATZ, Radoslaw C BIALCZAK, Erik LUCERO, Matthew NEELEY, Eva Maria WEIG, Andrew N CLELAND & John M MARTINIS (2006), « State tomography of capacitively shunted phase qubits with high fidelity », in *Physical Review Letters* **97**, p. 050502.
- VAN DER WAL, Caspar H, ACJ TER HAAR, FK WILHELM, RN SCHOUTEN, CJPM HARMANS, TP ORLANDO, Seth LLOYD & JE MOOIJ (2000), « Quantum superposition of macroscopic persistent-current states », in *Science* **290**, p. 773-777.
- VION, Denis, A AASSIME, Audrey COTTET, PI JOYEZ, H POTHIER, C URBINA, Daniel ESTEVE & Michel H DEVORET (2002), « Manipulating the quantum state of an electrical circuit », in *Science* **296**, p. 886-889.
- WRIGHT, Kevin C, RB BLAKESTAD, Christopher J LOBB, William D PHILLIPS & Gretchen K CAMPBELL (2013), « Driving phase slips in a superfluid atom circuit with a rotating weak link », in *Physical Review Letters* **110**, p. 025302.