

Fluides quantiques couplés et jonctions Josephson

Jean Dalibard
Collège de France, chaire *Atomes et rayonnement*

Cours 2025-26

Introduction

En 1962, Brian Josephson, alors étudiant en thèse à l'Université de Cambridge publie un article de deux pages qui va avoir un impact considérable sur toute la physique de la matière condensée (JOSEPHSON 1962). Josephson suivait les cours donnés par P.W. Anderson, alors en année sabbatique au laboratoire Cavendish (JOSEPHSON 1974). Inspiré par ces cours, en particulier par ceux concernant la brisure spontanée de symétrie, Josephson considère une jonction formée de deux supraconducteurs séparés l'un de l'autre par une fine barrière isolante (figure 1); il montre que même en absence de différence de potentiel entre les deux supraconducteurs, un courant peut circuler de l'un vers l'autre avec une intensité fonction de la différence de phase quantique entre ces deux supraconducteurs.

Comme l'écrit ANDERSON (1970), les physiciens pensaient à l'époque que la phase d'un supraconducteur n'était pas mesurable :

In 1962 we had already postulated that superconductivity consisted of coherence of the de Broglie waves representing pairs of electrons inside the superconductor. Prior to Josephson, the phase φ of these macroscopic waves was thought to be unmeasurable in principle ...

La phase absolue d'un supraconducteur n'est certes pas mesurable, mais la phase relative entre deux supraconducteurs l'est, et c'est précisément ce que Josephson a mis en avant dans son article. Il s'appuyait pour cela sur la découverte toute récente de GIAEVER (1960), qui avait observé l'effet tunnel d'électrons à travers une barrière isolante, séparant deux métaux supraconducteurs¹.

Même si Josephson s'est heurté initialement au scepticisme d'une par-

1. Josephson et Giaever ont reçu le prix Nobel de physique 1973, avec Leo Esaki qui avait quant à lui découvert l'effet tunnel d'électrons dans des semi-conducteurs.

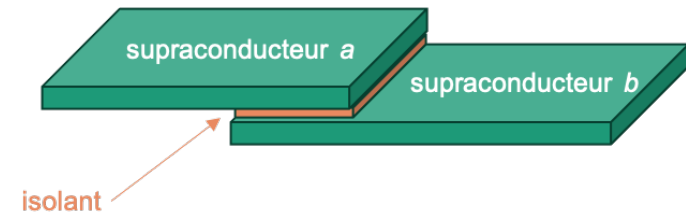


FIGURE 1. Jonction Josephson. Un courant peut circuler entre les deux supraconducteurs en l'absence de toute différence de potentiel électrique entre eux. Ce courant est une fonction de la phase relative $\varphi \equiv \varphi_a - \varphi_b$ entre ces deux supraconducteurs.

tie des théoriciens de l'époque (MCDONALD 2001 ; FOSSHEIM et al. 2013), les expérimentateurs sont venus rapidement confirmer ses prédictions, en premier lieu Anderson lui-même (ANDERSON & ROWELL 1963). D'autres confirmations des prédictions de Josephson ont suivi (figure 2), avec l'observation de l'effet Josephson alternatif et des résonances de Shapiro (SHAPIRO 1963), désormais à la base des standards électriques. Citons également la réalisation de dispositifs interférométriques, les SQUIDs (*superconducting quantum interference devices*), qui constituent les dispositifs les plus sensibles pour la mesure de champs magnétiques extrêmement faibles.

Josephson a rédigé son article en s'intéressant aux matériaux supraconducteurs, mais les concepts qu'il a mis en avant s'appliquent à d'autres fluides quantiques, comme l'hélium liquide ou les gaz d'atomes ultrafroids, pourvu qu'ils présentent une cohérence macroscopique. Quand c'est le cas, un couplage entre deux composantes du fluide (notées dans la suite *a* et *b*) permet de réaliser le système modèle étudié par Josephson.

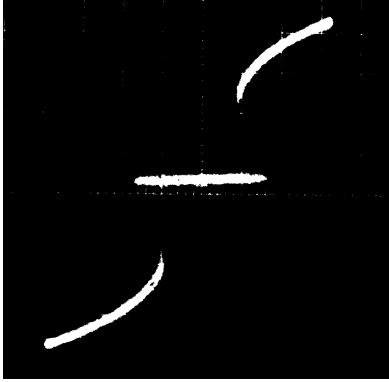


FIGURE 2. Caractéristique d'une jonction Josephson, avec I en abscisse et V en ordonnée. On voit qu'un courant I non nul peut circuler dans la jonction même si la différence de potentiel V est nulle, comme prédit par Josephson. Largeur totale $\sim 1 \mu A$, hauteur totale $\sim 0.5 mV$. Figure extraite de SHAPIRO (1963).

Ces deux composantes peuvent être séparées spatialement, a à gauche, b à droite, avec une barrière physique comme la couche isolante de la jonction supraconductrice. Le couplage correspond alors à l'effet tunnel à travers la barrière (figure 3, gauche). Ce couplage peut également être induit par une onde électromagnétique, les états a et b étant alors deux états internes des particules, par exemple deux états de spin. Dans ce dernier cas, les particules occupent la même région de l'espace (figure 3, droite).

La démarche que nous allons suivre dans cette série de cours est double :

D'une part, nous allons présenter quelques facettes de l'effet Josephson pour des supraconducteurs, en nous limitant à un petit nombre d'expériences emblématiques. Nous rencontrerons ainsi les expériences de Clarke, Devoret et Martinis qui leur ont valu le prix Nobel de Physique 2025; nous verrons comment les résonances de Shapiro permettent de relier un voltage à une fréquence et de faire ainsi des mesures électriques de très grande précision; nous nous intéresserons également au "régime quantique" de la jonction Josephson, qui conduit à la réalisation de qubits supraconducteurs.

D'autre part, nous aborderons la transposition de ces effets à des fluides

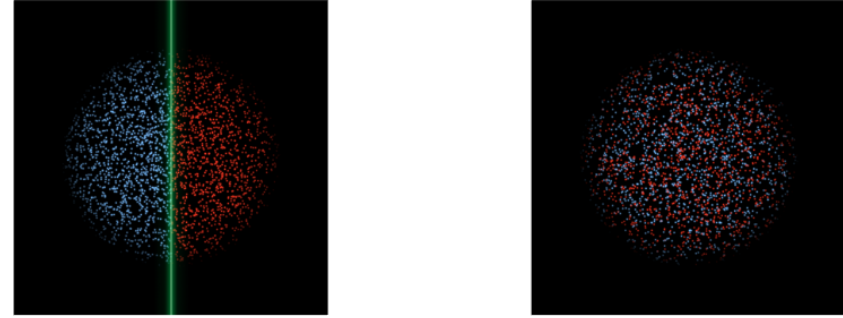


FIGURE 3. Les deux types de jonctions Josephson étudiées dans ce cours. Gauche : un ensemble de particules est séparé en deux par une barrière, que les particules peuvent franchir par effet tunnel. Les particules à gauche de la barrière (bleues) seront notées a et celles à droite (rouges) seront notées b . Droite : les particules peuvent être préparées dans deux états internes possibles et une onde électromagnétique peut induire des transitions $a \leftrightarrow b$.

d'atomes, dans un liquide ou dans un gaz. Nous montrerons que certains aspects de la jonction supraconductrice ont été transposés avec succès, comme l'observation des oscillations plasma, l'utilisation de SQUIDS pour des mesures de précision – en l'occurrence la rotation –, ou encore les résonances de Shapiro. D'autres dispositifs liés aux jonctions Josephson, comme la réalisation de qubits performants, n'ont pas encore vu le jour. Ce cours aura pleinement atteint son but s'il stimule des recherches dans ces directions encore peu explorées, au moins sur le plan expérimental.

Nous suivrons le plan suivant :

- Le premier chapitre sera consacré à l'établissement des relations Josephson et à leur transposition à un double puits confinant un condensat de Bose-Einstein atomique ou un gaz de Fermi superfluide. Nous y discuterons les similarités et les différences entre les équations du mouvement des deux systèmes, et nous décrirons une première manifestation de la physique Josephson, l'oscillation plasma.
- Dans le chapitre 2, nous aborderons la dynamique d'une jonction Josephson avec la détermination de sa caractéristique, c'est-à-dire la variation de la tension électrique moyenne aux bornes de la jonction en fonction du courant qui la traverse (cf. figure 2). Nous exploiterons le modèle RCSJ (*resistively and capacitively-shunted junction*) qui permet

de décrire de multiples aspects de cette dynamique, et nous verrons comment transposer ce modèle à un fluide d'atomes.

- Le chapitre 3 sera centré sur les effets dépendant du temps, en particulier l'effet Josephson alternatif et les résonances de Shapiro. Nous expliquerons leur rôle crucial en métrologie et nous décrirons leur transposition à l'hélium superfluide ainsi que, très récemment, à des gaz d'atomes froids.
- Nous aborderons au chapitre 4 les jonctions Josephson internes, où le couplage entre les deux états a et b de la jonction n'est pas dû à un effet tunnel, mais est induit par une onde électromagnétique. Même si les équations du mouvement sont formellement identiques à celles d'une jonction interne, les régimes qui peuvent être réalisés expérimentalement sont notablement différents; de nouveaux phénomènes peuvent apparaître, comme une transition de phase d'un régime para- vers un régime ferromagnétique.
- Le chapitre 5 sera consacré aux "condensats fragmentés", un régime que l'on atteint quand le couplage entre les états a et b devient très faible. La description de la jonction que nous aurons utilisée jusqu'ici, fondée sur un traitement en termes de champs classiques, cesse alors d'être valable et il faut se tourner vers un traitement quantique. Nous illustrerons cette possible fragmentation sur l'exemple d'un condensat de particules de spin 1, où le rôle de la barrière Josephson est joué par les interactions entre atomes.
- Au dernier chapitre, nous nous intéresserons aux SQUIDS. Nous expliquerons comment ces dispositifs permettent, à partir de jonctions supraconductrices, de réaliser des capteurs extrêmement sensibles du champ magnétique. Nous discuterons brièvement la réalisation de qubits à partir de ces dispositifs. Nous étudierons ensuite la transposition de la notion de SQUID à des jonctions atomiques, en tirant parti du lien entre le magnétisme orbital de particules chargées et la rotation de particules neutres.

Pour terminer cette introduction, insistons sur le fait que les notes qui suivent n'ont pas la prétention d'être un cours exhaustif sur les jonctions Josephson supraconductrices. D'excellents livres couvrent ce vaste domaine, comme par exemple BARONE & PATERNO (1982), LIKHAREV (1984), TINKHAM (2004), CLARKE & BRAGINSKI (2004), BUCKEL & KLEINER (2008), et nous y renvoyons les lectrices et lecteurs désireux d'approfondir certains aspects abordés ici.

Remerciements. Je suis très reconnaissant à Jérôme Beugnon, Raphael Lopes et Sylvain Nascimbene pour leur relecture d'une première version de ces notes de cours.

Références

- ANDERSON, Philip W (1970), « How Josephson discovered his effect », in *Physics Today* **23**, p. 23-29.
- ANDERSON, Philip W & John M ROWELL (1963), « Probable observation of the Josephson superconducting tunneling effect », in *Physical Review Letters* **10**, p. 230.
- BARONE, Antonio & Gianfranco PATERNO (1982), *Physics and applications of the Josephson effect*, Wiley.
- BUCKEL, Werner & Reinhold KLEINER (2008), *Superconductivity : fundamentals and applications*, John Wiley & Sons.
- CLARKE, John & Alex I BRAGINSKI (2004), *The SQUID handbook*, t. 1, Wiley Online Library.
- FOSSHEIM, Kristian et al. (2013), *Superconductivity : discoveries and discoverers : ten physics Nobel laureates tell their story*, Springer.
- GIAEVER, Ivar (1960), « Electron tunneling between two superconductors », in *Physical Review Letters* **5**, p. 464.
- JOSEPHSON, Brian D (1974), « The discovery of tunnelling supercurrents », in *Reviews of Modern Physics* **46**, p. 251.
- JOSEPHSON, Brian David (1962), « Possible new effects in superconductive tunnelling », in *Physics Letters* **1**, p. 251-253.
- LIKHAREV, Konstantin K (1984), *Dynamics of Josephson junctions and circuits*, Gordon et Breach.
- MCDONALD, Donald G (2001), « The Nobel laureate versus the graduate student », in *Physics today* **54**, p. 46-51.
- SHAPIRO, Sidney (1963), « Josephson currents in superconducting tunneling : The effect of microwaves and other observations », in *Physical Review Letters* **11**, p. 80.
- TINKHAM, Michael (2004), *Introduction to superconductivity*, Courier Corporation.

Chapitre 1

La jonction Josephson et le double puits de potentiel

Sommaire

1	Les dipôles électriques usuels	2
1-1	Les composants élémentaires R, L, C	2
1-2	Formulation lagrangienne du circuit LC	4
1-3	Quantification du circuit LC	4
2	La jonction Josephson	5
2-1	Géométrie de la jonction	5
2-2	La première relation de Josephson	6
2-3	La seconde relation de Josephson	7
2-4	Le modèle RCSJ	8
3	Lagrangien et Hamiltonien pour une jonction	9
3-1	Formulation lagrangienne du modèle CSJ	9
3-2	Formulation hamiltonienne du modèle CSJ	10
3-3	Limite $\varphi \ll 1$ et oscillations plasma	11
4	La jonction Josephson pour un gaz d'atomes	11
4-1	Barrière statique et double puits	11
4-2	Le modèle à deux modes	12
4-3	L'énergie du double puits	14
4-4	Equations d'évolution dans le double puits	16
4-5	Les oscillations plasma d'une jonction atomique	17

Ce premier chapitre est consacré à la présentation de l'effet Josephson, qui se produit quand deux supraconducteurs sont mis au contact l'un de l'autre à travers une fine barrière. Nous commencerons par donner les deux relations fondamentales reliant le courant supraconducteur I , la différence de phase φ aux bornes de la jonction et le potentiel électrique V .

Nous décrivons ensuite le modèle RCSJ (*Resistively and Capacitively-Shunted Junction*), qui rend compte des différents aspects de la dynamique d'une jonction supraconductrice, en le comparant au cas des dipôles électriques usuels, résistance, capacité et inductance.

Dans les chapitres qui suivront, nous aborderons la description quantique de la jonction, dans laquelle la phase φ et le courant I deviennent des opérateurs. Pour préparer ce passage au quantique, nous proposons ici une formulation lagrangienne et une formulation hamiltonienne de la jonction, en montrant notamment que la phase et le nombre de paires de Cooper au niveau de la jonction sont des quantités conjuguées.

Nous passons ensuite au cas des jonctions atomiques. Ces dernières sont réalisées en plaçant un gaz d'atomes ultra-froids dans un double puits de potentiel, avec une barrière centrale pouvant être franchie par effet tunnel. Nous montrons que l'on retrouve pour ce double puits des équations d'évolution similaires à celles de la jonction. Nous soulignons néanmoins une complication dans le cas atomique, liée au fait que les densités de part et d'autre de la barrière tunnel ne sont pas constantes, contrairement au cas supraconducteur où des générateurs extérieurs permettent de mainte-

nir un courant donné, sans modification de la densité de paires de Cooper. Nous montrons comment ce terme additionnel peut se manifester sur un phénomène simple, l'oscillation plasma de la jonction.

Nous avons résumé dans trois appendices en fin de chapitre les principaux éléments permettant de décrire un gaz ultra-froid par une approche de champ moyen, basée sur la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevskii.

1 Les dipôles électriques usuels

1-1 Les composants élémentaires R, L, C

Nous commençons par rappeler les équations de base de l'électrocinétique pour les trois types de composants passifs habituels, résistances, condensateurs et inductances. Ceci nous permettra de préciser les conventions de signe qui seront ensuite utilisées pour le sens des courants et la valeur des tensions (RASMUSSEN, CHRISTENSEN et al. 2021).

On considère un dipôle électrique placé entre deux points a (à gauche) et b à droite (figure 1). On note $V = V_a - V_b$ la différence de potentiel électrique entre ces deux points et I l'intensité du courant électrique circulant de a vers b . On trouve pour les trois types de dipôles mentionnés plus haut :

— Pour une résistance R :

$$V = RI_{\text{res}} . \tag{1}$$

— Pour un condensateur de capacité C :

$$I_{\text{cap}} = \dot{Q} = C\dot{V} , \tag{2}$$

où Q est la charge portée par le condensateur (plus précisément la charge déposée sur l'armature située du côté de a).

— Pour une inductance L :

$$V = L\dot{I}_{\text{ind}} \tag{3}$$

On déduit de ces équations le comportement d'un circuit composé. Par exemple, pour le circuit RC représenté sur la figure 2, la somme des cou-

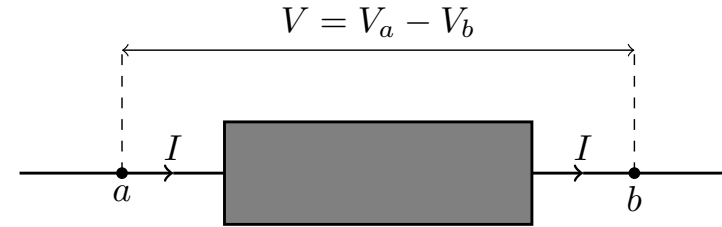


FIGURE 1. Convention de signe adoptée dans ce cours concernant la tension et le courant pour un dipôle électrique.

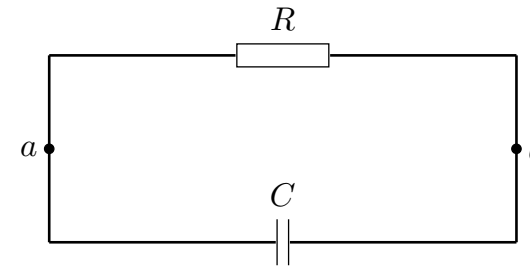


FIGURE 2. Circuit RC isolé, décrit par l'équation (4).

rants traversant R et C doit s'annuler, dont on déduit l'équation d'évolution de la tension $V = V_a - V_b$

$$I_{\text{cap}} + I_{\text{res}} = C\dot{V} + \frac{V}{R} = 0 \Rightarrow \dot{V} + \frac{V}{\tau} = 0 \quad \text{avec } \tau = RC , \tag{4}$$

soit un amortissement exponentiel avec la constante de temps τ .

De même, pour le circuit RL de la figure 3, on trouve en prenant la dérivée de la somme des courants traversant les deux éléments :

$$\frac{d}{dt}(I_{\text{res}} + I_{\text{ind}}) = \dot{I}_{\text{res}} + \frac{V}{L} = 0 \Rightarrow \dot{V} + \frac{V}{\tau} = 0 \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R} , \tag{5}$$

là aussi un amortissement exponentiel. Nous retrouverons ce type de dis-

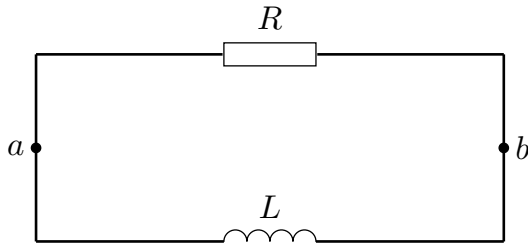


FIGURE 3. Circuit RL isolé, décrit par l'équation (5).

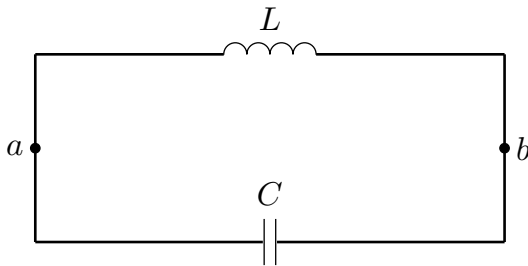


FIGURE 4. Circuit LC isolé, décrit par l'équation (6).

sipation dans la description d'une jonction Josephson.

Le circuit LC représenté sur la figure 4 est également intéressant car il va nous permettre de mettre en place, sur un modèle très simple, le formalisme lagrangien et hamiltonien que nous utiliserons fréquemment dans la suite. Commençons par écrire l'équation d'évolution de l'intensité dans le circuit, déduite là aussi du fait que la dérivée de la somme des intensités traversant les deux composants est nulle (avec les conventions d'orientation données plus haut) :

$$\frac{d}{dt}(I_{\text{cap}} + I_{\text{ind}}) = C\ddot{V} + \frac{V}{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{V} + \omega^2 V = 0 \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (6)$$

soit une évolution périodique pour V à la fréquence $\omega/2\pi$.

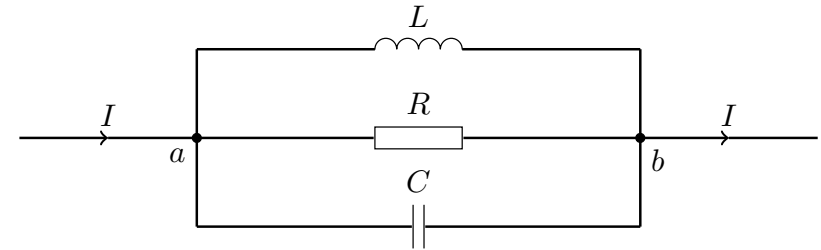


FIGURE 5. Circuit RLC alimenté par le courant extérieur I . L'évolution du flux magnétique Φ dans l'inductance L est décrite par l'équation (8).

Finalement, pour préparer le traitement quantitatif d'une jonction Josephson, il est intéressant de considérer la situation où les trois éléments L , R et C sont placés en parallèle et alimentés par un générateur de courant I dépendant éventuellement du temps (figure 5). Introduisons le flux magnétique dans l'inductance

$$\Phi(t) = LI_{\text{ind}}(t), \quad (7)$$

où $I_{\text{ind}}(t)$ est l'intensité traversant l'inductance L . La tension $V(t)$ est donnée par $V = L\dot{I}_{\text{ind}} = \dot{\Phi}$ et les courants traversant la capacité C et la résistance R sont respectivement $I_{\text{cap}} = C\dot{V} = C\ddot{\Phi}$ et $I_{\text{res}} = V/R = \dot{\Phi}/R$, de sorte que l'équation donnant l'évolution de Φ s'écrit

$$C\ddot{\Phi} + \frac{\dot{\Phi}}{R} + \frac{\Phi}{L} = I \quad (8)$$

qui peut encore s'écrire

$$\ddot{\Phi} + \frac{\omega}{Q_{\text{qual}}}\dot{\Phi} + \omega^2\Phi = \frac{I}{C}. \quad (9)$$

L'équation sans second membre ($I = 0$) correspond à un mouvement d'oscillateur harmonique amorti, avec le facteur de qualité

$$Q_{\text{qual}} = \omega RC = R\sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (10)$$

1-2 Formulation lagrangienne du circuit LC

Reprenons le circuit isolé LC de la figure 4. Pour passer au formalisme lagrangien, rappelons que pour un élément d'un circuit électrique traversé par une intensité I et soumis à une différence de potentiel V , la puissance électrique instantanée est VI . L'énergie stockée (ici sous forme inductive ou capacitive) est obtenue en calculant l'intégrale $\int V(t)I(t) dt$, partant de l'état $U = 0, I = 0$ pour aller vers le couple (V, I) désiré.

On a donc pour une inductance L

$$U_L(I) = \int L \frac{dI}{dt} I(t) dt = \frac{1}{2} LI^2, \quad (11)$$

et pour un condensateur C

$$U_C(Q) = \int V(t) C \frac{dV}{dt} dt = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{Q^2}{2C}, \quad (12)$$

d'où l'énergie totale du circuit LC :

$$E = U_L + U_C = \frac{1}{2} LI^2 + \frac{Q^2}{2C}. \quad (13)$$

Il existe plusieurs lagrangiens simples permettant de décrire l'évolution du circuit LC isolé. Pour faciliter le lien avec ce que nous verrons un peu plus loin pour la jonction Josephson, utilisons comme en (9) le flux magnétique $\Phi(t) = LI_{\text{ind}}(t)$, c'est-à-dire :

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t V(t') dt', \quad (14)$$

le choix de la borne inférieure de l'intégrale étant sans importance pratique. Considérons le lagrangien

$$\mathcal{L}(\Phi, \dot{\Phi}) = \frac{1}{2} C \dot{\Phi}^2 - U_L(\Phi) \quad \text{avec} \quad U_L(\Phi) = \frac{\Phi^2}{2L} \quad (15)$$

Il conduit à l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \right) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \right) \Rightarrow C \ddot{\Phi} = -\frac{\Phi}{L} \quad (16)$$

ce qui redonne bien l'oscillation à la fréquence $\omega/2\pi$. Le moment conjugué de Φ est

$$p_\Phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = C \dot{\Phi} \quad (17)$$

c'est-à-dire $p_\Phi = CV = Q$ et l'hamiltonien $H(\Phi, p_\Phi)$ vaut

$$H(\Phi, p_\Phi) = p_\Phi \dot{\Phi} - \mathcal{L}(\Phi, \dot{\Phi}) = \frac{p_\Phi^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} \quad (18)$$

On retrouve l'énergie totale du circuit LC donnée en (13) avec, pour le formalisme lagrangien adopté ici, l'énergie capacitive qui joue le rôle d'énergie cinétique et l'énergie inductive qui joue le rôle d'énergie potentielle. Plus précisément, les deux équations de Hamilton sont

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\Phi} \Rightarrow \dot{\Phi} = \frac{p_\Phi}{C} \quad (19)$$

et

$$\dot{p}_\Phi = -\frac{\partial H}{\partial \Phi} \Rightarrow C \ddot{\Phi} = -\frac{\Phi}{L}, \quad (20)$$

ce qui permet de retrouver l'équation d'évolution (6).

1-3 Quantification du circuit LC

Partant du formalisme lagrangien classique, il est possible de quantifier le problème en traitant les deux quantités conjuguées, le flux magnétique Φ et la charge $p_\Phi = Q$, comme des opérateurs vérifiant la relation de commutation $[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar$ (RASMUSSEN, CHRISTENSEN et al. 2021). Pour travailler avec des variables sans dimensions, on suppose la charge quantifiée en unité de q_0 et on introduit le quantum de flux associé

$$\Phi_0 \equiv \frac{2\pi\hbar}{q_0}. \quad (21)$$

En pratique, pour un supraconducteur, le quantum de charge q_0 est égal à la charge d'une paire de Cooper, $2e$. On peut alors travailler avec les variables sans dimension

$$\hat{\varphi} \equiv 2\pi \frac{\hat{\Phi}}{\Phi_0} \quad \hat{n} \equiv \frac{\hat{p}_\Phi}{q_0} = \frac{\hat{Q}}{q_0} \quad (22)$$

de sorte que la relation de commutation devient

$$\boxed{[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar \quad \Leftrightarrow \quad [\hat{\varphi}, \hat{n}] = i} \quad (23)$$

et l'hamiltonien peut s'écrire

$$\boxed{\hat{H} = \frac{1}{2}E_C\hat{n}^2 + \frac{1}{2}E_L\hat{\varphi}^2} \quad (24)$$

avec les énergies

$$E_C = \frac{q_0^2}{C} \quad E_L = \frac{(\Phi_0/2\pi)^2}{L} = \frac{\hbar^2}{q_0^2 L}. \quad (25)$$

C'est l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique de fréquence ω telle que

$$\hbar\omega = \sqrt{E_C E_L} \quad (26)$$

avec, dans l'état fondamental, la dispersion des deux quantités conjuguées

$$\frac{1}{2}E_C\Delta n^2 = \frac{1}{2}E_L\Delta\varphi^2 = \frac{1}{4}\hbar\omega. \quad (27)$$

Pour $E_C = E_L$, on trouve $\Delta n = \Delta\varphi = 1/\sqrt{2}$. Quand on s'écarte de ce rapport $E_C/E_L = 1$, on obtient un état fondamental avec des fluctuations de charge plus ou moins grandes.

Ces considérations, qui deviendront véritablement pertinentes pour une jonction Josephson plutôt que pour une inductance linéaire, n'ont d'intérêt que si la température est suffisamment basse pour qu'il soit possible de préparer l'oscillateur avec une population faible des états excités ($k_B T \ll \hbar\omega$). Pour les circuits Josephson, l'équivalent de la fréquence $\omega/2\pi$ est la fréquence plasma, qui se situe dans la gamme de la dizaine de GHz. Le traitement quantique qui précède devient donc nécessaire pour des températures notablement inférieures au kelvin.

2 La jonction Josephson

2-1 Géométrie de la jonction

Une jonction Josephson est un élément non linéaire d'un circuit électrique formé par deux électrodes supraconductrices, notées ici a et b , sépa-

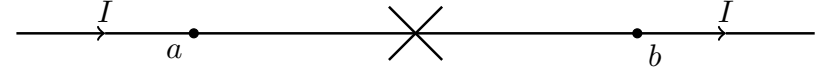


FIGURE 6. Représentation schématique d'une jonction Josephson idéale.

rées par une barrière qui peut être un matériau isolant, semi-conducteur ou encore un conducteur normal. Cette non-linéarité associée à l'absence potentielle de dissipation puisqu'on utilise des matériaux supraconducteurs, font de la jonction Josephson un composant essentiel pour la fabrication de circuits pour le traitement quantique de l'information. Sa représentation schématique est indiquée en figure 6.

Dans tout ce qui va suivre, nous décrirons chaque électrode comme une assemblée de paires de Cooper, chaque paire étant formée par l'appariement de deux électrons de vecteurs d'onde et de spins opposés. Ces paires, de nature bosonique effective, se condensent dans un même état quantique macroscopique décrit par un paramètre d'ordre complexe, qui brise spontanément la symétrie de phase $U(1)$ du système. La phase de ce paramètre d'ordre va jouer un rôle central dans tout ce qui suit.

La barrière séparant les deux supraconducteurs doit être suffisamment fine pour que les paires de Cooper puissent passer par effet tunnel d'une électrode à l'autre. En pratique, cette épaisseur est de l'ordre de la dizaine de nanomètres, soit une dizaine de couches atomiques. Notons qu'à la place de la barrière tunnel, il peut y avoir simplement une forte constriction spatiale, auquel cas on parle de "lien faible" (*weak link*) entre les deux supraconducteurs. Nous avons représenté en figure 7 deux géométries utilisées pour réaliser ces jonctions.

On note I le courant électrique traversant la jonction et V la tension électrique entre ses bornes (figure 8). Pour décrire la jonction, on introduit comme indiqué plus haut les deux paramètres d'ordre $\psi_{a,b}$ associés aux deux électrodes, et caractérisés par les densités de paires de Cooper $n_{a,b}$ et les phases $\varphi_{a,b}$:

$$\psi_j = \sqrt{\rho_j} e^{i\varphi_j} \quad j = a, b. \quad (28)$$

Une quantité importante vient s'ajouter aux paramètres habituellement utilisés pour décrire les éléments habituels d'un circuit électrique ; il s'agit

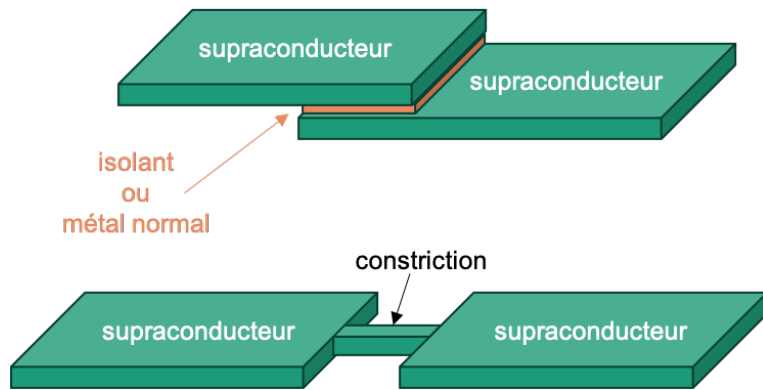


FIGURE 7. Exemples de jonctions Josephson réalisées à partir de barrière tunnel ou de lien faible.

de la différence de phase entre les deux côtés de la jonction :

$$\varphi \equiv \varphi_a - \varphi_b . \tag{29}$$

Nous verrons un peu plus loin que cette phase φ joue dans certaines conditions un rôle similaire au flux Φ de l'inductance considérée en §1, mais son effet peut aller bien au delà.

2-2 La première relation de Josephson

La dynamique de la jonction est décrite par deux équations fondamentales. La première relation de Josephson indique que la jonction peut être traversée par un courant I même en l'absence de toute différence de potentiel V . Ce courant s'écrit¹ :

$$\boxed{\text{Jonction "idéale" : } I = I_c \sin \varphi} \tag{30}$$

1. La dépendance en $\sin \varphi$ du courant peut être enrichie en ajoutant des harmoniques, tout en conservant la périodicité vis-à-vis de la variable φ , puisque φ et $\varphi + 2\pi$ correspondent à la même situation physique. Cette complication n'interviendra quasiment pas dans les jonctions que nous considérerons dans la suite.

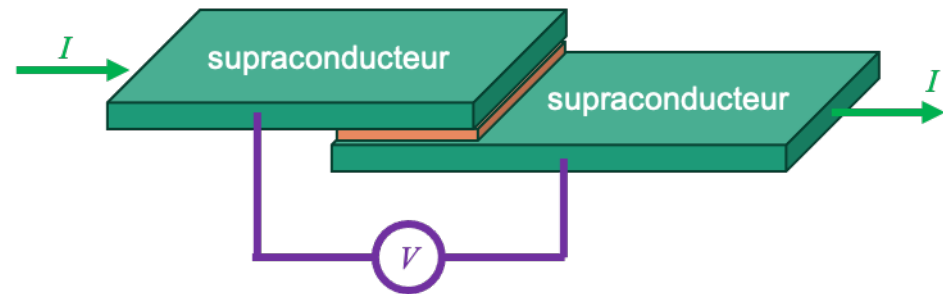


FIGURE 8. Un générateur de courant délivre l'intensité I à travers la jonction. On mesure la tension V à ses bornes.

où l'intensité I_c est une caractéristique de la jonction. Elle varie beaucoup selon le type de jonction considérée, depuis le microampère jusqu'à la dizaine de milliampères.

Précisons là encore le sens du courant : I désigne par convention l'intensité électrique allant de a vers b . Un courant I positif signifie donc que les paires de Cooper, chargées négativement, vont de b vers a sur la figure 6. Vérifions que la relation (30) est conforme à ce qu'on attend pour la vitesse d'une particule quantique de masse m quand sa fonction d'onde présente un gradient de phase : $v = \frac{\hbar}{m} \frac{d\varphi}{dx}$; si la phase φ_a est choisie légèrement plus grande que φ_b (la différence φ étant petite devant π), cette relation s'écrit $I \approx I_c \varphi = I_c(\varphi_a - \varphi_b) > 0$: la phase augmente quand on va de b vers a et la vitesse des paires de Cooper est donc bien dirigée de b vers a [voir également le traitement ci-dessous conduisant de façon plus quantitative à (31-33)].

Nous aurons l'occasion de décrire en détail les caractéristiques *courant-tension* des jonctions Josephson. À ce stade, nous pouvons d'ores et déjà en proposer une composante : un segment compris entre $-I_c$ et $+I_c$ sur l'axe $V = 0$ (figure 9).

Dans une expérience de pensée où l'on prépare les deux supraconducteurs séparés et isolés, puis que l'on branche un couplage tunnel entre les deux, la phase φ est aléatoire puisqu'elle résulte d'une brisure spontanée de symétrie. Le courant I peut donc prendre n'importe quelle valeur entre $-I_c$ et $+I_c$. Ce courant permanent peut circuler indéfiniment si l'on sup-

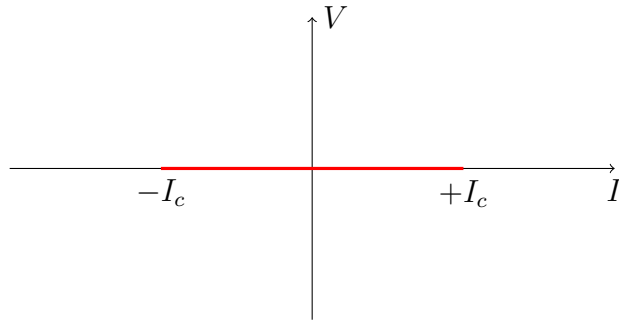


FIGURE 9. Fraction de la caractéristique d’une jonction Josephson déduite de la relation (30).

pose que les deux supraconducteurs a et b sont connectés à des sources de courant qui permettent de maintenir constantes les densités de paires de Cooper $n_{a,b}$ et les phases φ_{ab} : c’est l’effet Josephson continu.

JOSEPHSON (1962) a établi cette relation à partir de l’approche de Bogoliubov pour un supraconducteur. Deux ans plus tard, Feynman en a donné une démonstration simple dans son célèbre cours de physique, en écrivant l’évolution des deux paramètres d’ordre $\psi_{a,b}$, assimilés à des amplitudes de probabilité obéissant à l’équation de Schrödinger. Nous reprendrons une approche voisine en §4 pour un double puits contenant des atomes piégés. Notons toutefois une différence entre notre approche et celle de Feynman : nous nous intéresserons à un système fermé, pour lequel le nombre d’atomes total $N_a + N_b$ est constant. L’approche de Feynman est plus subtile : elle consiste à évaluer le courant (non nul) de paires de Cooper traversant la barrière $\frac{d\rho_a}{dt} = -\frac{d\rho_b}{dt}$, tout en maintenant les densités de paires ρ_a et ρ_b constantes. Cela est possible car on a affaire dans le cas d’une jonction supraconductrice à un système ouvert. Il faut toutefois un certain "doigté" pour prendre en compte correctement ce point tout en conservant un système hamiltonien.

Nous pouvons donner ici une justification semi-quantitative de la première relation de Josephson en utilisant une version discrète du courant de

probabilité associé à une fonction d’onde $\psi(x, t)$:

$$J = i \frac{\hbar}{m} \left(\psi \frac{d\psi^*}{dx} - \psi^* \frac{d\psi}{dx} \right) \tag{31}$$

où nous nous limitons à une dimension d’espace pour simplifier les notations. Nous nous plaçons au centre de la barrière pour évaluer J et nous faisons la substitution

$$\psi \rightarrow \frac{\alpha}{2} (\psi_a + \psi_b) \quad \frac{d\psi}{dx} \rightarrow \frac{\beta}{\ell} (\psi_b - \psi_a) \tag{32}$$

où les coefficients α et β sont mis ici de façon heuristique pour prendre en compte l’atténuation exponentielle de l’amplitude de probabilité à l’intérieur de la barrière et où ℓ représente l’épaisseur de cette barrière. On trouve alors

$$J \propto i (\psi_a \psi_b^* - \psi_a^* \psi_b) \propto -\sin \varphi \tag{33}$$

ce qui correspond bien au courant prédit par Josephson. Le signe $-$ résulte du fait déjà mentionné que le courant de probabilité des paires de Cooper (chargées négativement) est de signe opposé à celui du courant électrique.

2-3 La seconde relation de Josephson

La seconde relation de Josephson donne l’évolution de la phase relative φ en présence d’une différence de potentiel V (qui peut dépendre du temps) :

$$\hbar \dot{\varphi} = 2eV \tag{34}$$

Le facteur $2e$ (avec $2e > 0$) représente la charge absolue d’une paire de Cooper et $2eV$ représente donc la différence d’énergie de cette paire entre les deux côtés de la barrière. Cette équation fait écho à celle bien connue pour l’évolution de la fonction d’onde d’une particule unique d’énergie E , faisant intervenir le facteur de phase $e^{-iEt/\hbar}$, donc $\hbar \dot{\varphi} = -E$, nous y reviendrons en détail dans notre étude des jonctions atomiques en §4.

Considérons le cas d’une tension V constante, de sorte que la phase évolue linéairement dans le temps : $\varphi(t) = \varphi(0) + 2eVt/\hbar$. Ce résultat injecté dans l’équation (30) indique qu’un courant oscillant, d’amplitude I_c et de fréquence $2eV/\hbar$, va traverser la jonction : c’est l’effet Josephson alternatif.

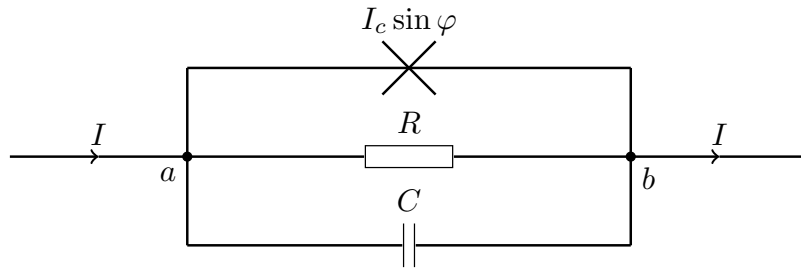


FIGURE 10. Représentation d’une jonction Josephson dans le modèle RCSJ. Le courant total I circulant dans cet élément de circuit est donné en (35), où $V = V_a - V_b$.

Il n’est pas immédiat à ce stade de savoir comment combiner les deux équations (30-34) pour décrire une situation générale dans laquelle une jonction est alimentée par un générateur de courant (continu ou variable), avec des intensités pouvant dépasser I_c . Il faut pour cela introduire d’autres paramètres pour caractériser cette jonction, notamment sa capacité C et sa résistance effective R . Nous verrons au paragraphe suivant comment obtenir une description intégrant ces éléments dans le cadre du modèle RCSJ (*Resistively and Capacitively Shunted Junction*), c’est-à-dire une jonction avec un biais résistif et un biais capacitif.

2-4 Le modèle RCSJ

Les deux équations de Josephson (30-34) ne suffisent pas à elles seules à décrire l’ensemble des phénomènes susceptibles d’être observés avec une jonction Josephson. Par exemple, elles ne permettent pas de répondre à la question : que se passe-t-il si on alimente la jonction avec un courant d’intensité I supérieure à I_c ? L’expérience prouve que l’on rentre alors dans un régime dissipatif, avec l’apparition d’une différence de potentiel V non nulle aux bornes de la jonction. Par ailleurs, quand on alimente la jonction avec un courant alternatif, il apparaît des effets dont on ne peut rendre compte qu’en supposant que la jonction comporte une partie capacitive, formée par les deux parois disposées face à face.

Le modèle RCJS, proposé initialement par STEWART (1968) et MCCUMBER (1968), permet de rendre compte d’une grande variété de phénomènes. Il consiste à décrire une jonction Josephson comme trois éléments mis en parallèle :

- la jonction idéale, traversée par le courant $I_c \sin \varphi$;
- une résistance R , traversée par le courant V/R ;
- une capacité C , traversée par le courant CdV/dt .

Le courant total I , imposé de l’extérieur par un générateur de courant, est alors relié à la différence de potentiel V aux bornes de cet ensemble par

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{V}{R} + C \frac{dV}{dt} \tag{35}$$

avec toujours $\hbar\dot{\varphi} = 2eV$. Notons que la dissipation liée à la présence de la résistance R est essentielle pour le fonctionnement de nombreux dispositifs utilisant des jonctions Josephson, en métrologie par exemple, puisqu’elle permet d’atteindre des régimes stationnaires stables quand la jonction est pilotée par des courants alternatifs (KAUTZ 1996). La description de cette dissipation par une simple résistance est valable à relativement basse fréquence, et sera suffisante pour la suite de ce cours. La limite non dissipative de ce modèle est obtenue en prenant $R \rightarrow \infty$.

Les origines physiques de la dissipation sont multiples ; on trouve en premier lieu le courant de quasi-particules, qui devient important quand eV dépasse 2Δ , où Δ est le gap du supraconducteur ; la dissipation peut également être due à des inhomogénéités de la barrière ou des micro-ponts métalliques qui créent des chemins résistifs ; d’autres processus physiques, liés aux états liés d’Andreev ou aux fluctuations de phase, peuvent jouer un rôle dissipatif important. Nous ne discuterons pas ici ces différents mécanismes pour les matériaux supraconducteurs, mais nous les étudierons plus en détail dans les chapitres suivants pour les jonctions atomiques.

On constate sur (35) que si l’on impose un courant continu d’intensité I inférieur à I_c sur ce système, la solution non dissipative des équations initiales (30)-(34) reste valable : $V = 0$, φ constante (avec $\sin \varphi = I/I_c$). On retrouve donc bien l’effet Josephson continu. En ce qui concerne l’effet Josephson alternatif, il est également contenu dans ces équations : on le retrouve en imposant une tension constante V de sorte que le terme capacitif ne contribue pas, le courant I étant alors modulé dans le temps à la fréquence $2eV/h$.

Les valeurs de C et de R diffèrent bien sûr fortement selon le type de jonction. Pour les transmons, un élément très utilisé en information quantique, C se situe dans la plage 1 – 100 femtoFarad. La jonction utilisée par Devoret, Matrinis et Clarke pour les expériences qui leur ont valu le prix Nobel 2025 avait une capacité de 5 pF, pour une aire de $10 \mu\text{m}^2$. Les résistances R sont en général dans le domaine de quelques ohms à quelques dizaines d'ohms.

L'équation d'évolution (35), couplée à $\hbar\dot{\varphi} = 2eV$, peut s'écrire comme une équation différentielle du deuxième ordre pour la fonction $\varphi(t)$:

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\varphi} + \frac{\hbar C}{2e} \ddot{\varphi} \quad (36)$$

Nous aurons l'occasion de revenir à de multiples reprises sur cette équation et ses nombreuses conséquences physiques.

3 Lagrangien et Hamiltonien pour une jonction

Dans cette partie, nous allons utiliser (partiellement) le modèle RCSJ que nous venons d'introduire. Nous allons nous intéresser à un problème sans dissipation, c'est-à-dire $R = \infty$, pour établir le formalisme lagrangien et le formalisme hamiltonien qui permettent de retrouver les relations de Josephson.

3-1 Formulation lagrangienne du modèle CSJ

Prenons $R = \infty$ dans le modèle de la figure 10, de sorte qu'il y a donc deux termes énergétiques associés à la jonction :

— celui lié à la présence de la capacité et déjà discuté en §1-2 :

$$U_C(Q) = \frac{Q^2}{2C} ; \quad (37)$$

— celui lié à la jonction idéale. Pour déterminer ce dernier, revenons à la forme générique $\int^t V(t')I(t') dt'$ et appliquons-là en utilisant les deux

relations de Josephson :

$$\begin{aligned} U_J(\varphi) &= \int^t V(t')I(t') dt' = \frac{\hbar I_c}{2e} \int^t \dot{\varphi}(t') \sin[\varphi(t')] dt' \\ &= -\frac{\hbar I_c}{2e} \cos[\varphi(t)] + \text{cte.} \end{aligned} \quad (38)$$

Introduisons maintenant les deux énergies caractéristiques

$$E_J = \frac{\hbar I_c}{2e} \quad E_C = \frac{(2e)^2}{C} \quad (39)$$

où l'on a pris la charge $2e$ pour calibrer l'énergie capacitive, c'est-à-dire la charge d'une paire de Cooper (en valeur absolue). On a donc

$$U_C(n) = \frac{1}{2} E_C n^2 \quad U_J(\varphi) = -E_J \cos \varphi \quad (40)$$

où

$$n = \frac{Q}{2e} \quad (41)$$

est le nombre de paires de Cooper sur la partie capacitive.

Il est utile pour la suite d'établir la fonction de Lagrange qui permet de retrouver l'équation du mouvement (36). Pour un courant extérieur imposé I , un lagrangien possible est

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{\hbar^2}{2E_C} \dot{\varphi}^2 - E(\varphi) \quad \text{avec} \quad E(\varphi) = U_J(\varphi) - \frac{\hbar I}{2e} \varphi \quad (42)$$

L'équation de Lagrange s'écrit en effet

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\hbar^2}{E_C} \ddot{\varphi} = -E_J \sin \varphi + \frac{\hbar I}{2e} \quad (43)$$

c'est-à-dire l'équation donnée en (36) quand on omet la partie résistive ($R \rightarrow \infty$).

On notera que pour ce choix du lagrangien, le moment conjugué de la phase φ est

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\hbar^2}{E_C} \dot{\varphi} = \frac{\hbar}{E_C} 2eV \quad (44)$$

c'est-à-dire

$$p_\varphi = \hbar n \quad (45)$$

où a utilisé le lien entre la différence de potentiel V aux bornes de la jonction et n : $V = Q/C = 2en/C$.

Quantification de la dynamique de la jonction. On déduit de ce qui précède que les variables φ et n sont conjuguées l'une de l'autre, ce qui joue un rôle essentiel si l'on veut quantifier la dynamique de la jonction. Esquissons très brièvement la démarche à suivre, sur laquelle nous reviendrons en détail dans les chapitres 5 et 6. Pour cette quantification, on posera $[\hat{\varphi}, \hat{p}_\varphi] = i\hbar$, ou encore $[\hat{\varphi}, \hat{n}] = i$, qui est formellement identique à la relation (23) trouvée pour un circuit LC . Notons néanmoins la différence importante suivante : φ est ici une variable cyclique, définie modulo 2π .

Par ailleurs, on déduit de cette relation de commutation une condition nécessaire pour que le traitement classique adopté ici soit valable : il faut que les effets physiques étudiés ne dépendent pas des incertitudes Δn et $\Delta\varphi$ liées à la préparation de la jonction, quand celles-ci sont contraintes par la limite de Heisenberg $\Delta n \Delta\varphi > 1/2$.

3-2 Formulation hamiltonienne du modèle CSJ

Connaissant le lagrangien du problème et le moment conjugué à φ , on obtient l'hamiltonien

$$H = \dot{\varphi} p_\varphi - \mathcal{L} \quad (46)$$

qui est simplement égal à la somme des deux énergies $U_C(n)$ et $U_J(\varphi)$ introduites plus haut, la première jouant le rôle d'une énergie cinétique et la seconde une énergie potentielle, auxquelles on ajoute l'éventuel potentiel linéaire $-\hbar I\varphi/2e$ si on impose un courant extérieur I non nul :

$$H(\varphi, p_\varphi) = \frac{E_C}{2\hbar^2} p_\varphi^2 - E_J \cos \varphi - \frac{\hbar I}{2e} \varphi \quad (47)$$

Les deux relations de Josephson correspondent alors aux deux équations de Hamilton :

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \Rightarrow \frac{\hbar I}{2e} = E_J \sin \varphi + \hbar \dot{n} \quad (48)$$

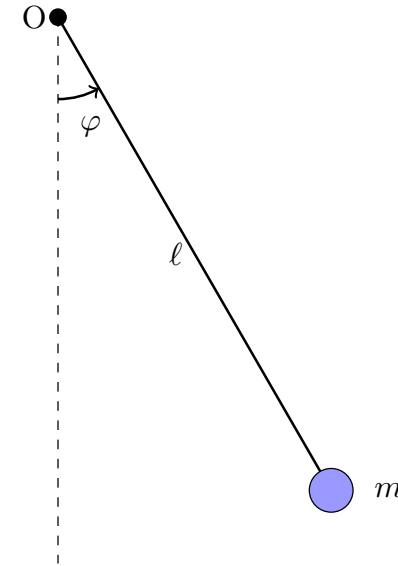


FIGURE 11. Pendule pesant de longueur ℓ et de masse m , décrit par l'hamiltonien (50), formellement identique à (47) pour $I = 0$.

et

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \Rightarrow \hbar \dot{\varphi} = E_C n = 2eV \quad (49)$$

Notons que la première relation de Josephson a été complétée par rapport à (30) car on a ajouté le courant $\hbar \dot{n}$ correspondant à la charge/décharge du condensateur de la figure 10.

Pour un courant extérieur nul ($I = 0$), l'hamiltonien (47) est formellement identique à celui d'un pendule pesant de longueur ℓ et de masse m :

$$H_{\text{pen}}(\varphi, p_\varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2m} - mgl \cos \varphi \quad (50)$$

où φ désigne l'angle par rapport à la verticale (figure 11). Cette analogie nous sera utile dans les chapitres suivants. Notons que la présence explicite de \hbar dans les équations qui précèdent ne doit pas faire illusion : notre

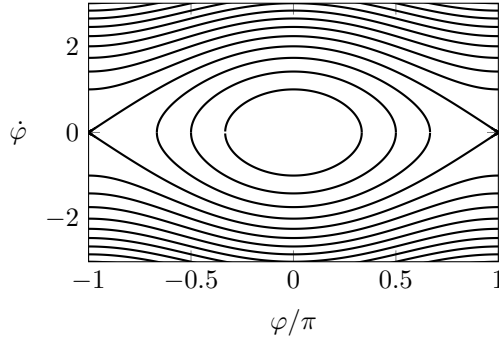


FIGURE 12. Portrait de phase d'un pendule pesant d'énergie $E = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \cos \varphi$. Les courbes correspondent à $E = -0.5, 0, 0.5, 1, \dots$.

traitement des variables φ et p_φ est classique (voir la discussion à la fin de §3-1).

Nous avons tracé en figure 12 le portrait de phase de ce pendule pesant, c'est-à-dire les courbes iso-énergies dans le plan $(\varphi, \dot{\varphi})$ pour $E = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \cos \varphi$. On y reconnaît les deux types de trajectoires possibles : (i) les trajectoires oscillantes pour $E < 1$, avec le pendule qui ne monte pas jusqu'au point $\varphi = \pm\pi$, et les trajectoires tournantes, pour $E > 1$. Notons que la topologie de ce portrait de phase est celle d'un cylindre, puisque les lignes verticales $\varphi = \pm\pi$ correspondent à la même situation physique.

3-3 Limite $\varphi \ll 1$ et oscillations plasma

Dans la limite des faibles phases, on peut faire dans le modèle RCSJ l'approximation $\sin \varphi \approx \varphi$, ce qui conduit à l'équation d'évolution

$$\frac{2e}{\hbar} I = \frac{2eI_c}{\hbar} \varphi + \frac{\dot{\varphi}}{R} + C\ddot{\varphi}. \quad (51)$$

Cette équation est identique à celle trouvée en (8) pour un circuit RLC , si on définit l'inductance L par

$$L = \frac{\hbar}{2eI_c}. \quad (52)$$

Dans cette limite de faibles phases, la jonction Josephson idéale se comporte donc comme une inductance. Sa valeur est en pratique très faible (nanoHenry), mais on peut mettre un grand nombre de jonctions en série pour l'augmenter pour certaines applications.

Considérons le cas particulier d'une intensité extérieure I nulle, toujours dans cette limite $\varphi \ll 1$, et négligeons la contribution du terme dissipatif (i.e. $R \rightarrow \infty$), ce qui donne l'équation du mouvement :

$$0 = \frac{2eI_c}{\hbar} \varphi + C\ddot{\varphi}. \quad (53)$$

La phase φ va donc présenter un mouvement sinusoïdal appelé "oscillation plasma" à la fréquence :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{2eI_c}{\hbar C}}. \quad (54)$$

Cette fréquence plasma ω_p peut réécrire en termes des énergies E_J et E_C introduites plus haut :

$$\hbar\omega = \sqrt{E_J E_C}, \quad (55)$$

comme on le constate immédiatement à partir de l'expression de l'hamiltonien (47) dans le cas $I = 0$ et $\varphi \ll 1$:

$$H(\varphi, p_\varphi) = \frac{E_C}{2\hbar^2} p_\varphi^2 + \frac{E_J}{2} \varphi^2. \quad (56)$$

Ces oscillations plasma, qu'il ne faut pas confondre avec l'effet Josephson alternatif, correspondent au mouvement de faible amplitude du pendule de la figure 11 autour de sa position d'équilibre, et elles résultent d'un échange périodique d'énergie entre la partie inductive de la jonction et sa partie capacitive.

4 La jonction Josephson pour un gaz d'atomes

4-1 Barrière statique et double puits

Nous nous intéressons maintenant à la transposition de la jonction Josephson à un gaz d'atomes refroidis et piégés, ce gaz pouvant être décrit

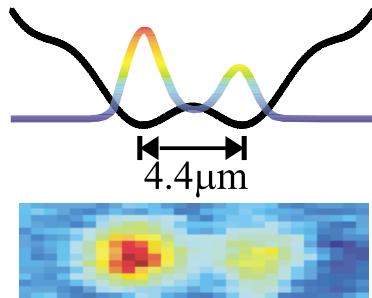


FIGURE 13. Superposition d'un puits de potentiel harmonique et d'une barrière centrale pour un condensat d'atomes ^{87}Rb . Figure extraite de ALBIEZ, GATI *et al.* (2005).

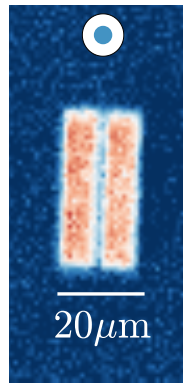


FIGURE 14. Barrière Josephson dans un gaz 2D uniforme d'atomes ^6Li (fermions). Figure extraite de LUICK, SOBIREY *et al.* (2020).

par une fonction d'onde macroscopique. Les gaz quantiques étant généralement confinés dans des pièges harmoniques ou dans des pièges à fond plat, une méthode simple pour réaliser une barrière tunnel ou une constriction consiste à éclairer ce gaz avec un faisceau lumineux focalisé au centre du piège. La fréquence de ce faisceau est choisie supérieure à la fréquence de résonance des atomes, de sorte que la lumière crée un potentiel répulsif sur les atomes, donc une barrière dont la hauteur est proportionnelle à l'intensité lumineuse.

Les puissances laser disponibles en pratique sont largement suffisantes pour que cette barrière ait une hauteur comparable au potentiel chimique et à la température des atomes, ce qui permet de se placer dans les conditions requises pour obtenir un effet Josephson. La largeur de la barrière est de l'ordre du micromètre (ou quelques micromètres), ce qui reste suffisamment petit pour que l'effet tunnel soit significatif.

La première expérience avec une jonction unique réalisée de cette manière a été faite par ALBIEZ, GATI *et al.* (2005), dont nous avons extrait la figure 13. Nous reviendrons sur les résultats de cette expérience en §4-5. Auparavant, plusieurs expériences, interprétables en termes de jonctions multiples, avaient été réalisées avec des gaz d'atomes placés dans le potentiel périodique créé par un réseau optique, comme par exemple ANDERSON & KASEVICH (1998) et CATALIOTTI, BURGER *et al.* (2001), mais il est plus délicat de connecter de manière quantitative leurs résultats à la physique Josephson.

Ce type d'expérience peut également être mené avec des fermions, comme représenté en figure 14 pour un gaz d'atomes fermioniques en interaction forte (^6Li). Ce gaz est placé en géométrie bidimensionnelle grâce à un fort confinement le long de la direction verticale (perpendiculaire au plan de la figure). La taille du col (*waist*) de la barrière est de 0.8 micromètre.

4-2 Le modèle à deux modes

Pour transposer le principe de la jonction Josephson à notre gaz d'atomes, nous allons adopter la description la plus simple possible en nous limitant à un modèle à deux modes spatiaux $\Phi_a(\mathbf{r})$ et $\Phi_b(\mathbf{r})$, asso-

ciés aux parties gauche et droite de la jonction. Nous allons supposer que les N atomes du gaz partagent la même fonction d'onde. L'état de chaque atome sera limité aux combinaisons linéaires de Φ_a et Φ_b :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \alpha_a(t)\Phi_a(\mathbf{r}) + \alpha_b(t)\Phi_b(\mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad |\alpha_a(t)|^2 + |\alpha_b(t)|^2 = 1. \quad (57)$$

L'état à N corps correspond à un condensat de Bose–Einstein :

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \psi(\mathbf{r}_1, t) \psi(\mathbf{r}_2, t) \cdots \psi(\mathbf{r}_N, t) \quad (58)$$

et nous introduisons les amplitudes "macroscopiques"

$$c_a(t) = \sqrt{N} \alpha_a(t) \quad c_b(t) = \sqrt{N} \alpha_b(t) \quad \text{avec} \quad |c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = N. \quad (59)$$

Pour l'état Ψ , le nombre moyen d'atomes sur le mode $j = a, b$ est $N_j = |c_j|^2$. Cette réduction de la dynamique à seulement deux modes constitue bien sûr une contrainte très forte, car elle revient à négliger toutes les autres excitations possibles du système, comme par exemple les ondes sonores pouvant se propager de part et d'autre de la barrière.

Pour préciser la procédure suivie pour choisir Φ_a et Φ_b , nous allons considérer le cas d'un double puits symétrique uni-dimensionnel $V(x)$ qui permet de décrire les étapes essentielles avec un formalisme réduit.

Les modes Φ_a et Φ_b doivent être choisis pour que leurs combinaisons linéaires représentent le mieux possible les différents états que la jonction Josephson atomique peut atteindre au cours de son évolution. Il est naturel d'imposer que l'état fondamental $\Phi_0(x)$ du gaz dans le potentiel $V(x)$ puisse être obtenu par cette combinaison linéaire pour bien décrire la dynamique proche de l'équilibre. Cet état est celui qui minimise l'énergie de Gross-Pitaevskii, dont la définition et les propriétés sont rappelées dans l'appendice 1. On choisira Φ_0 réelle et positive sur tout l'espace, ce qui est toujours possible puisqu'il s'agit de l'état fondamental. Puisqu'on a supposé que V est symétrique par rapport à la barrière, il en va de même pour Φ_0 : $\Phi_0(x) = \Phi_0(-x)$. Cette fonction sera choisie normalisée à l'unité et son énergie notée E_0 . Un exemple de profil pour Φ_0 est représenté en figure 15 pour une barrière centrale carrée.

Par ailleurs, par analogie avec la jonction Josephson supraconductrice, on s'attend à pouvoir atteindre également un état stationnaire avec une différence de π de part et d'autre de la barrière. Nous allons pour cela

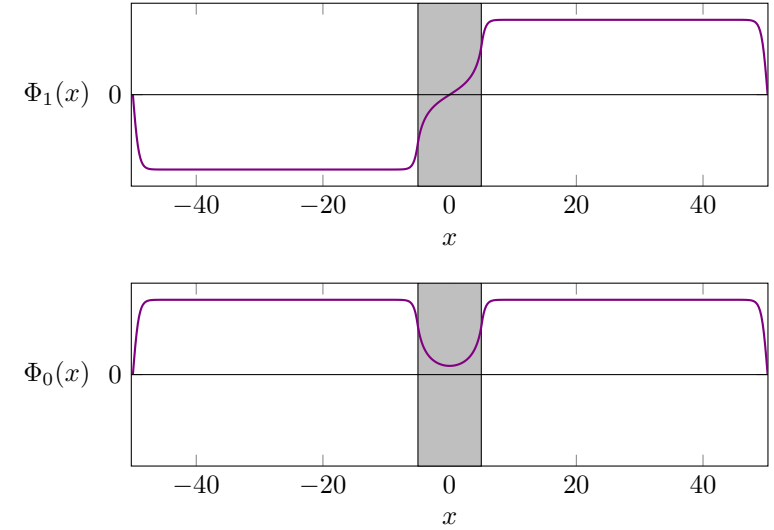


FIGURE 15. États minimisant l'énergie de Gross-Pitaevskii, respectivement symétrique (bas) et antisymétrique (haut), dans une boîte de longueur $L = 100$ avec une barrière centrale carrée de largeur $\ell = 10$ (zone grisée). La hauteur de la barrière est 1.2μ , où μ est le potentiel chimique du gaz en absence de barrière (longueur de cicatrisation $\xi = 1/\sqrt{2}$). L'écart en énergie entre les deux états est $\sim 10^{-4}$ de leur énergie totale.

considérer un autre état stationnaire de l'équation de Gross-Pitaevskii, noté $\Phi_1(x)$, obtenu en imposant que cette fonction s'annule en $x = 0$. La fonction $\Phi_1(x)$, également normalisée à l'unité, peut être choisie réelle et elle est impaire : $\Phi_1(x) = -\Phi_1(-x)$, ce qui correspond à la différence de phase π recherchée. On choisira $\Phi_1(x) > 0$ pour $x > 0$ et $\Phi_1(x) < 0$ pour $x < 0$. Si la barrière n'était pas présente, l'état Φ_1 correspondrait à un soliton noir placé au point $x = 0$. Un exemple de profil pour $\Phi_1(x)$ est également tracé en figure 15. Notons que la différence d'énergie $E_1 - E_0$ entre $\Phi_1(x)$ et $\Phi_0(x)$ devient exponentiellement petite quand on augmente la hauteur de la barrière notablement au dessus du potentiel chimique du gaz.

Pour une barrière de hauteur supérieure à μ_0 et μ_1 , les densités spatiales $\rho_0(x) = |\Phi_0(x)|^2$ et $\rho_1(x) = |\Phi_1(x)|^2$ ont des profils très voisins. Elles

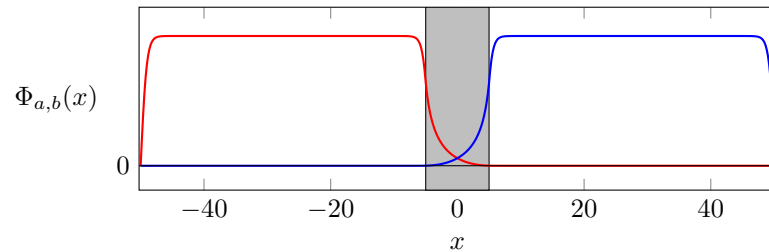


FIGURE 16. États localisés à gauche ($\Phi_a(x)$ en rouge) et à droite ($\Phi_b(x)$ en bleu) de la barrière, obtenus par combinaison linéaire des états stationnaires montrés en figure 15.

différent essentiellement à l'intérieur de la barrière, donc dans une zone où elles sont toutes les deux très faibles. On peut alors fabriquer les états $\Phi_{a,b}$ localisés de part et d'autre de la barrière, en prenant

$$\Phi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_0(x) - \Phi_1(x)) \quad \Phi_b(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_0(x) + \Phi_1(x)) \quad (60)$$

Le couple de fonctions $\{\Phi_0, \Phi_1\}$ est orthonormé puisque l'une est paire et l'autre impaire. Le couple de fonctions $\{\Phi_a, \Phi_b\}$ ainsi défini est alors lui aussi orthonormé. Nous montrons en figure 16 les fonctions $\Phi_{a,b}(x)$ obtenues par combinaison linéaire des deux états stationnaires de la figure 15.

Cette méthode de construction des états $\Phi_{a,b}$ à partir des états stationnaire de la fonctionnelle d'énergie Gross-Pitaevski se généralise à un double puits quelconque (RAGHAVAN, SMERZI et al. 1999), au prix d'expressions mathématiques plus compliquées du fait de l'absence de la symétrie de parité.

Remarque : domaine de validité du modèle. Nous avons construit notre modèle à deux modes à partir des deux états $\Phi_{0,1}(x)$ qui correspondent tous les deux à des poids égaux sur Φ_a et Φ_b puisque la relation (60) s'inverse pour donner

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_a(x) + \Phi_b(x)) \quad \Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_b(x) - \Phi_a(x)) . \quad (61)$$

Ce modèle est bien adapté pour décrire les combinaisons linéaires de Φ_a et Φ_b [cf. (57)] pour lesquelles $|c_a|^2 \approx N/2$ et $|c_b|^2 \approx N/2$, car ce sont des états dont l'énergie moyenne reste proche de E_0 et E_1 . En revanche, il serait illusoire de chercher à décrire avec ce modèle à deux modes une situation initiale telle que $c_a = N$, $c_b = 0$ par exemple. L'énergie de cet état est en effet (sauf pour des interactions très faibles), beaucoup plus grande que E_0 et E_1 , le potentiel chimique correspondant peut être plus haut que la barrière centrale, et la dynamique du gaz devient beaucoup plus complexe que celle d'une simple jonction Josephson. On pourra consulter l'analyse détaillée de LEGGETT (2001) sur ce sujet.

4-3 L'énergie du double puits

Nous allons proposer dans ce paragraphe des arguments semi-quantitatifs pour écrire la forme de l'énergie $E(c_a, c_b)$ qui permettra d'obtenir les équations du mouvement des coefficients $c_{a,b}$ intervenant dans la combinaison linéaire (57). Nous donnons dans l'appendice 2 de ce chapitre un calcul complet validant ces arguments pour un double puits symétrique décrit par l'approche Gross-Pitaevskii.

L'énergie du système comporte *a priori* trois termes :

$$E(c_a, c_b) = E_a(N_a) + E_b(N_b) + E_{\text{tun}}(c_a, c_b) , \quad (62)$$

c'est-à-dire :

- l'énergie $E_a(N_a)$ des N_a atomes dans le puits de gauche ;
- l'énergie $E_b(N_b)$ des N_b atomes dans le puits de droite ;
- l'énergie $E_{\text{tun}}(c_a, c_b)$ résultant du couplage tunnel entre les deux puits.

Nous nous intéressons à des situations où chacun des puits (gauche et droite) pris individuellement est au voisinage de l'équilibre. Cet équilibre correspond à des nombres d'atomes \bar{N}_a et \bar{N}_b , et aux potentiels chimiques $\bar{\mu}_a$ et $\bar{\mu}_b$ définis par

$$\bar{\mu}_j \equiv \mu_j(\bar{N}_j) = \left. \frac{\partial E_j}{\partial N_j} \right|_{N_j = \bar{N}_j} \quad (63)$$

Notons que, même si nous considérons essentiellement des situations proches de l'équilibre, nous ne prenons pas ici l'égalité stricte entre $\bar{\mu}_a$ et

$\bar{\mu}_b$ car la différence de potentiel chimique

$$\overline{\Delta\mu} \equiv \bar{\mu}_a - \bar{\mu}_b \quad (64)$$

va jouer le rôle de la différence de potentiel électrique de la jonction supraconductrice.

On peut alors faire un développement de Taylor des énergies $E_a(N_a)$ et $E_b(N_b)$:

$$E_j(N_j) \approx E_j(\bar{N}_j) + \bar{\mu}_j(N_j - \bar{N}_j) + \frac{U_j}{2}(N_j - \bar{N}_j)^2 \quad (65)$$

avec

$$U_j = \left. \frac{\partial \mu_j}{\partial N_j} \right|_{N_j = \bar{N}_j}, \quad (66)$$

qui est relié au module d'élasticité (*bulk modulus*) et à la compressibilité du fluide². Notons que ce développement est très général, pourvu que $N_j - \bar{N}_j$ soit suffisamment faible; il n'est pas restreint à un fluide décrit par la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevski.

En utilisant la variable n définie par

$$N_a = \bar{N}_a + n \quad N_b = \bar{N}_b - n, \quad (67)$$

on obtient pour la somme des énergies "sur site" :

$$E_a(N_a) + E_b(N_b) = \overline{\Delta\mu} n + \frac{E_C}{2} n^2 + \text{cte} \quad (68)$$

avec

$$E_C \equiv U_a + U_b = \left. \frac{\partial \mu_a}{\partial N_a} \right|_{N_a = \bar{N}_a} + \left. \frac{\partial \mu_b}{\partial N_b} \right|_{N_b = \bar{N}_b}. \quad (69)$$

2. Plus précisément, pour un fluide homogène, on définit le module d'élasticité par $K = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T,N}$. Pour des interactions à suffisamment courte portée, le fluide est extensif avec l'énergie libre de Landau $\Omega(T, \mu, V) = -VP(T, \mu)$; la pression P la densité $\rho = N/V$ sont des fonctions des deux variables thermodynamiques μ et T (cf. cours 2016-17, chapitre VI). La différentielle totale de Ω s'écrit : $d\Omega = -SdT - Nd\mu - PdV$ et on en déduit $\left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_{V,T} = \left(\frac{\partial N}{\partial V} \right)_{T,\mu} = \rho$. Par ailleurs, comme μ peut s'écrire comme une fonction des quantités intensives T et de ρ , on a : $N \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_{T,V} = -V \left(\frac{\partial \mu}{\partial V} \right)_{T,N}$, ce qui donne la relation recherchée pour le module d'élasticité $K = -V \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T \left(\frac{\partial \mu}{\partial V} \right)_{T,N} = N\rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_{T,V}$. La compressibilité isotherme est égale à $1/K$.

Intéressons-nous maintenant au terme tunnel $E_{\text{tunn}}(c_a, c_b)$. Nous supposons que la densité de particules est très basse à l'intérieur de la barrière de sorte que nous pouvons négliger l'influence des interactions sur le coefficient tunnel. En seconde quantification, ce terme correspond donc simplement à un couplage tunnel³ $\hat{H}_{\text{tunn}} \propto -(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a})$, où \hat{a} (\hat{a}^\dagger) détruit (créé) une particule dans le gaz a , et idem pour b :

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger |N_a, N_b\rangle &= \sqrt{N_a + 1} |N_a + 1, N_b\rangle \\ \hat{a} |N_a, N_b\rangle &= \sqrt{N_a} |N_a - 1, N_b\rangle \end{aligned} \quad (70)$$

Dans l'approche champ moyen qui nous intéresse ici, nous allons donc faire la substitution

$$\hat{a}, \hat{a}^\dagger \rightarrow c_a, c_a^* \quad \hat{b}, \hat{b}^\dagger \rightarrow c_b, c_b^*, \quad (71)$$

ce qui donne un terme énergétique $E_{\text{tunn}}(c_a, c_b) \propto -(c_a^* c_b + c_a c_b^*)$, avec un préfacteur que nous mettrons sous la forme :

$$E_{\text{tunn}}(c_a, c_b) = -\frac{E_J}{2\sqrt{\bar{N}_a \bar{N}_b}} (c_a^* c_b + c_a c_b^*) \quad (72)$$

où le coefficient E_J est à ce stade phénoménologique. Nous reviendrons dans un instant sur sa détermination dans le cas du double puits symétrique $\bar{N}_a = \bar{N}_b = \frac{N}{2}$, pour lequel ce terme énergétique se simplifie pour donner :

$$\text{Double puits symétrique : } E_{\text{tunn}}(c_a, c_b) = -\frac{E_J}{N} (c_a^* c_b + c_a c_b^*) \quad (73)$$

(voir également l'appendice 2 de ce chapitre).

Les dénominations E_J et E_C sont bien sûr choisies pour faciliter la comparaison avec la modélisation des jonctions Josephson supraconductrices. Pour rendre ce lien plus explicite, il est intéressant de travailler avec des variables nombre-phase plutôt qu'avec les amplitudes complexes c_a, c_b . Nous posons donc pour $j = a, b$:

$$c_j = \sqrt{N_j} e^{i\varphi_j} \quad \text{et} \quad \varphi \equiv \varphi_a - \varphi_b. \quad (74)$$

3. Le signe $-$ permet d'assurer que l'état fondamental à un corps est l'état symétrique $(\Phi_a + \Phi_b)/\sqrt{2}$, c'est-à-dire l'état sans nœud Φ_0 [cf. (61)].

Le terme tunnel devient

$$E_{\text{tun}}(\varphi, n) = -E_J \gamma(n) \cos \varphi \quad (75)$$

avec le coefficient $\gamma(n)$ défini par

$$\gamma(n) \equiv \sqrt{\left(1 + \frac{n}{N_a}\right) \left(1 - \frac{n}{N_b}\right)}. \quad (76)$$

L'expression de l'énergie du double puits que nous retenons à partir de maintenant est donc, à une constante additive près :

$$E(\varphi, n) = \overline{\Delta\mu} n + \frac{E_C}{2} n^2 - E_J \gamma(n) \cos \varphi \quad (77)$$

Coefficients E_J et E_C dans le cas équilibré. Pour un condensat de Bose-Einstein placé dans un double puits symétrique, nous avons expliqué en §4-2 comment déterminer les deux états stationnaires de plus basse énergie Φ_0 et Φ_1 , respectivement pair et impair et d'énergie E_0 et E_1 . Ces deux états correspondent au cas équilibré $\bar{\mu}_a = \bar{\mu}_b \equiv \mu$, $N_a = N_b = N/2$ et $n = 0$, et ils ont pour phase respectivement $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$. Leur énergie calculée à partir de (77) vaut $\mp E_J$ et on a donc :

$$E_J = \frac{1}{2} (E_1 - E_0) \quad (78)$$

Notons que cette quantité E_J est une quantité intrinsèque de la barrière, au moins pour le type de piège à fond plat représenté en figure 15 : si on varie la longueur totale L du piège en gardant la densité et l'épaisseur de la barrière ℓ constantes (avec $\ell \ll L$), la valeur de E_J n'est pratiquement pas modifiée.

Pour un condensat dans cette configuration, on peut également déterminer le paramètre E_C à partir de (69). L'énergie de N particules confinées dans une boîte de volume V est dominée par l'énergie d'interaction $E_{\text{int}} = \frac{gN^2}{2V}$, où g est une constante proportionnelle à la longueur de diffusion (voir appendice 1). On en déduit que $\mu_a = gN_a/V_a$ et $\mu_b = gN_b/V_b$

(avec $V_a = V_b = V/2$). Ceci indique que μ varie linéairement avec le nombre de particules à volume fixé, d'où :

$$E_C = \frac{\mu_a}{N_a} + \frac{\mu_b}{N_b} = \frac{4\mu}{N} \quad (79)$$

Les deux paramètres caractérisant la jonction sont donc entièrement connus dans ce cas.

4-4 Equations d'évolution dans le double puits

Une fois connue l'énergie en fonction des coefficients $c_{a,b}$, ou de manière équivalente en fonction de n et φ , il nous reste à déterminer les équations d'évolution de ces coefficients. Pour cela, on peut écrire directement l'équation de Gross-Pitaevskii pour $\Psi(\mathbf{r}, t)$ donnée en (57) et la projeter sur les deux modes Φ_{ab} . Une autre méthode consiste à considérer ce problème comme une approche variationnelle dépendant du temps, pour laquelle les fonctions d'essai sont les combinaisons linéaires de Φ_a et Φ_b . Cette approche variationnelle est détaillée dans l'appendice 3.

Ces deux approches donnent des résultats identiques :

$$\begin{cases} \hbar \dot{n} = E_J \gamma(n) \sin \varphi \\ \hbar \dot{\varphi} = -\overline{\Delta\mu} - nE_C + E_J \gamma'(n) \cos \varphi \end{cases} \quad (80)$$

où on a posé $\gamma'(n) \equiv \frac{d\gamma}{dn}$.

Ces deux équations du mouvement permettent de préciser le lien entre cette jonction réalisée avec des atomes piégés et une jonction Josephson traditionnelle, décrite par les équations du mouvement (48-49) en supposant ici un courant extérieur $I = 0$ (voir aussi le tableau 1.1). Les deux problèmes sont clairement similaires, avec la différence de potentiel chimique $\Delta\mu$ qui remplace (au signe près) la différence de potentiel électrique V :

$$\begin{aligned} \Delta\mu &\equiv \mu_a(N_a) - \mu_b(N_b) \\ &\approx \left(\mu_a(\overline{N}_a) + n \frac{\partial \mu_a}{\partial N_a} \right) - \left(\mu_b(\overline{N}_b) - n \frac{\partial \mu_b}{\partial N_b} \right) \\ &= \overline{\Delta\mu} + nE_C \end{aligned} \quad (81)$$

de sorte que la seconde équation de (80) peut aussi s'écrire :

$$\boxed{\hbar \dot{\varphi} = -\Delta\mu + E_J \gamma'(n) \cos \varphi} \quad (82)$$

Origine physique du terme $\gamma(n)$. Il est clair que les équations du mouvement de la jonction atomique ne sont identiques à celles d'une jonction supraconductrice que si on pose $\gamma(n) = 1$. Ce terme $\gamma(n)$ traduit le fait que, pour une jonction atomique, l'énergie due au couplage tunnel (75) ne dépend pas seulement de $E_J \cos \varphi$, mais aussi des nombres d'atomes de part et d'autre de la barrière. Or ce nombre d'atomes varie dans le temps du fait même de l'évolution due à l'effet Josephson.

Dans le cas d'une jonction supraconductrice, ce terme est absent car la jonction supraconductrice est un système ouvert : même si un courant de paires de Cooper circule, les densités de part et d'autre de la barrière restent constantes car la jonction est connectée à un "réservoir" capable de fournir en permanence de nouvelles charges. Le coefficient décrivant l'effet tunnel est donc indépendant du nombre de paires de Cooper ayant précédemment traversé la jonction.

Selon le type de jonction atomique, ce terme $\gamma(n)$ peut avoir une influence négligeable – on prend alors $\gamma(n) = 1, \gamma'(n) = 0$ – ou alors être à l'origine de phénomènes nouveaux, comme l'auto-piégeage que nous rencontrerons au chapitre 3. Pour reprendre l'analogie entre une jonction Josephson et un pendule pesant (figure 11), ce terme $\gamma(n)$ introduit une déformation du pendule en fonction de la différence entre les nombres N_a et N_b , ce qui peut enrichir notablement sa dynamique.

Remarque sur les signes dans les équations d'évolution (80-82). Dans la littérature scientifique sur le sujet, on retrouve ces équations d'évolution avec des signes variés selon les conventions prises par les auteurs. Discutons brièvement ces signes pour la convention adoptée ici en faisant la simplification $\gamma(n) \approx 1$ pour simplifier :

$$\boxed{\gamma(n) = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hbar \dot{n} = E_J \sin \varphi \\ \hbar \dot{\varphi} = -\Delta\mu \end{cases}} \quad (83)$$

Dans la première équation, la quantité \dot{n} désigne le courant de particules de b vers a et la phase $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$. Si on prend φ_a légèrement supérieur à φ_b , cela signifie qu'il y a un gradient de phase de b vers a au sein de la jonction, et donc une vitesse $\frac{\hbar}{m} \frac{d\varphi}{dx}$ également dirigée de b vers a pour les particules. Cela correspond donc bien à $\dot{n} > 0$ (N_a augmente, N_b diminue) et explique le signe + dans la première équation de (83). En ce qui concerne la seconde équation, rappelons que nous avons défini $\Delta\mu = \mu_a - \mu_b$. La loi d'évolution d'une fonction d'onde en $e^{-i\Delta\mu t/\hbar}$, associée à $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$, vient donc imposer le signe – dans $\hbar \dot{\varphi} = -\Delta\mu$.

4-5 Les oscillations plasma d'une jonction atomique

Une des premières expériences réalisées sur une jonction atomique a porté sur l'observation des oscillations plasmas. Ces oscillations sont obtenues en absence de courant extérieur et elles consistent simplement à observer les petites oscillations de la charge portée par la jonction, ici n , en fonction du temps. Pour simplifier notre analyse, nous prendrons un double puits symétrique, $\bar{N}_a = \bar{N}_b = N/2$ et $\bar{\Delta\mu} = \bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2 = 0$, de sorte que $\gamma(n)$ et sa dérivée $\gamma'(n)$ s'écrivent :

$$\gamma(n) = \sqrt{1 - 4 \frac{n^2}{N^2}} \approx 1 - 2 \frac{n^2}{N^2} \quad \gamma'(n) = -\frac{4n}{N^2}, \quad (84)$$

où nous avons utilisé $n \ll N$.

Les oscillations plasma sont obtenues au voisinage du minimum d'énergie en prenant $\varphi \ll 1$. En nous limitant aux termes d'ordre 1 en φ et n/N , les équations du mouvement (80) s'écrivent :

$$\begin{cases} \hbar \dot{n} = E_J \varphi \\ \hbar \dot{\varphi} = -\left(E_C + \frac{4E_J}{N^2}\right) n \end{cases} \quad (85)$$

Ces deux équations couplées correspondent à un mouvement sinusoïdal dont la fréquence ω_p vérifie

$$(\hbar\omega_p)^2 = E_J \left(E_C + \frac{4E_J}{N^2}\right). \quad (86)$$

	Jonction supraconductrice (RCSJ)	Double puits atomique	Jonction interne (Schwinger)
Paramètres	I_c $E_J = \hbar I_c / (2e)$	$E_J = \frac{1}{2} (E[\Phi_1] - E[\Phi_0])$	$E_J = \frac{1}{2} N \hbar \Omega$
	C $E_C = (2e)^2 / C$	$E_C = g \int (\Phi_a ^4 + \Phi_b ^4)$	$E_C = 2g_s \int \Phi ^4$ avec $g_s = \frac{1}{2}(g_{aa} + g_{bb}) - g_{ab}$
	R	-	-
Contrôle	I_{ext} (ou V)	déplacement de la jonction (ou $\overline{\Delta\mu}$)	Ω (ou $\tilde{\Delta}$)
Variables	φ et $Q = CV$	φ et $n = \frac{1}{2}(N_a - N_b)$	$\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ avec $J = \frac{N}{2}$ et $\hat{J}_z = \frac{1}{2}(\hat{N}_a - \hat{N}_b)$
Énergie	$\frac{E_C}{2} \left(\frac{Q}{2e}\right)^2 - E_J \cos \varphi - \frac{\hbar I_{\text{ext}}}{2e} \varphi$	$\frac{E_C}{2} n^2 - E_J \gamma(n) \cos \varphi + \overline{\Delta\mu} n$	$\frac{E_C}{2} \hat{J}_z^2 - \hbar \Omega \hat{J}_x - \hbar \tilde{\Delta} \hat{J}_z$
Dynamique	$I_{\text{ext}} = I_c \sin \varphi + \frac{V}{R} + \dot{Q}$ $\hbar \dot{\varphi} = 2eV$	$\hbar \dot{n} = E_J \gamma(n) \sin \varphi$ $\hbar \dot{\varphi} = -\overline{\Delta\mu} - n E_C + E_J \gamma'(n) \cos \varphi$	$\dot{\hat{J}}_z = -\Omega \hat{J}_y$ $i \dot{\hat{J}}_+ = \tilde{\Delta} \hat{J}_+ - \frac{E_C}{2\hbar} (\hat{J}_+ \hat{J}_z + \hat{J}_z \hat{J}_+) - \Omega \hat{J}_z$
Régime Josephson	toujours	$E_J / N^2 \ll E_C$ $\gamma(n) = 1$ $\gamma'(n) = 0$	$\hbar \Omega \ll \mu_s$ avec $\mu_s = N E_C$

TABLE 1.1. Description des principales jonctions rencontrées dans ce cours (la colonne "Jonction interne" sera traitée à partir du chapitre 4). Les jonctions supraconductrices sont principalement contrôlées par le courant extérieur I_{ext} . Pour le double puits atomique symétrique, traité ici classiquement, on a posé $\gamma(n) = \left(1 - \frac{4n^2}{N^2}\right)^{1/2}$ et $\gamma'(n)$ désigne la dérivée de $\gamma(n)$. Le cas de la jonction interne est traitée ici quantiquement et présentée dans l'approximation du mode spatial unique. La ligne "Énergie" correspond au cas sans dissipation ($R = \infty$ pour la jonction supraconductrice). Le passage à la limite classique pour la jonction interne, avec $J_+ = J\gamma(n)e^{-i\varphi}$ et $J_z = n$, est possible si $E_C \ll E_J$ et permet de retrouver les résultats du double puits.

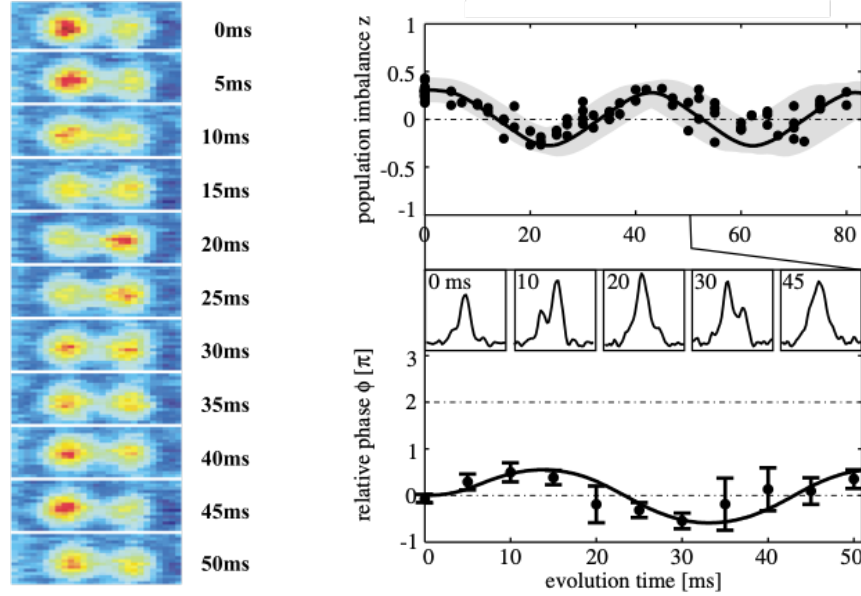


FIGURE 17. Oscillation plasma dans un double puits contenant ~ 1150 atomes de ^{87}Rb . Les atomes sont confinés dans un piège dipolaire de fréquences (78,66,90) Hz. On sépare le nuage en deux parties selon la direction x par l'ajout d'une barrière de potentiel créée par un faisceau lumineux additionnel (cf. figure 13). Le démarrage de l'oscillation est causé par un déplacement soudain de la position de la barrière centrale. La fréquence plasma mesurée $\approx \sqrt{E_J E_C}/\hbar$ est de 25 Hz, bien supérieure attendue à la fréquence tunnel attendue en absence d'interaction $E_J/N\hbar \approx 2$ Hz. On est donc bien dans le "régime Josephson" $E_C \gg E_J/N^2$. Figure adaptée de ALBIEZ, GATI et al. (2005).

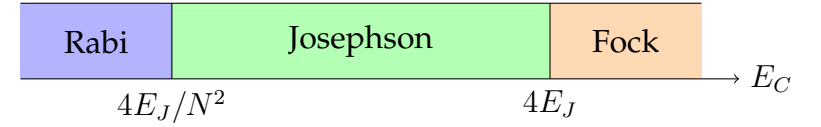


FIGURE 18. Les différents régimes de l'oscillation plasma. Seuls les régimes de Josephson et de Rabi peuvent être décrits par l'approche utilisée ici, consistant à faire l'approximation $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Le régime de Fock sera étudié au chapitre 5 (voir aussi LEGGETT (2001)).

Nous retrouvons le résultat (55) des jonctions Josephson supraconductrices dans la "limite Josephson" :

$$E_C \gg \frac{4E_J}{N^2} : \quad \hbar\omega_p \approx \sqrt{E_J E_C} \quad (87)$$

Cette limite consiste à prendre $\gamma(n) = 1$, $\gamma'(n) = 0$ dans (80) ou (82), donc à négliger la variation du coefficient tunnel au cours de l'oscillation, ou de manière équivalente, la modification de la longueur du pendule de la figure 11.

La limite opposée $E_C \ll 4E_J/N^2$ est appelée "régime de Rabi" (figure 18). La physique est alors simplement celle d'un système à deux niveaux couplés conduisant à une oscillation à la fréquence $\hbar\omega = 2E_J/N$. Ce régime sera surtout pertinent pour les jonctions atomiques internes, que nous étudierons au chapitre 4.

L'oscillation plasma a été la première manifestation de la physique Josephson observée directement sur des gaz d'atomes froids. Nous montrons en figure 17 le résultat obtenu par ALBIEZ, GATI et al. (2005) sur le double puits déjà montré en figure 13. On y voit à la fois l'oscillation de la différence de population entre les côtés gauche et droit, mesurée par le paramètre z défini par

$$z \equiv \frac{N_a - N_b}{N_a + N_b} = 2 \frac{n}{N} \quad (88)$$

et l'évolution de la phase relative φ , mesurée à partir de la figure d'interférence entre ces deux nuages, elle-même obtenue après une expansion

balistique de 5 ms. On constate que les évolutions de n et de φ sont déphasées de $\pi/2$ l'une par rapport à l'autre, comme attendu à partir de (85). Cette expérience a été menée dans le régime Josephson.

Le régime de Fock. Signalons par ailleurs l'existence d'un troisième régime, $E_C \gtrsim 4E_J$, où le traitement qui précède n'est plus approprié (figure 18). En effet, ce traitement repose sur l'approximation $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$, ce qui permet de mettre l'énergie de la jonction sous la forme $\frac{E_C}{2}n^2 + \frac{E_J}{2}\varphi^2$. Quand on passe à un traitement quantique avec la relation de commutation $[\hat{\varphi}, \hat{n}] = i$, qui impose $\Delta n \Delta \varphi > 1/2$, on peut chercher l'état fondamental en faisant les substitutions $\varphi^2 \rightarrow \Delta \varphi^2$ et $n^2 \rightarrow \Delta n^2 = \frac{1}{4\Delta \varphi^2}$. On doit alors minimiser la quantité

$$E(\Delta \varphi) = \frac{E_C}{8\Delta \varphi^2} + \frac{E_J}{2} \Delta \varphi^2 \quad (89)$$

Ce minimum est atteint pour $\Delta \varphi \sim (E_C/4E_J)^{1/4}$ et il vaut $\hbar\omega_p/2$, comme attendu pour un oscillateur harmonique. Mais on constate alors immédiatement que si $E_C \gtrsim 4E_J$, l'extension en phase de cet état fondamental devient d'ordre 1 et on ne peut plus se limiter à l'approximation initiale $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Nous reviendrons en détail sur ce régime dans les chapitres 5 et 6.

Appendice 1 : L'approche Gross–Pitaevskii

On considère une assemblée de N atomes confinés dans un piège décrit par le potentiel extérieur $V(\mathbf{r})$. Nous supposons que ces atomes sont des bosons de spin nul, ou des bosons polarisés dans un état de spin fixé. À température très basse et si les interactions sont suffisamment faibles, on peut décrire cette assemblée par une fonction d'onde macroscopique $\Psi(\mathbf{r})$, ce qui signifie que la fonction d'onde à N corps s'écrit sous la forme factorisée :

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \propto \Psi(\mathbf{r}_1) \cdots \Psi(\mathbf{r}_N) \quad \text{avec} \quad \int |\Psi(\mathbf{r})|^2 d^3r = 1. \quad (90)$$

Nous supposons que les interactions entre atomes sont de courte portée et caractérisées par la longueur de diffusion a_s . La fonction ψ obéit alors à l'équation de Gross–Pitaevskii (ou équation de Schrödinger non-linéaire) :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + Ng |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (91)$$

où $\rho(\mathbf{r}, t) \equiv N|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ représente la densité spatiale du condensat et où le coefficient de couplage non-linéaire g est relié à a_s par

$$g = \frac{4\pi \hbar^2 a_s}{m}. \quad (92)$$

Cette description correspond à une approximation de champ moyen : chaque particule évolue dans la somme du potentiel extérieur $V(\mathbf{r})$ et du potentiel $g\rho(\mathbf{r})$ créé par les autres atomes. Cette approximation est valable si on a en tout point $\rho a_s^3 \ll 1$. On pourra se reporter au cours 2021 pour le calcul de la longueur de diffusion et au cours 2022 la discussion de l'approximation de champ moyen et ses termes correctifs.

Nous nous intéresserons essentiellement au cas où les interactions entre particules sont répulsives, c'est-à-dire $g > 0$. Supposons que le potentiel $V(\mathbf{r})$ est celui d'une boîte de grande taille L (figure 19). L'état fondamental du système correspond à une distribution de densité uniforme $\rho_0 = N/L^d$ (où d est la dimensionnalité du système), excepté au voisinage des parois

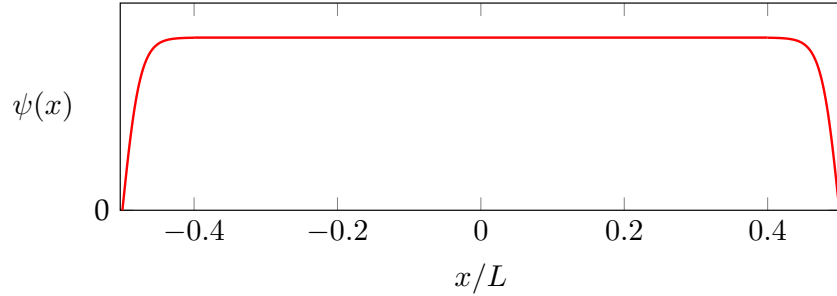


FIGURE 19. Exemple d'un gaz 1D dans une boîte de longueur L avec des interactions répulsives. Dans l'état fondamental du système, la densité est quasi-uniforme excepté au voisinage immédiat des parois (situées en $x = \pm L/2$) où elle descend à zéro sur une distance $\sim \xi$.

de la boîte où la densité tombe à zéro sur une distance donnée par la *longueur de cicatrisation* (*healing length*) :

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_g\rho_0}}. \quad (93)$$

Cette équation de Gross–Pitaevskii peut être obtenue à partir d'une approche lagrangienne en théorie des champs classique. Elle se déduit de la minimisation de l'action

$$S = \int \mathcal{L}[\Psi, \dot{\Psi}] dt \quad (94)$$

avec le lagrangien⁴ :

$$\mathcal{L}[\Psi, \dot{\Psi}] = \int [i\hbar \dot{\Psi}\Psi^* - \mathcal{E}_{\text{GP}}[\Psi]] d^3r \quad (96)$$

4. La composante temporelle du lagrangien peut être remplacée par $-\int d^3r i\hbar\Psi\dot{\Psi}^*$ ou encore $\int d^3r \frac{i\hbar}{2} (\Psi^*\dot{\Psi} - \Psi\dot{\Psi}^*)$ puisque la norme de Ψ est conservée au cours du temps

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\int d^3r \Psi^*\Psi \right) = \int d^3r (\Psi\dot{\Psi}^* + \Psi^*\dot{\Psi}). \quad (95)$$

et la densité d'énergie par particule $\mathcal{E}_{\text{GP}}[\Psi]$:

$$\mathcal{E}_{\text{GP}}[\Psi] = \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\Psi|^2 + V|\Psi|^2 + \frac{Ng}{2} |\Psi|^4. \quad (97)$$

On retrouve l'équation de Gross-Pitaevskii (91) en écrivant que la fonction $\Psi(\mathbf{r}, t)$ doit rendre la fonctionnelle d'action (94) extrémale.

L'énergie totale associée à une fonction d'onde Ψ est donnée par la fonctionnelle de Gross-Pitaevskii :

$$E_{\text{GP}}[\Psi] = N \int \mathcal{E}_{\text{GP}}[\Psi] d^3r \quad (98)$$

ou encore

$$E_{\text{GP}}[\Psi] = \frac{N\hbar^2}{2m} \int |\nabla\Psi(\mathbf{r})|^2 d^3r + N \int V(\mathbf{r}) |\Psi(\mathbf{r})|^2 d^3r + \frac{N^2g}{2} \int |\Psi(\mathbf{r})|^4 d^3r \quad (99)$$

somme de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie d'interaction.

Gaz confiné dans une boîte. Pour un condensat de N atomes, confiné dans une boîte de taille L comme celui représenté en figure 19, la fonction d'onde Ψ associée à l'état fondamental est uniforme (excepté au voisinage des parois) et égale à $L^{-d/2}$, la densité vaut $\rho_0 \equiv N/L^d$, et l'énergie dominante est le terme d'interaction :

$$E_{\text{GP}} \approx \frac{1}{2} g\rho_0^2 L^d = \frac{N^2g}{2L^d}. \quad (100)$$

Le potentiel chimique du système, c'est-à-dire le coût énergétique pour ajouter une particule, vaut alors :

$$\mu = \frac{\partial E_{\text{GP}}}{\partial N} = \frac{Ng}{L^d} = g\rho_0 \quad (101)$$

et il est relié à la longueur de cicatrisation par

$$\mu = \frac{\hbar^2}{2m\xi^2}. \quad (102)$$

Par ailleurs, la vitesse du son c dans ce gaz est donnée par $mc^2 = \mu$ (cf. cours 2023-24, chap.III, § 1.4).

Appendice 2 : le double puits symétrique

Dans cet appendice, nous calculons explicitement l'énergie du gaz confiné dans un double puits symétrique et nous montrons que le résultat se met bien sous la forme annoncée dans ce chapitre.

Commençons par déterminer les états stationnaires Φ_n ($n = 0, 1$) de l'équation de Gross-Pitaevskii, comme expliqué en § 4-2. Les potentiels chimiques μ_n sont reliés aux énergies de Gross-Pitaevskii

$$E_{\text{GP}}[\Phi_n] = N \int \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d\Phi_n}{dx} \right)^2 + V\Phi_n^2 + \frac{Ng}{2} \Phi_n^4 \right] dx \quad (103)$$

par :

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{1}{N} E_{\text{GP}}[\Phi_n] + \frac{Ng}{2} \int \Phi_n^4(x) dx \\ &= \int \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d\Phi_n}{dx} \right)^2 + V\Phi_n^2 + Ng\Phi_n^4 \right] dx \end{aligned} \quad (104)$$

cette dernière équation s'obtenant en multipliant

$$\mu_n \Phi_n(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) + Ng|\Phi_n(x)|^2 \right) \Phi_n(x) \quad (105)$$

par Φ_0 ou Φ_1 et en intégrant sur l'espace.

Évaluons maintenant l'énergie $E(c_a, c_b)$. Le calcul est relativement long, mais sans difficulté de principe. On utilise notamment le fait que des intégrales du type

$$\int \Phi_0^\alpha(x) \Phi_1^\beta(x) dx \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N} \quad (106)$$

sont nulles si la puissance β de Φ_1 est impaire, car la fonction à intégrer est antisymétrique. Le résultat, à une constante additive près, s'écrit

$$E(c_a, c_b) = -\frac{E_J}{N} (c_a^* c_b + c_a c_b^*) + \frac{E_C}{4} (|c_a|^4 + |c_b|^4) + \Delta E \quad (107)$$

avec

$$E_J = \frac{1}{2} (E_{\text{GP}}[\Phi_1] - E_{\text{GP}}[\Phi_0]) \quad (108)$$

qui est par construction une quantité positive et

$$E_C = 4g \int \Phi_0^2(x) \Phi_1^2(x) dx \quad (109)$$

qui est également positif. Le terme ΔE a pour expression

$$\Delta E = J' (c_a^* c_b + c_a c_b^*)^2 \quad \text{avec} \quad J' = \int [\Phi_0^2(x) - \Phi_1^2(x)]^2 dx \quad (110)$$

et il joue un rôle très faible car le coefficient J' , qui fait intervenir le carré de la différence des densités entre les états stationnaires Φ_0 et Φ_1 , est très petit. Ce terme ΔE sera négligé dans la suite.

On obtient donc, à une constante additive près :

$$E(c_a, c_b) = -\frac{E_J}{N} (c_a^* c_b + c_a c_b^*) + \frac{E_C}{4} (|c_a|^4 + |c_b|^4) \quad (111)$$

avec la condition de normalisation $|c_a|^2 + |c_b|^2 = N$. L'état d'énergie minimale est atteint pour $c_a = c_b = \sqrt{N/2}$, c'est-à-dire l'état Φ_0 .

Expressions de E_J et E_C . Nous avons donné en (108) et (109) les expressions des coefficients E_J et E_C en termes des premiers états stationnaires $\Phi_{0,1}$ de l'équation de Gross-Pitaevskii. On peut également exprimer ces mêmes coefficients en fonction des états $\Phi_{a,b}$ localisés de part et d'autre de la jonction (GIOVANAZZI, SMERZI et al. 2000). Pour obtenir ces expressions, on remplace Φ_0 et Φ_1 par leur valeur

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_a + \Phi_b) \quad \Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_b - \Phi_a) \quad (112)$$

ce qui conduit à

$$E_J = -N \int \Phi_b \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Phi_a}{dx^2} + V\Phi_a + Ng\Phi_a^3 \right) dx \quad (113)$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$E_J = -N \langle \Phi_b | \hat{H} | \Phi_a \rangle \quad \text{avec} \quad \hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + Ng\Phi_a^2(x) \quad (114)$$

et

$$E_C \approx 2g \int \Phi_a^4 dx. \quad (115)$$

Dans ces équations, on peut échanger les indices a et b puisqu'on a considéré un double puits symétrique. Par ailleurs, on a négligé dans l'expression de E_C un terme faisant intervenir $\int \Phi_a^2 \Phi_b^2 dx$, c'est-à-dire le recouvrement entre les profils de densités entre les puits de gauche et de droite.

Remarque. Nous avons vu apparaître en (65) la dérivée du potentiel chimique par rapport au nombre de particules, quantité reliée au module d'élasticité du fluide. Quand on calcule cette dérivée à partir de (104), on retrouve le terme (115), mais on voit également apparaître un terme correspondant au changement des fonctions d'onde Φ_j avec le nombre de particules. Ces termes sont absents dans l'approche variationnelle conduisant à (115) puisque nous avons restreint l'espace des fonctions d'essai aux seules combinaisons de Φ_0 et Φ_1 , mais ils doivent en principe être pris en compte pour un calcul précis.

Appendice 3 : Approche variationnelle à deux modes

Le modèle à deux modes développé dans ce chapitre peut être considéré comme une méthode variationnelle dépendant du temps, en prenant des fonctions d'essai du type

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = c_a(t)\Phi_a(\mathbf{r}) + c_b(t)\Phi_b(\mathbf{r}). \quad (116)$$

Cela revient à faire évoluer la fonction $\Psi(\mathbf{r}, t)$ dans un espace de dimension 2 seulement, décrit par la paire de nombres complexes $c_{a,b}(t)$, au lieu de prendre l'espace de dimension infinie exploré par la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevskii.

L'action devient donc simplement une fonction des deux variables c_a, c_b , de leurs complexes conjugués et de leurs dérivées temporelles :

$$S = \int \mathcal{L}[c_a, c_b, \dot{c}_a, \dot{c}_b] dt \quad (117)$$

avec le lagrangien

$$\mathcal{L}[c_a, c_b, \dot{c}_a, \dot{c}_b] = i\hbar(\dot{c}_a c_a^* + \dot{c}_b c_b^*) - E[c_a, c_b] \quad (118)$$

où l'énergie $E[c_a, c_b]$ se calcule en substituant l'expression choisie pour Ψ dans la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevskii (99). Cette énergie est *a priori* une fonction quartique de c_a, c_b et leurs complexes conjugués. Elle fait par ailleurs intervenir les intégrales sur l'espace de puissances de Φ_a et Φ_b et de leurs gradients.

Les équations d'évolution des coefficients $c_{a,b}$ se déduisent finalement du fait que S doit être extrémale, ce qui donne les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{c}_a^*} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_a^*} \quad (119)$$

et idem pour la composante b (rappelons que les variables c_a et c_b étant complexes, on doit traiter c_j et c_j^* comme deux variables indépendantes). On obtient donc :

$$i\hbar \dot{c}_a = \left(\frac{\partial E}{\partial c_a^*} \right)_{c_a, c_b, c_b^*} \quad i\hbar \dot{c}_b = \left(\frac{\partial E}{\partial c_b^*} \right)_{c_a, c_a^*, c_b} . \quad (120)$$

Plutôt que (c_a, c_b) , on peut utiliser le couple de variables (n, φ) , pour lesquelles la partie dynamique du lagrangien s'écrit⁵ :

$$i\hbar(\dot{c}_a c_a^* + \dot{c}_b c_b^*) = -\hbar n \dot{\varphi} + \dots \quad (121)$$

de sorte que les équations de Lagrange s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \Rightarrow \hbar \dot{n} = \frac{\partial E}{\partial \varphi} \quad (122)$$

et

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{n}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n} \Rightarrow \hbar \dot{\varphi} = -\frac{\partial E}{\partial n} \quad (123)$$

où l'énergie $E(\varphi, n)$ est donnée en (77). On trouve alors les équations d'évolution (80).

⁵ Le symbole " \dots " représente une dérivée totale par rapport au temps, sans importance ici.

Références

- ALBIEZ, Michael, Rudolf GATI, Jonas FÖLLING, Stefan HUNSMANN, Matteo CRISTIANI & Markus K OBERHALER (2005), « Direct Observation of Tunneling and Nonlinear Self-Trapping in a Single Bosonic Josephson Junction », in *Physical review letters* **95**, p. 010402.
- ANDERSON, Brian P & Mark A KASEVICH (1998), « Macroscopic quantum interference from atomic tunnel arrays », in *Science* **282**, p. 1686-1689.
- CATALIOTTI, Francesco Saverio, Sven BURGER, Chiara FORT, Pasquale MADDALONI, Francesco MINARDI, Andrea TROMBETTONI, Augusto SMERZI & Massimo INGUSCIO (2001), « Josephson junction arrays with Bose-Einstein condensates », in *Science* **293**, p. 843-846.
- GIOVANAZZI, Stefano, Augusto SMERZI & Stefano FANTONI (2000), « Josephson effects in dilute Bose-Einstein condensates », in *Physical review letters* **84**, p. 4521.
- JOSEPHSON, Brian David (1962), « Possible new effects in superconductive tunnelling », in *Physics letters* **1**, p. 251-253.
- KAUTZ, Richard L (1996), « Noise, chaos, and the Josephson voltage standard », in *Reports on Progress in Physics* **59**, p. 935.
- LEGGETT, Anthony J (2001), « Bose-Einstein condensation in the alkali gases : Some fundamental concepts », in *Reviews of modern physics* **73**, p. 307.
- LUICK, Niclas, Lennart SOBIREY, Markus BOHLEN, Vijay Pal SINGH, Ludwig MATHEY, Thomas LOMPE & Henning MORITZ (2020), « An ideal Josephson junction in an ultracold two-dimensional Fermi gas », in *Science* **369**, p. 89-91.
- MCCUMBER, DE (1968), « Effect of ac impedance on dc voltage-current characteristics of superconductor weak-link junctions », in *Journal of Applied Physics* **39**, p. 3113-3118.
- RAGHAVAN, Srikanth, Augusto SMERZI, Stefano FANTONI & SR SHENOY (1999), « Coherent oscillations between two weakly coupled Bose-Einstein condensates : Josephson effects, π oscillations, and macroscopic quantum self-trapping », in *Physical Review A* **59**, p. 620.
- RASMUSSEN, Stig Elkjær, Kasper Sangild CHRISTENSEN, Simon Panyella PEDERSEN, Lasse Bjørn KRISTENSEN, Thomas BÆKKEGAARD, Niels Jakob Søe LOFT & Nikolaj Thomas ZINNER (2021), « Superconducting circuit companion—an introduction with worked examples », in *PRX Quantum* **2**, p. 040204.

- STEWART, WC (1968), « Current-voltage characteristics of Josephson junctions », in *Applied physics letters* **12**, p. 277-280.