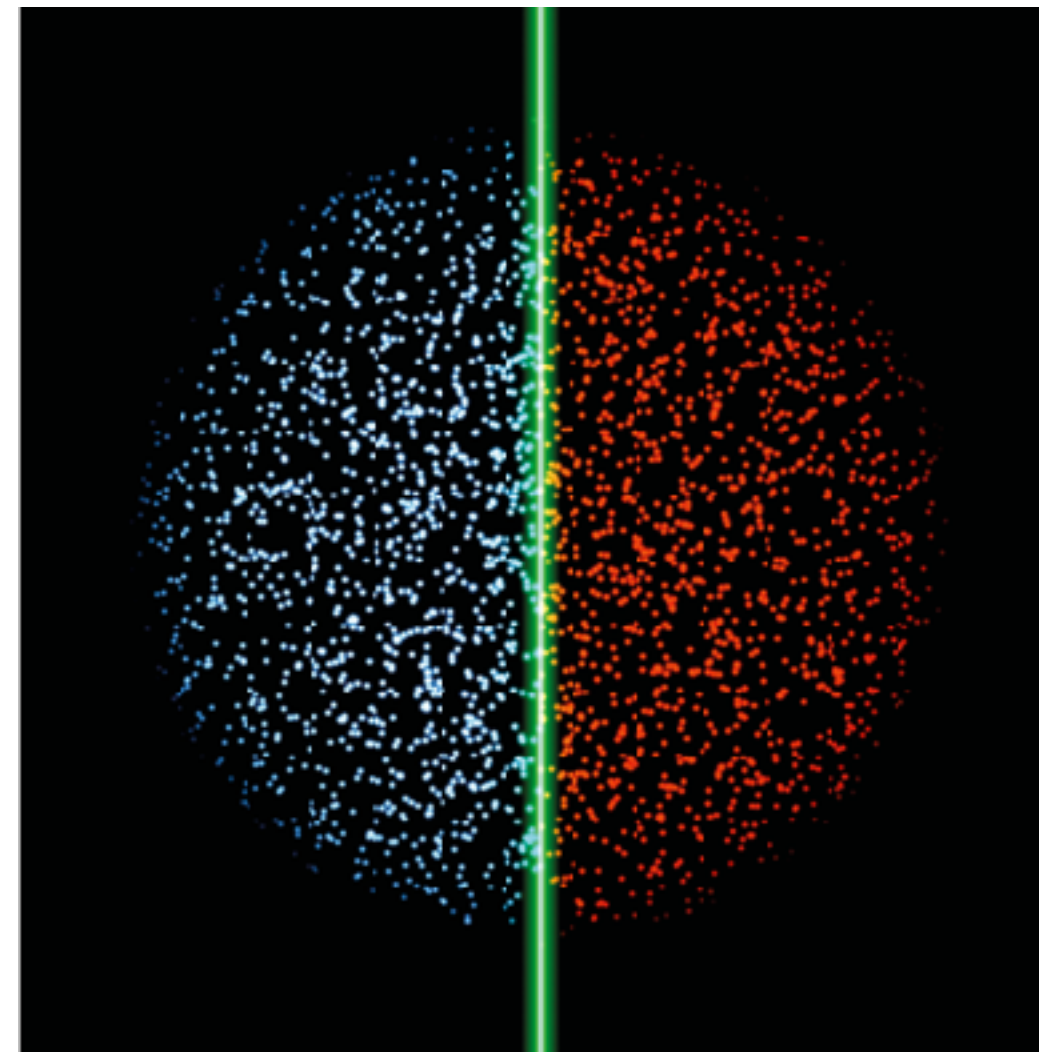


Fluides quantiques couplés et jonctions Josephson



diapositives



notes de cours

1962, Cambridge (UK)



Brian Josephson

Étudiant en thèse sous la direction de Brian Pippard

Suit les cours de P.W. Anderson (Bell Labs) alors en séjour sabbatique en Angleterre

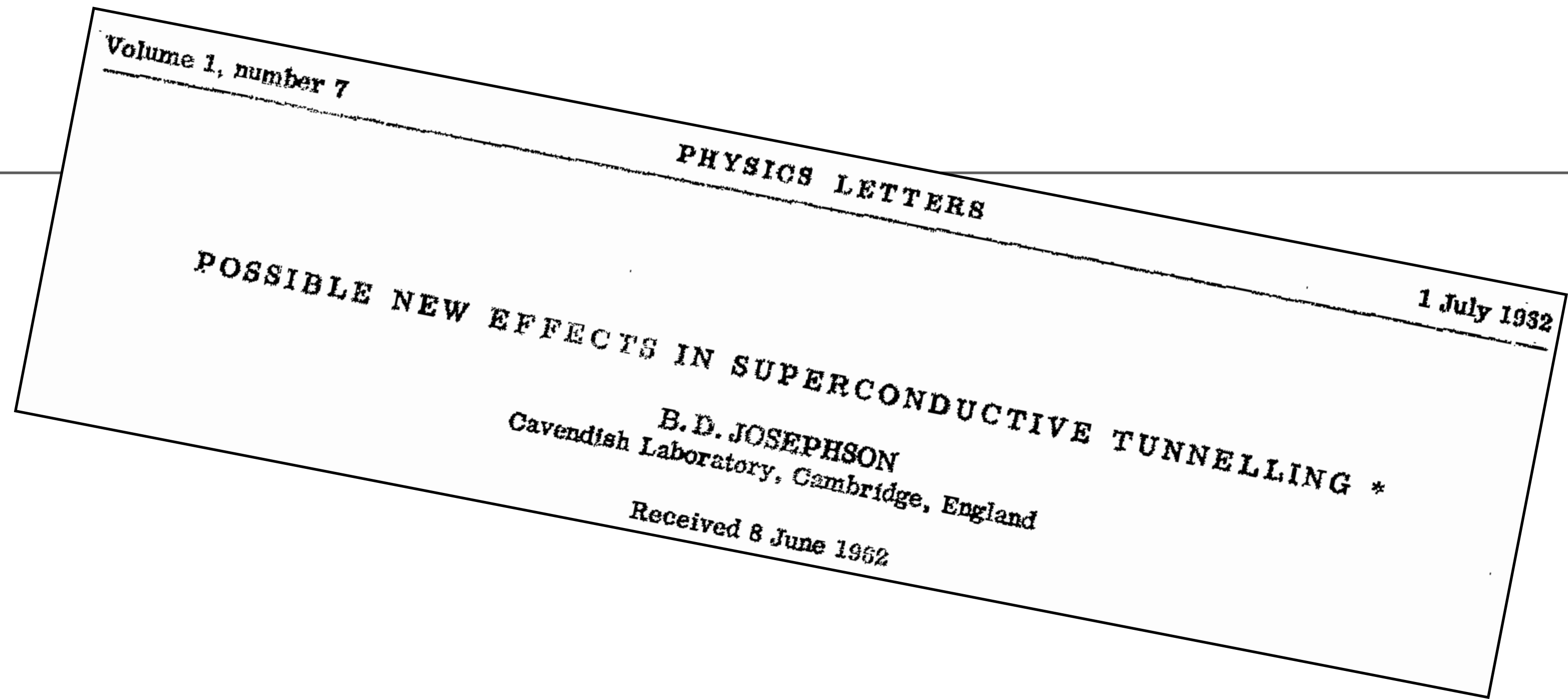
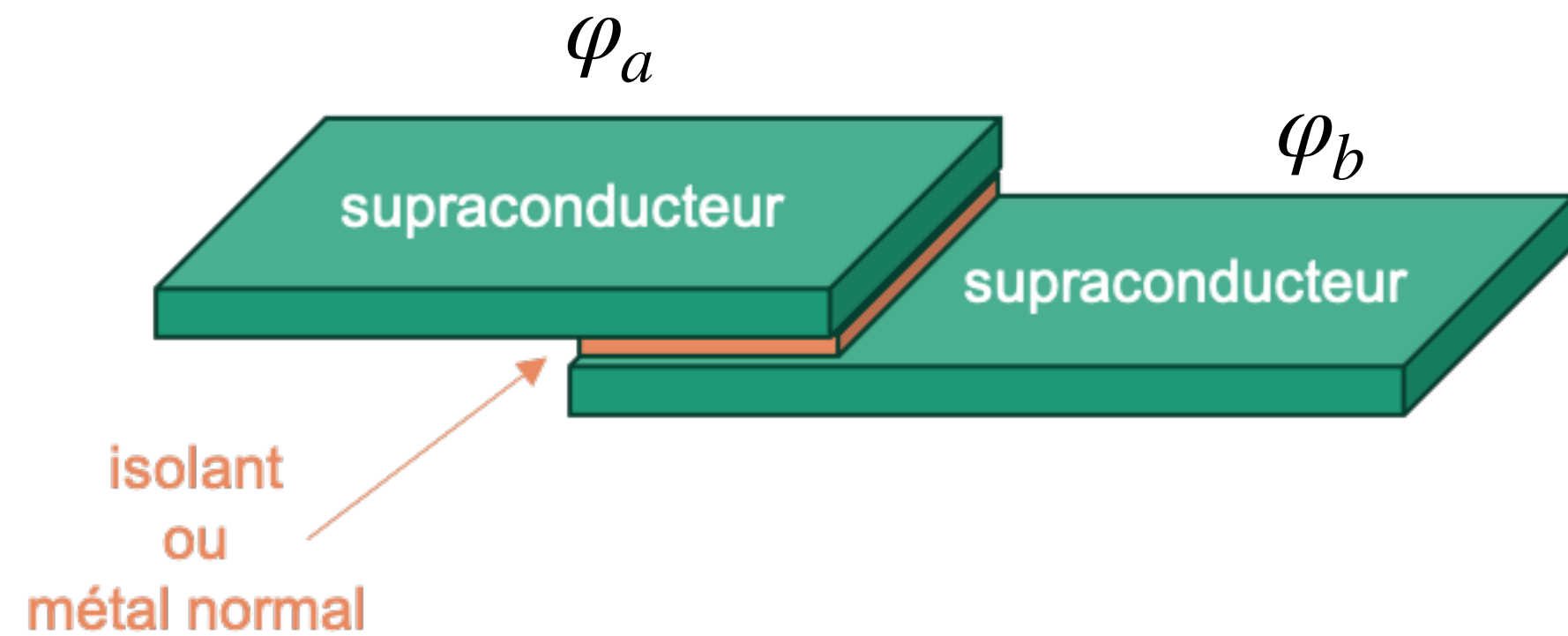


Problème à N corps quantique

Supraconductivité (théorie BCS)

Brisure spontanée de symétrie et fonction d'onde macroscopique

La prédiction de Josephson



En l'absence de différence de potentiel électrique entre les deux supraconducteurs, un courant peut néanmoins circuler entre les deux :

$$I = f(\varphi_a - \varphi_b)$$

φ_a, φ_b : phases des fonctions d'onde associées aux paires de Cooper

La réception de l'idée de Josephson

P.W. Anderson (Physics Today 1970), partisan de l'idée :

In 1962 we had already postulated that superconductivity consisted of coherence of the de Broglie waves representing pairs of electrons inside the superconductor. Prior to Josephson, the phase φ of these macroscopic waves was thought to be unmeasurable in principle ...

D'autres physiciens ont eu une attitude plus circonspecte, comme Bardeen au congrès LT8 à Londres en septembre 1962

**THE NOBEL LAUREATE
VERSUS
THE GRADUATE STUDENT**

Physics Today, July 2001



Confirmation de l'idée de Josephson dès 1963

VOLUME 10, NUMBER 6 PHYSICAL REVIEW LETTERS 15 MARCH 1963

PROBABLE OBSERVATION OF THE JOSEPHSON SUPERCONDUCTING TUNNELING EFFECT

P. W. Anderson and J. M. Rowell
Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, New Jersey
(Received 11 January 1963)

VOLUME 11, NUMBER 2 PHYSICAL REVIEW LETTERS 15 JULY 1963

JOSEPHSON CURRENTS IN SUPERCONDUCTING TUNNELING: THE EFFECT OF MICROWAVES AND OTHER OBSERVATIONS*

Sidney Shapiro
Arthur D. Little, Inc., Cambridge, Massachusetts
(Received 13 June 1963)

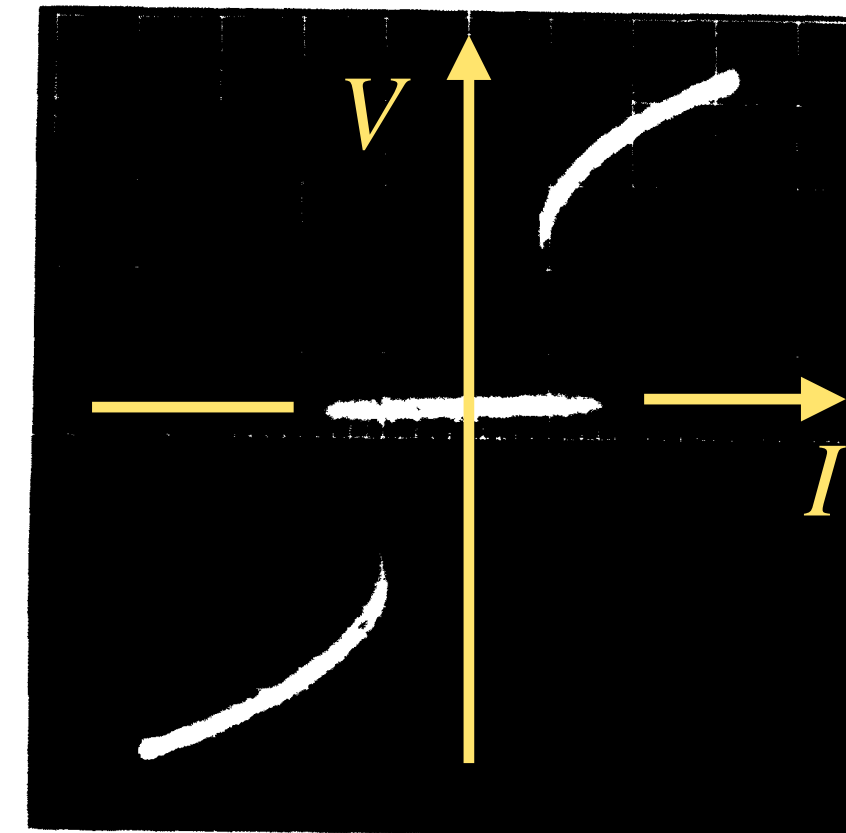


FIG. 1. I - V characteristic near origin showing zero-voltage Josephson current and negative resistance switching trace. Vertical scale $58.8 \mu\text{V}/\text{cm}$, horizontal scale $130 \text{ nA}/\text{cm}$.

existence d'un courant non nul ($\sim \pm 200 \text{ nA}$), en l'absence de voltage

Ont suivi sur des plateformes supraconductrices

- le SQUID (1964): superconducting quantum interference device
- les standards électriques (1969): le Volt Josephson
- L'effet tunnel macroscopique (1985) [prix Nobel 2025]

puis de multiples autres applications, jusqu'aux qubits supraconducteurs (~ 2000)

L'effet Josephson au delà de la supraconductivité

1966-73 : effet Josephson interne (^3He)



1985 : Hélium liquide superfluide (^3He ou ^4He) passant dans des ouvertures sub-microns

Depuis \sim 2005, expériences avec des gaz d'atomes froids manipulés par laser

Plan du cours

Cours 1 : La jonction Josephson et le double puits de potentiel

Cours 2 : La dynamique d'une jonction Josephson et l'effet tunnel macroscopique

Cours 3 : L'effet Josephson alternatif et les résonances de Shapiro

Cours 4 : Les jonctions internes et la représentation de Schwinger

Cours 5 : Les condensats fragmentés

Cours 6 : Du SQUID supraconducteur au SQUID atomique

Séminaires

Aujourd'hui : Christophe Salomon, Laboratoire Kastler Brossel, École Normale Supérieure -PSL
Une horloge à atomes de césium froids dans l'espace : la mission PHARAO/ACES

Vendredi 29 mai : Monika Aidelsburger, Max-Planck-Institute of Quantum Optics and Ludwig-Maximilians-University, Munich
Quantum simulation – Engineering & understanding quantum systems atom-by-atom

Vendredi 5 juin : Atac Imamoglu, ETH Zurich
Optical investigation of strongly correlated electrons

Vendredi 12 juin : Benoît Vermersch, Quobly & Université Grenoble Alpes
Observing the quantum Mpemba effect in a quantum processor

Vendredi 19 juin : Klaus Mølmer, Københavns Universitet & Niels Bohr Institute, Copenhagen
Sensing with quantum trajectories

Vendredi 26 juin : Eleni Diamanti, LIP6 Sorbonne Université
Ressources et applications des réseaux quantiques

Cours 1

La jonction Josephson et le double puits de potentiel

Plan de ce cours

Un peu d'électrocinétique de base

Les dipôles usuels (R,L,C), formulation lagrangienne du circuit LC

Les deux relations de Josephson

Le modèle RCSJ : Resistively and capacitively shunted junction

Jonction Josephson pour des gaz d'atomes froids

Le double puits de potentiel

Les dipôles usuels en électrocinétique

Résistance R , capacité C , inductance L

Le circuit LC et sa fréquence propre $\omega = 1/\sqrt{LC}$

Énergies associées $E = \int^t V(t') I(t') dt'$

Formulation lagrangienne du circuit LC

Formulation hamiltonienne du circuit LC

Quantification du circuit LC

Degré de liberté décrit par une paire de variables conjuguées $\{\Phi, p_\Phi\}$ ou encore $\{\Phi, Q\}$

Quantification "canonique": opérateurs $\{\hat{\Phi}, \hat{Q}\}$ avec la relation de commutation $[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar$

On se donne une unité de charge "naturelle" q_0 , par exemple la charge $q_0 = 2e$ pour une paire de Cooper

$$\text{unité naturelle de flux : } \Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{q_0}$$

Opérateurs sans dimension : $\hat{\varphi} = 2\pi \frac{\hat{\Phi}}{\Phi_0}$ (flux réduit) et $\hat{n} = \frac{\hat{Q}}{q_0}$ (nombre de charges)

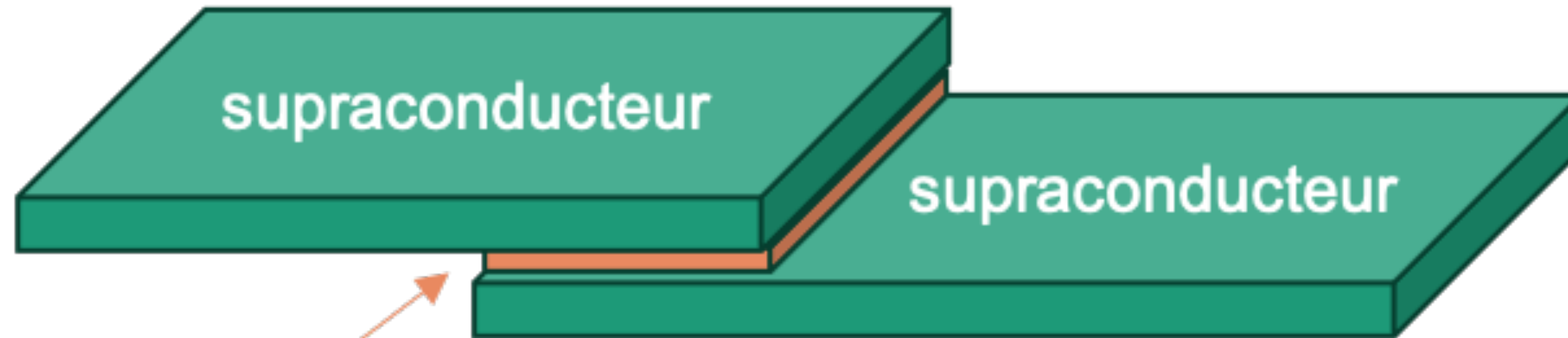
$$\boxed{[\hat{\varphi}, \hat{n}] = i}$$

relation importante que l'on retrouvera pour les jonctions Josephson

2.

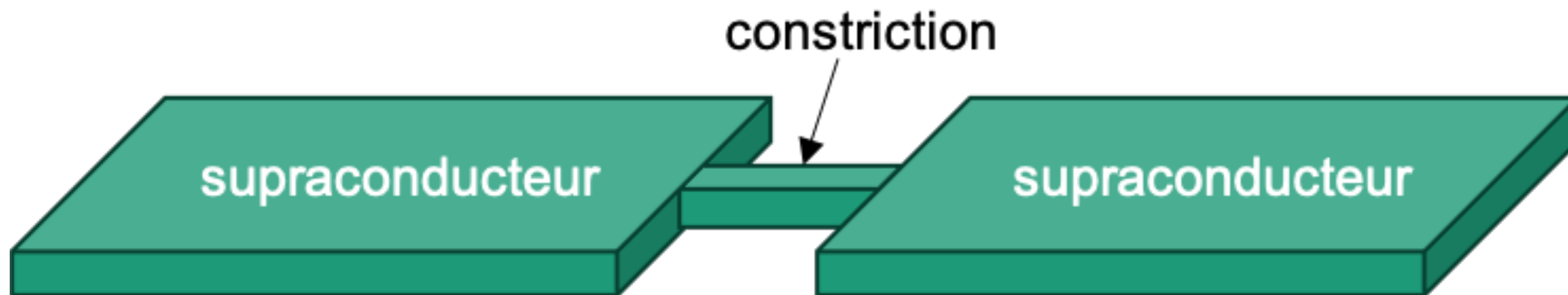
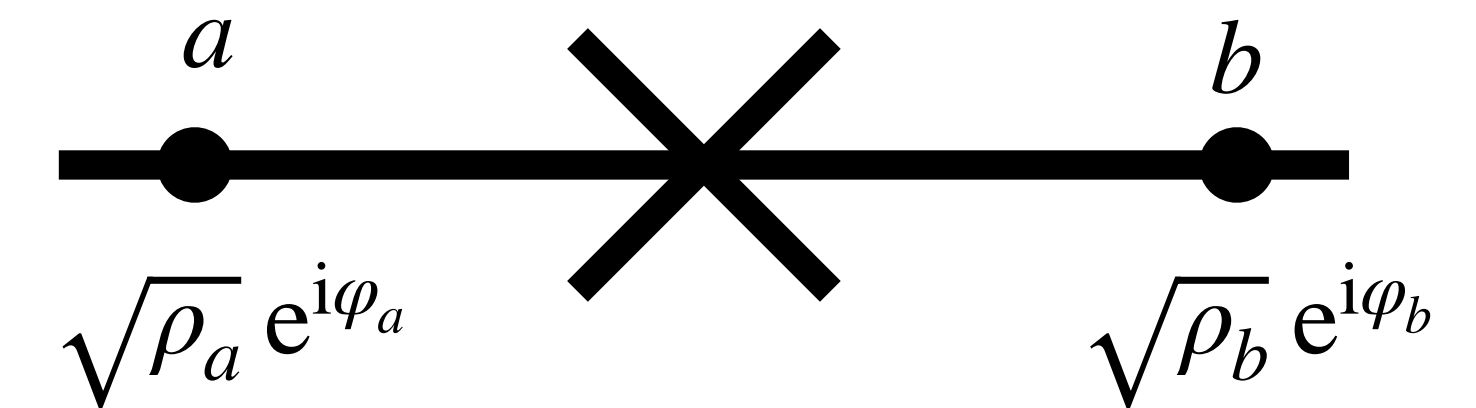
La jonction Josephson

Géométries possibles



isolant, métal normal,...

épaisseur ~ quelques dizaines de nanomètres



lien faible

Les deux relations de Josephson

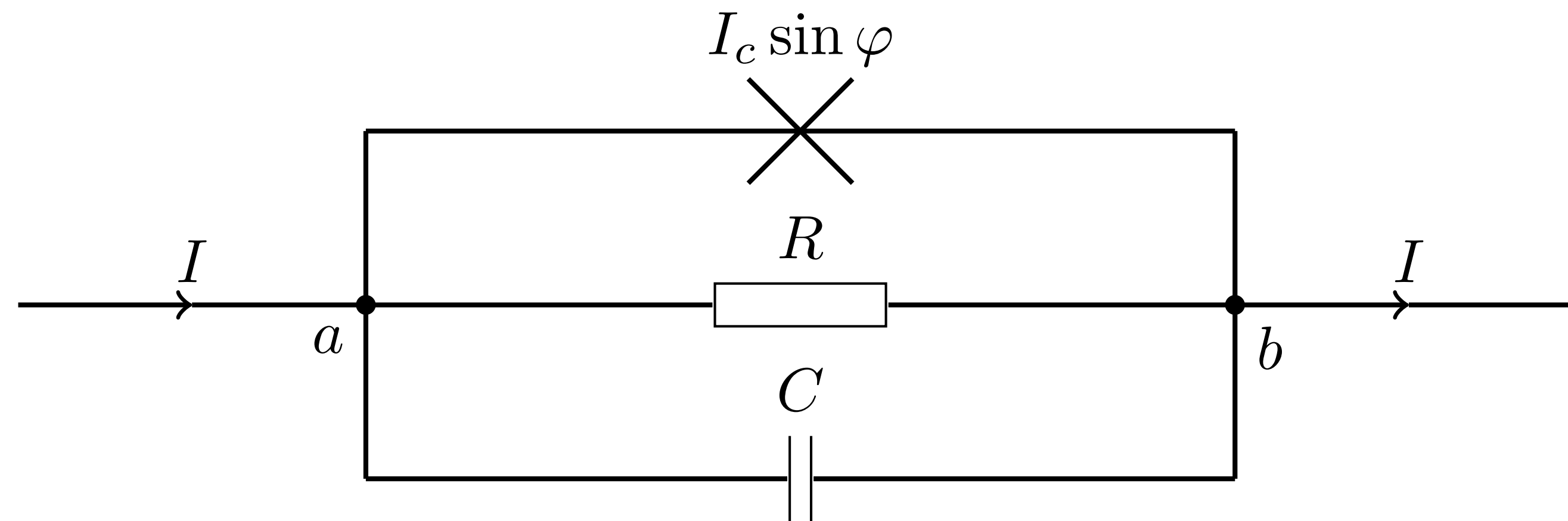
Relation 1 : lien entre courant et différence de phase

Relation 2 : lien entre l'évolution de la phase et la tension

Le modèle RCSJ (resistively and capacitively shunted junction)

Les deux relations de Josephson ne suffisent pas à décrire l'ensemble des phénomènes possibles

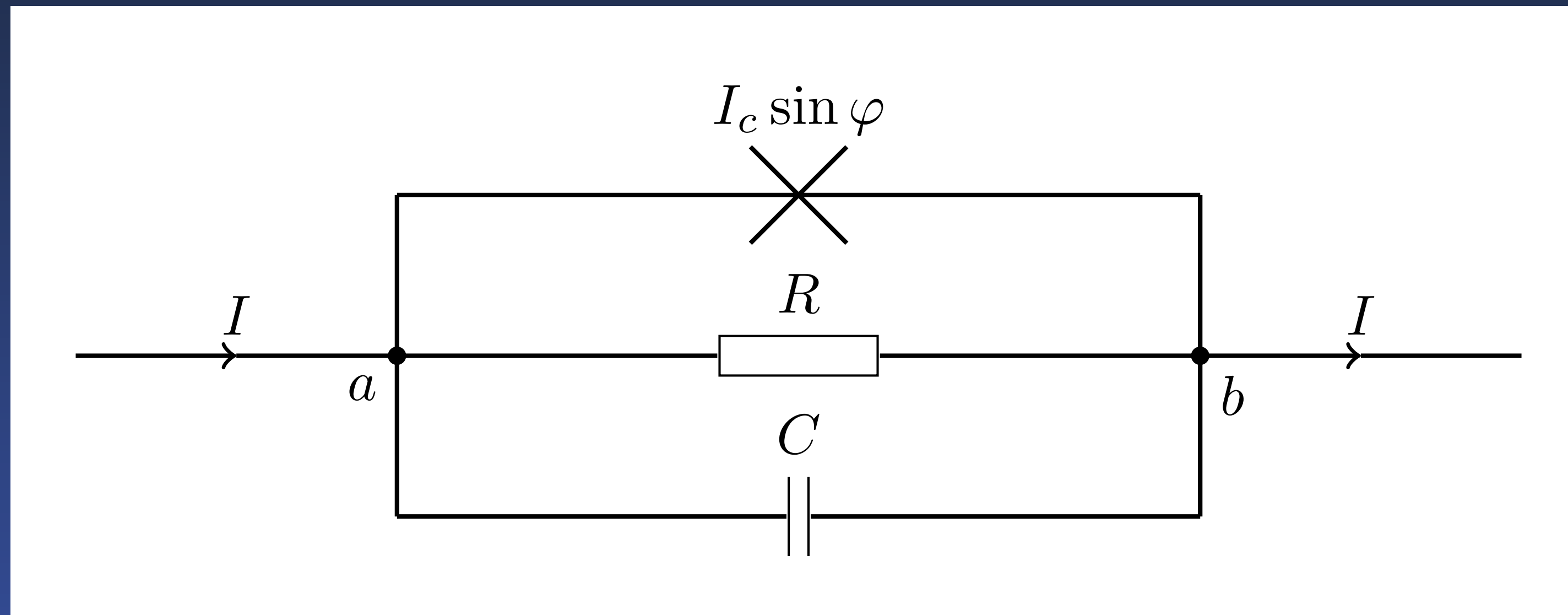
Par exemple : que se passe-t-il si on branche un générateur de courant délivrant une intensité supérieure à I_c ?



Capacité formée par les deux parois de la jonction (10^{-15} à 10^{-10} Farad)

Dissipation décrite par R d'origine variée (0.1 à 100 Ohms) : courant de quasi-particules, inhomogénéités de la barrière, etc.

Le courant total dans le modèle RCSJ



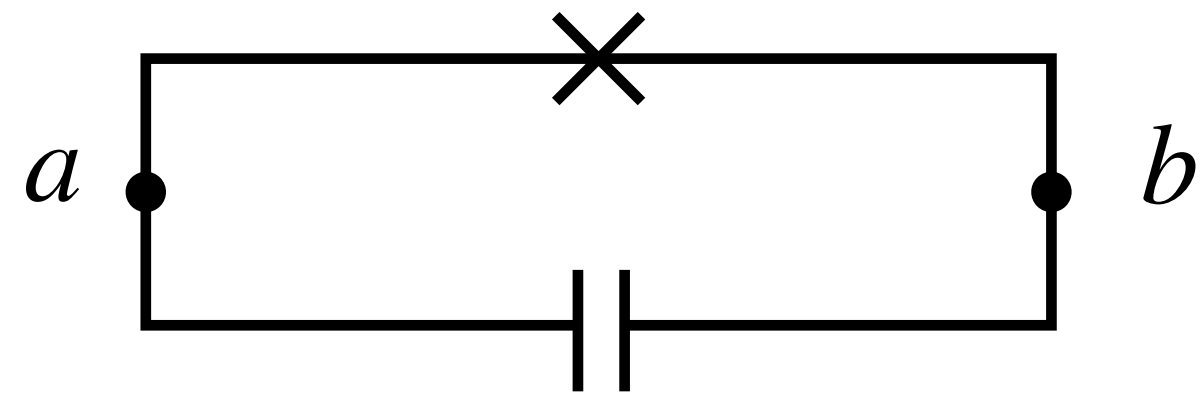
Les énergies en présence dans le cas sans dissipation ($R = \infty$) et un courant extérieur $I = 0$

- Énergie liée à la capacité C
- Énergie liée à la jonction idéale $I = I_c \sin \varphi$

jonction \Leftrightarrow pendule pesant

Les oscillations plasma

Petites oscillations du “pendule” autour de sa position d’équilibre, pour un courant extérieur $I = 0$



$$0 = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar C}{2e} \ddot{\varphi} \quad \text{avec} \quad \sin \varphi \approx \varphi$$

Mouvement harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{2eI_c}{\hbar C}}$

Situation voisine du circuit LC avec une paramétrisation en termes d’énergies caractéristiques :

$$E_C \equiv \frac{q_0^2}{C} = \frac{(2e)^2}{C} \quad E_J \equiv \frac{\hbar I_c}{2e} \quad \Longrightarrow \quad \hbar\omega = \sqrt{E_C E_J}$$

Valeurs typiques : $I_c = 2 \mu\text{A}$ $C = 1 \text{pF}$ $\omega/(2\pi) = 10 \text{GHz}$

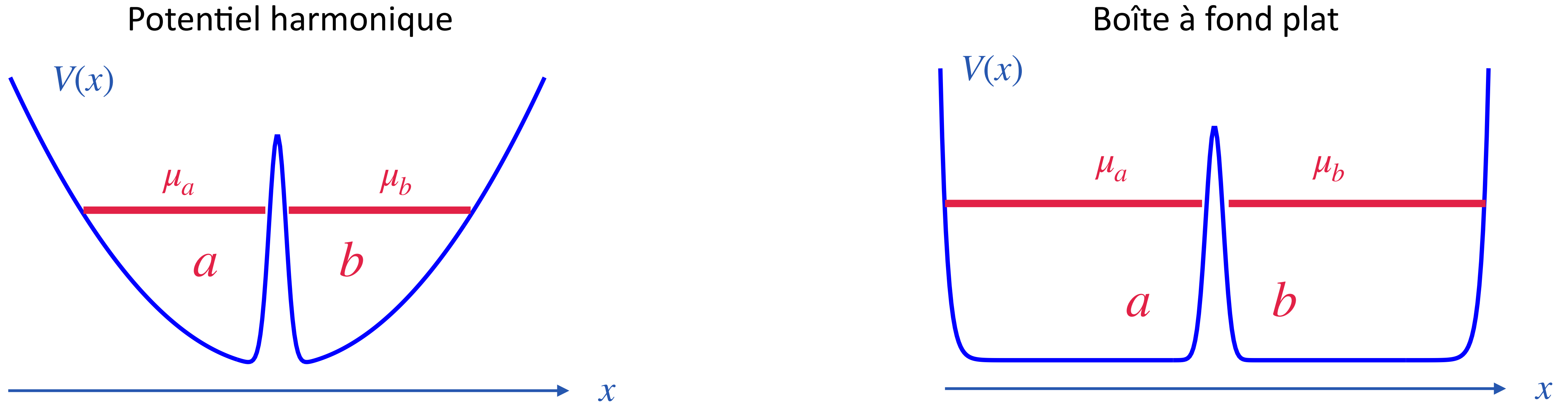
3.

Jonction Josephson pour un condensat de Bose-Einstein d'atomes

Description par une approche champ classique : l'équation de Schrödinger non-linéaire / Gross-Pitaevskii

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi}_{\text{cinétique}} + \underbrace{V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t)}_{\text{potentiel}} + \underbrace{Ng |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \psi(\mathbf{r}, t)}_{\text{interaction}}$$

Le double puits



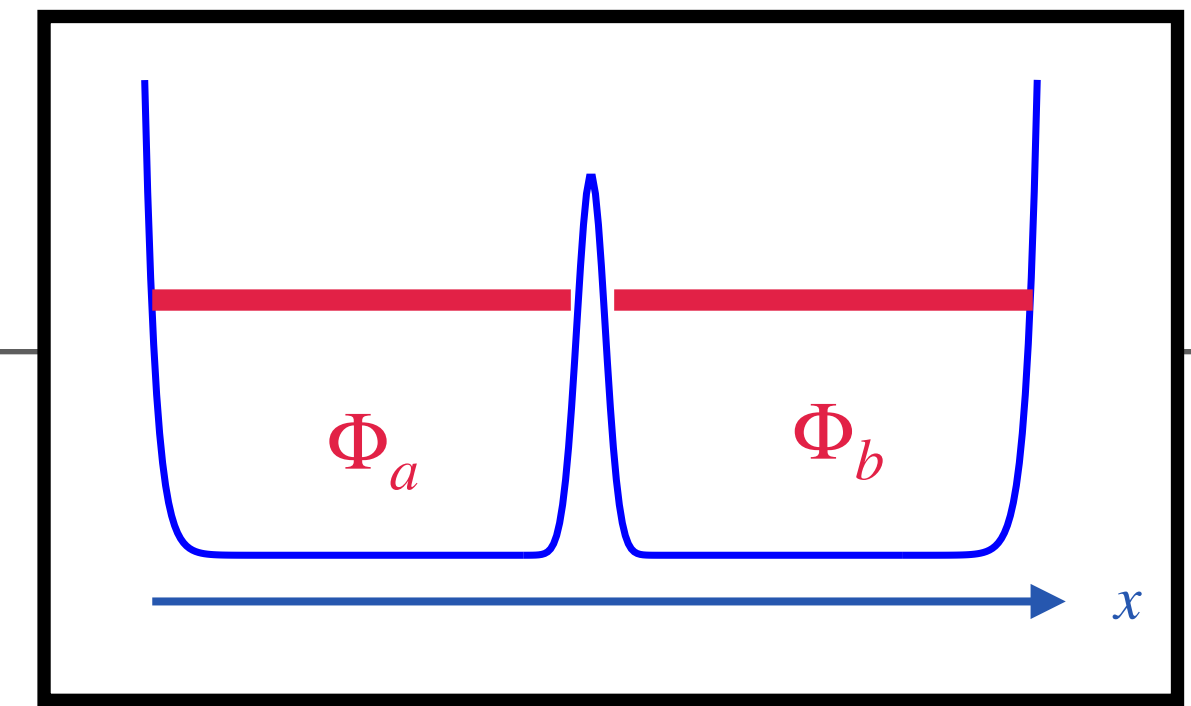
Barrière centrale formée par un faisceau laser très focalisé (\sim micromètre)

Hauteur de la barrière \gtrsim potentiel chimique μ du fluide : franchissement possible par effet tunnel

Différence importante avec un supraconducteur :

- Le supraconducteur est un système ouvert et la densité de charges reste constante
- Le fluide atomique est un système isolé et le nombre total d'atomes $N_a + N_b$ reste constant

Modèle à deux modes



On décrit l'état du système par une fonction d'onde macroscopique :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \alpha_a(t) \Phi_a(\mathbf{r}) + \alpha_b(t) \Phi_b(\mathbf{r}) \quad |\alpha_a|^2 + |\alpha_b|^2 = 1$$

Les modes spatiaux $\Phi_a(\mathbf{r})$ et $\Phi_b(\mathbf{r})$ sont supposés fixes (indépendants du temps)

L'évolution des coefficients $\alpha_a(t)$ et $\alpha_b(t)$ peut être obtenue

- en projetant l'équation de Gross-Pitaevskii $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \dots$ sur les deux modes $\Phi_a(\mathbf{r})$ et $\Phi_b(\mathbf{r})$
- par une approche variationnelle dépendant du temps à partir de la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevskii $E[\alpha_a, \alpha_b]$

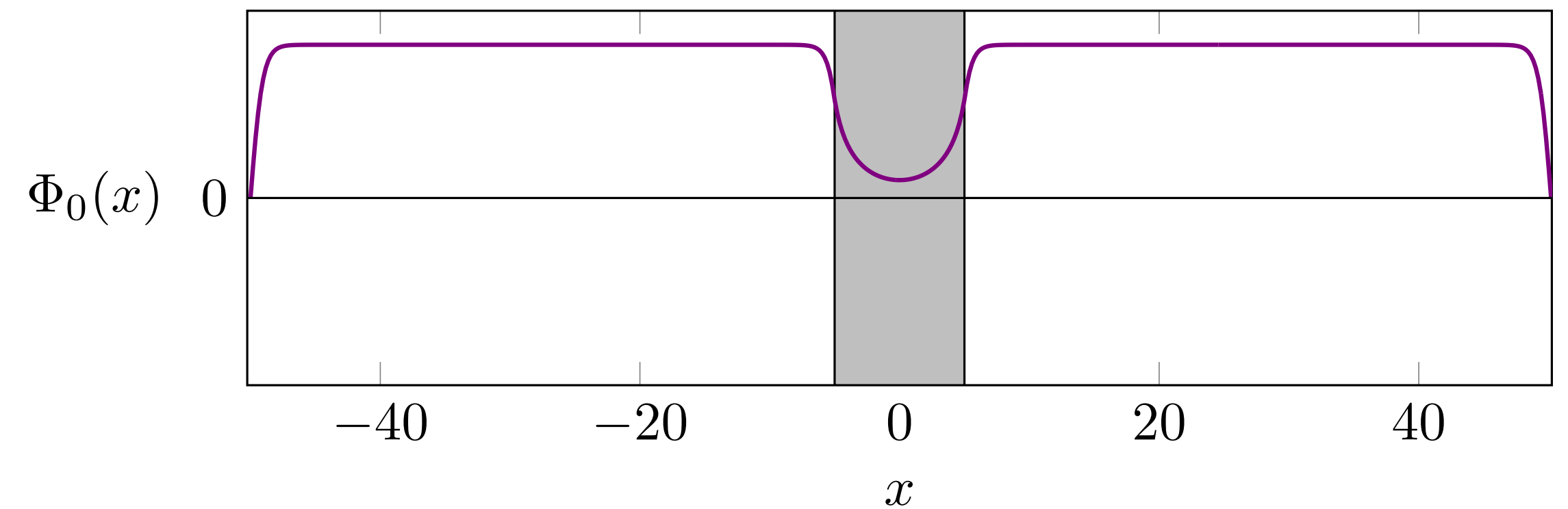
résultats identiques

Construction des deux modes Φ_a et Φ_b

On considère pour simplifier le cas symétrique

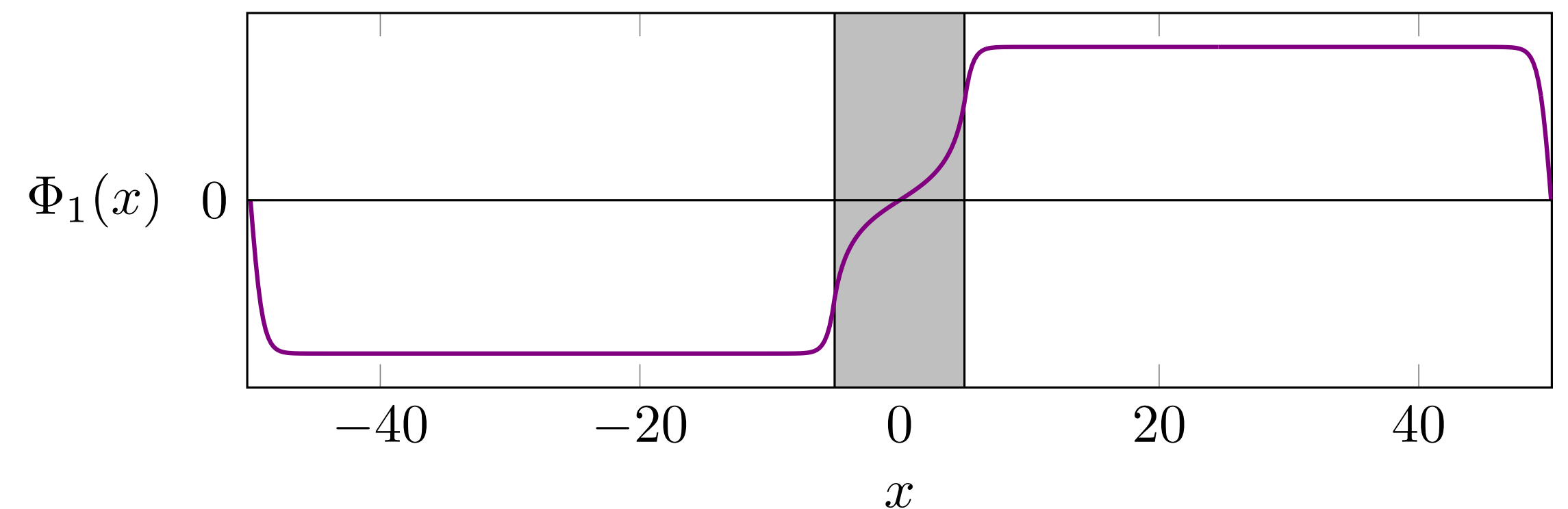
Etat fondamental de l'énergie de Gross-Pitaevskii

on le choisit réel et positif



Etat excité de l'énergie de Gross-Pitaevskii avec une différence de phase de π entre les deux côtés

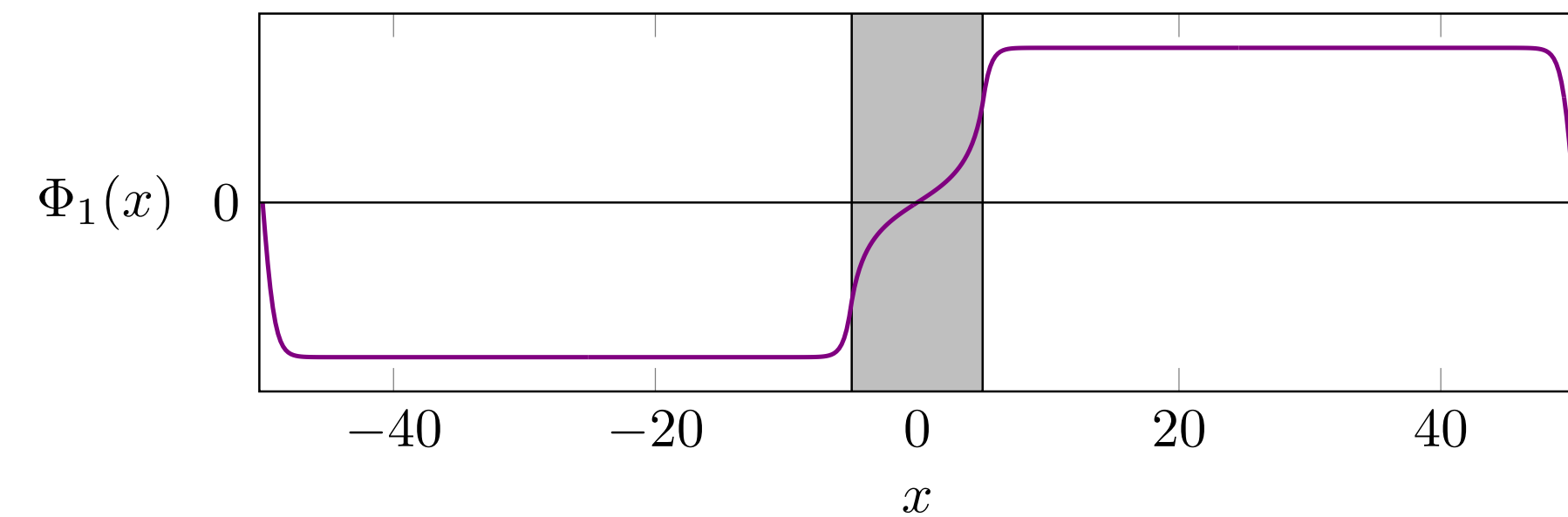
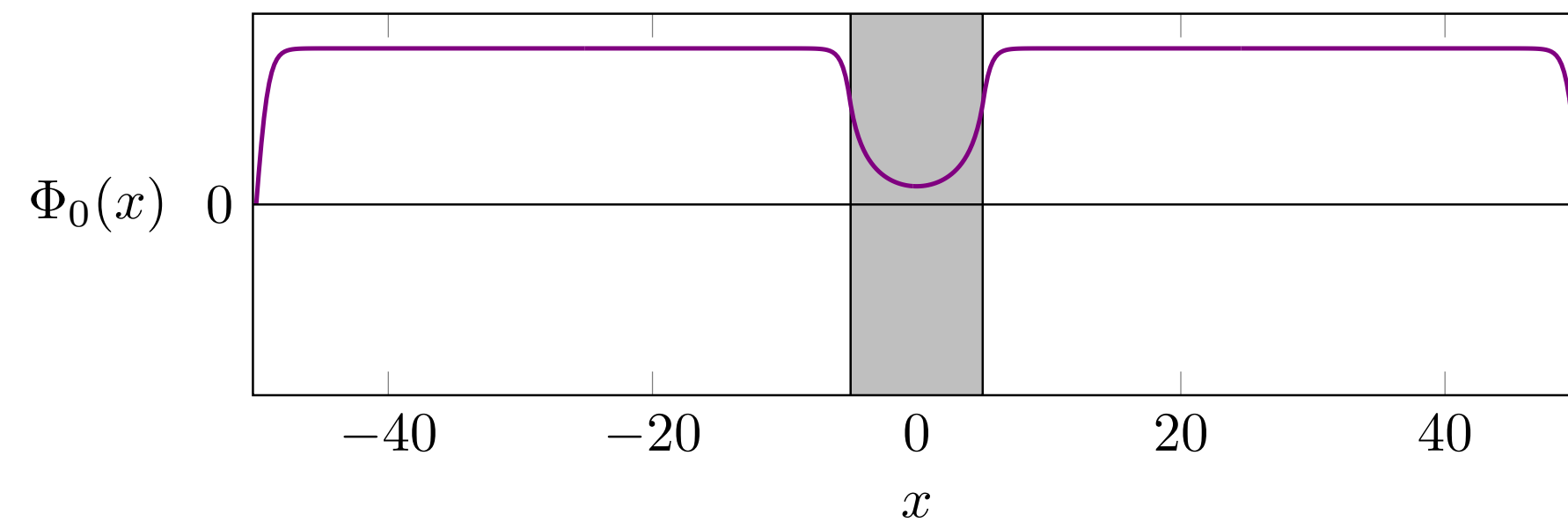
on le choisit réel et positif pour $x > 0$



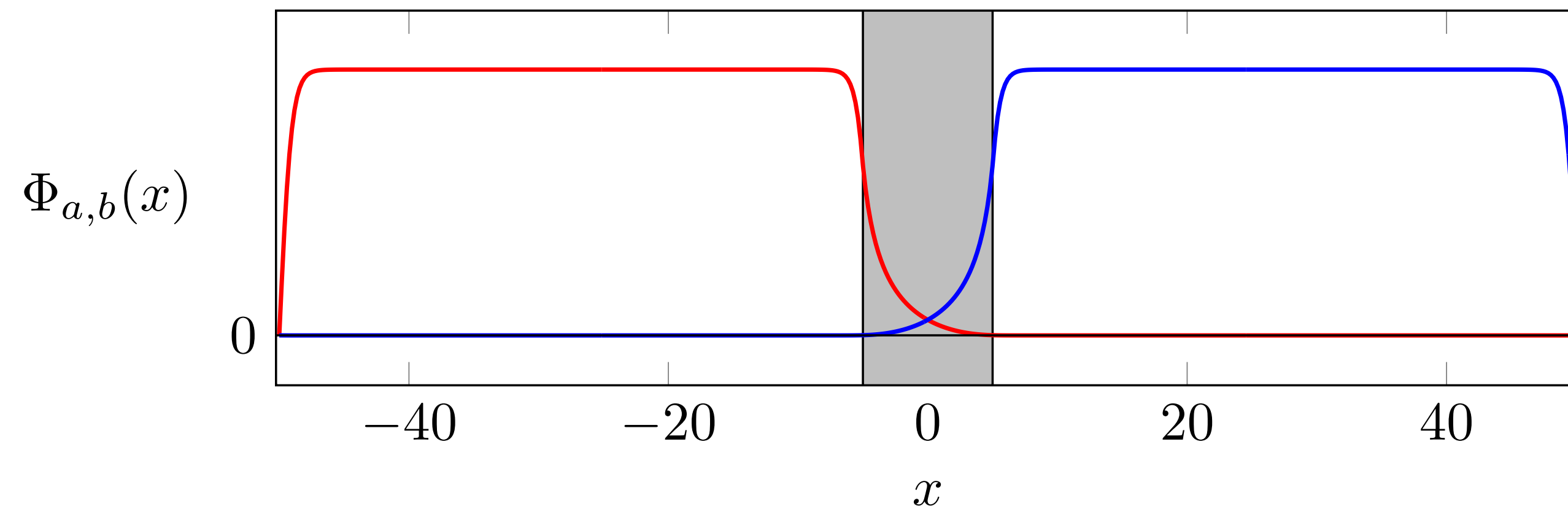
La différence d'énergie $E_1 - E_0$ est due au couplage tunnel : $E_1 - E_0 \ll$ potentiel chimique

Construction des deux modes Φ_a et Φ_b (suite)

On a construit les états stationnaires Φ_0 et Φ_1 :



On considère les combinaisons linéaires symétriques et antisymétriques :



$$\Phi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_0(x) - \Phi_1(x))$$

$$\Phi_b(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_0(x) + \Phi_1(x))$$

Limitation de cette approche à deux modes

Les états accessibles :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \alpha_a(t) \Phi_a(\mathbf{r}) + \alpha_b(t) \Phi_b(\mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad |\alpha_a|^2 + |\alpha_b|^2 = 1$$

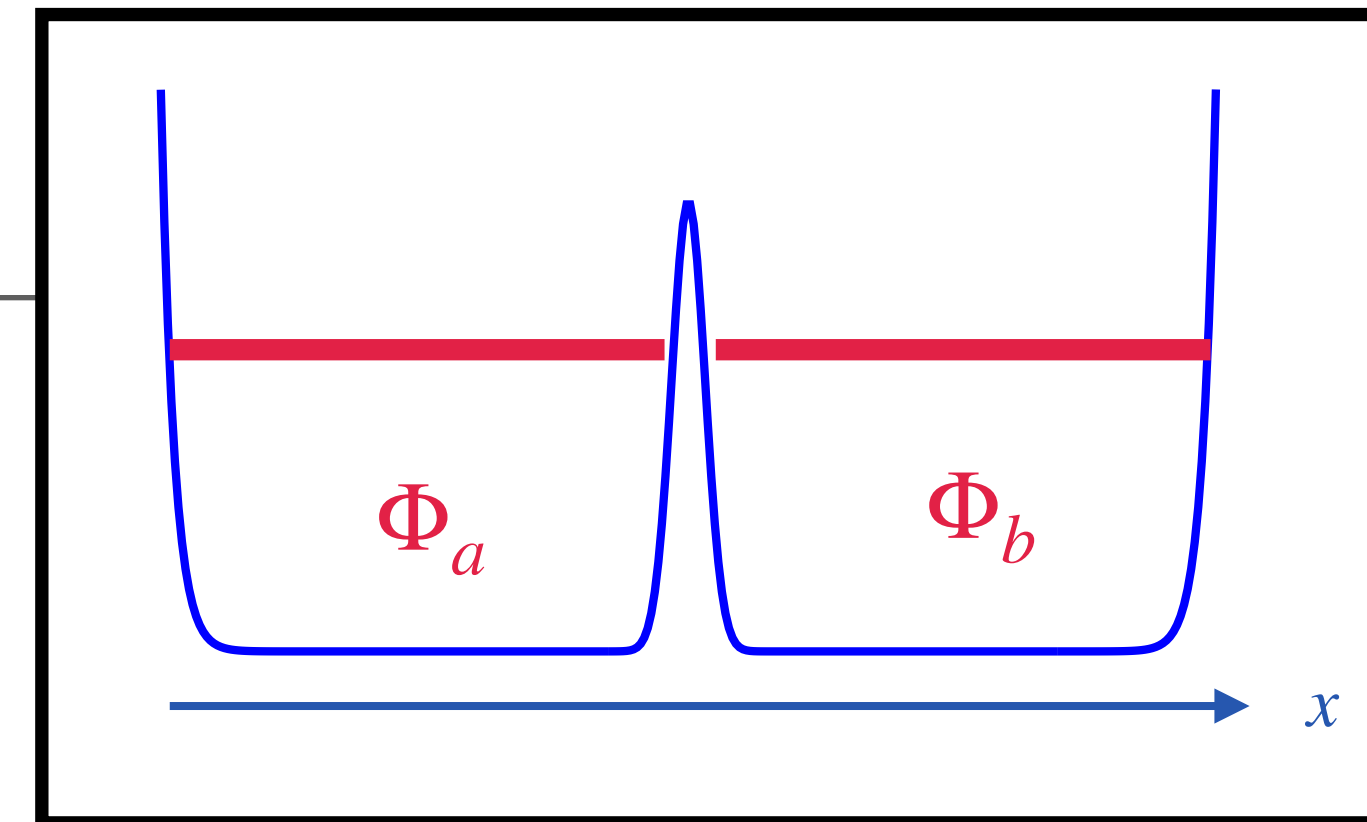
Nombre de particules dans chaque mode : $N_a = N |\alpha_a|^2$ $N_b = N |\alpha_b|^2$

- Approche bien adaptée pour décrire des situations proches de l'équilibre

$$N_a \sim N/2 \qquad N_b \sim N/2$$

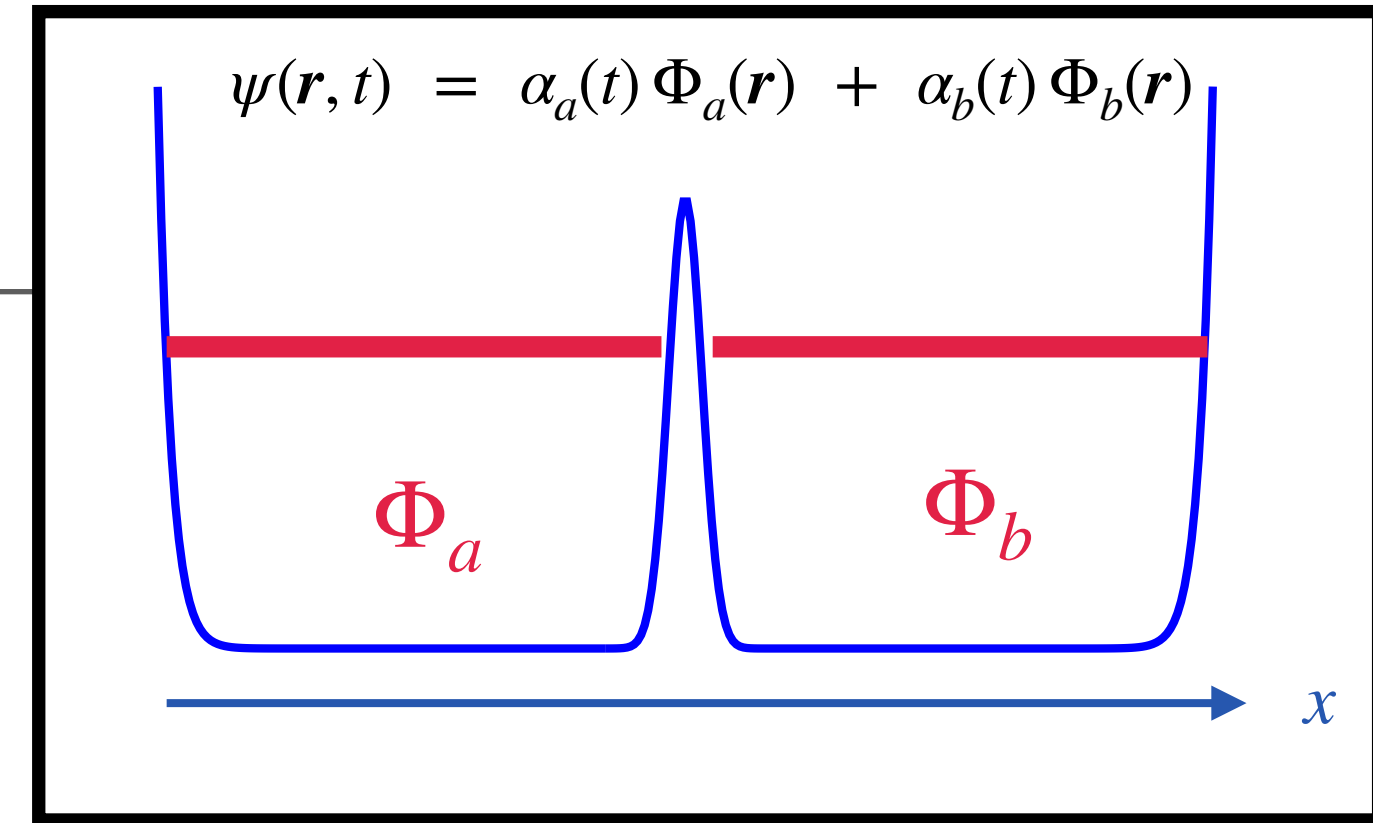
- Néglige toutes les excitations à l'intérieur d'un des deux puits

correct si on se limite à des énergies d'excitation $\sim E_1 - E_0$



Variables n, φ

Partant de la situation avec \bar{N}_a et \bar{N}_b atomes de part et d'autre de la barrière, on a à l'instant t :



$$N_a(t) = N |\alpha_a(t)|^2 = \bar{N}_a + n(t)$$

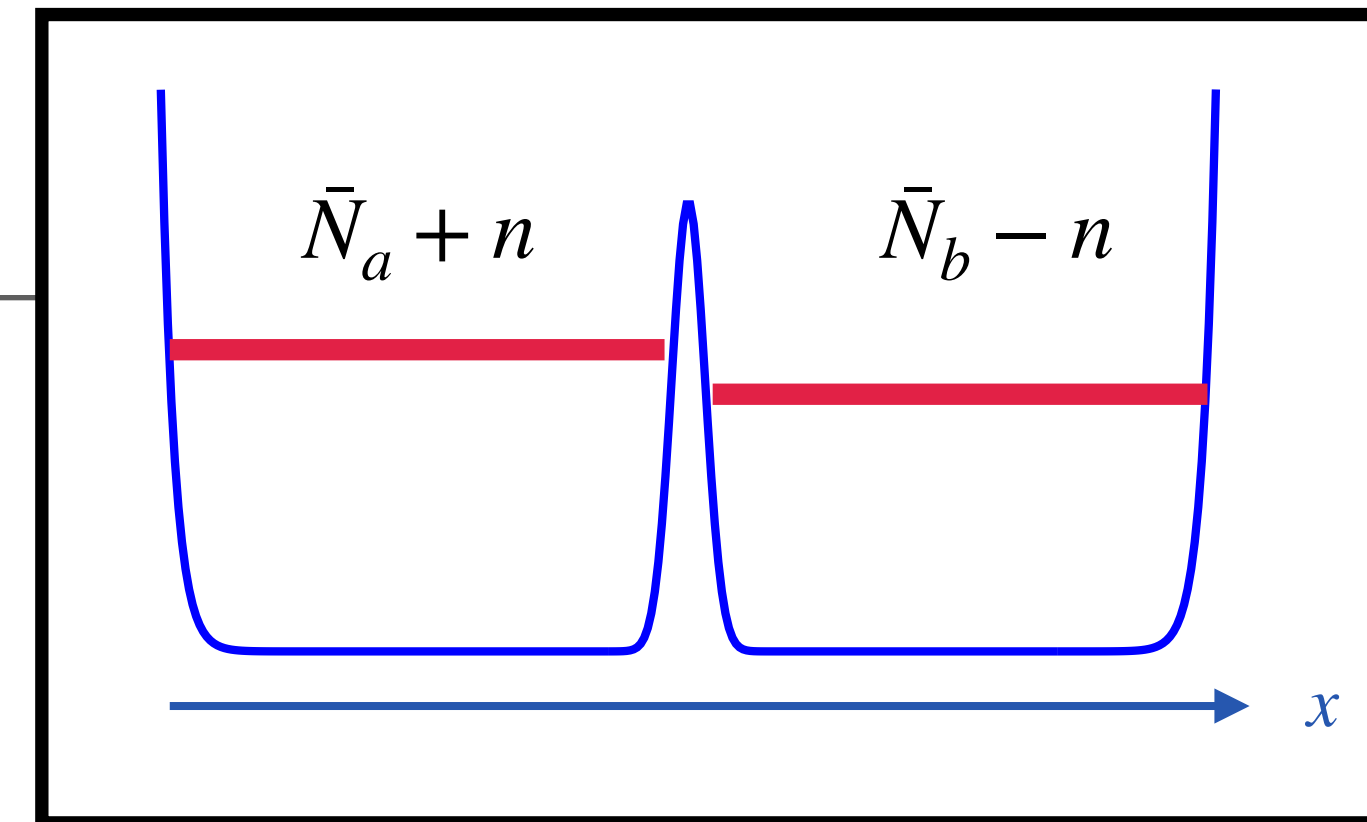
$$N_b(t) = N |\alpha_b(t)|^2 = \bar{N}_b - n(t)$$

On introduit également les phases φ_a et φ_b : $\alpha_a(t) = |\alpha_a| e^{i\varphi_a}$ $\alpha_b(t) = |\alpha_b| e^{i\varphi_b}$

Phase relative : $\varphi \equiv \varphi_a - \varphi_b$

La dynamique du double puits peut se décrire en terme d'équations couplées pour n et φ

L'énergie du double puits (cas symétrique)



Energie totale : $E(n, \varphi) = E_a(N_a) + E_b(N_b) + E_{\text{tunnel}}(n, \varphi)$

Développement pour $n \ll N$:

$$E_a(N_a) = E_a(\bar{N}_a) + \left(\frac{\partial E_a}{\partial N_a} \right) n + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E_a}{\partial N_a^2} \right) n^2 + \dots$$

$$E_b(N_b) = E_b(\bar{N}_b) - \left(\frac{\partial E_b}{\partial N_b} \right) n + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E_b}{\partial N_b^2} \right) n^2 + \dots$$

$$\frac{\partial E_a}{\partial N_a} = \bar{\mu}_a : \text{potentiel chimique}$$

$$\frac{\partial^2 E_a}{\partial N_a^2} = \frac{\partial \mu_a}{\partial N_a} \equiv U_a : \text{compressibilité}$$

⇒ Énergies sur site : $E_a(N_a) + E_b(N_b) = \text{Cte} + \overline{\Delta\mu} n + \frac{1}{2} E_C n^2$

$$\overline{\Delta\mu} = \bar{\mu}_a - \bar{\mu}_b \quad E_C = \frac{\partial \mu_a}{\partial N_a} + \frac{\partial \mu_b}{\partial N_b} \text{ joue le rôle d'une énergie de charge}$$

L'énergie tunnel $E_{\text{tunnel}}(n, \varphi)$

Hamiltonien tunnel en seconde quantification : $\hat{H}_{\text{tunnel}} \propto - \left(\hat{a}\hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{b} \right)$

Dans l'approximation "champ classique" utilisée ici :

$$\hat{a} \longrightarrow \sqrt{\bar{N}_a} e^{i\varphi_a}$$

$$\hat{a}^\dagger \longrightarrow \sqrt{\bar{N}_a} e^{-i\varphi_a}$$

$$\hat{b} \longrightarrow \sqrt{\bar{N}_b} e^{i\varphi_b}$$

$$\hat{b}^\dagger \longrightarrow \sqrt{\bar{N}_b} e^{-i\varphi_b}$$

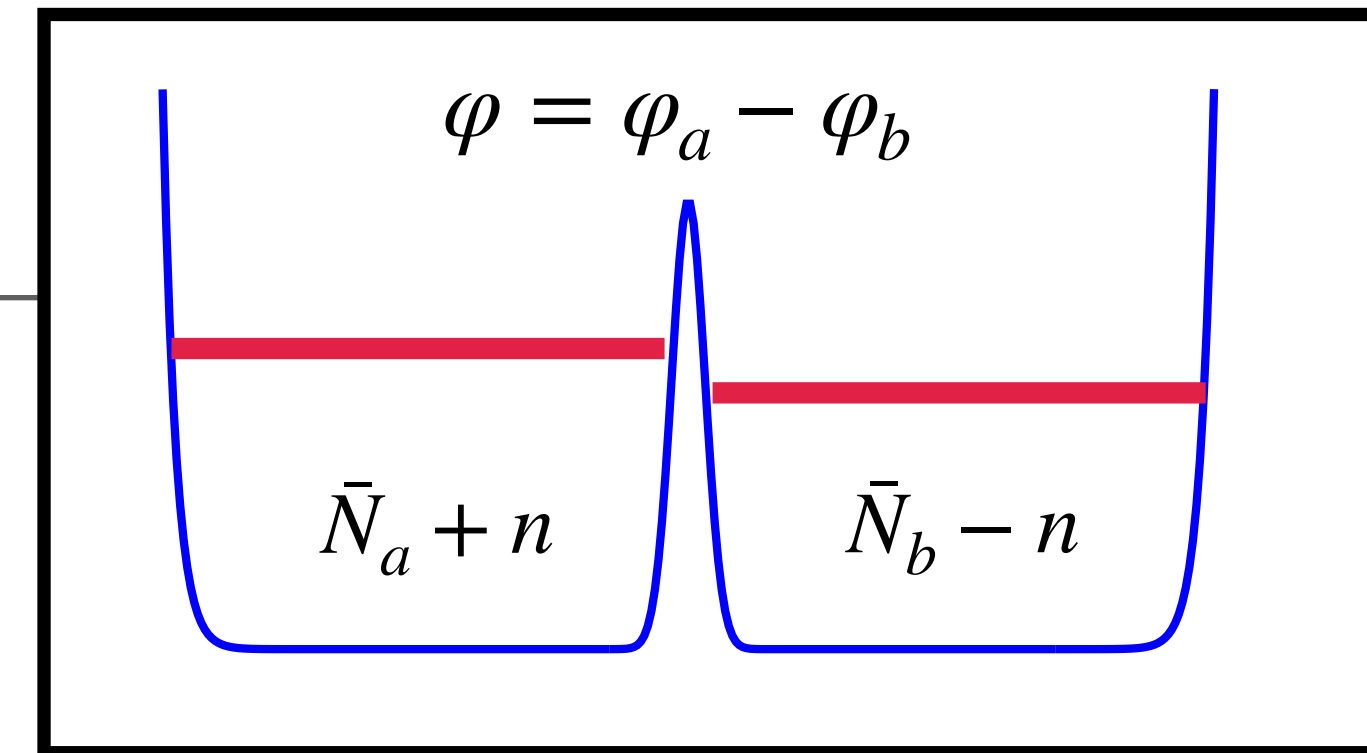
dont on déduit l'énergie tunnel :

$$\hat{H}_{\text{tunnel}} \longrightarrow E_{\text{tunnel}} \propto - \sqrt{\bar{N}_a \bar{N}_b} \left(e^{i(\varphi_a - \varphi_b)} + \text{c.c.} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\bar{N}_a \bar{N}_b} = \sqrt{\bar{N}_a \bar{N}_b} \gamma(n) \\ e^{i(\varphi_a - \varphi_b)} + \text{c.c.} = 2 \cos(\varphi_a - \varphi_b) \end{array} \right. \quad \gamma(n) = 1 \text{ à l'équilibre}$$

On écrira cette énergie sous la forme : $E_{\text{tunnel}} = - E_J \gamma(n) \cos \varphi$

Le terme $\gamma(n)$ est nouveau par rapport aux jonctions supraconductrices !



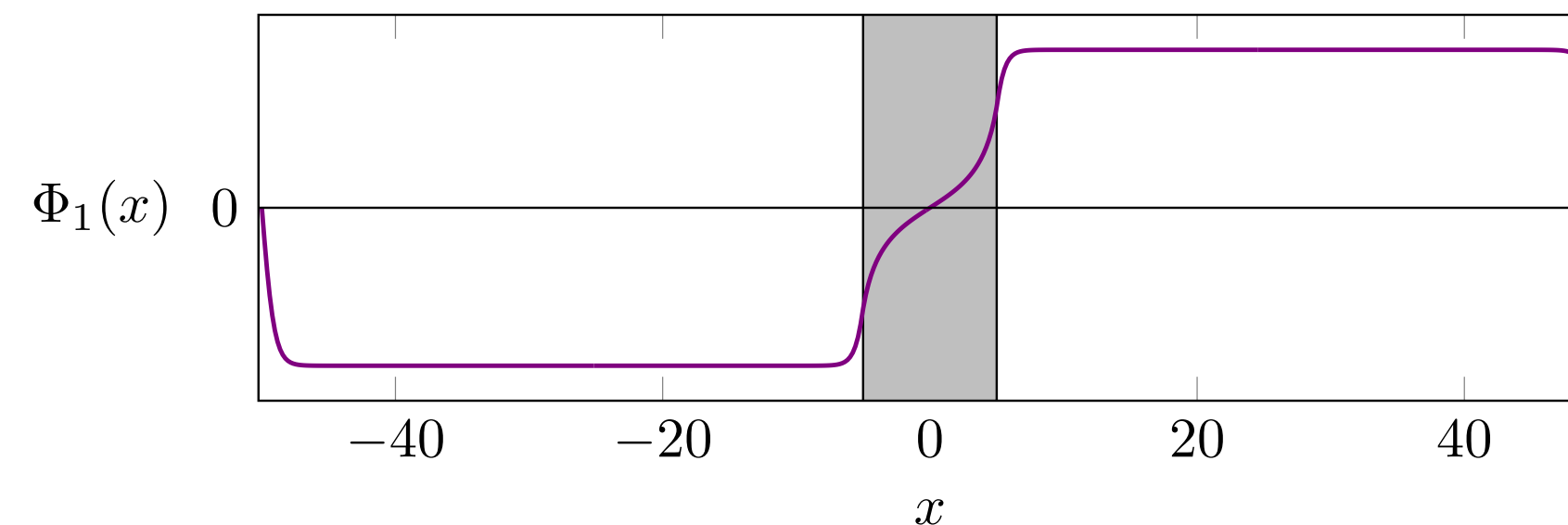
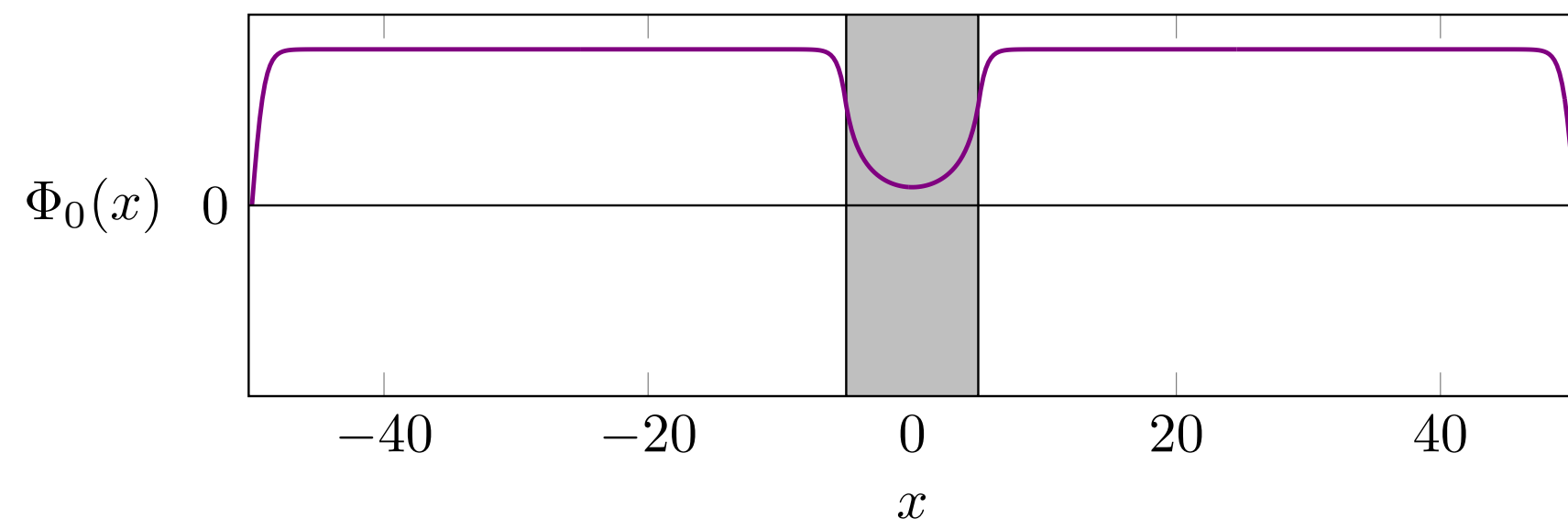
On récapitule...

$$E(n, \varphi) = E_a(N_a) + E_b(N_b) + E_{\text{tunnel}}(n, \varphi)$$

Énergie totale (à une constante additive près) :

$$E(n, \varphi) = \overline{\Delta\mu} n + \frac{E_C}{2} n^2 - E_J \gamma(n) \cos \varphi$$

- Détermination de E_C à partir de la compressibilité du gaz : $E_C \sim \frac{\partial \mu}{\partial N}$
- Détermination de E_J en comparant les deux situations $\{n = 0, \varphi = 0\}$ et $\{n = 0, \varphi = \pi\}$

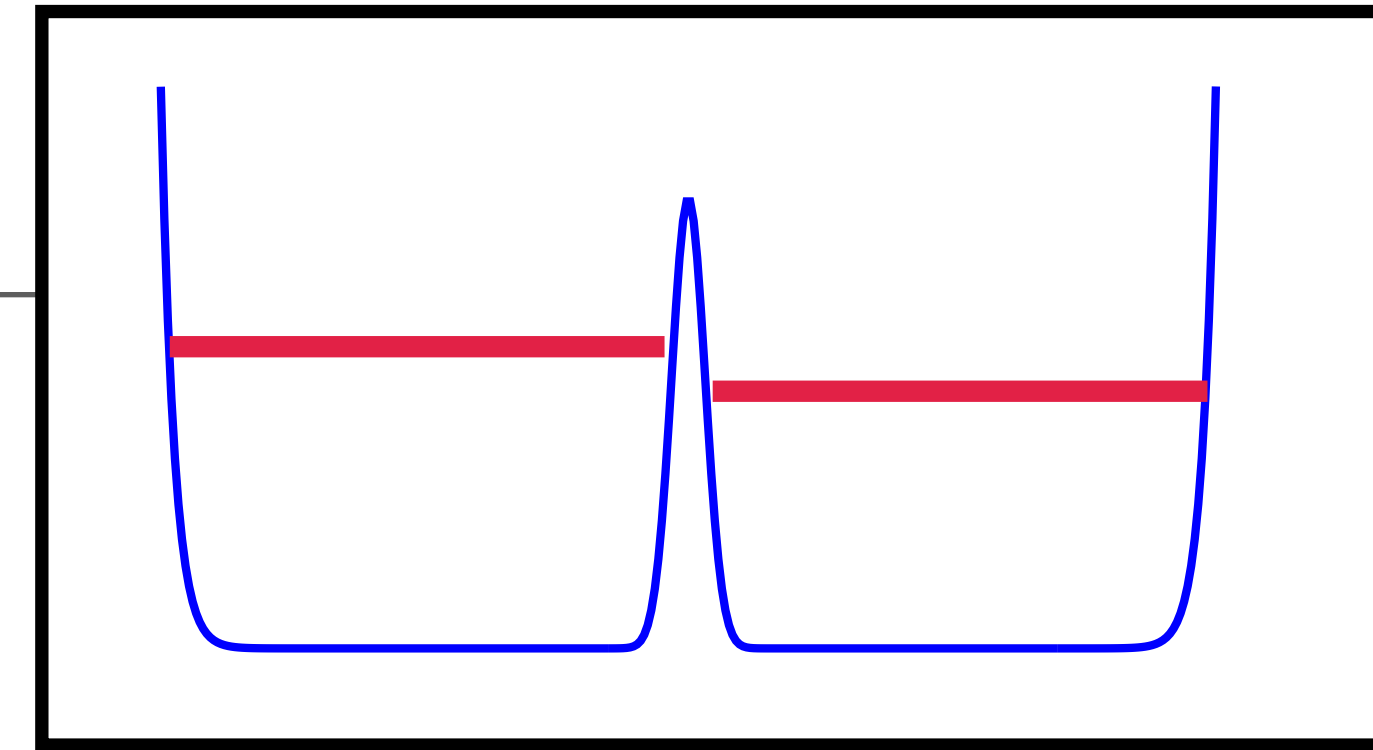


$$E_J = \frac{1}{2}(E_1 - E_0)$$

4.

Equations du mouvement d'une jonction atomique
et oscillations plasma

Équations du mouvement de la jonction atomique



La dynamique de la jonction se déduit directement de son énergie :

$$E(n, \varphi) = \overline{\Delta\mu} n + \frac{E_C}{2} n^2 - E_J \gamma(n) \cos \varphi$$

Équations de Lagrange :

$$\hbar \dot{n} = \frac{\partial E}{\partial \varphi} \qquad \hbar \dot{\varphi} = - \frac{\partial E}{\partial n}$$

On trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hbar \dot{n} = E_J \gamma(n) \sin \varphi \longrightarrow \text{équivalent à la 1}^{\text{ère}} \text{ relation de Josephson (à } \gamma(n) \text{ près)} \\ \hbar \dot{\varphi} = - \underbrace{(\overline{\Delta\mu} + nE_C)} + E_J \gamma'(n) \cos \varphi \longrightarrow \text{équivalent à la 2}^{\text{ème}} \text{ relation de Josephson} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{(à } \gamma'(n) = \frac{d\gamma}{dn} \text{ près)} \end{array} \right.$$

$\Delta\mu$: équivalent du voltage
pour la jonction supra

Les oscillations plasma d'une jonction atomique

$$\begin{aligned}\hbar\dot{n} &= E_J \gamma(n) \sin \varphi \\ \hbar\dot{\varphi} &= -(\overline{\Delta\mu} + nE_C) + E_J \gamma'(n) \cos \varphi\end{aligned}$$

On considère une jonction proche de son état fondamental : $\bar{N}_a = \bar{N}_b = \frac{N}{2} \Rightarrow \overline{\Delta\mu} = 0$

On suppose de plus $n \ll N$ et $\varphi \ll 1$

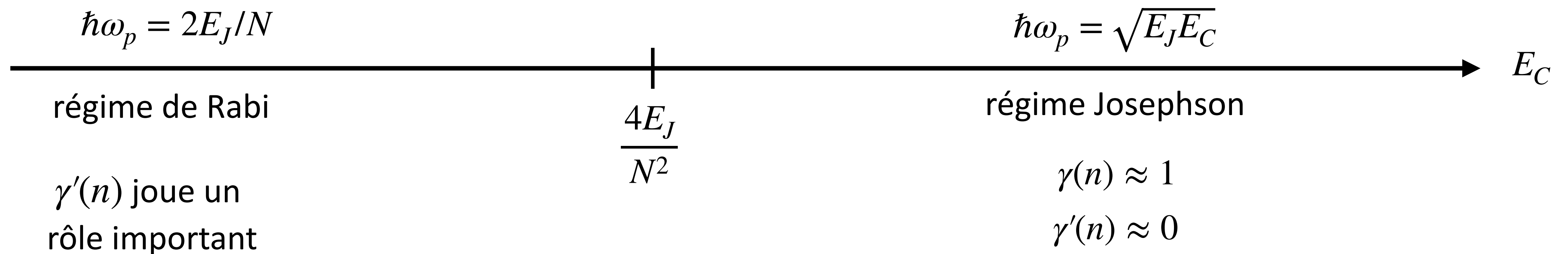
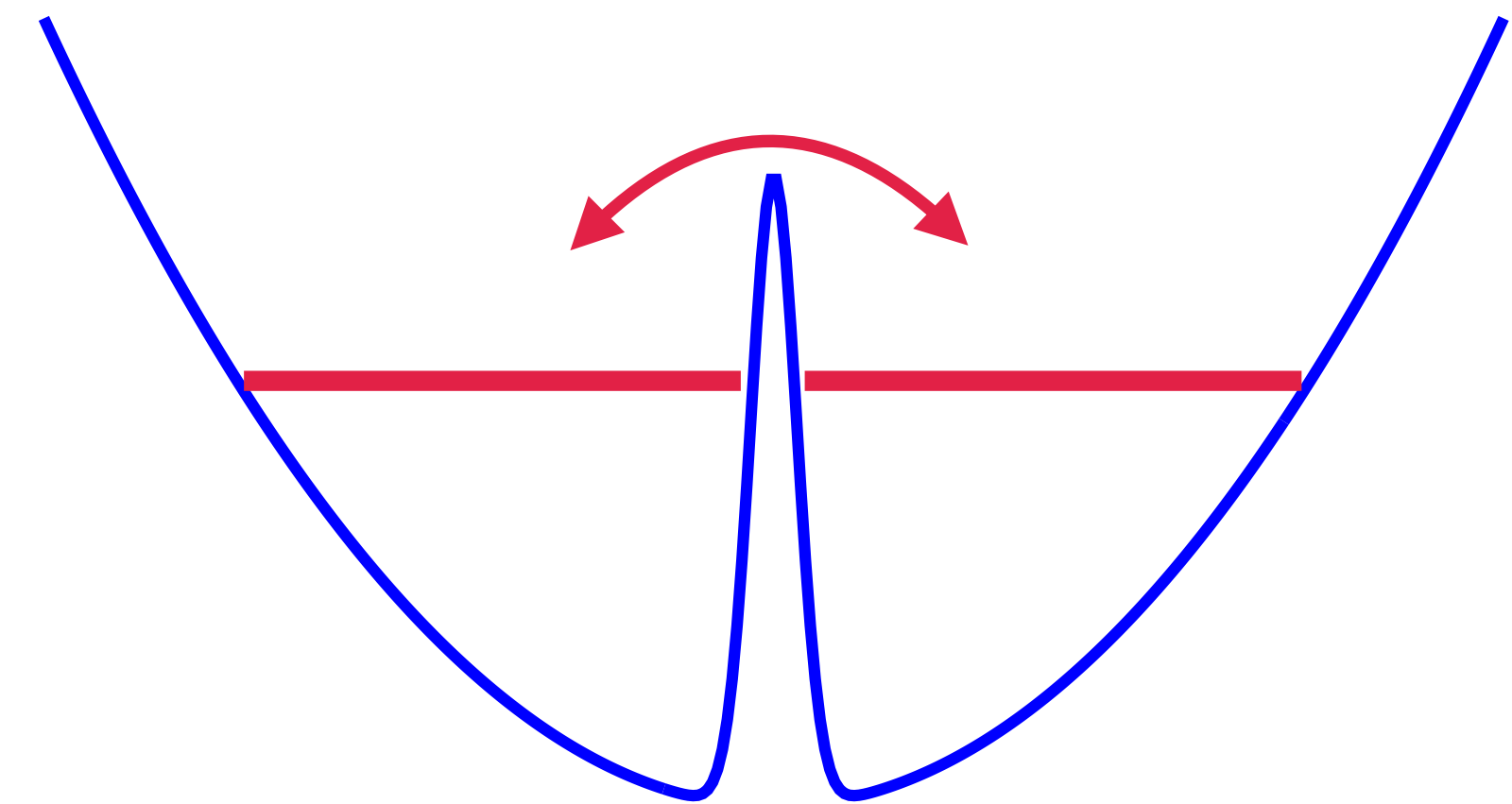
$$N_{a,b} = \frac{N}{2} \pm n \quad \gamma(n) \equiv \frac{\sqrt{N_a N_b}}{N/2} = \sqrt{1 - \frac{4n^2}{N^2}} \approx 1 - \frac{2n^2}{N^2} \quad \gamma'(n) = -\frac{4n}{N^2}$$

Les équations du mouvement se simplifient pour donner :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hbar\dot{n} = E_J \varphi \\ \hbar\dot{\varphi} = -\left(E_C + \frac{4E_J}{N^2}\right) n \end{array} \right. \Rightarrow \text{Mouvement oscillant à la pulsation } \omega_p : \quad (\hbar\omega_p)^2 = E_J \left(E_C + \frac{4E_J}{N^2} \right)$$

Les deux régimes d'oscillation plasma d'une jonction (champ classique)

$$(\hbar\omega_p)^2 = E_J \left(E_C + \frac{4E_J}{N^2} \right)$$



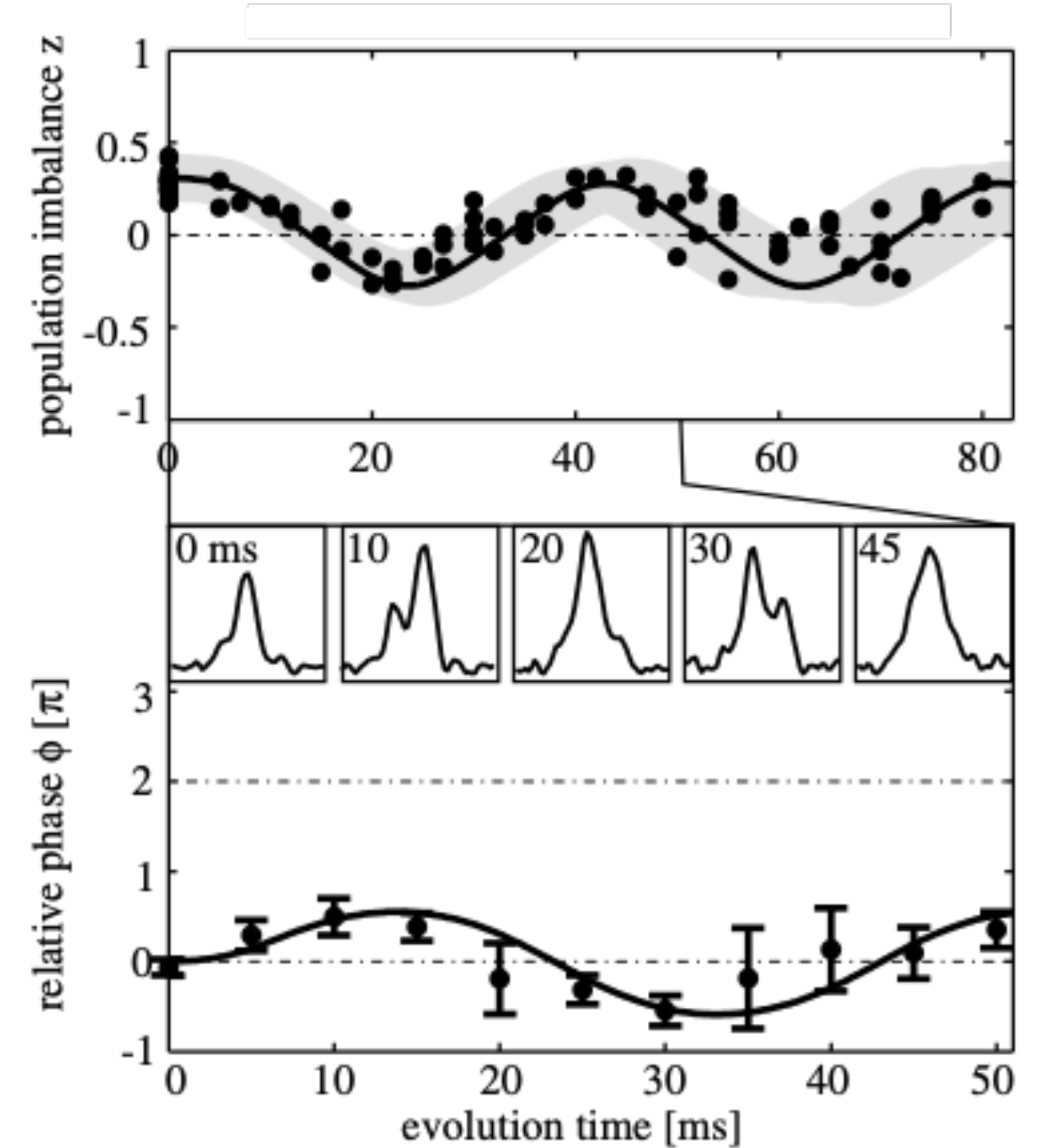
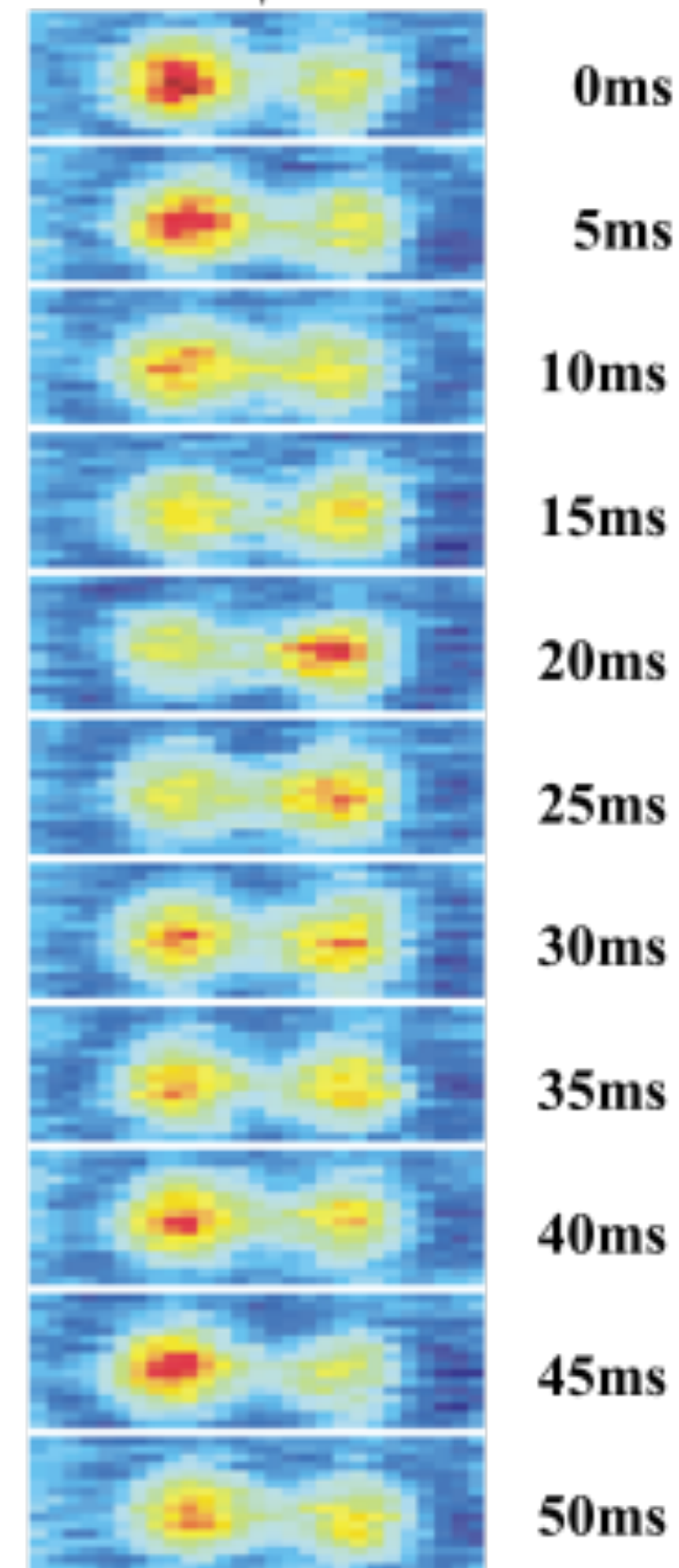
Première observation !

Albiez et al, PRL 95, 010402 (2005)

Double puits de potentiel contenant
 ~ 1150 atomes de ^{87}Rb

Séparation entre les deux centres : $4.4 \mu\text{m}$
 $E_J/Nh = 2 \text{ Hz}$

On mesure les nombres $N_{a,b}$ par imagerie
directe ou la phase $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$ par les
interférences entre les deux nuages (après
expansion)

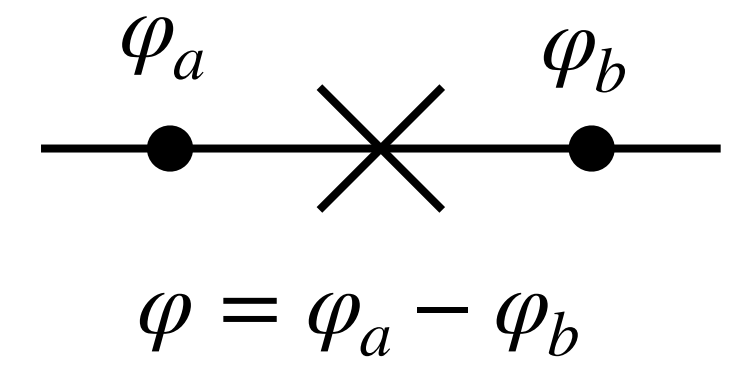


Expérience réalisée dans le régime Josephson $E_C \gg 4E_J/N^2$

En conclusion

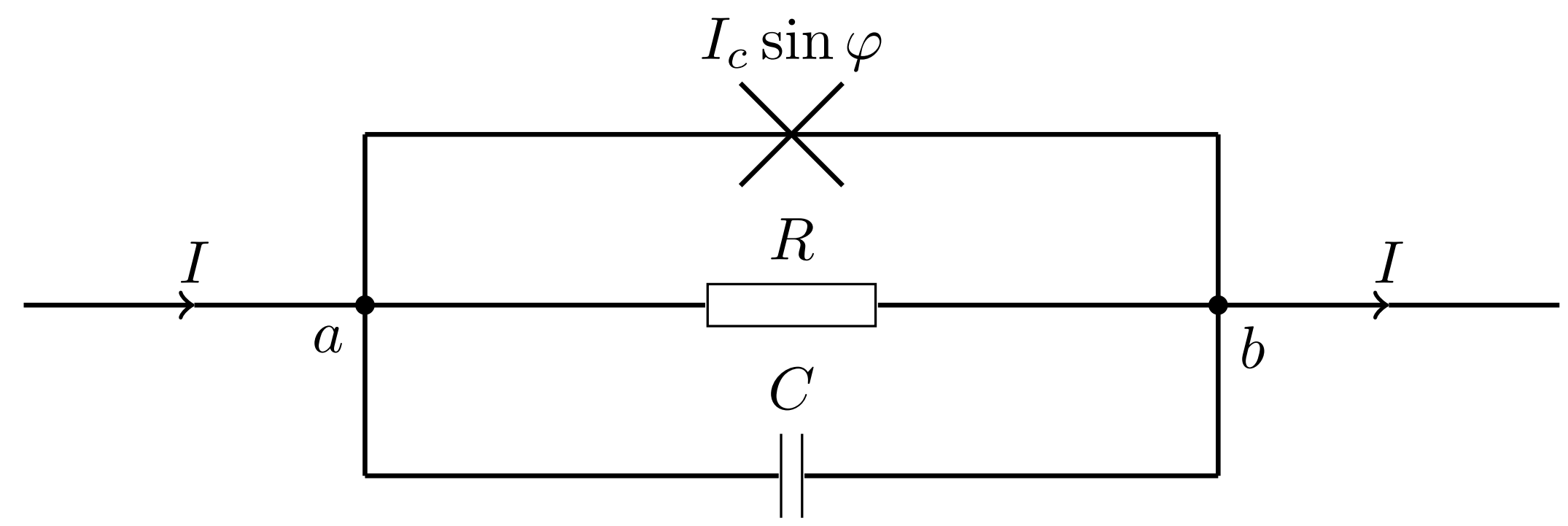
➔ Jonction Josephson idéale décrite par les deux relations

$$\begin{cases} I = I_c \sin \varphi \\ \hbar \dot{\varphi} = 2eV \end{cases}$$



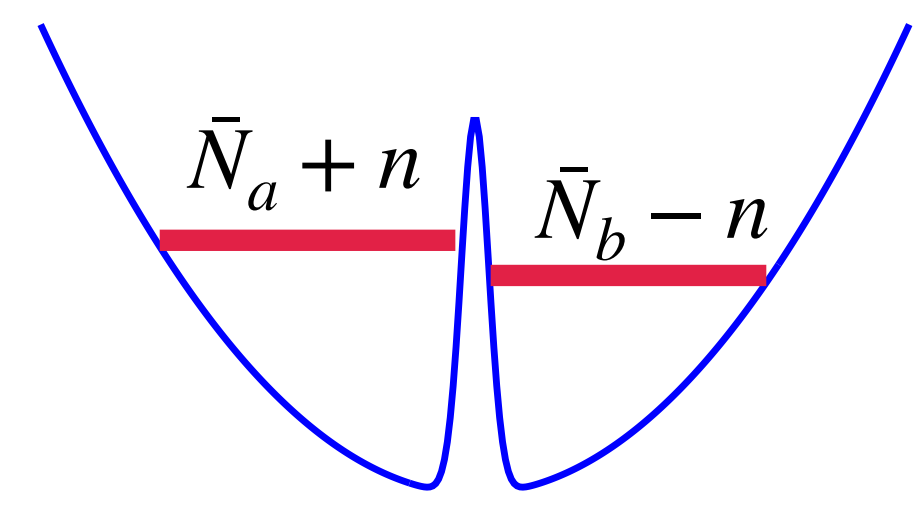
➔ Le modèle RCSJ pour prendre en compte les effets capacitifs et dissipatifs

$$E_J \equiv \frac{\hbar I_c}{2e} \quad E_C \equiv \frac{(2e)^2}{C}$$



➔ Passage à une jonction atomique

$$\begin{cases} \hbar \dot{n} = E_J \gamma(n) \sin \varphi \\ \hbar \dot{\varphi} = -(\overline{\Delta\mu} + nE_C) + E_J \gamma'(n) \cos \varphi \end{cases}$$



Equivalence avec une jonction supra si on peut prendre $\gamma(n) \approx 1$, $\gamma'(n) = 0$