

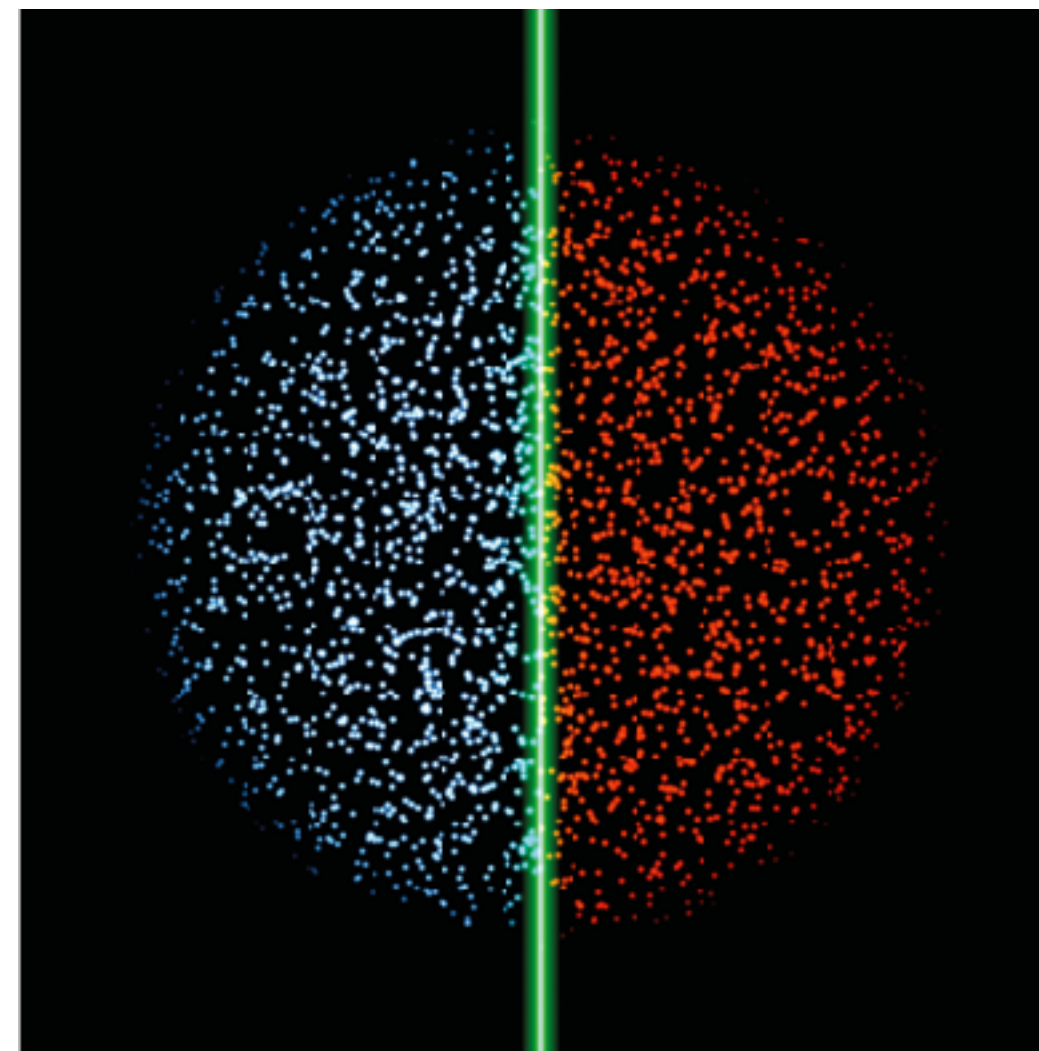
Chaire *Atomes et rayonnement*, cours 2025-26

Fluides quantiques couplés et jonctions Josephson

Cours 2 : Dynamique d'une jonction Josephson



diapositives



notes de cours

<http://pro.college-de-france.fr/jean.dalibard/index.html>



COLLÈGE
DE FRANCE
— 1530 —

Séminaires

Aujourd'hui : Monika Aidelsburger, Max-Planck-Institute of Quantum Optics and Ludwig-Maximilians-University, Munich
Quantum simulation – Engineering & understanding quantum systems atom-by-atom

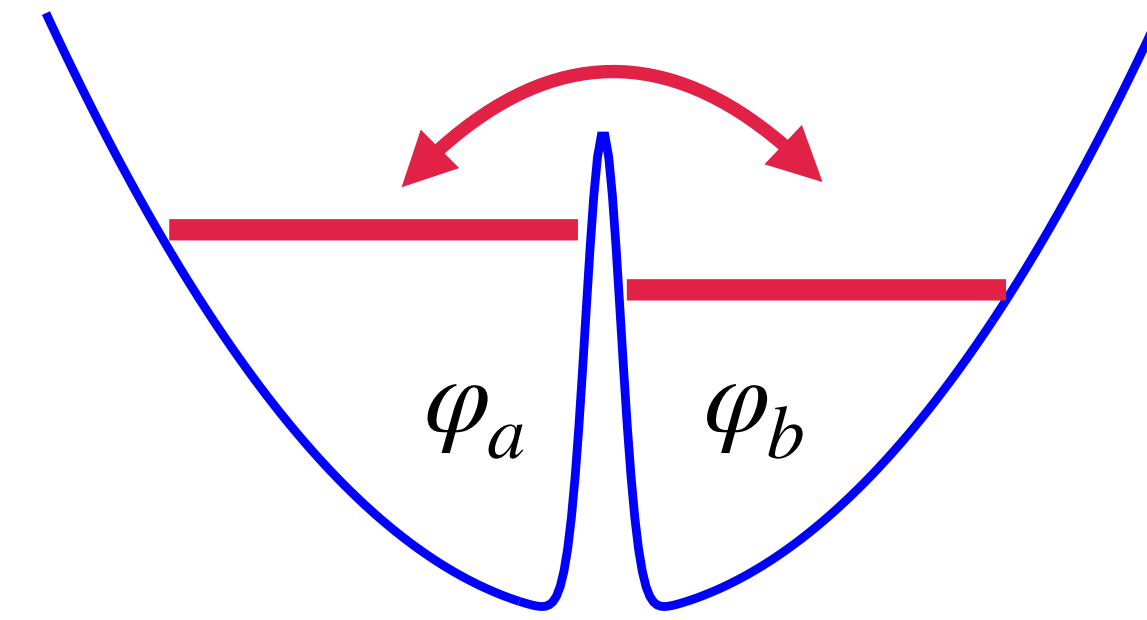
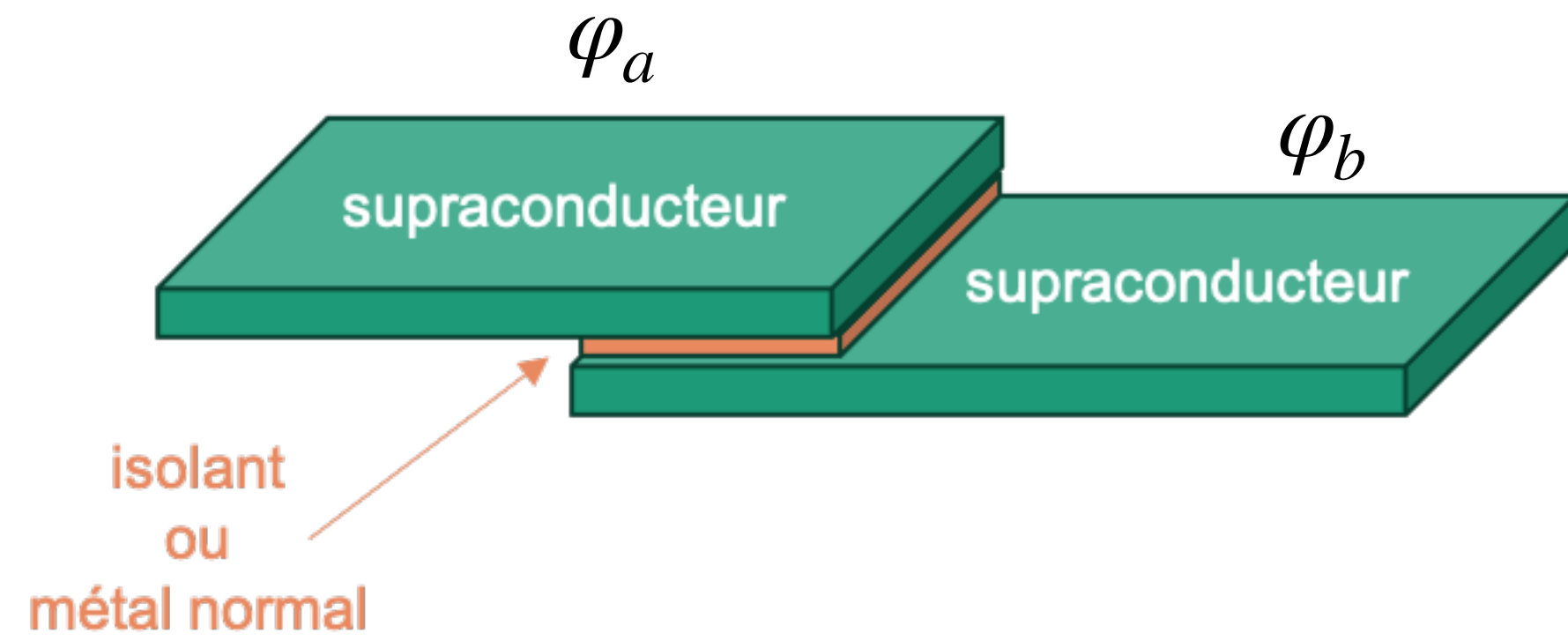
Vendredi 5 juin : Atac Imamoglu, ETH Zurich
Optical investigation of strongly correlated electrons

Vendredi 12 juin : Benoît Vermersch, Quobly & Université Grenoble Alpes
Observing the quantum Mpemba effect in a quantum processor

Vendredi 19 juin : Klaus Mølmer, Københavns Universitet & Niels Bohr Institute, Copenhagen
Sensing with quantum trajectories

Vendredi 26 juin : Eleni Diamanti, LIP6 Sorbonne Université
Ressources et applications des réseaux quantiques

Modélisation d'une jonction Josephson



Les deux relations de Josephson

Plan du cours

1. Caractéristique courant-tension d'une jonction supraconductrice

approche analytique et résultats numériques

2. Caractéristique courant-tension d'une jonction atomique

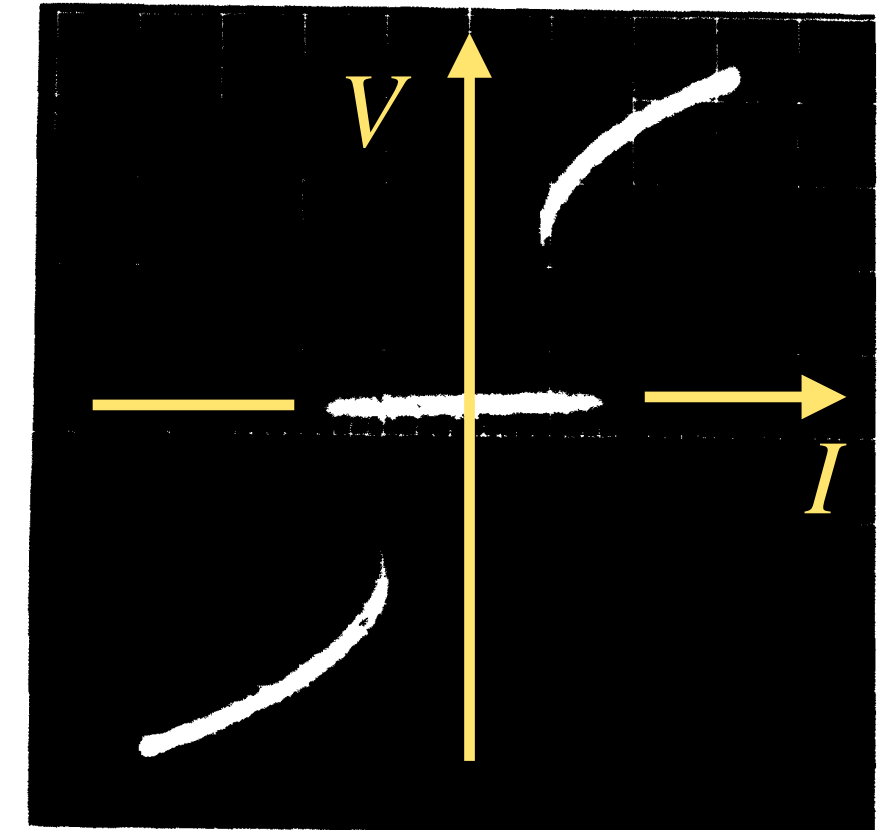
barrière mobile

3. Les paramètres des jonctions atomiques

courant critique, résistance et capacité

4. L'effet tunnel macroscopique

les expériences de Clarke, Devoret, Martinis (Nobel 2025)



Shapiro
1963

FIG. 1. I - V characteristic near origin showing zero-voltage Josephson current and negative resistance switching trace. Vertical scale $58.8 \mu\text{V}/\text{cm}$, horizontal scale $130 \text{ nA}/\text{cm}$.

Mise en équation du modèle RCSJ

Une solution toujours présente pour $|I| \leq I_c$

La limite fortement dissipative (effet capacitif négligeable)

La limite fortement dissipative ($C = 0$)

$$\int_0^{\varphi(t)} \frac{d\varphi'}{I - I_c \sin \varphi'} = \frac{2eR}{\hbar} t \quad \Rightarrow \quad I \tan \frac{\varphi}{2} = I_c + \sqrt{I^2 - I_c^2} \tan \left(\frac{\pi t}{T} \right)$$

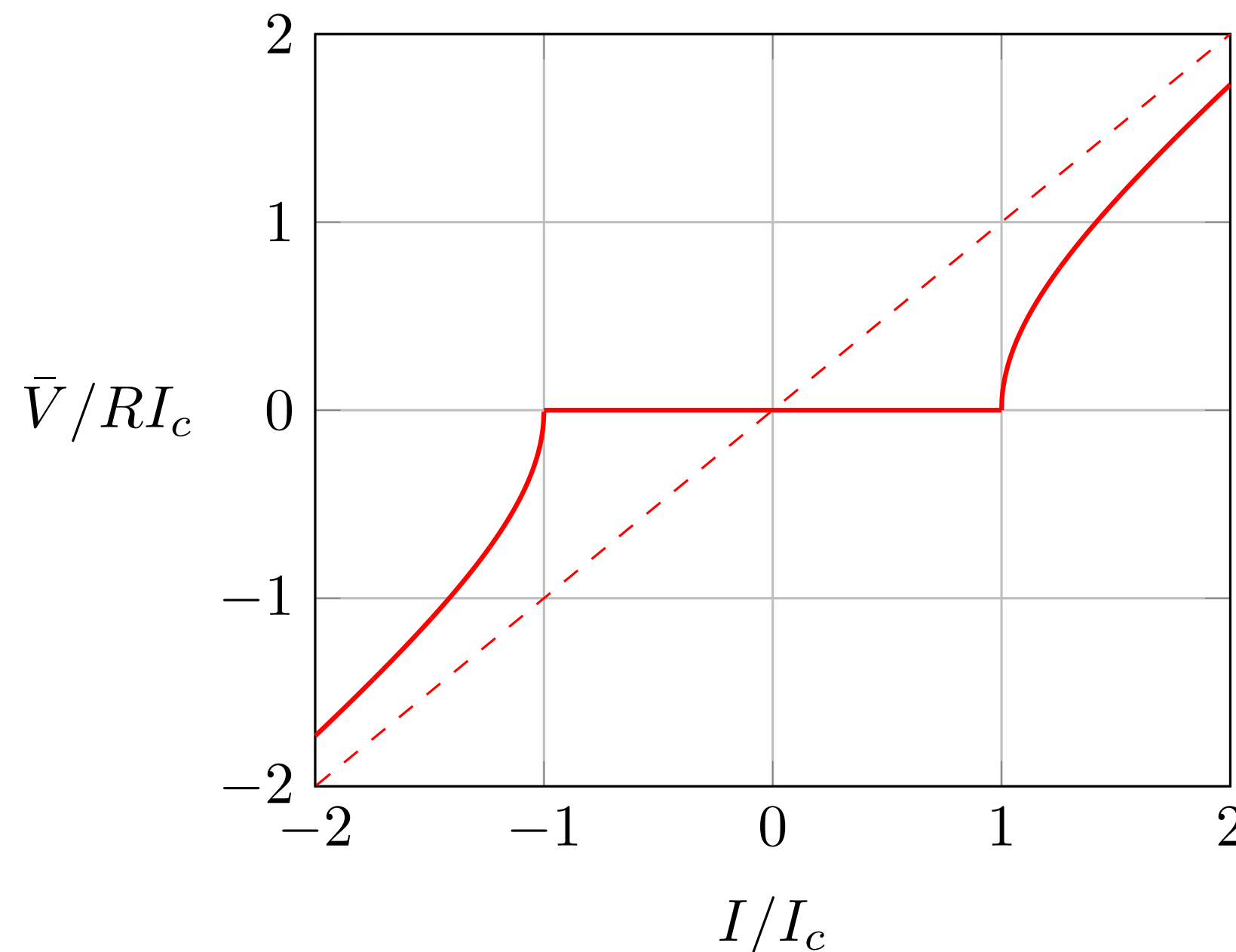
$$T = \frac{\pi \hbar}{eR \sqrt{I^2 - I_c^2}}$$

\Rightarrow évolution périodique de la phase modulo 2π

On en déduit le voltage moyen :

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt = \frac{\hbar}{2eT} \int_0^T \dot{\varphi}(t) dt \\ &= \frac{\hbar}{2eT} [\varphi(T) - \varphi(0)] = \frac{2\pi\hbar}{2eT} \end{aligned}$$

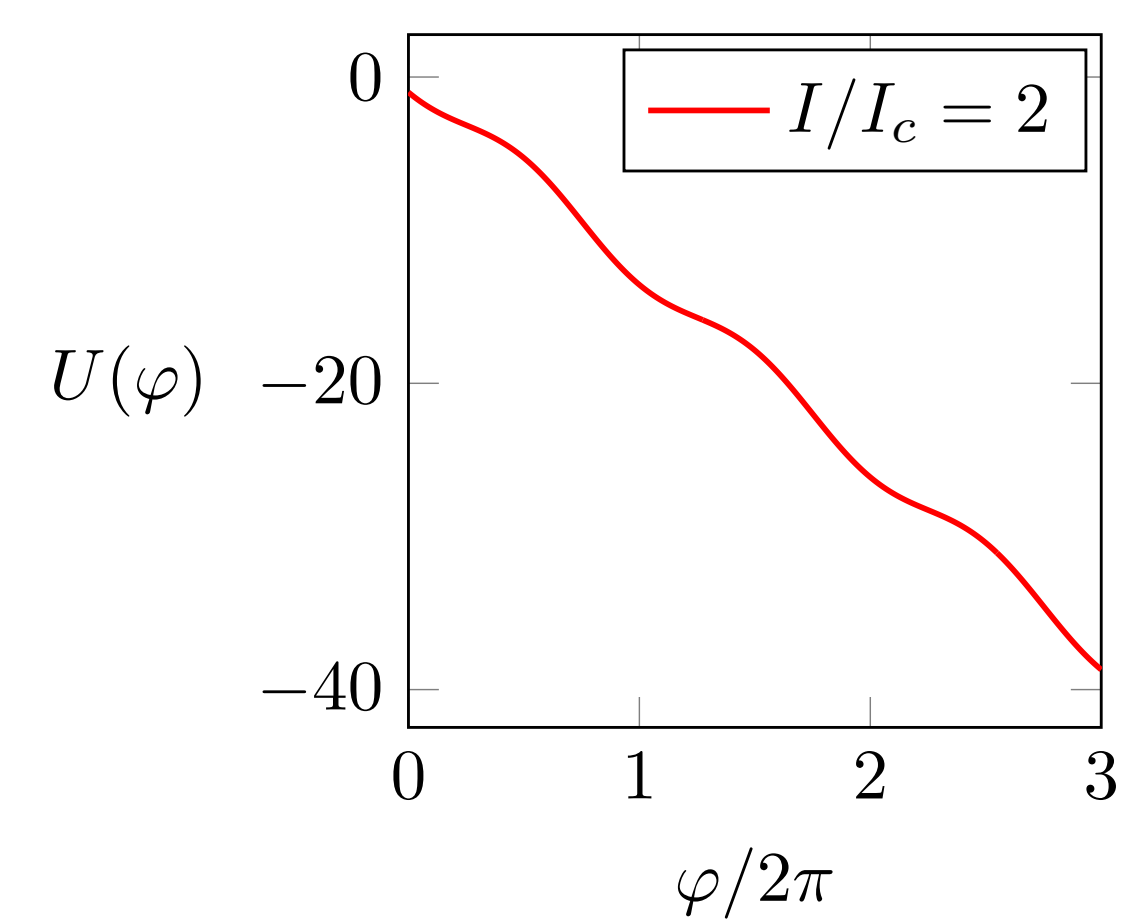
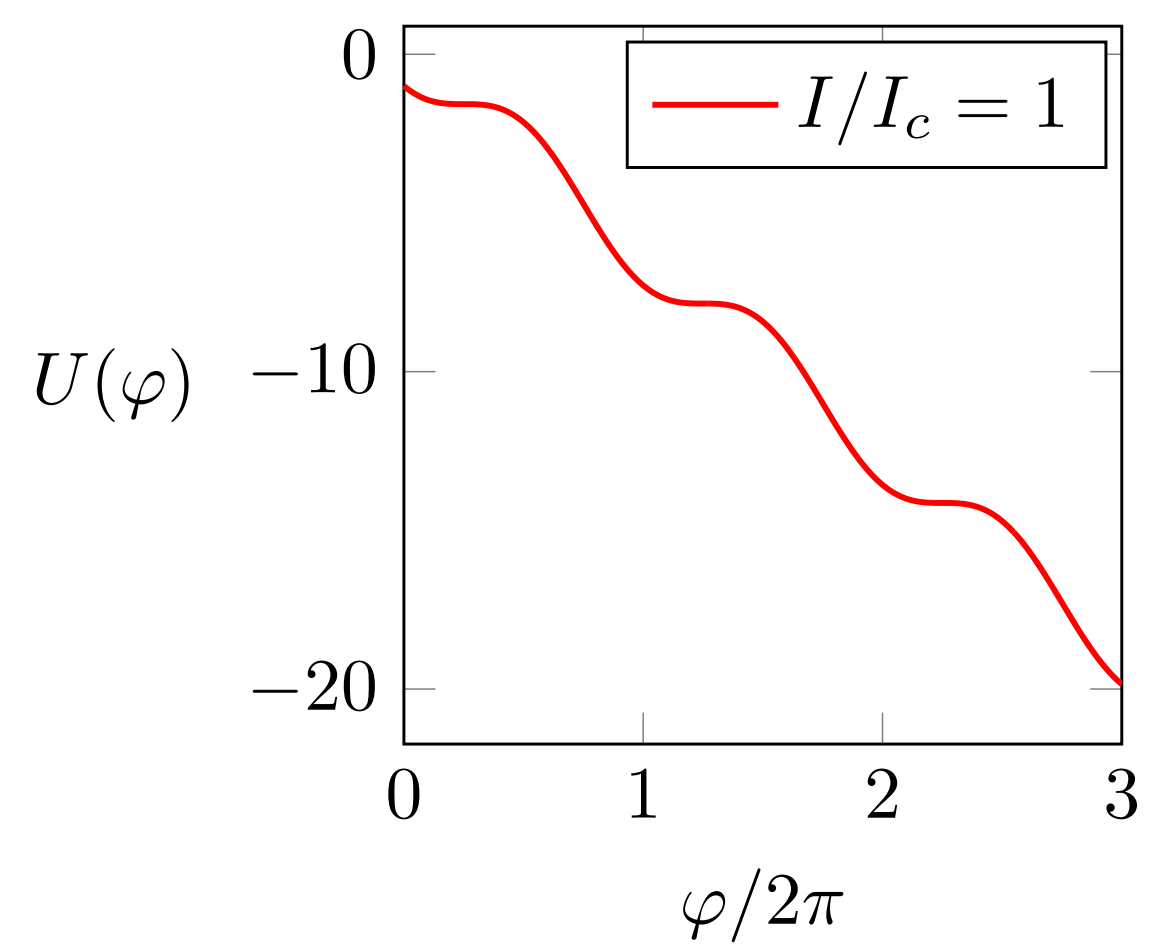
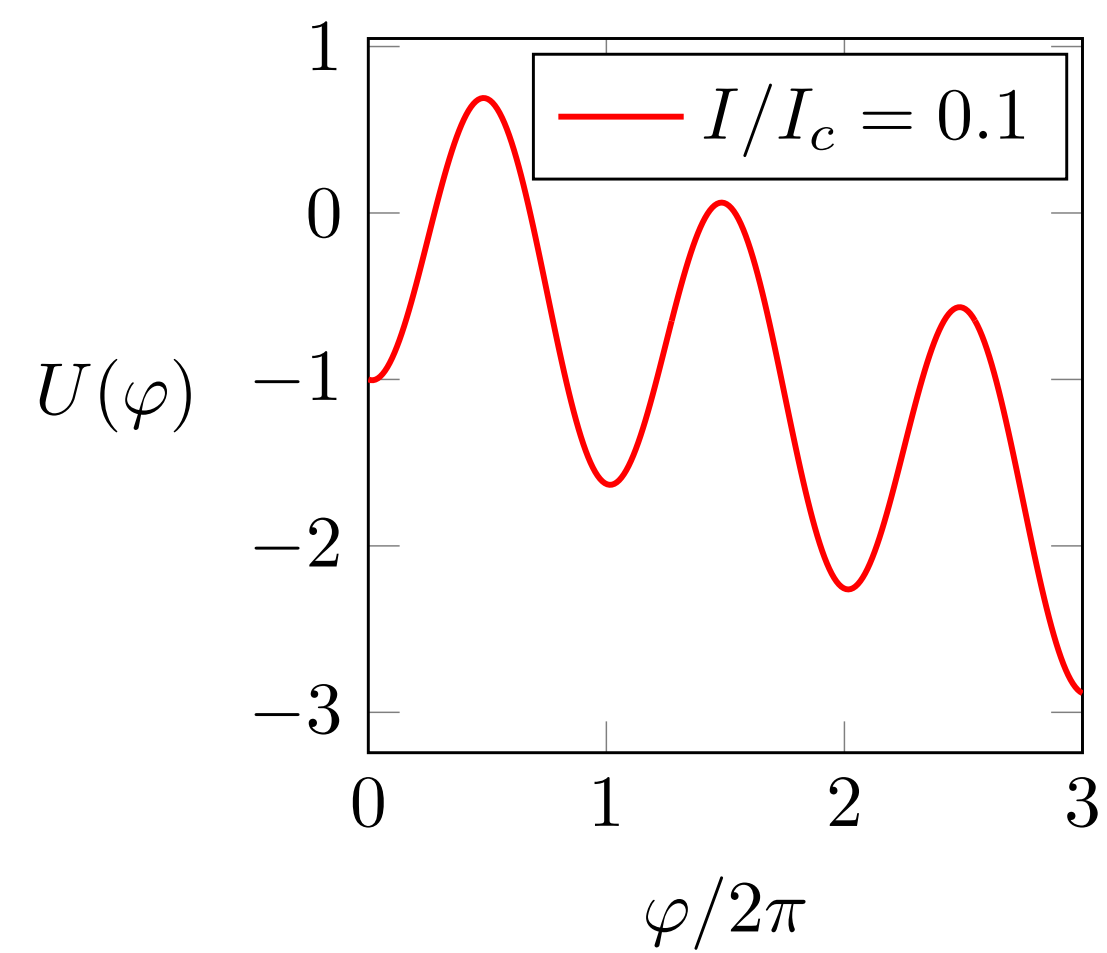
$|I| > I_c : \quad \bar{V} = R \sqrt{I^2 - I_c^2}$



Pour $|I| \gg I_c$,
 $\bar{V} \approx RI$

La limite sans dissipation ($R = +\infty$) : effets résistifs négligeables

La planche à laver inclinée



Le cas d'une dissipation quelconque : prise en compte simultanément des effets résistifs et capacitifs

Paramètres sans dimension :

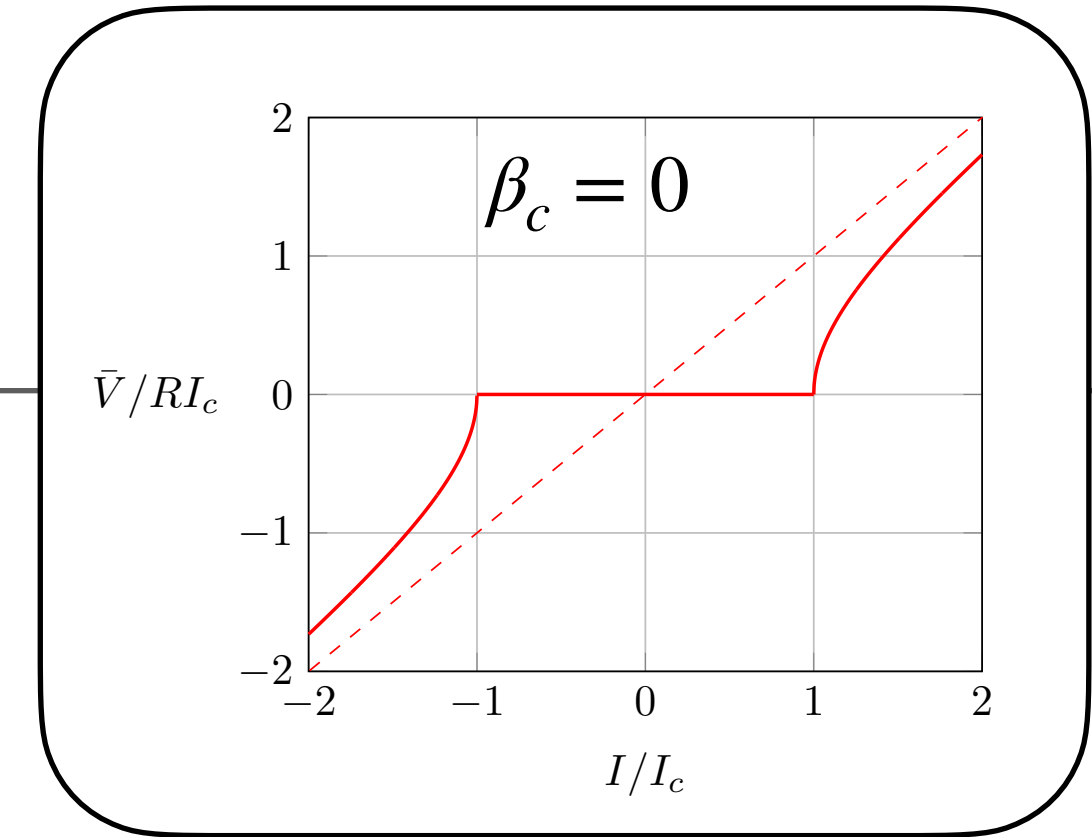
$$\left\{ \begin{array}{l} i = \frac{I}{I_c} \\ \beta_c = \frac{2eI_c R^2 C}{\hbar} \end{array} \right.$$

(paramètre de Stewart-McCumber)

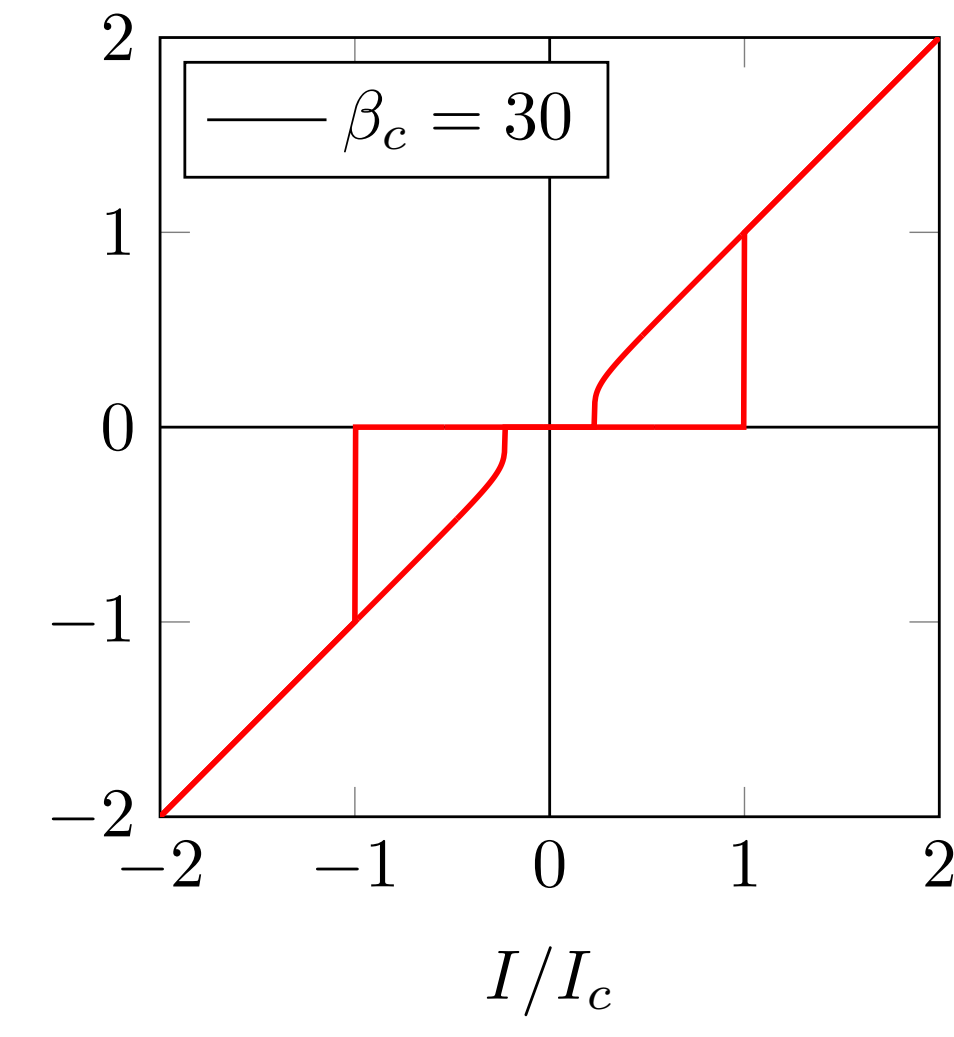
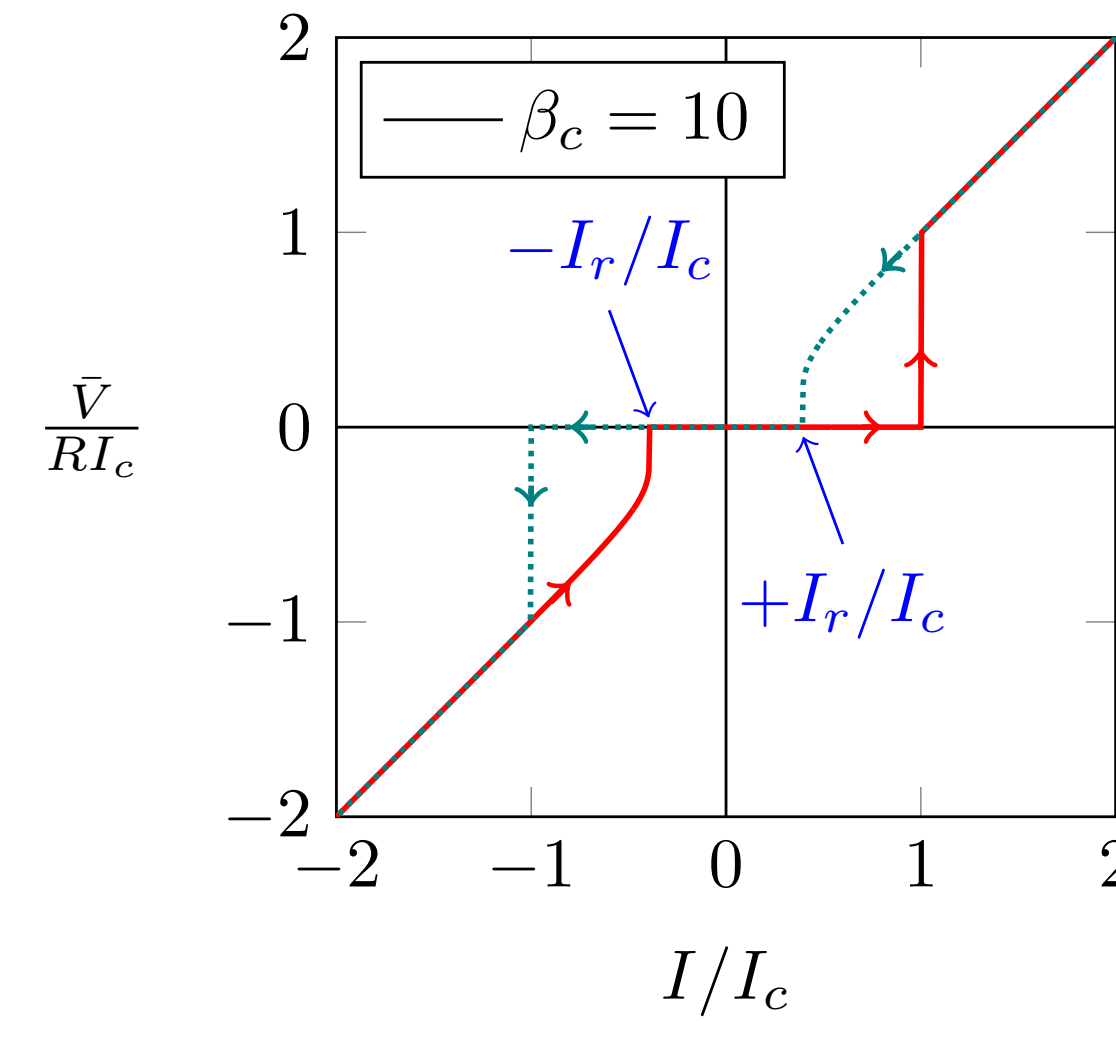
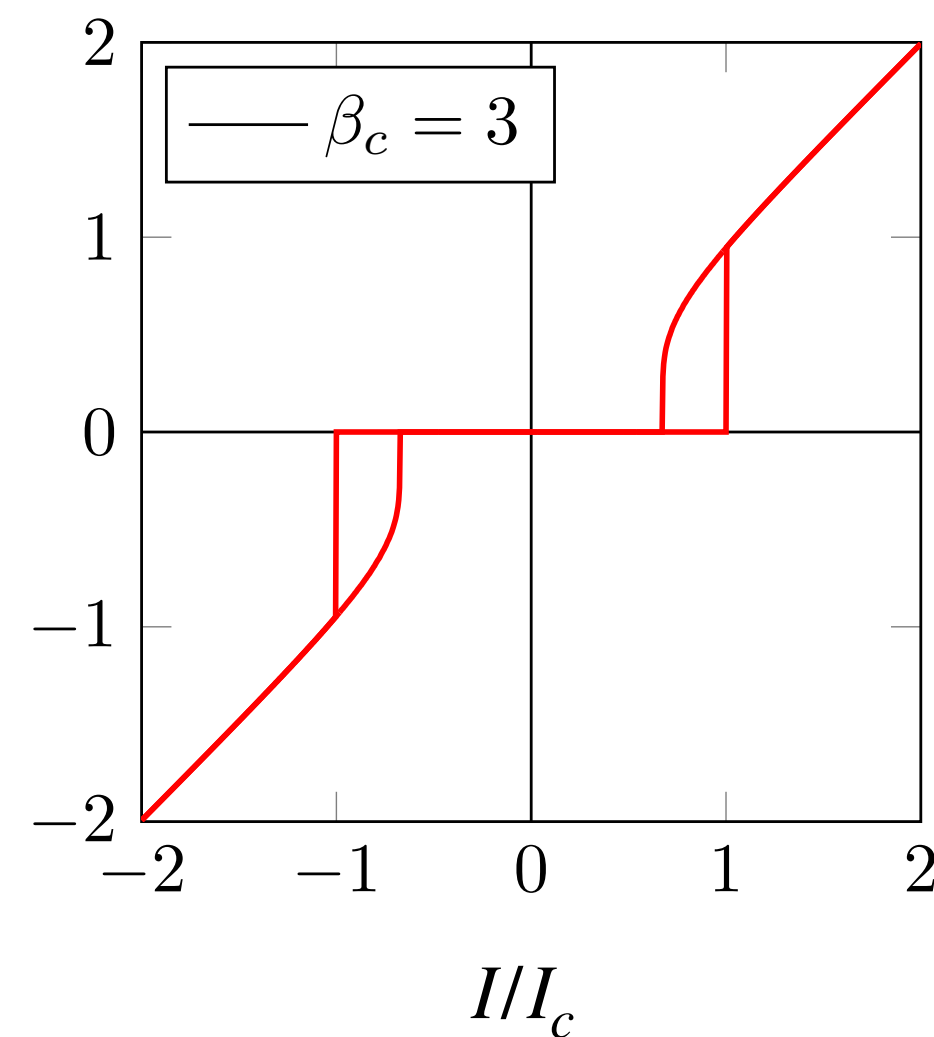
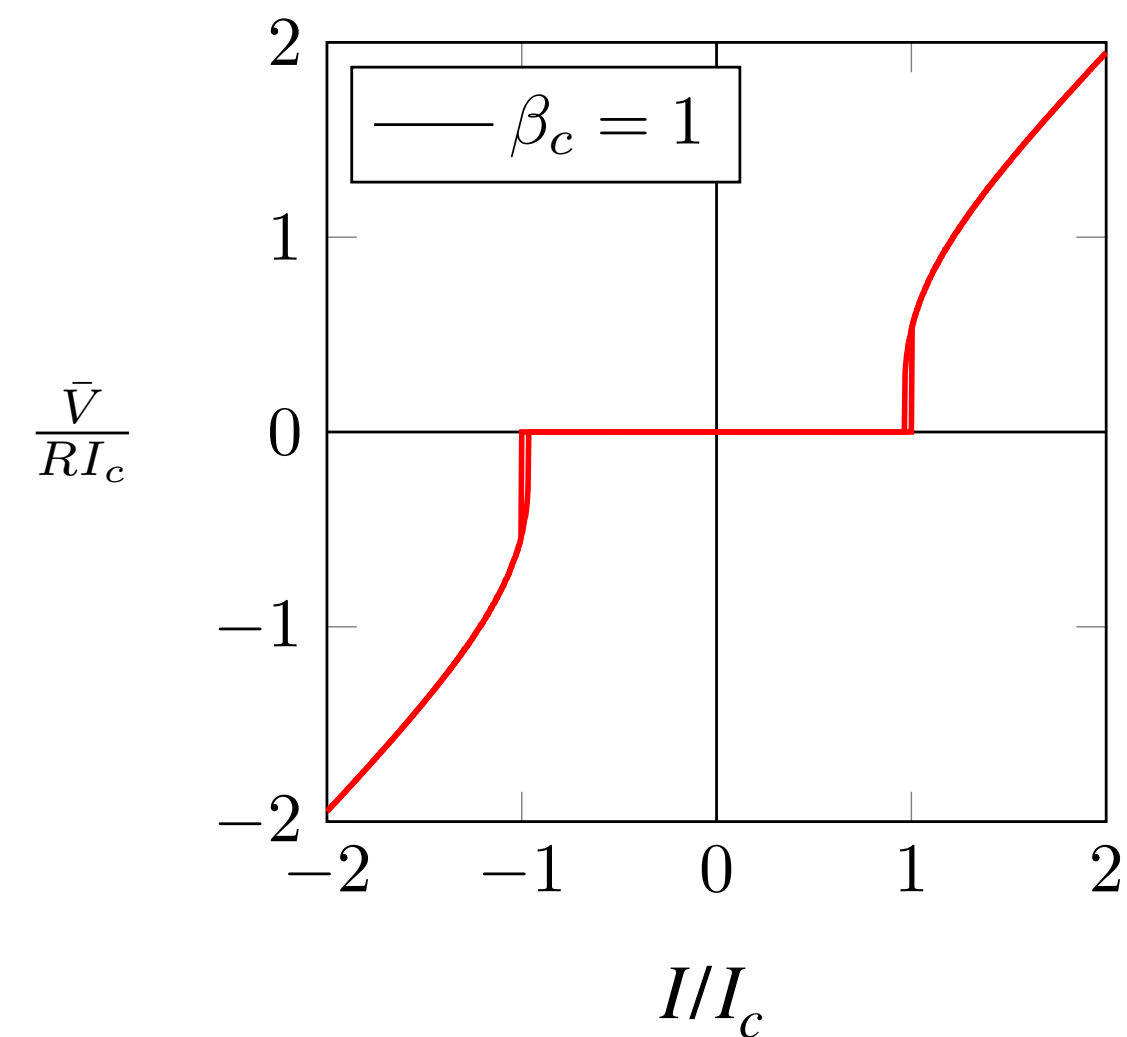
$$i = \sin \varphi + \dot{\varphi} + \beta_c \ddot{\varphi}$$

Exemples de solutions obtenues numériquement

On varie $\beta_c = \frac{2eI_c R^2 C}{\hbar}$



Une hystérésis de plus en plus marquée apparaît quand on augmente β_c ,
i.e. quand les phénomènes capacitifs deviennent prépondérants devant les phénomènes dissipatifs



Plan du cours

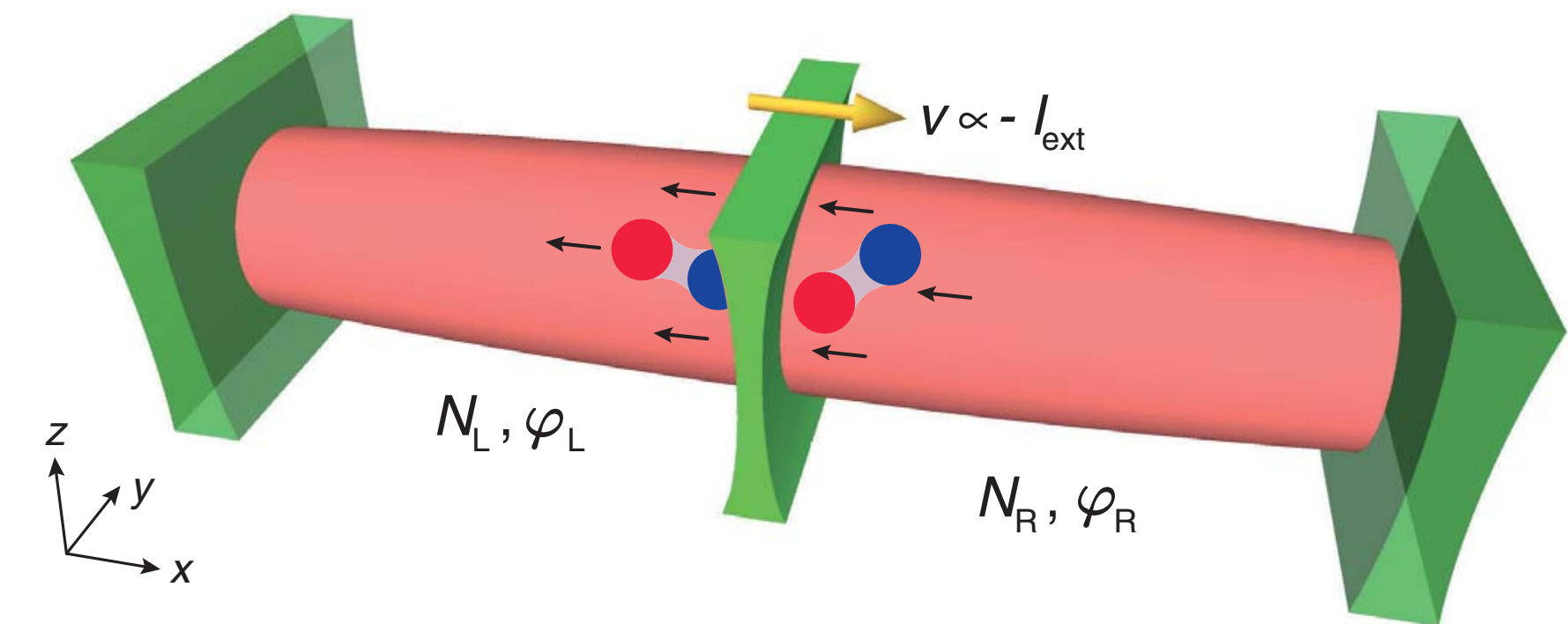
1. Caractéristique courant-tension d'une jonction supraconductrice

2. Caractéristique courant-tension d'une jonction atomique

La barrière mobile

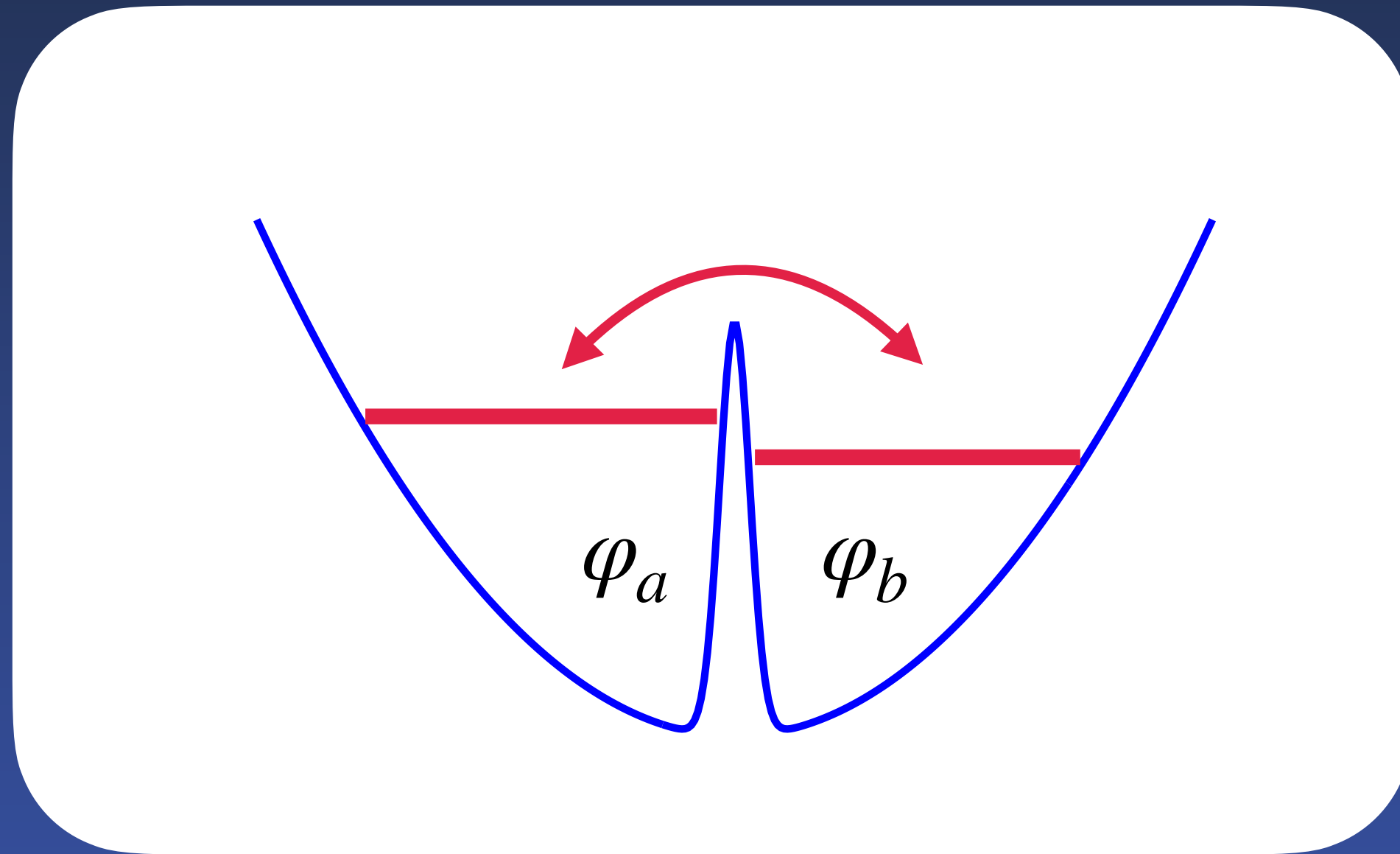
3. Les paramètres des jonctions atomiques

4. L'effet tunnel macroscopique



Kwon et al., Science (2020)

Rappel sur les jonctions atomiques



$$\gamma(n) \equiv \sqrt{\left(1 + \frac{n}{\bar{N}_a}\right) \left(1 - \frac{n}{\bar{N}_b}\right)}$$

limite Josephson : $\gamma(n) \approx 1$

La barrière mobile

Comment travailler à courant constant ($I = \dot{n}$) sans “charger” la jonction, i.e., sans créer un déséquilibre de densité et donc de potentiel chimique ?

Giovanazzi, Smerzi, Fantoni, Phys. Rev. Lett. (2000)

On bouge (lentement) la barrière à vitesse v : elle est alors traversée par le courant $I_{a \rightarrow b} = -\rho v$

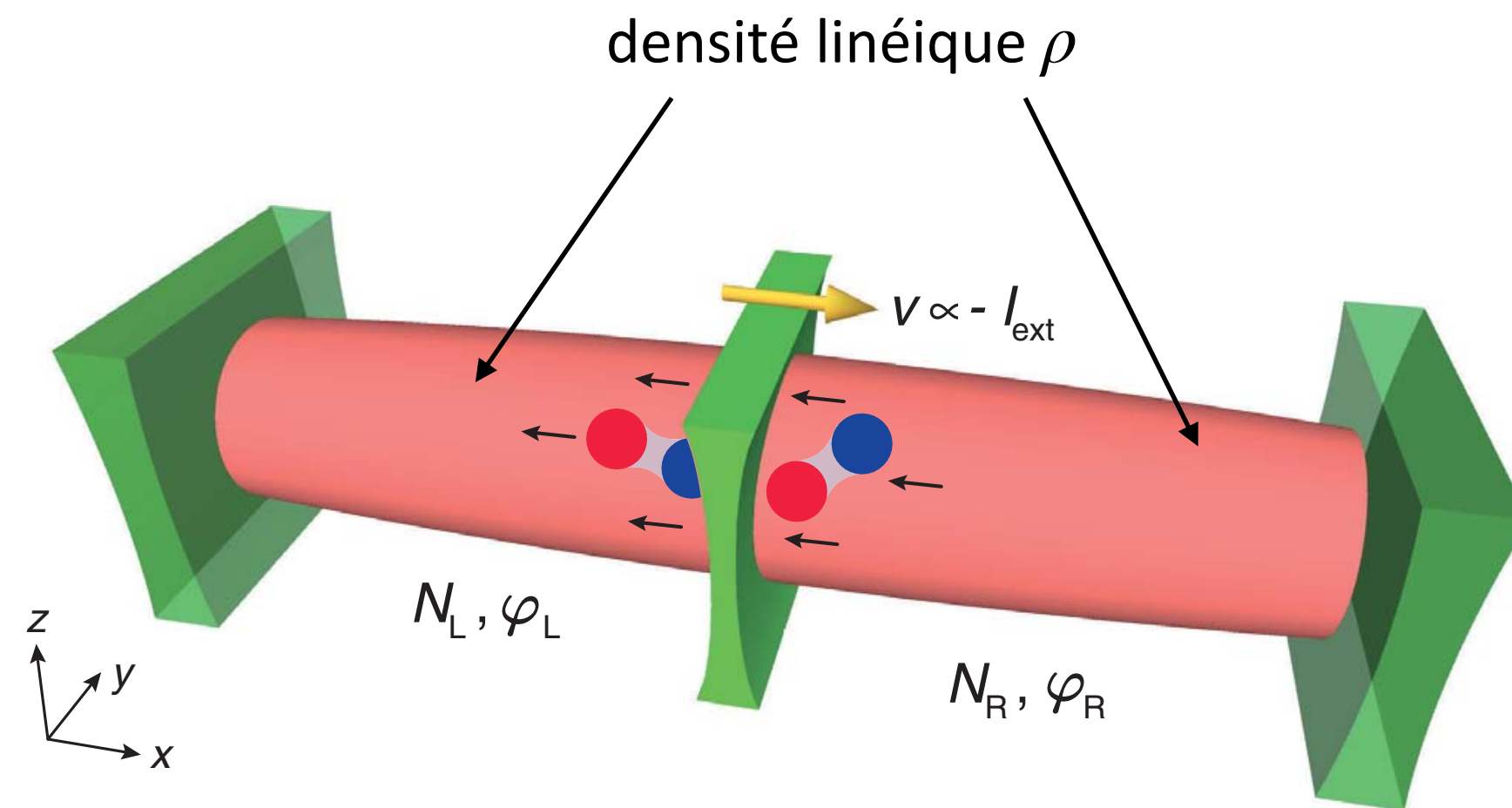


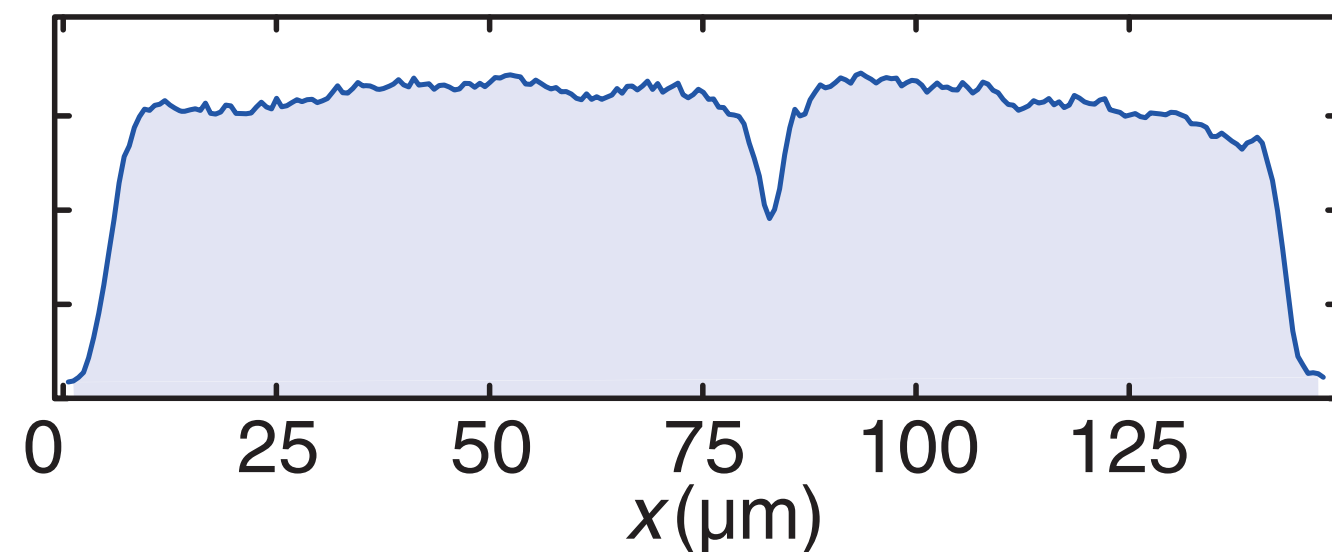
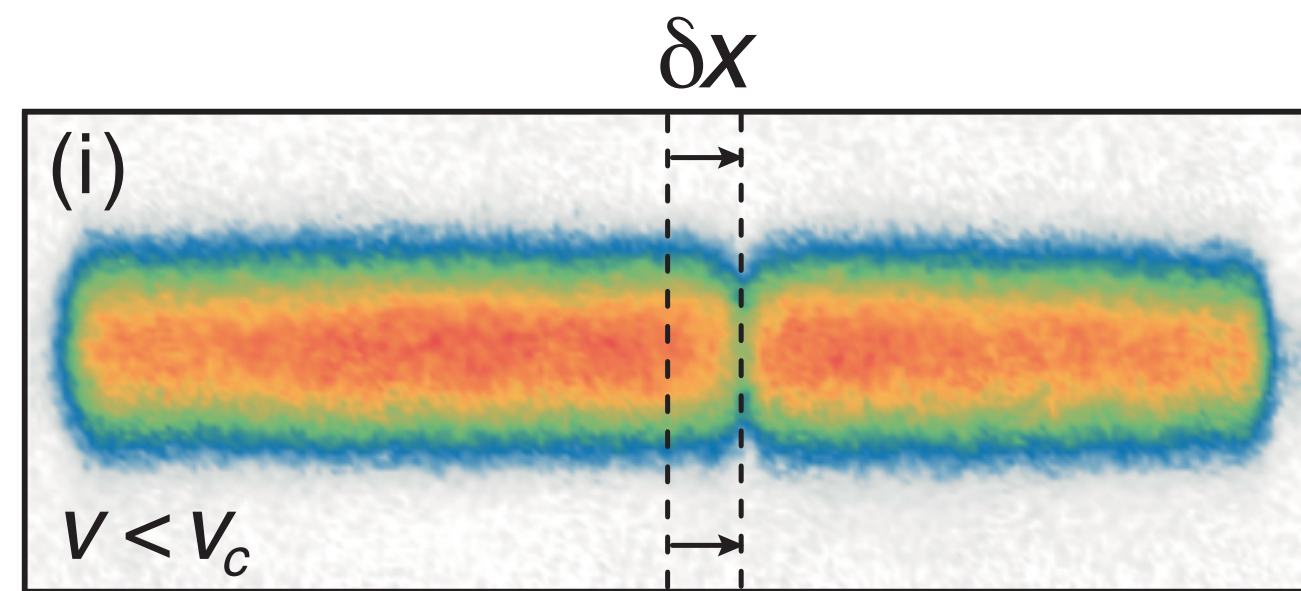
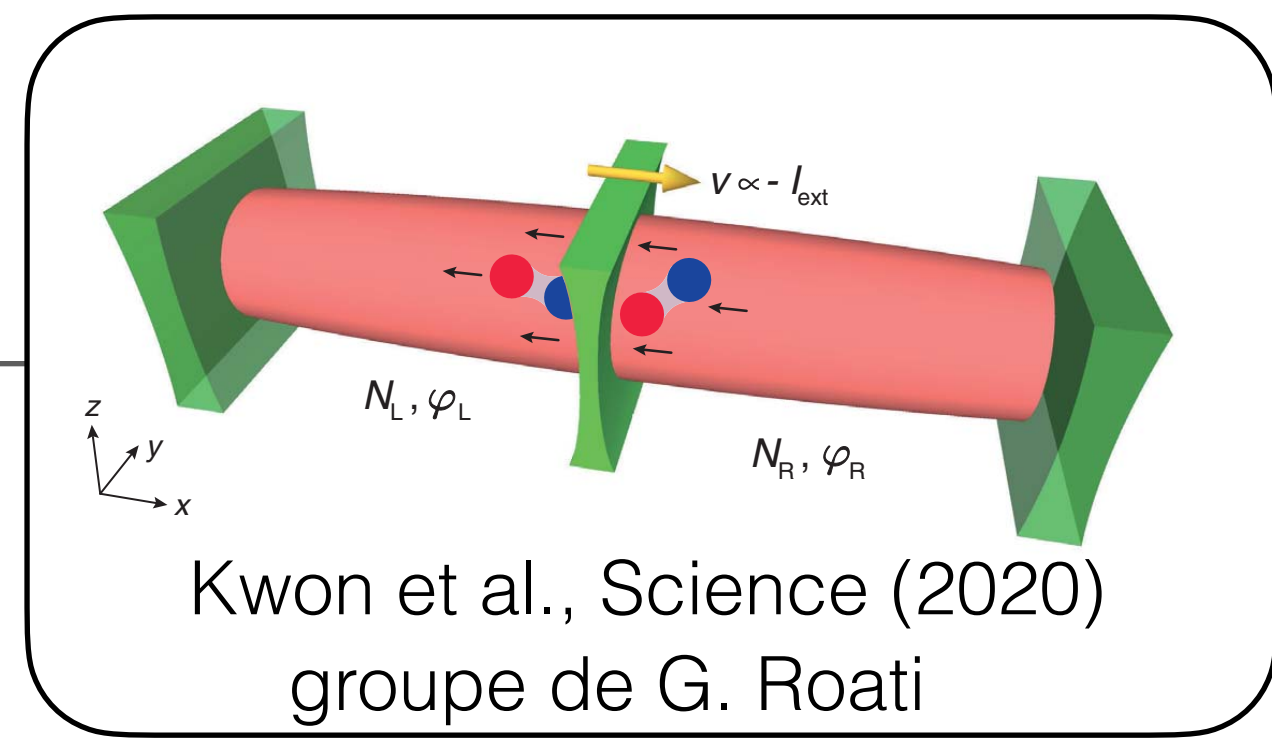
Figure extraite de Kwon et al., Science (2020)

Les deux comportements possibles

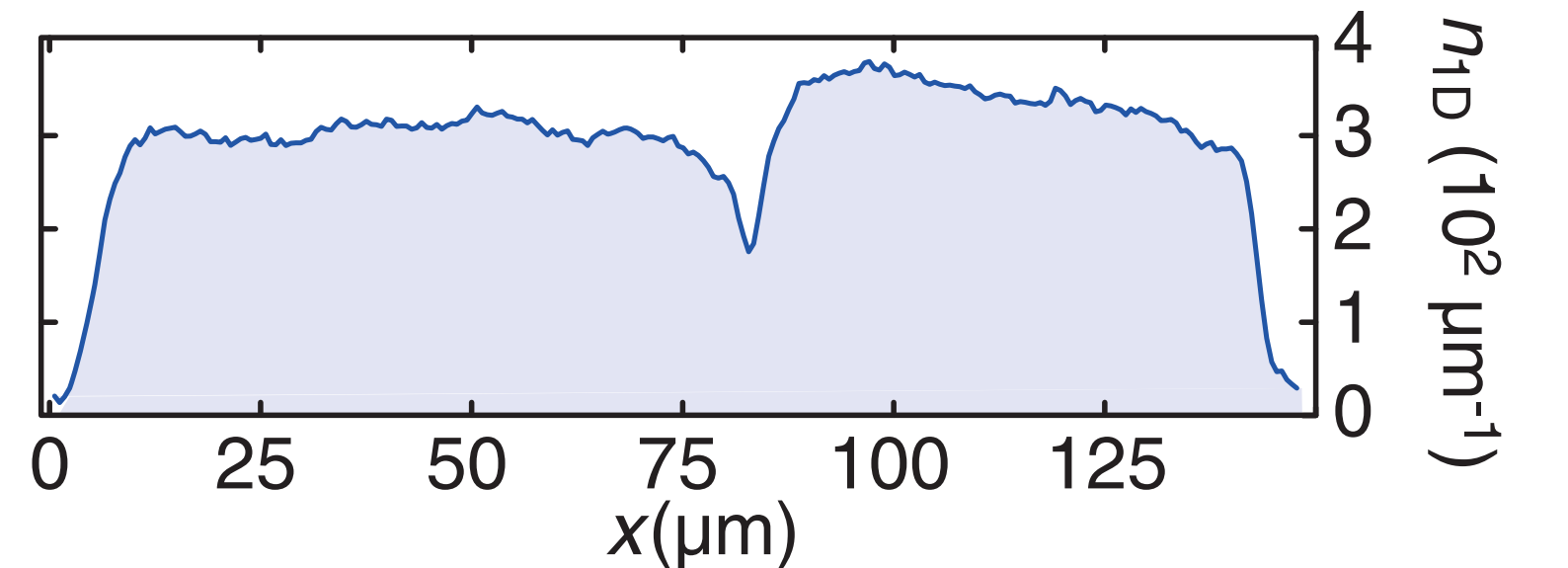
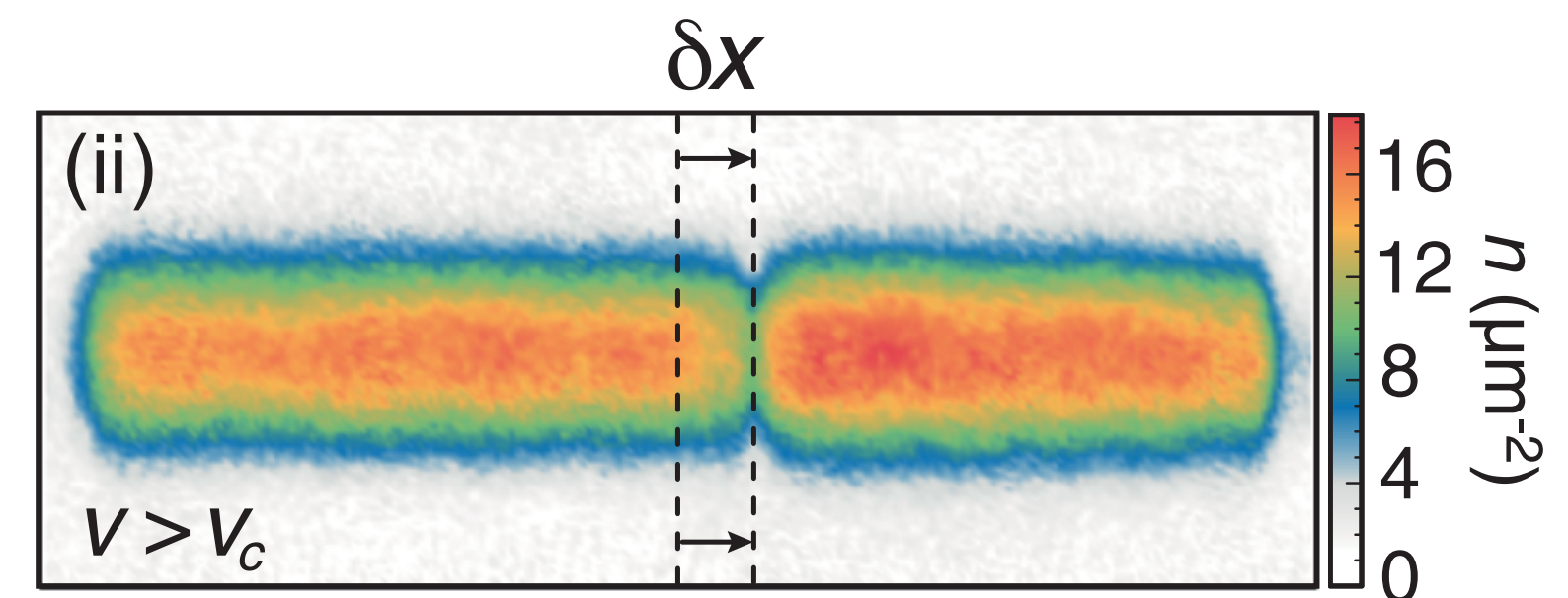
Gaz de molécules de ${}^6\text{Li}_2$ formées au voisinage d'une résonance de Fano-Feshbach

Cylindre de densité uniforme ($\rho_{\text{mol}} = 300 \mu\text{m}^{-1}$) de longueur $150 \mu\text{m}$

Barrière tunnel d'épaisseur $\sim 1 \mu\text{m}$ et de hauteur $1.8 \times$ potentiel chimique, déplacée sur $\pm 10 \mu\text{m}$

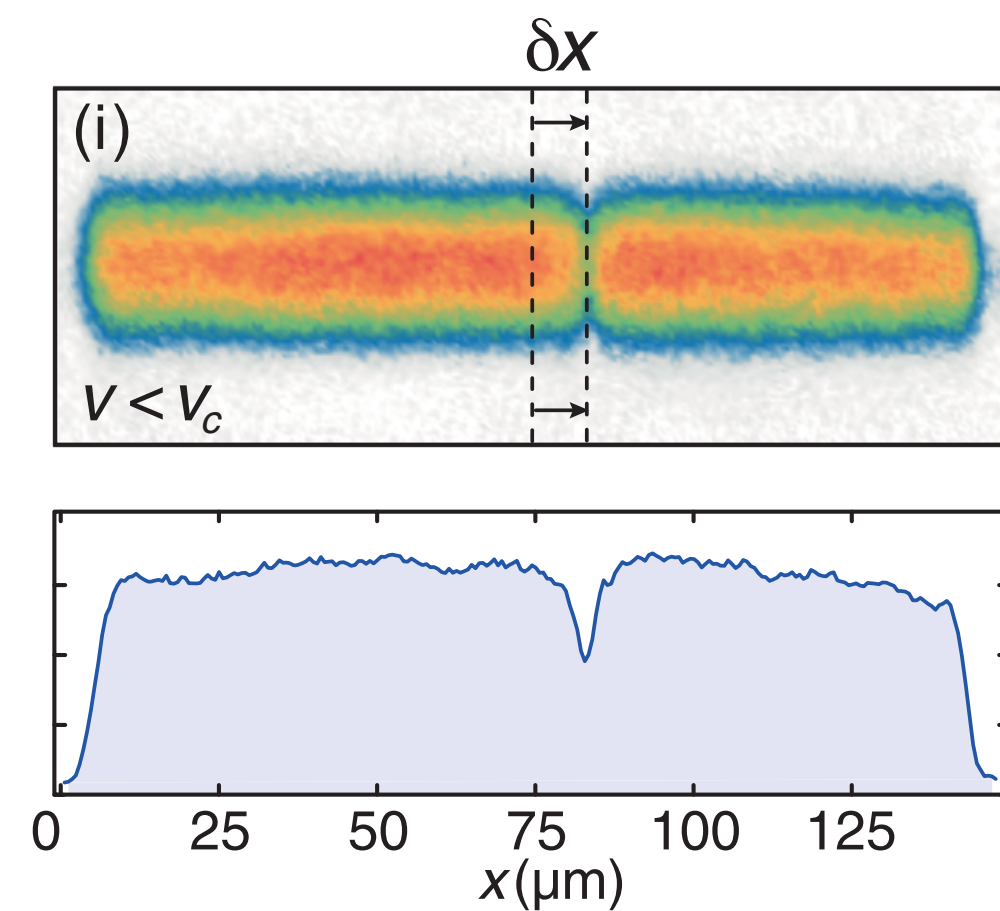


$$v_c = 0.4 \text{ mm/s}$$

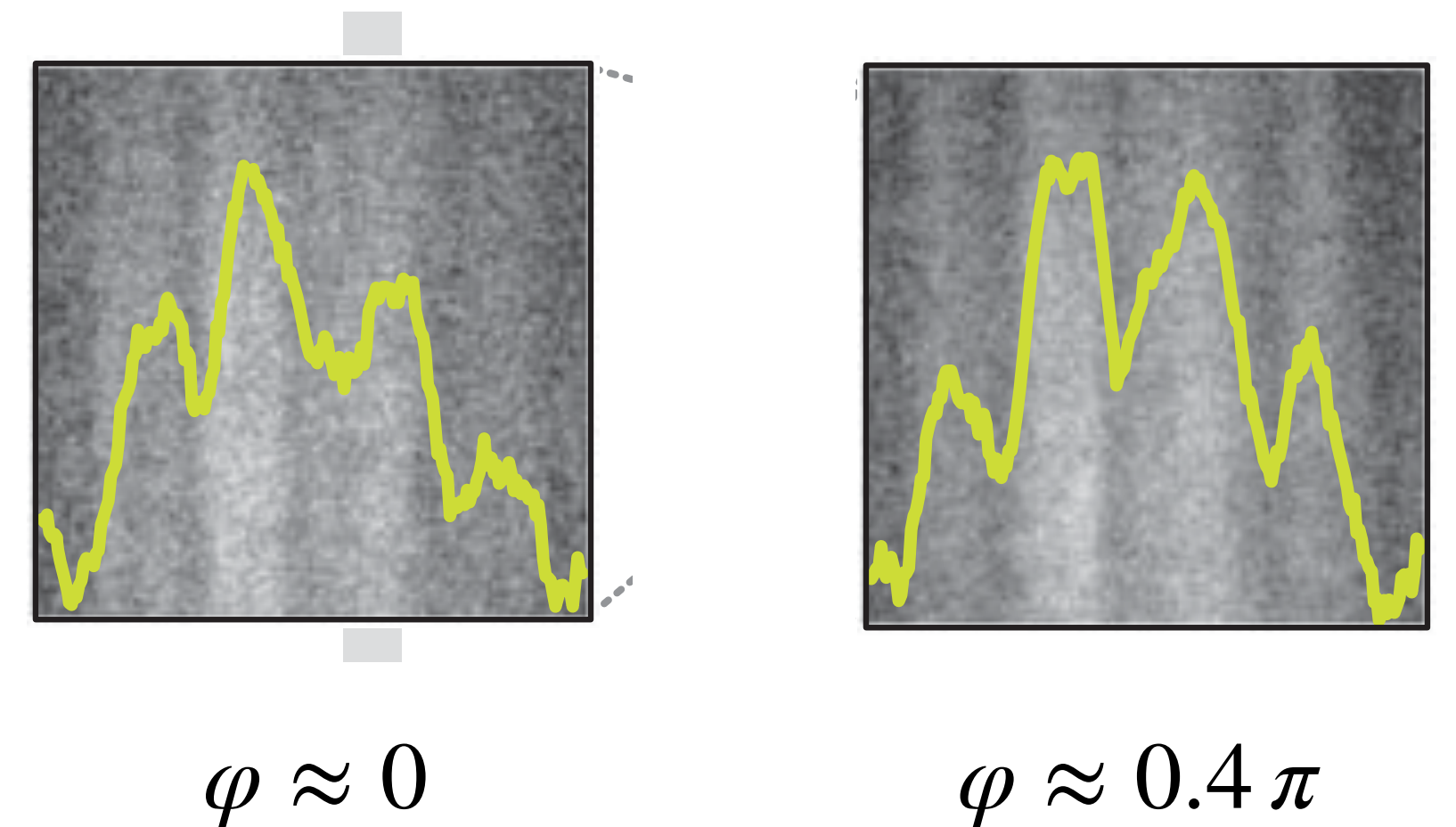


Mesure de la différence de phase $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$

Régime $|v| < v_c$: $I = I_c \sin \varphi$ (pas de contribution des effets résistifs ou capacitifs)

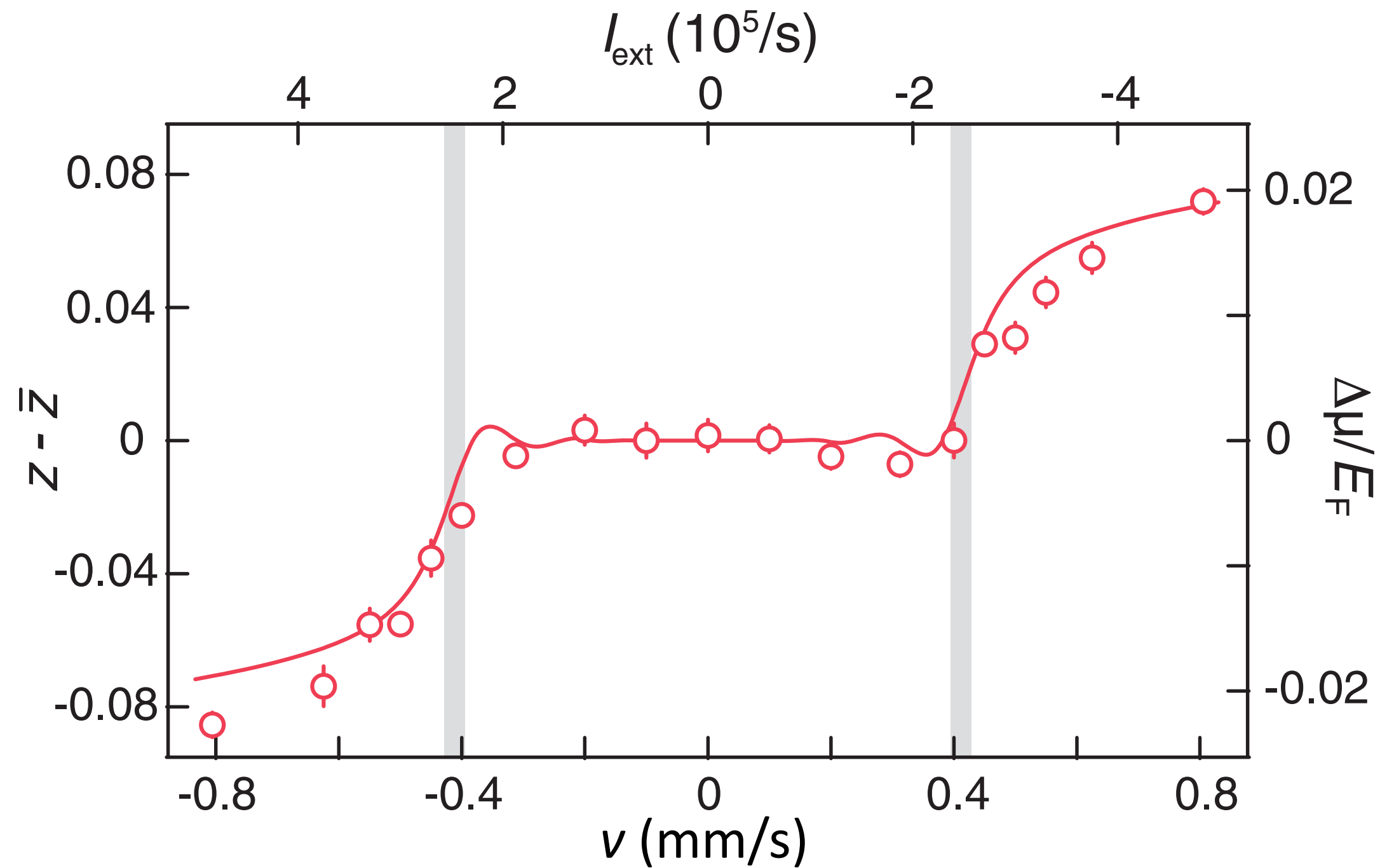


extinction de la barrière et
expansion balistique

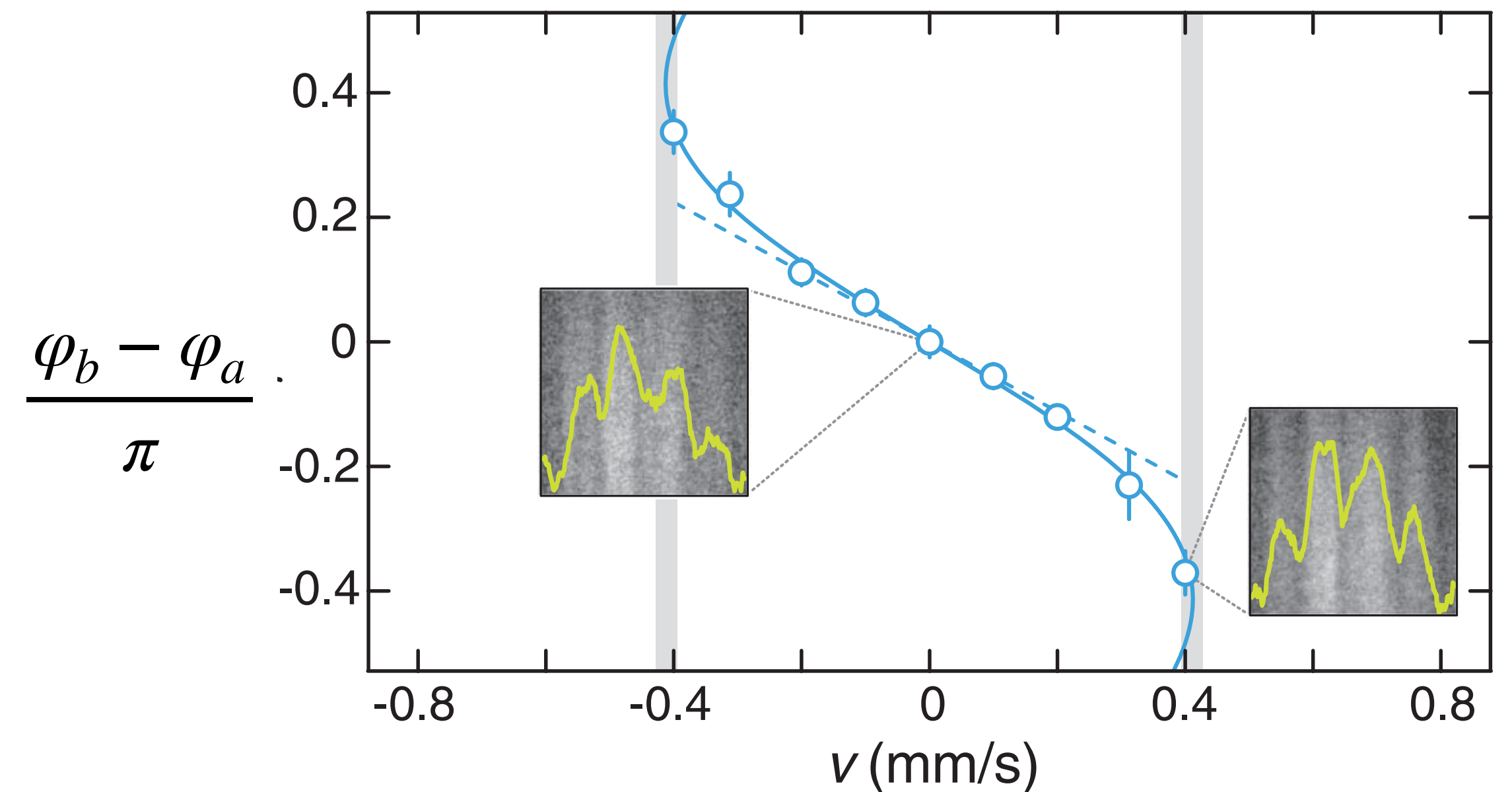


Kwon et al., Science (2020)

La caractéristique de la jonction et sa relation courant-phase



Ligne continue : ajustement par le modèle RCSJ
+ légères oscillations plasma



Si $v > 0$, la vitesse des particules est < 0

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} < 0 \Rightarrow \varphi_a > \varphi_b$$

Plan du cours

1. Caractéristique courant-tension d'une jonction supraconductrice

approche analytique et résultats numériques

2. Caractéristique courant-tension d'une jonction atomique

barrière mobile

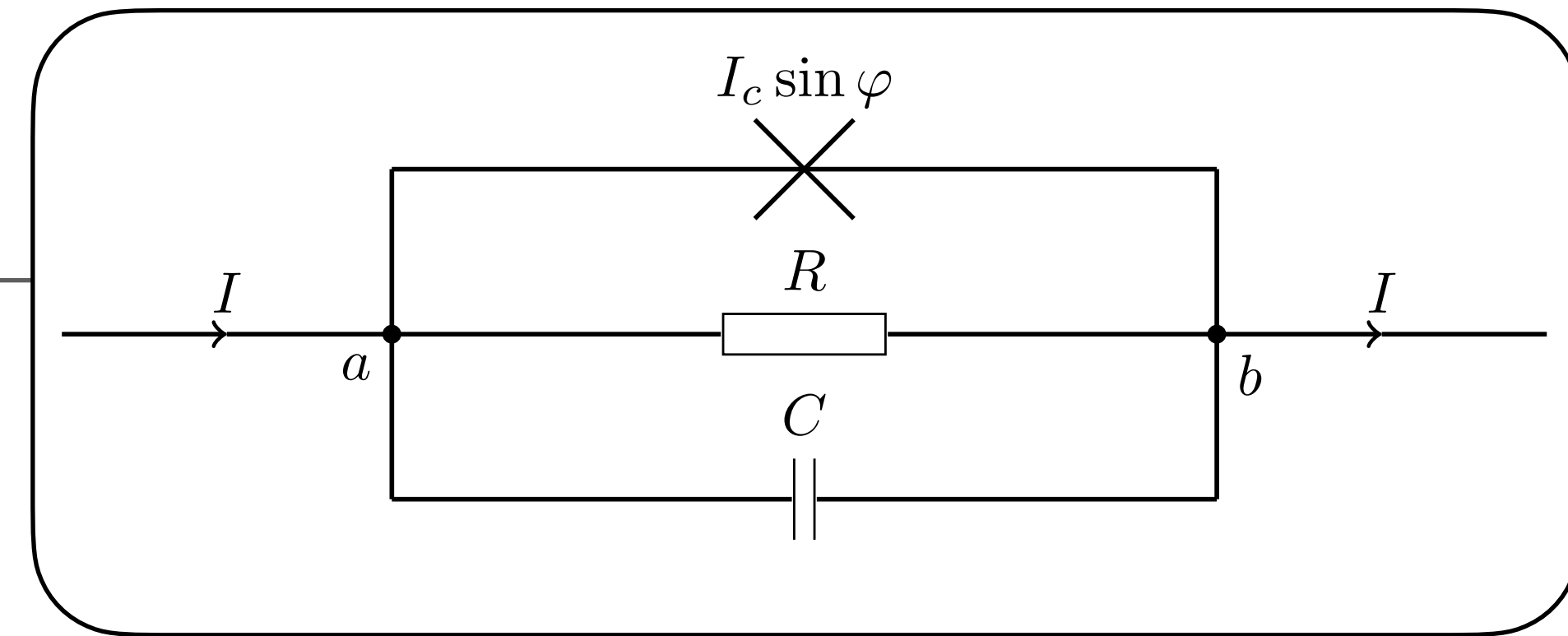
3. Les paramètres des jonctions atomiques

courant critique, résistance et capacité

4. L'effet tunnel macroscopique

les expériences de Clarke, Devoret, Martinis (Nobel 2025)

Définitions et unités des paramètres I_c, R, C



- Courants
- “Jonction idéale” : $\dot{n} = I_c \sin \varphi$ unité de I_c : s^{-1}
 - Partie résistive : $\frac{\Delta\mu}{R}$ unité de R : énergie \times temps
 - Partie capacitive : $C \frac{d(\Delta\mu)}{dt}$ unité de C : (énergie) $^{-1}$

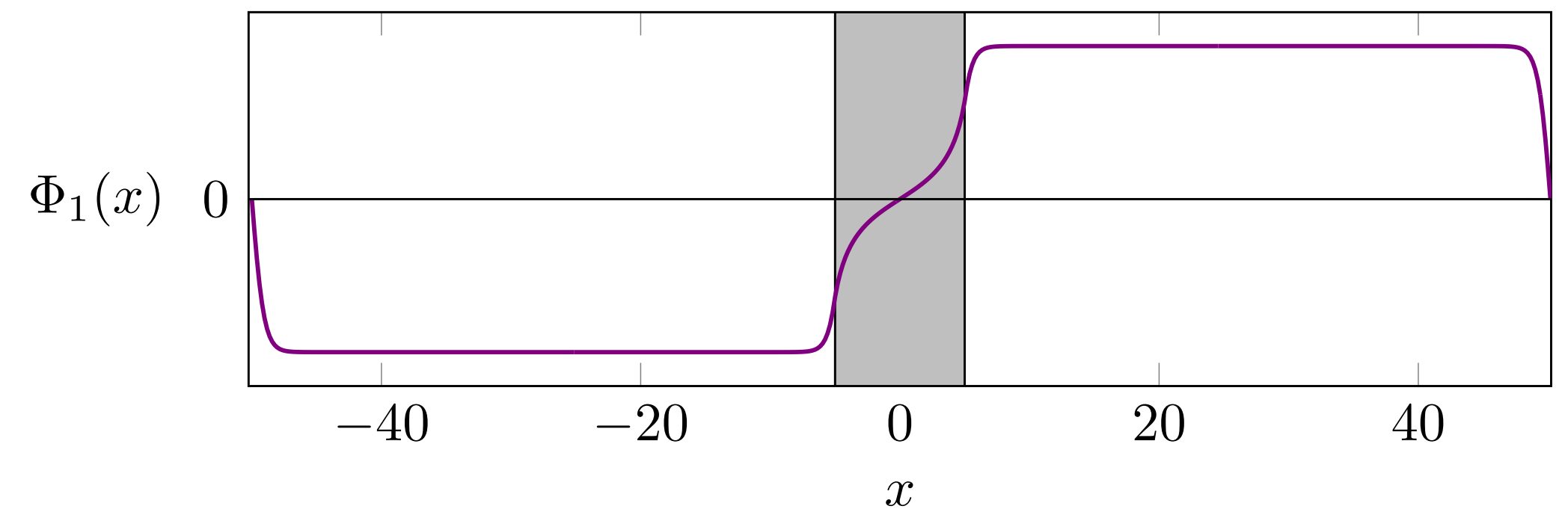
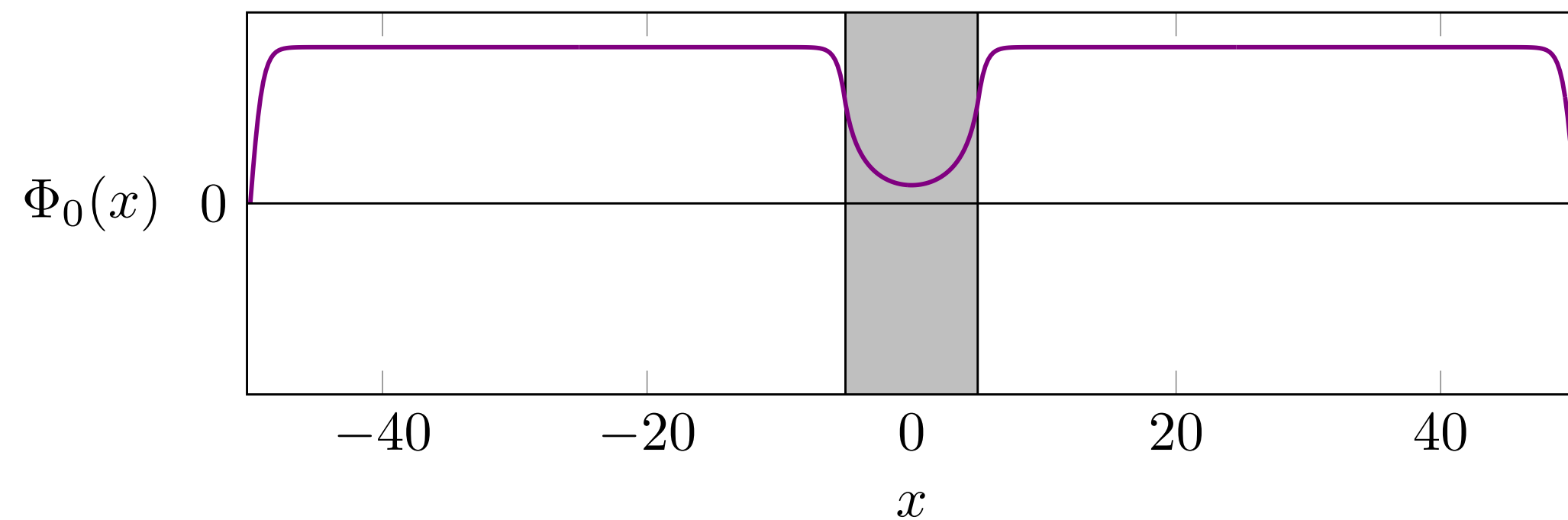
Equation du mouvement pour φ : $\rho v = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{R} \dot{\varphi} + \hbar C \ddot{\varphi}$

$\left. \begin{array}{l} \frac{\hbar}{R} : \text{sans dimension} \\ \hbar C : \text{temps} \end{array} \right\}$

Calcul du courant critique (approche 1) : l'énergie tunnel (cf. cours précédent)

Energie tunnel de la jonction idéale (à une constante additive près) : $E = -E_J \cos \varphi = -\hbar I_c \cos \varphi$

Si l'approche champ moyen (Gross-Pitaevskii) est valide, on calcule les deux états d'énergie de plus basse énergie, respectivement pair et impair



{ Etat Φ_0 : énergie E_0 , correspond à $\varphi = 0, n = 0$
Etat Φ_1 : énergie E_1 , correspond à $\varphi = \pi, n = 0$

$$\Rightarrow E_1 - E_0 = 2E_J = 2\hbar I_c$$

$$I_c = \rho v_c = \frac{1}{2\hbar}(E_1 - E_0)$$

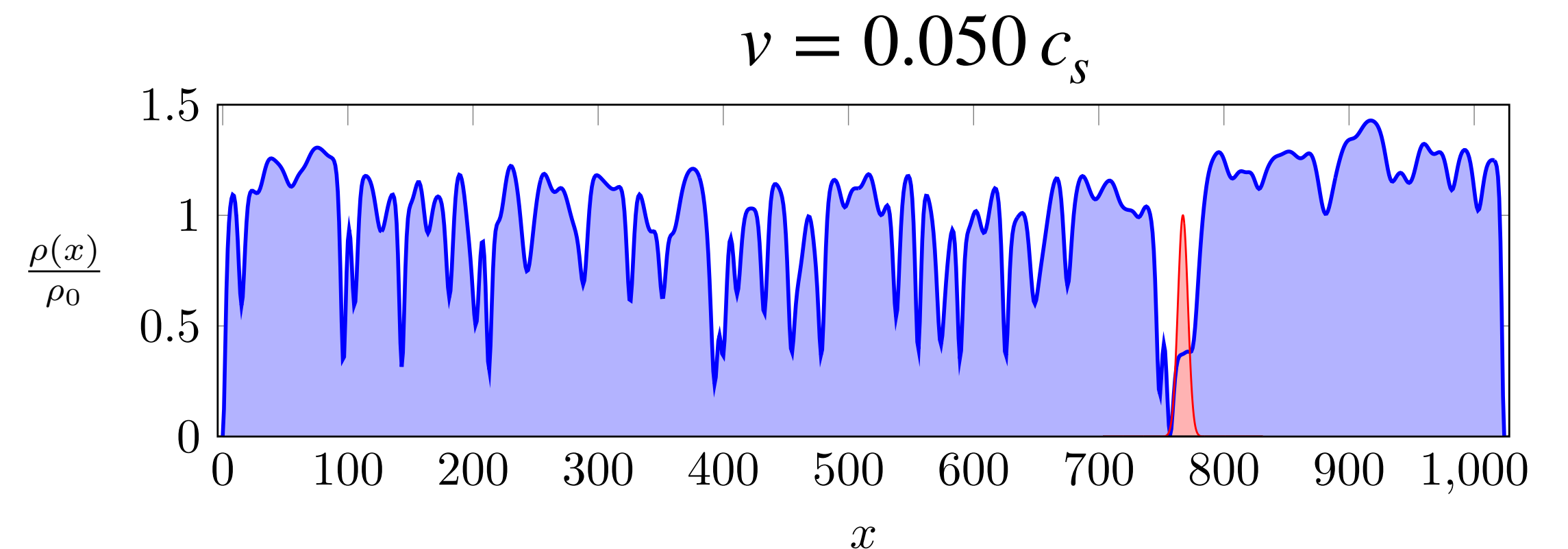
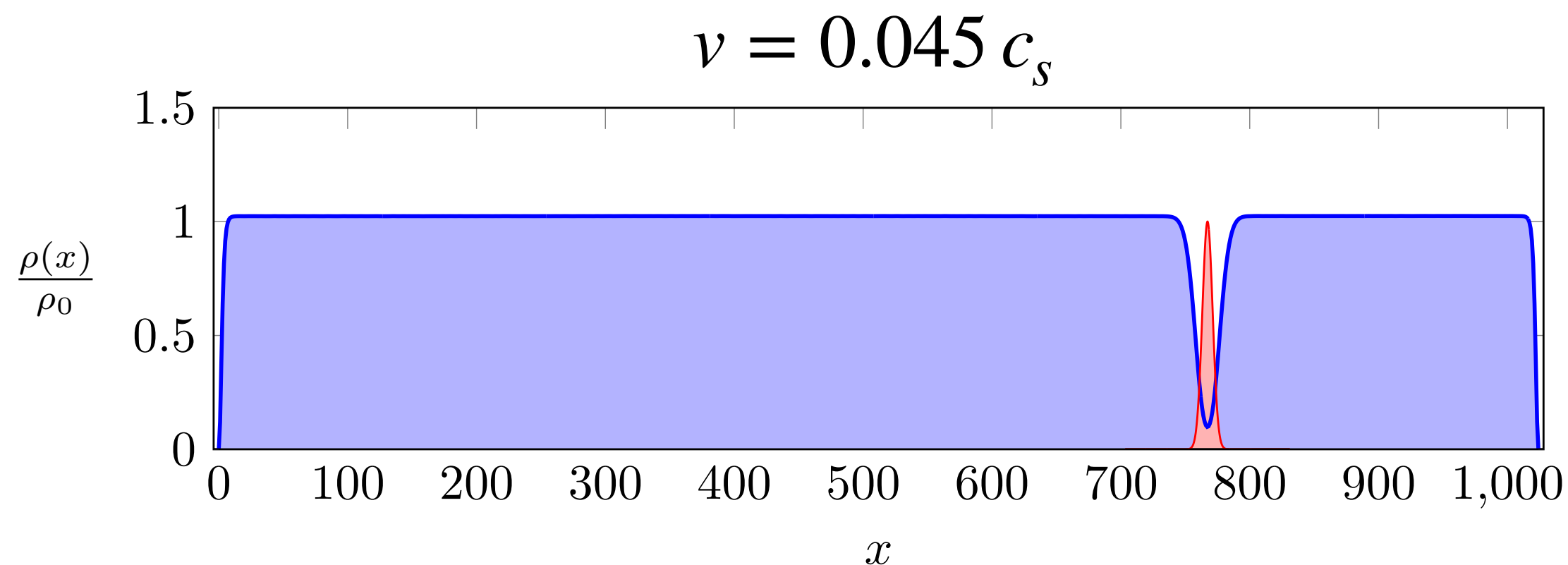
Calcul du courant critique (approche 2): détermination de v_c

On calcule numériquement l'état du gaz après le mouvement de la barrière tunnel

Exemple à une dimension : résolution numérique de l'équation GP pour une barrière gaussienne mobile

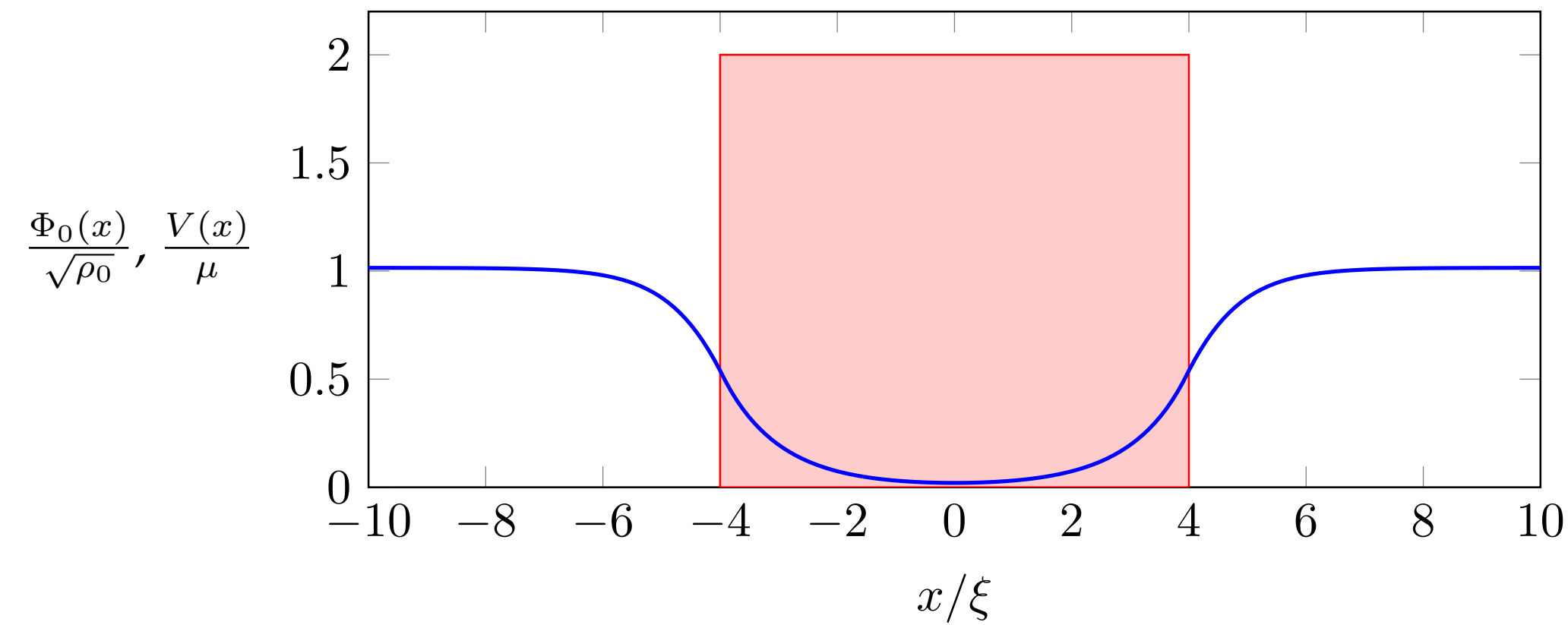
$$V(x) = V_0 \exp(-2x^2/w^2) \quad V_0 = \mu \quad w = 8\xi \quad \xi : \text{longueur de cicatrisation (ou de relaxation)}$$

Vitesse critique attendue par calcul de $E_1 - E_0$ (approche 1) : $v_c = 0.0475 c_s$ $c_s = \sqrt{\mu/m}$: vitesse du son



Calcul du courant critique : approche 3 (heuristique)

Forme de l'état fondamental à l'intérieur de la barrière, supposée ici carrée : hauteur $V_0 = 2\mu$, largeur $d = 8\xi$

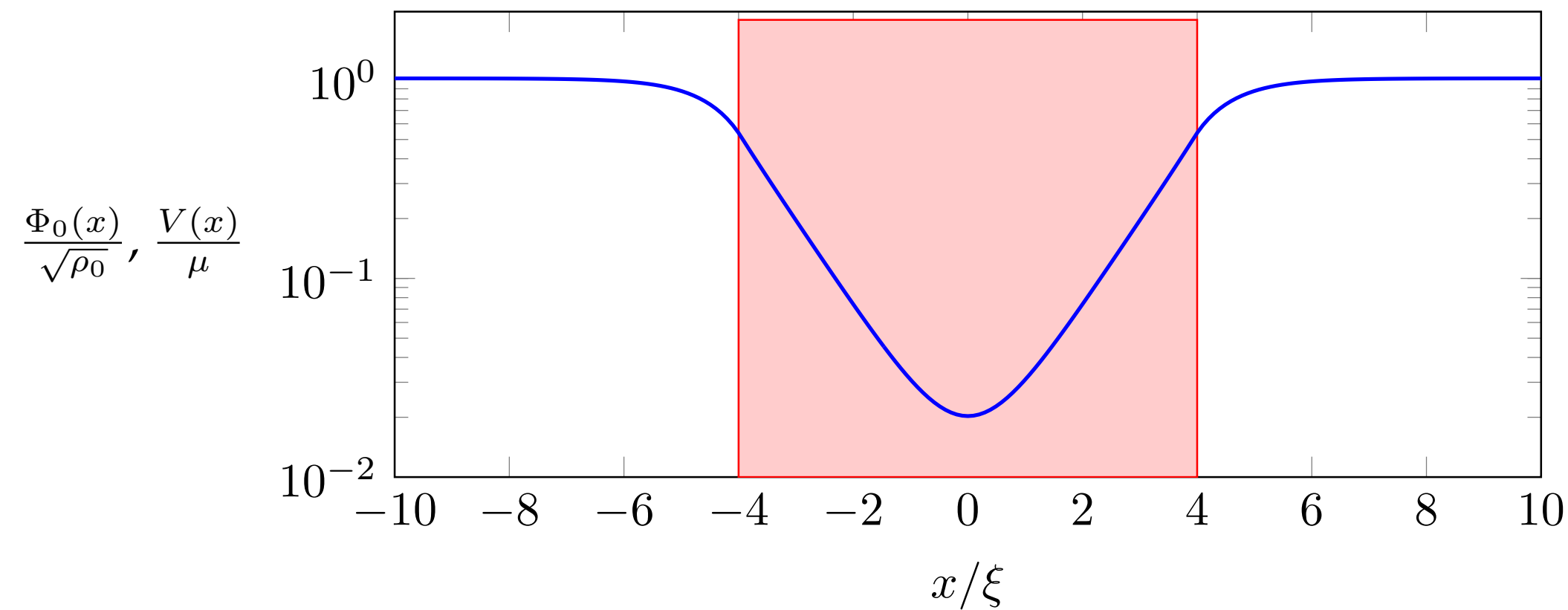


Décroissance exponentielle de $\Phi_0(x)$
à l'intérieur de la barrière

On définit:

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - \mu)}}{\hbar}$$

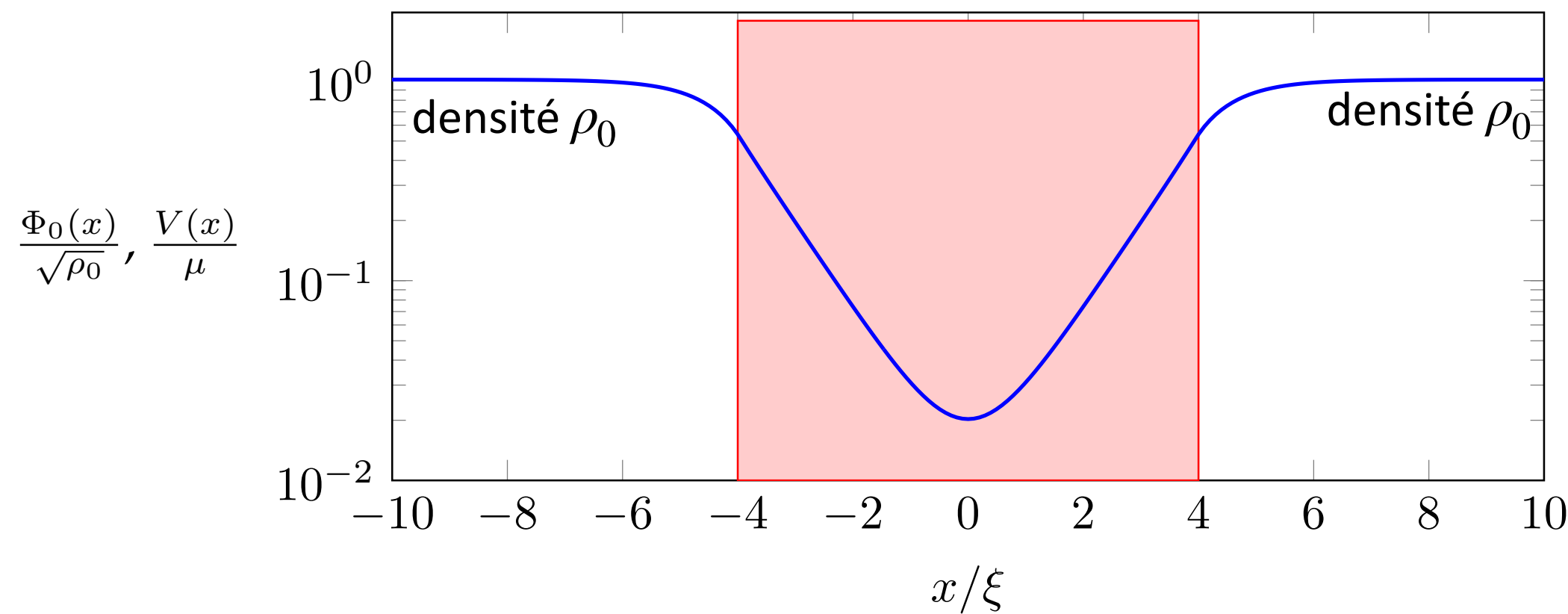
$$\mathcal{T} = e^{-\kappa d}$$



Calcul du courant critique : approche 3 (heuristique, suite)

$$\mathcal{T} = e^{-\kappa d}$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - \mu)}}{\hbar}$$



densité en $x = 0$: $\sim \rho_0 \mathcal{T}$

Différence de phase $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$ concentrée essentiellement sur la zone de largeur κ^{-1} où la densité est minimale

Au courant critique, $\varphi \approx \pi/2$

vitesse en $x = 0$: $\frac{\hbar}{m} \frac{d\varphi}{dx} \sim \frac{\hbar}{m} \frac{\pi/2}{\kappa^{-1}} \sim \frac{\hbar \kappa}{m}$

Courant attendu : $\sim \rho_0 \mathcal{T} \frac{\hbar \kappa}{m}$

Simplification supplémentaire si V_0 comparable à μ : $\frac{\hbar \kappa}{m} \sim c_s = \sqrt{\mu/m}$

$\Rightarrow I_c \sim \rho_0 c_s \mathcal{T}$

Courant critique : autres approches quantitatives

Jonctions supraconductrices : Ambegaokar & Baratoff (1963)

Jonctions atomiques (approche Gross-Pitaevskii) : Meier & Zwerger (2001) , Piazza et al. (2010)

Bon accord avec l'approche heuristique précédente $\sim \rho_0 \mathcal{T} \frac{\hbar \kappa}{m}$

Jonctions atomiques (gaz de Fermi entre BCS et BEC) : Zaccanti & Zwerger (2019)

Mesure de la partie capacitive

Utilisation des petites oscillations autour de l'équilibre (oscillations plasma)

$$\begin{cases} \hbar \dot{n} = E_J \varphi & (\sin \varphi \approx \varphi) \\ \hbar \dot{\varphi} = -E_C n & (\overline{\Delta\mu} = 0) \end{cases}$$

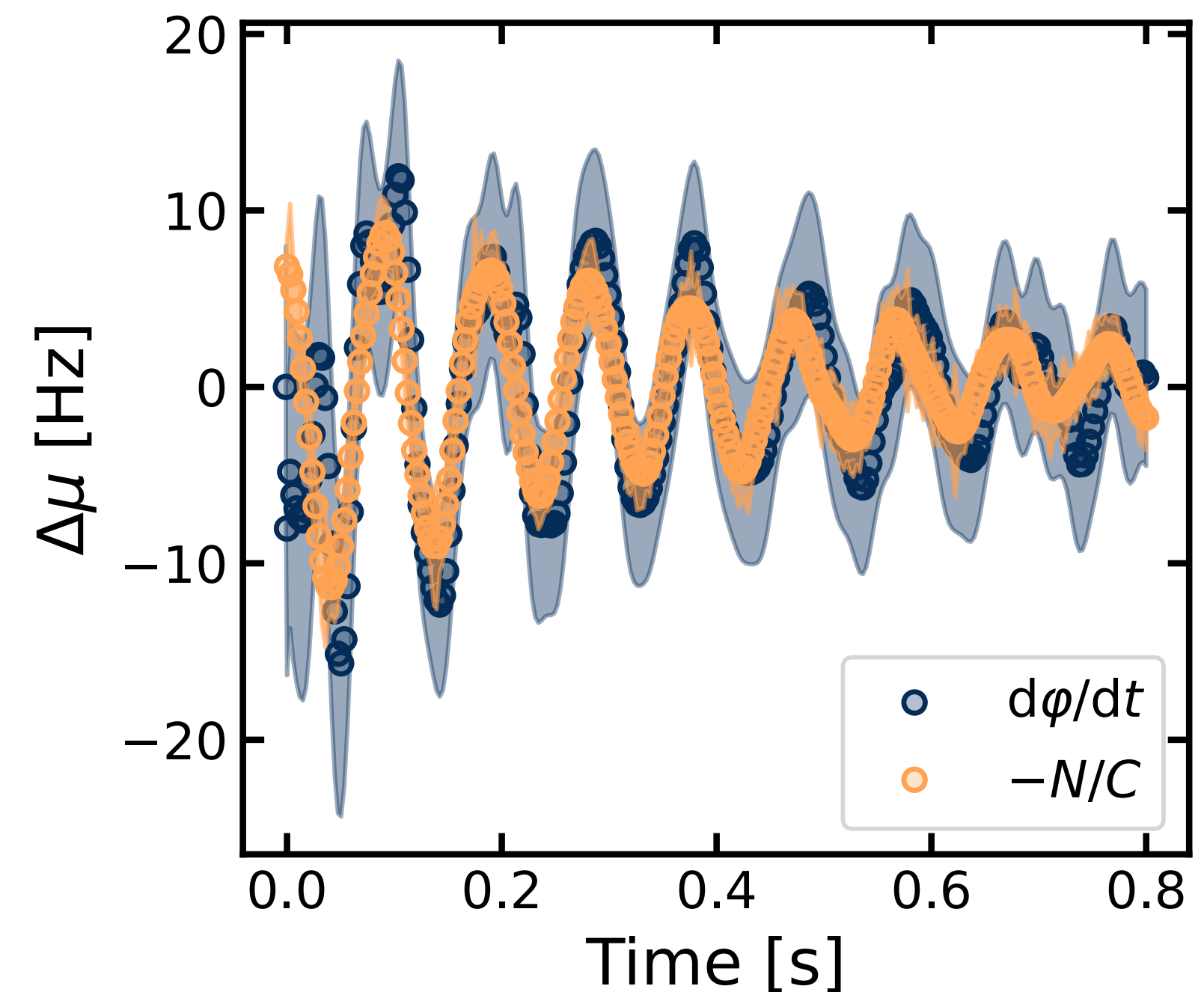
$$\Rightarrow \hbar \omega_p = \sqrt{E_J E_C} = \sqrt{\hbar I_c \frac{1}{C}}$$

Bernhart et al., Science (2025) [groupe de H. Ott]

Gaz de rubidium condensé dans un tube cylindrique

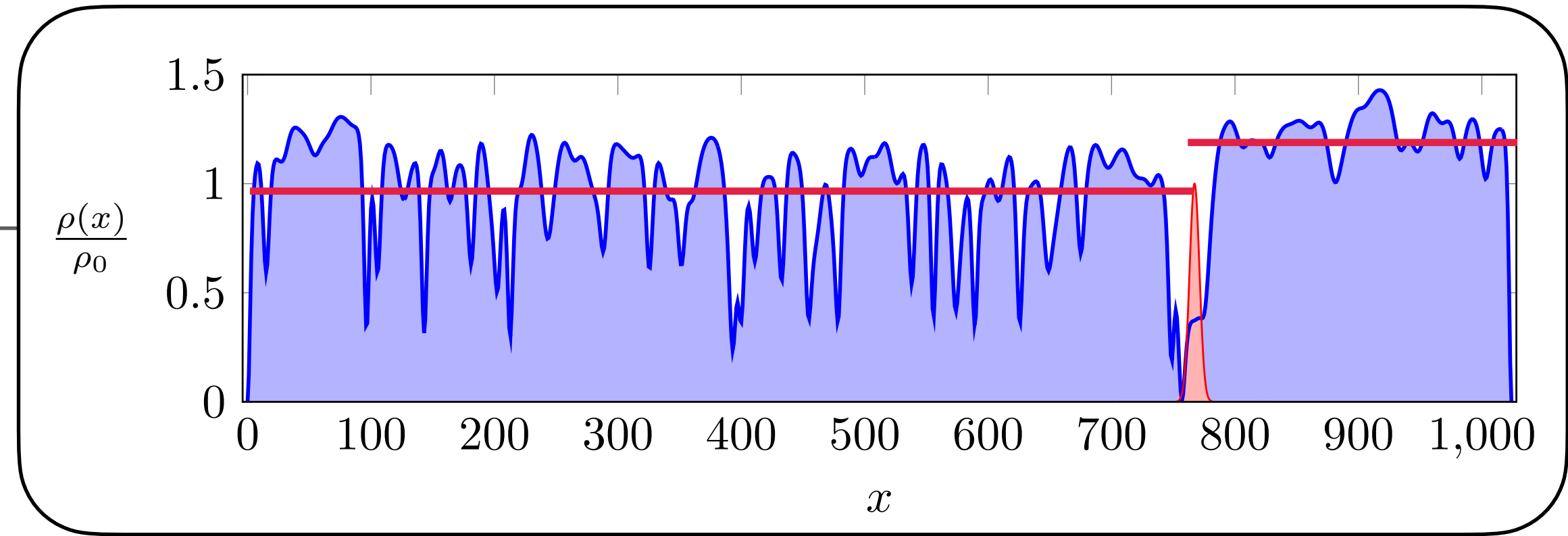
$$I_c \approx 200 \text{ ms}^{-1}$$

$$\hbar C = 65 \text{ s}$$

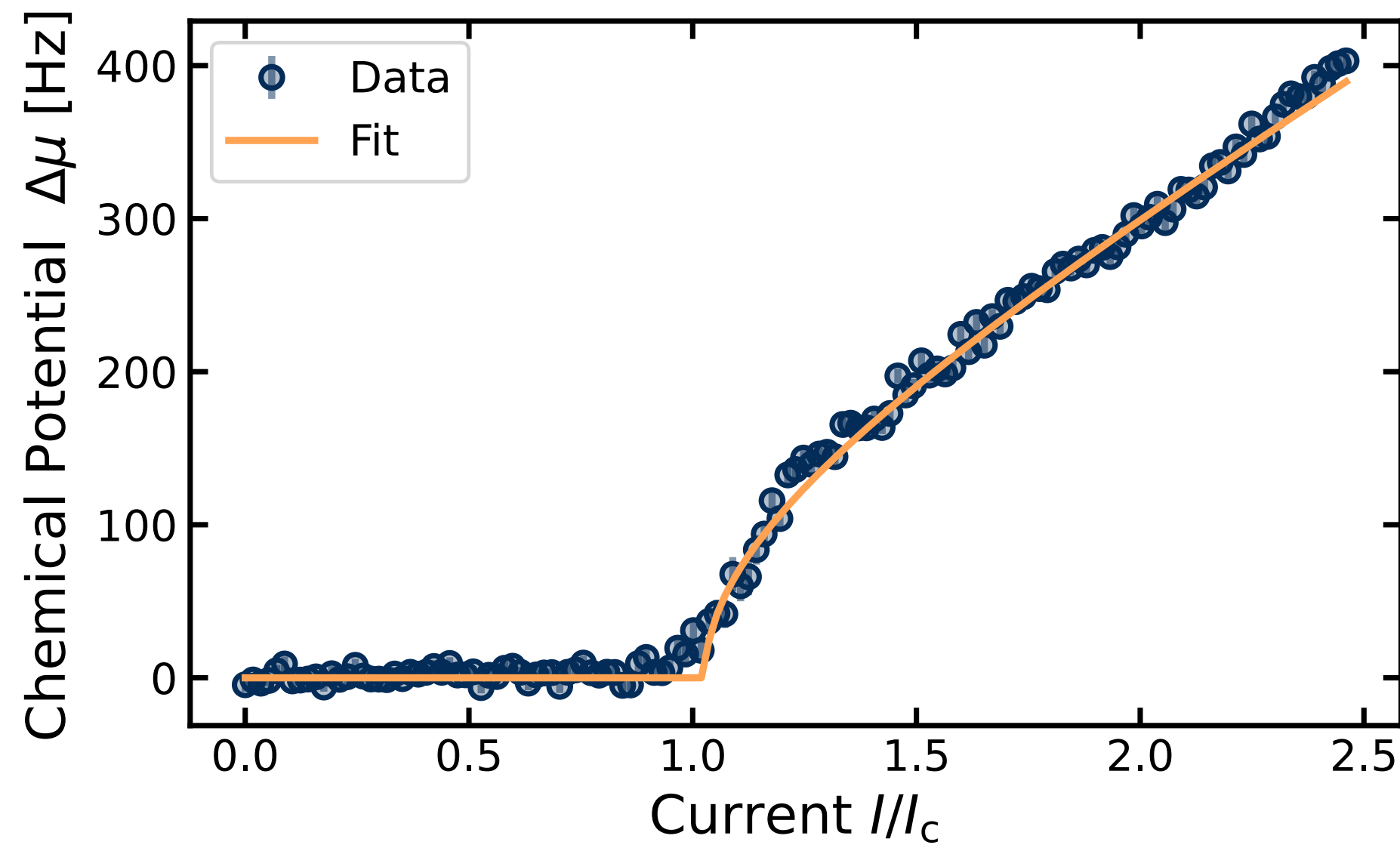


Mesure de la partie résistive

- Amortissement de l'oscillation plasma
- Régime $\nu > \nu_c$ (i.e. $I > I_c$) de la caractéristique



Bernhart et al., Science (2025) [groupe de H. Ott]



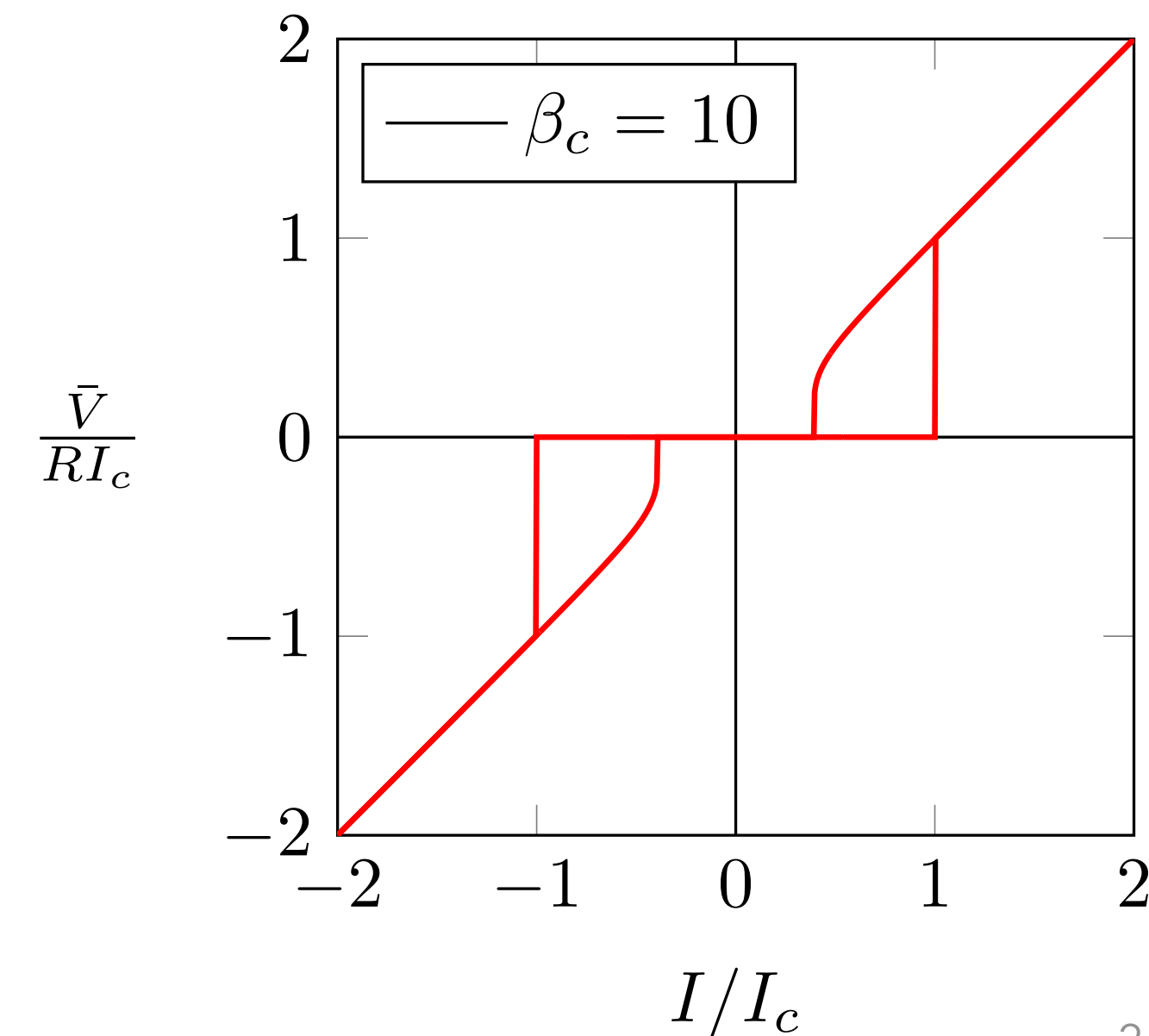
L'ajustement par le modèle RCSJ

$$\text{donne } R/h = 0.9 \cdot 10^{-3}$$

On en déduit le paramètre :

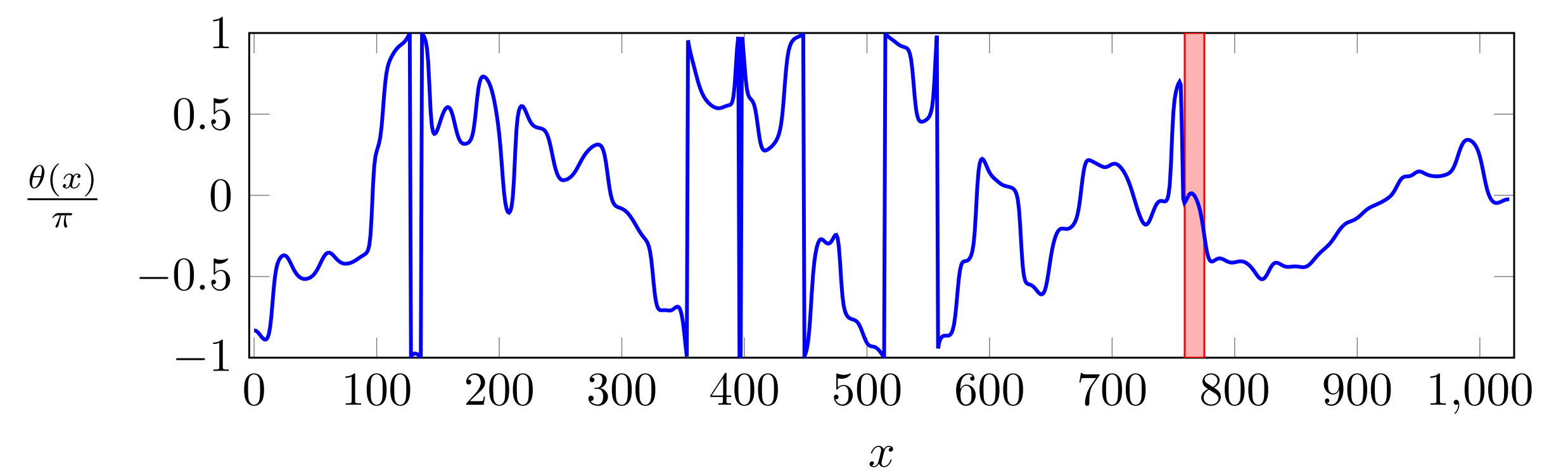
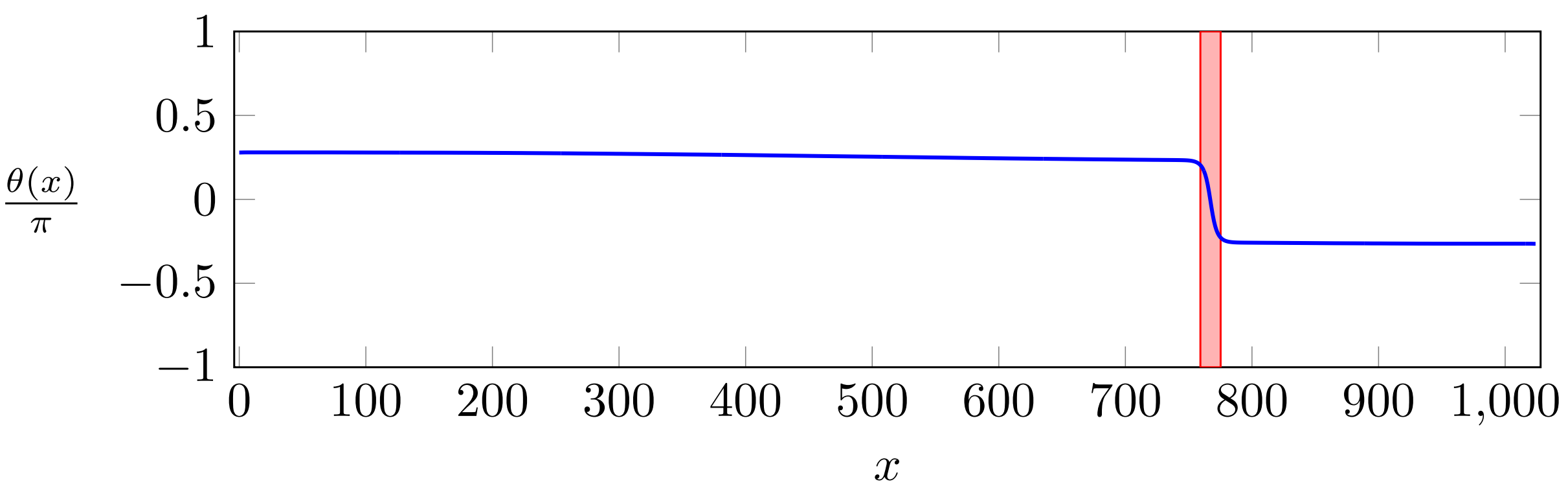
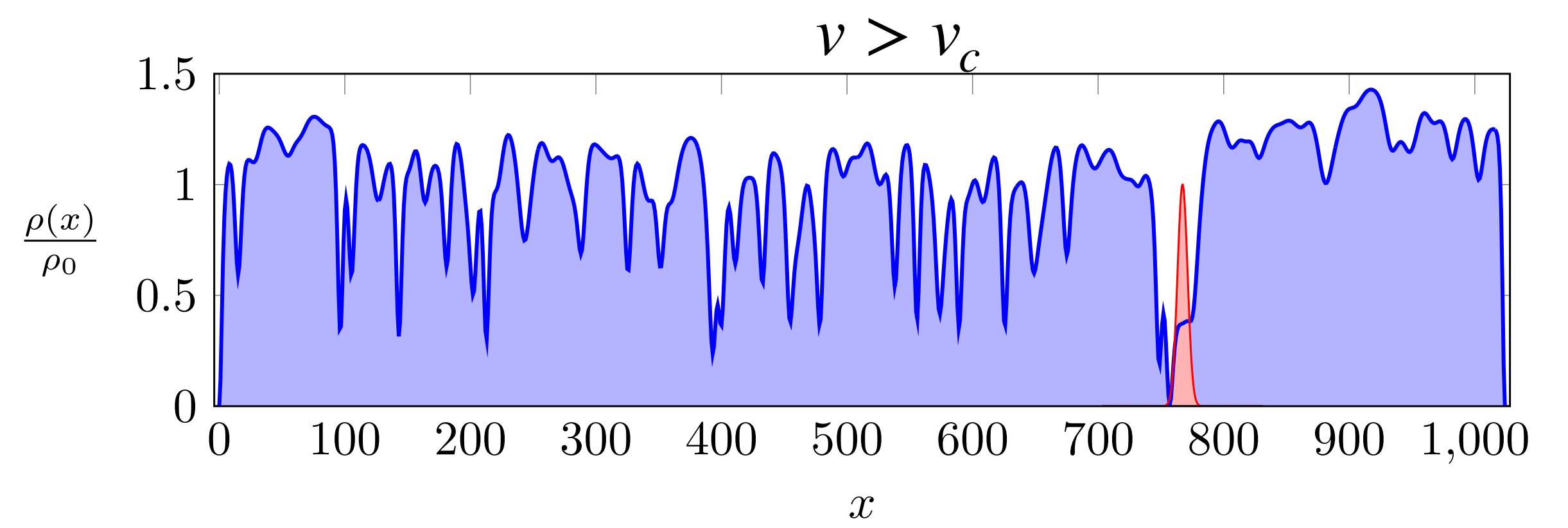
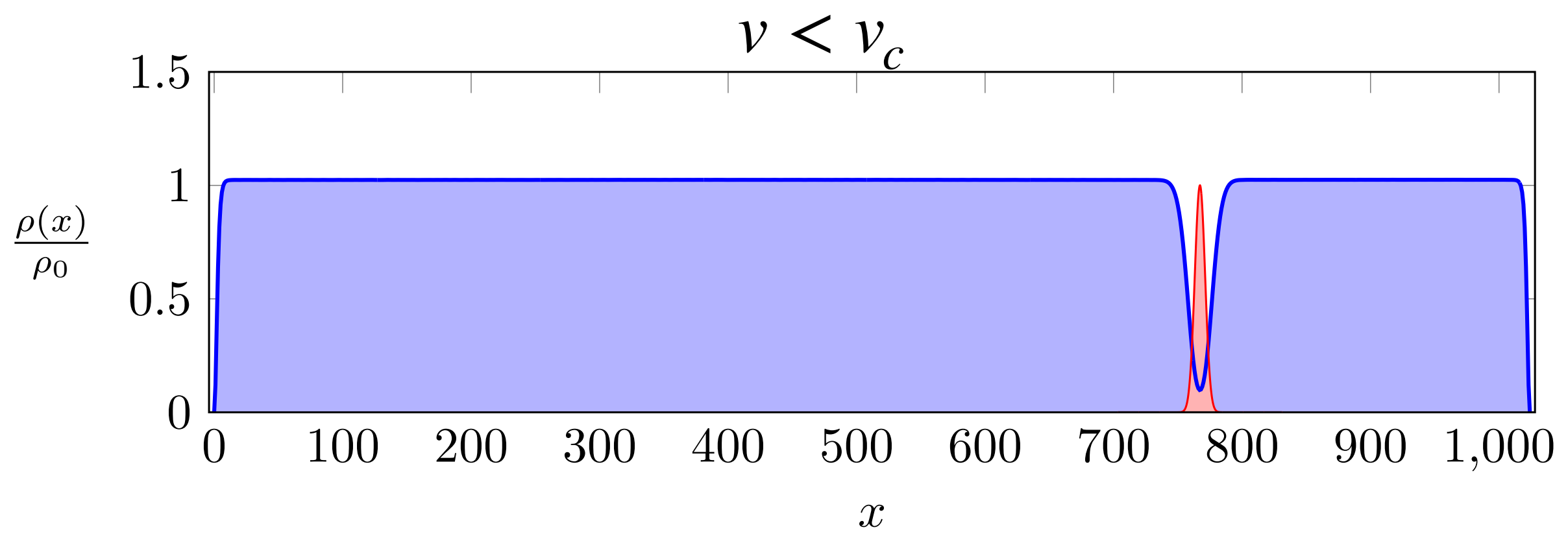
$$\beta_c \equiv I_c R^2 C / \hbar \approx 60$$

hystérésis observable ???



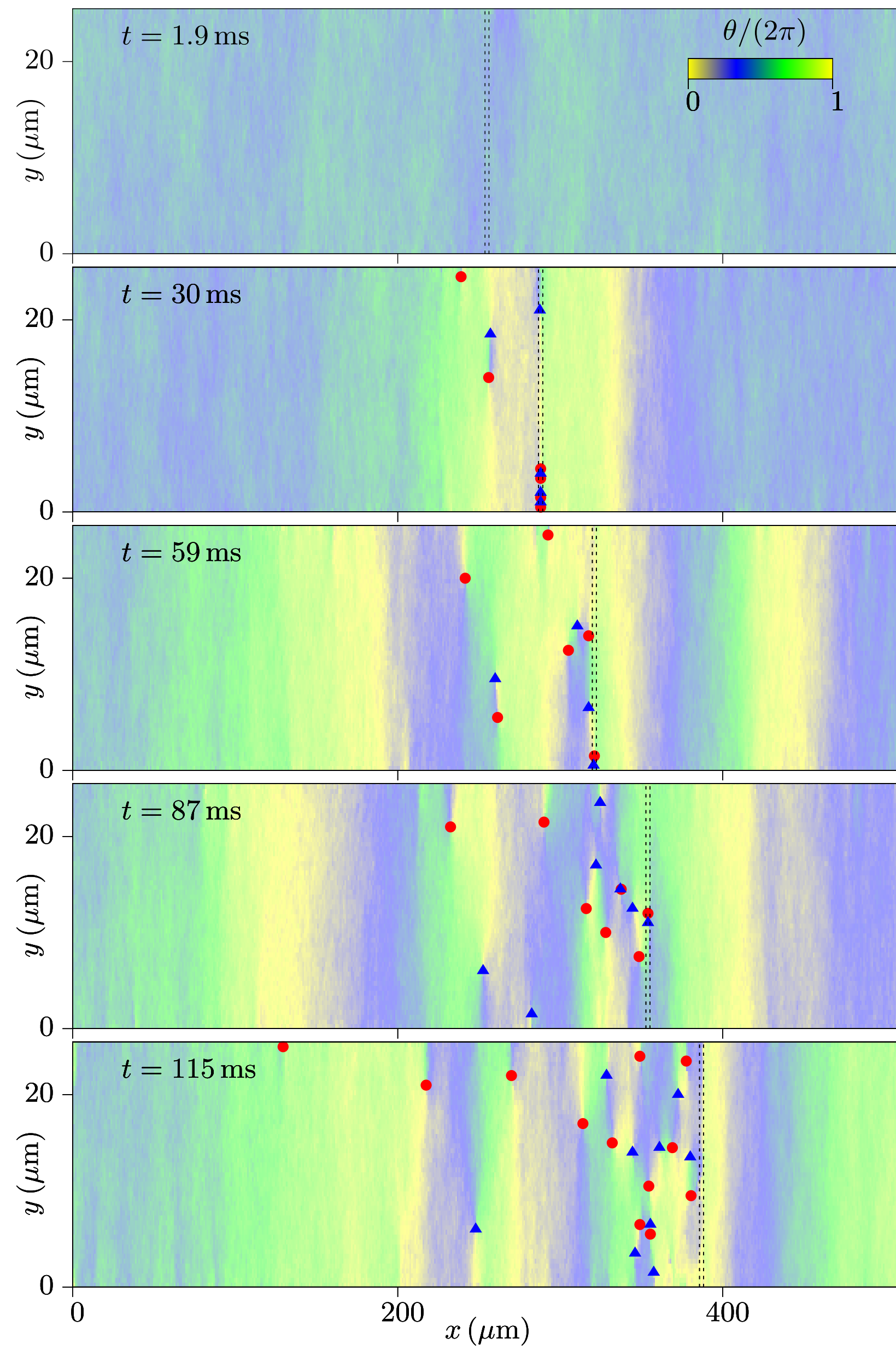
Origine de la dissipation

Pour un gaz 1D décrit par l'équation de Gross-Pitaevskii, génération de solitons gris ou noirs



Origine de la dissipation à 2D

Singh et al, Phys. Rev. Lett (2024)



Résolution numérique de l'équation de GP pour un gaz confiné dans un rectangle et une barrière à vitesse uniforme $v = 1.06 v_c$

- *Nucléation de paires de vortex de signes opposés au niveau de la barrière*
- *Ces paires se séparent ensuite en aval de la jonction*

Plan du cours

1. Caractéristique courant-tension d'une jonction supraconductrice

2. Caractéristique courant-tension d'une jonction atomique

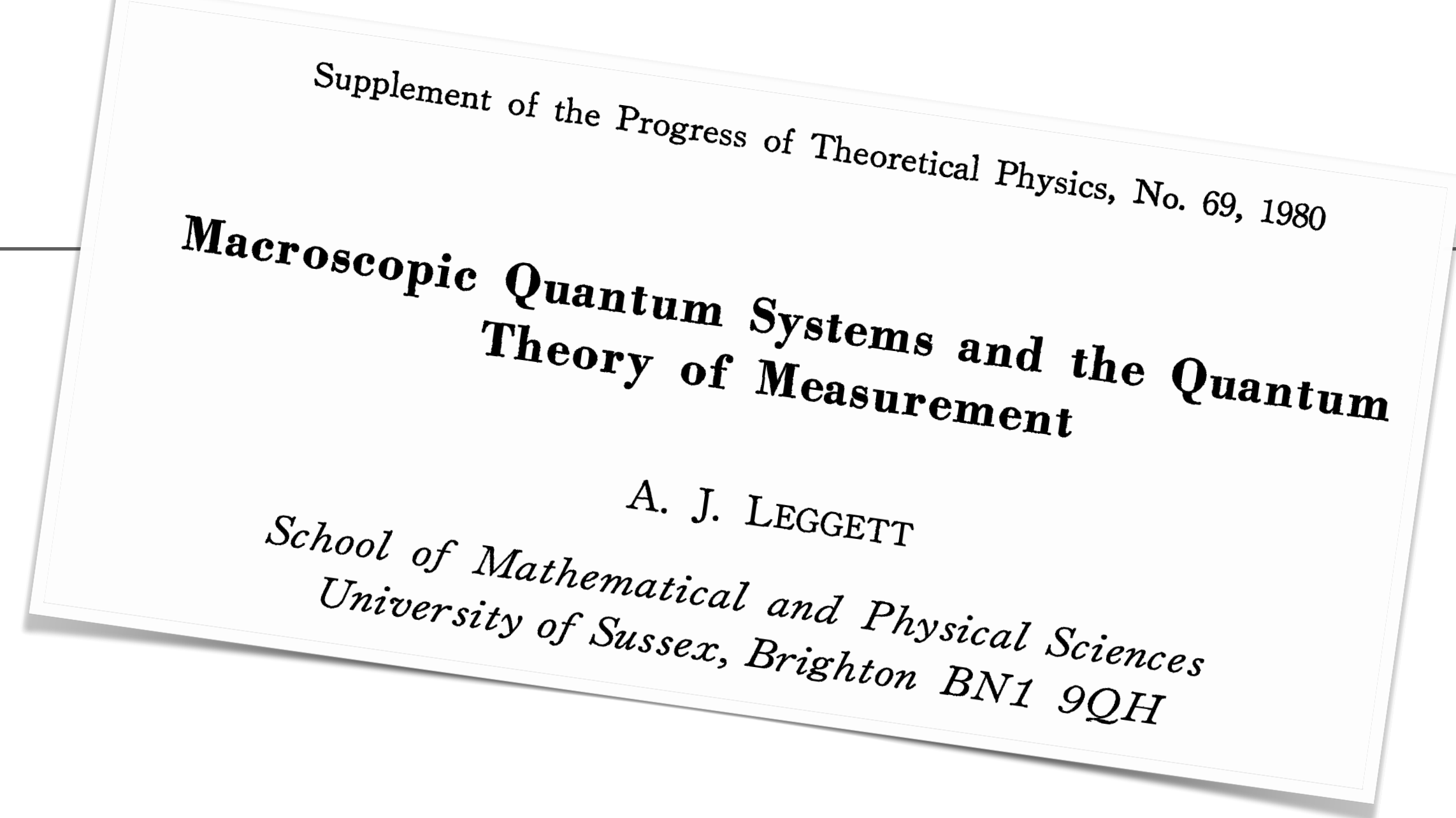
3. Les paramètres des jonctions atomiques

4. L'effet tunnel macroscopique

les expériences de Clarke, Devoret, Martinis (Nobel 2025)

Etats quantiques macroscopiques

How far do experiments on the so called "macroscopic quantum systems" such as superfluids and superconductors test the hypothesis that the linear Schrödinger equation may be extrapolated to arbitrarily complex systems?



Système à N corps, fonctions d'onde à une particule : $\psi_a(x)$, $\psi_b(x)$, ...

Quelques états possibles :

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x_1, \dots, x_N) &= \psi_a(x_1) \cdots \psi_a(x_N) \\ \Psi(x_1, \dots, x_N) &= \psi_b(x_1) \cdots \psi_b(x_N) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{États correspondant à un condensat de Bose-Einstein} \\ &\text{États factorisés sans corrélation entre particules} \end{aligned}$$

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = [\alpha\psi_a(x_1) + \beta\psi_b(x_1)] \cdots [\alpha\psi_a(x_N) + \beta\psi_b(x_N)] \quad \text{idem}$$

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \alpha \psi_a(x_1) \cdots \psi_a(x_N) + \beta \psi_b(x_1) \cdots \psi_b(x_N) \quad \text{État de type "chat de Schrödinger"}$$

Vers un effet tunnel macroscopique

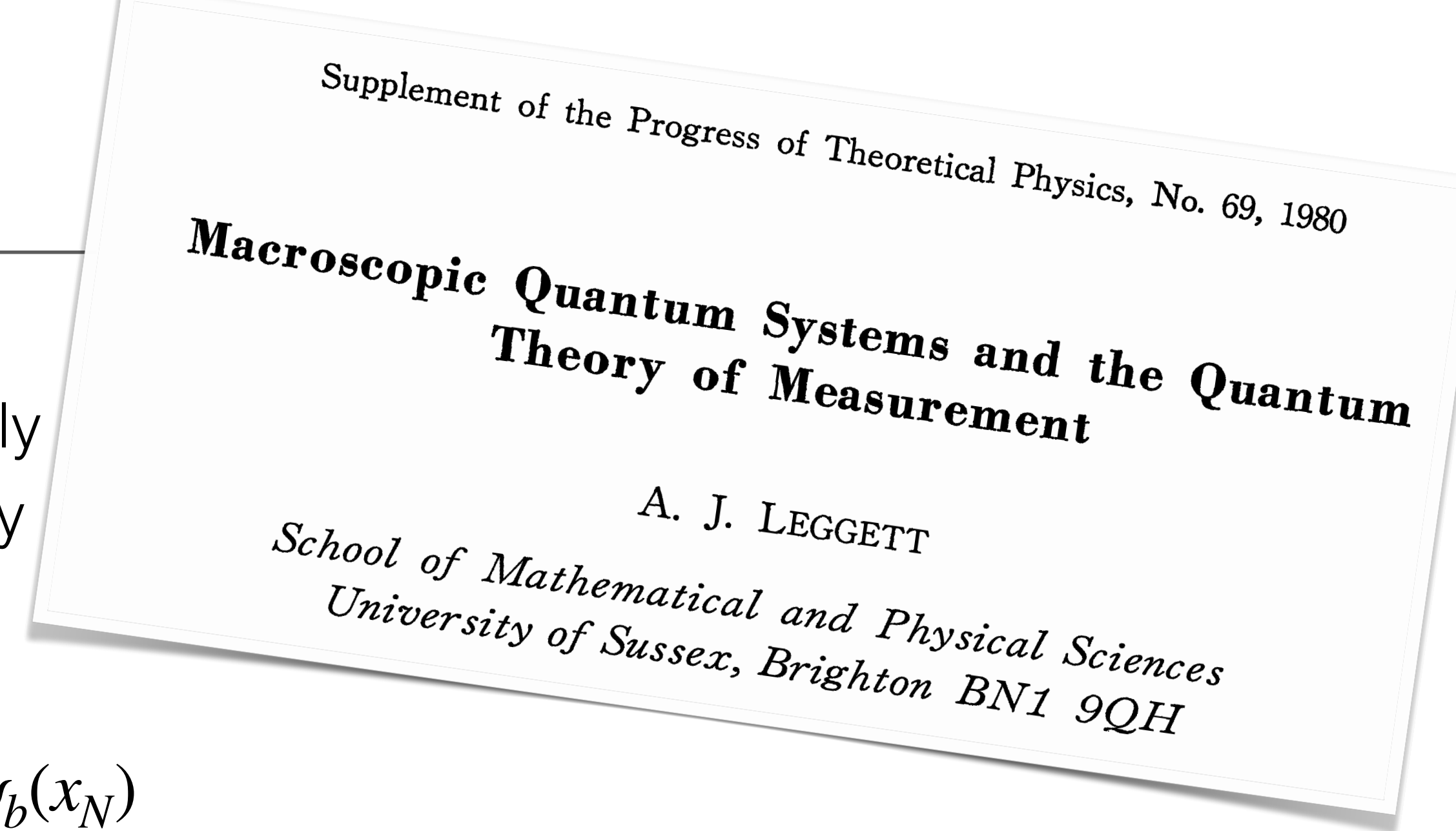
Any observation of quantum coherence between macroscopically different flux states ... would probably be as near as we are likely to get to a laboratory version of Schrödinger's Cat.

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \alpha \psi_a(x_1) \cdots \psi_a(x_N) + \beta \psi_b(x_1) \cdots \psi_b(x_N)$$

However, I believe that in practice such an observation is likely to present serious, though possibly not insuperable, difficulties.

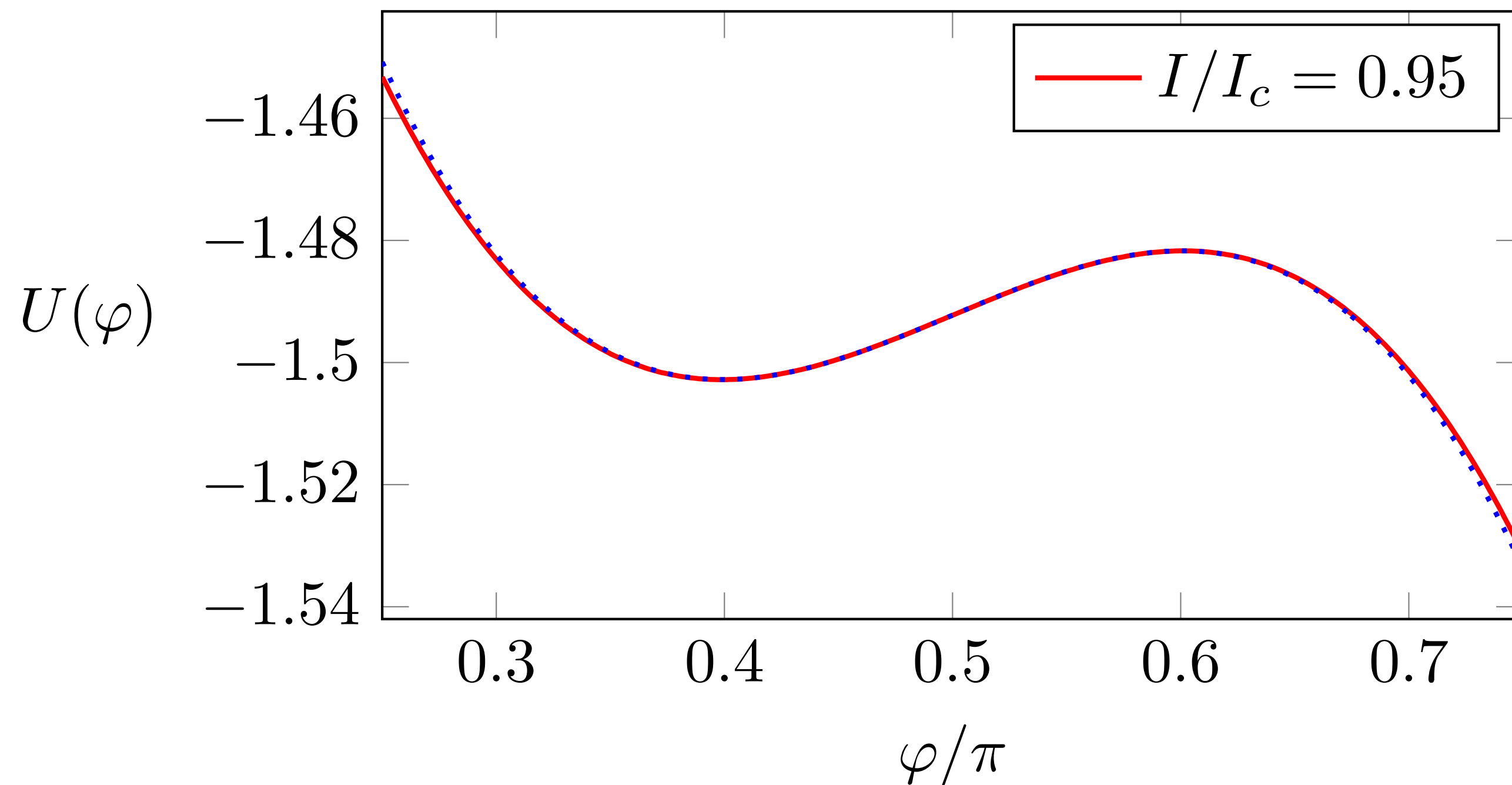
Une autre voie ?

If quantum coherence is problematic from an experimental point of view, what of quantum tunnelling by itself?
Here the prospects seem a great deal more favourable.



Jonction Josephson au voisinage du courant critique

Potentiel de la planche à laver inclinée pour I légèrement inférieure à I_c : faibles minima locaux autour de $\varphi = \pi/2$



Approximation cubique :

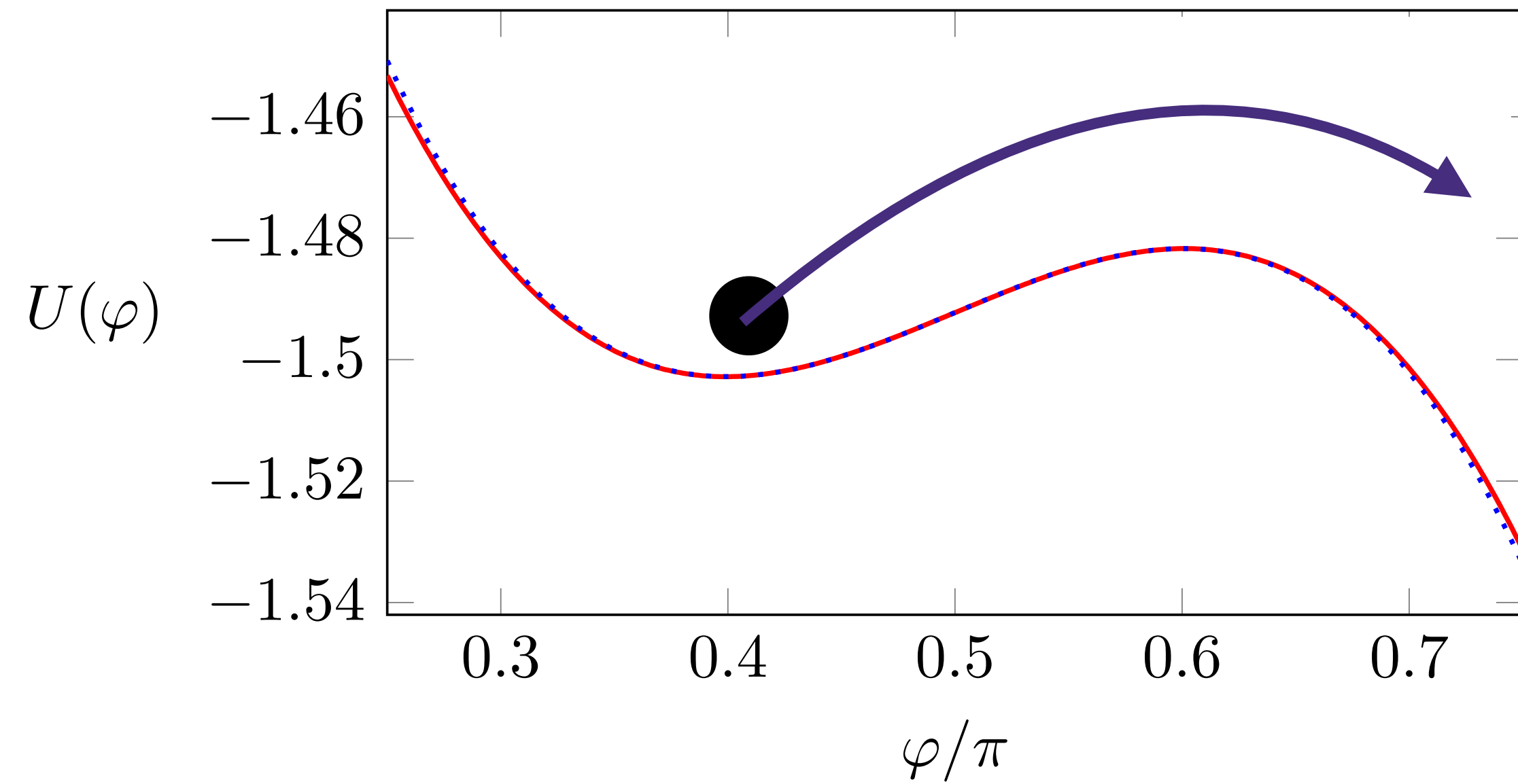
$$U(x) \approx (I_c - I)x - \frac{I_c}{6}x^3 + \text{constante}$$

$$x = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

hauteur de la barrière résiduelle : $\Delta U \propto (I_c - I)^{3/2}$

fréquence d'oscillation plasma : $\omega_p(I) \propto (I_c - I)^{1/4}$

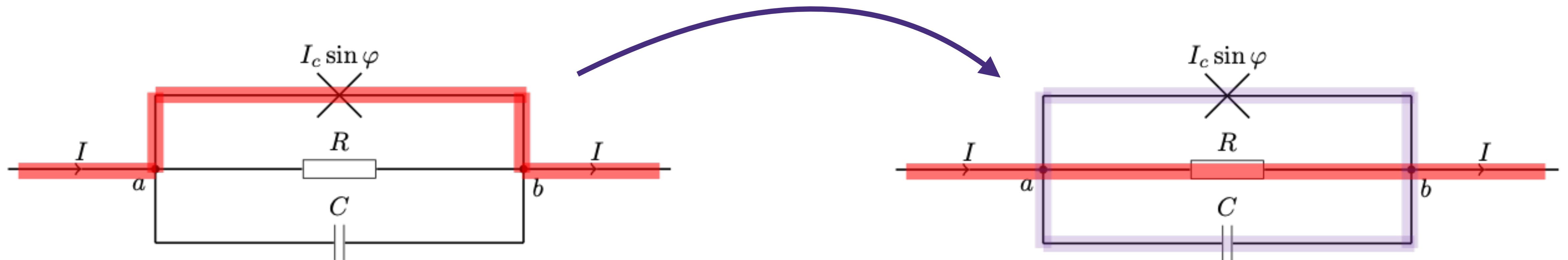
Activation thermique de la barrière

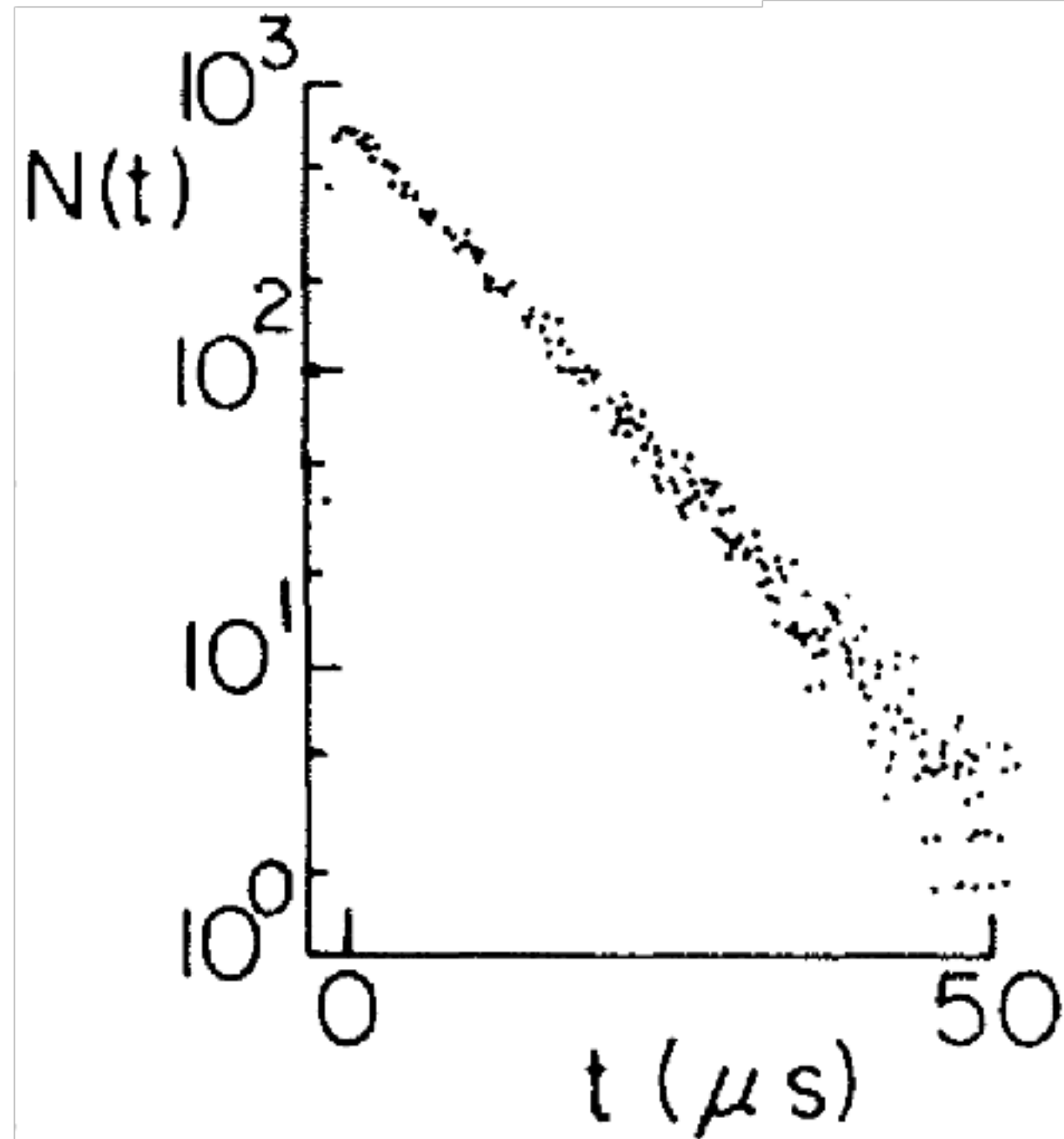


Particule fictive (traitée classiquement)
couplée à un bain à température T

Taux pour le franchissement de la barrière :

$$\Gamma(I, T) \propto e^{-\Delta U(I)/k_B T} \quad \text{Arrhenius}$$





Distribution exponentielle des “instants de bascule” de la jonction

$$N(t) = N(0) e^{-\Gamma t}$$

avec $\Gamma(I, T) \propto e^{-\Delta U(I)/k_B T}$ et $\Delta U \propto (I_c - I)^{3/2}$

On en déduit $I_c = 8.77(5) \mu\text{A}$ et $T = 4.2(1) \text{ K}$

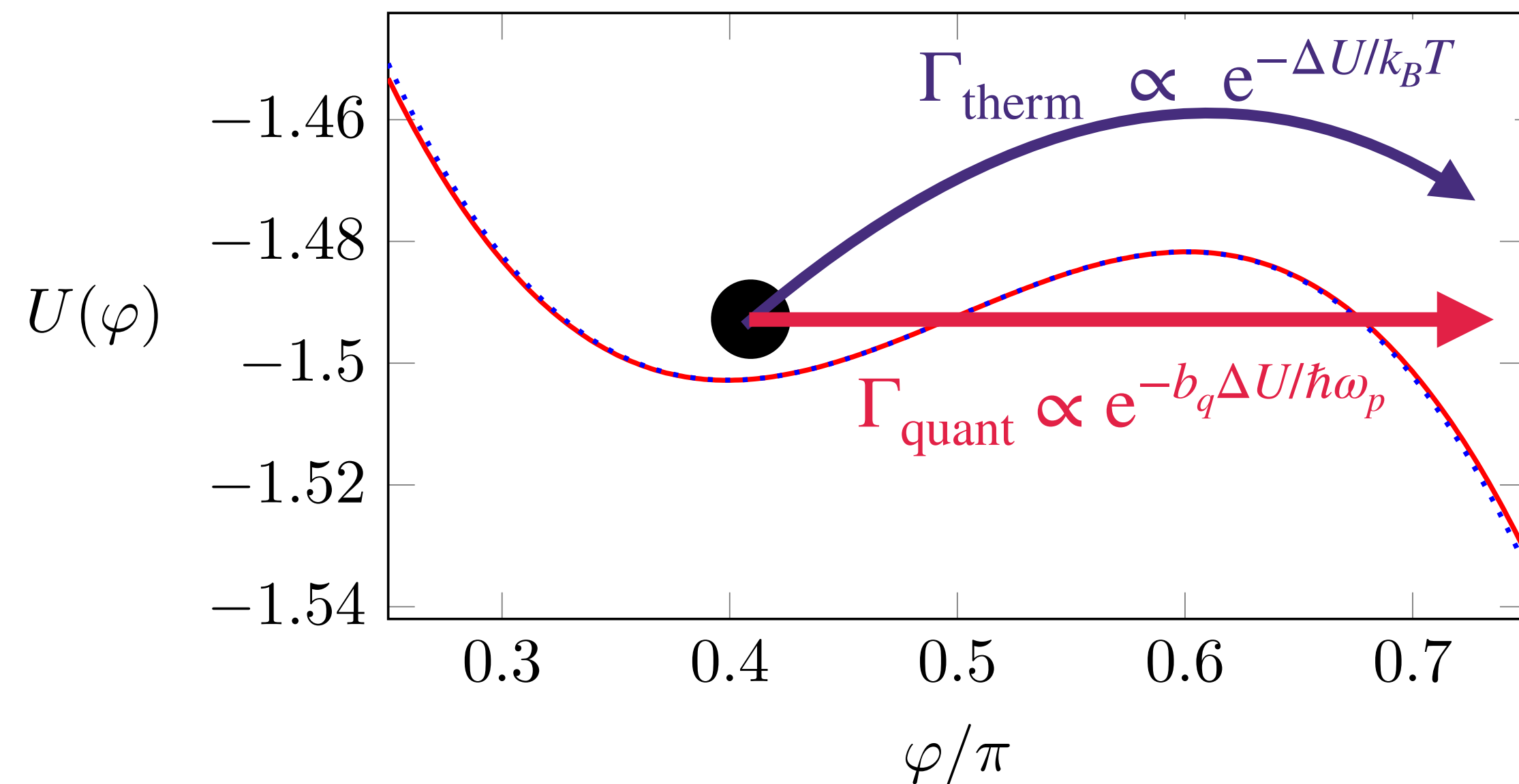
Température en accord avec une mesure indépendante

Observation d'une activation augmentée par une micro-onde de fréquence voisine de $\omega_p(I)$

Observation de l'effet tunnel macroscopique

Devoret et al, Phys. Rev. Lett. (1985)

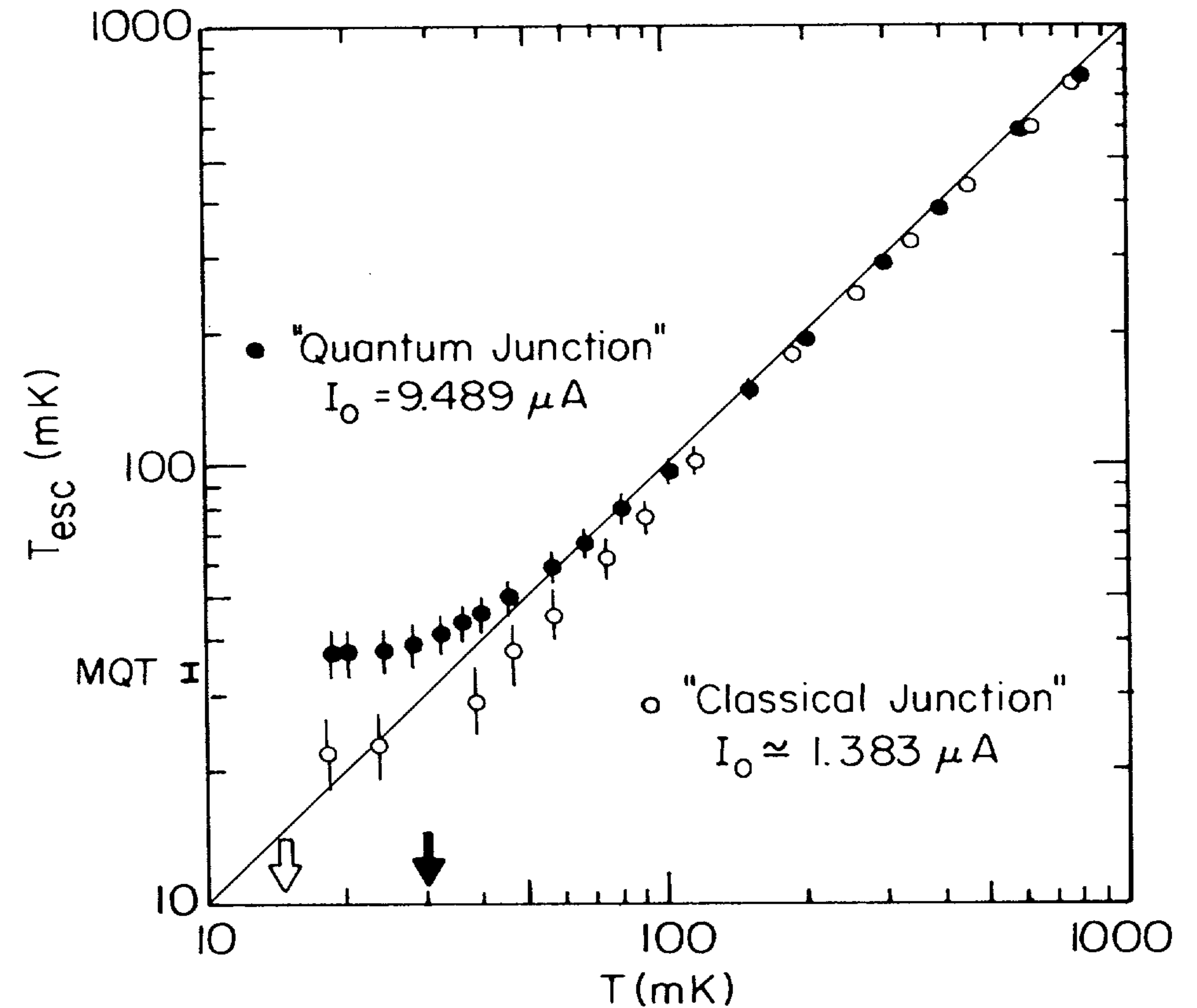
Exploration d'une gamme de températures beaucoup plus basses



Analyse des données par la loi : $e^{-\Delta U/k_B T_{\text{esc}}}$

À basse température, $T_{\text{esc}} = 37(4)$ mK

prédiction (Caldeira & Leggett) : 36 mK



Conclusions

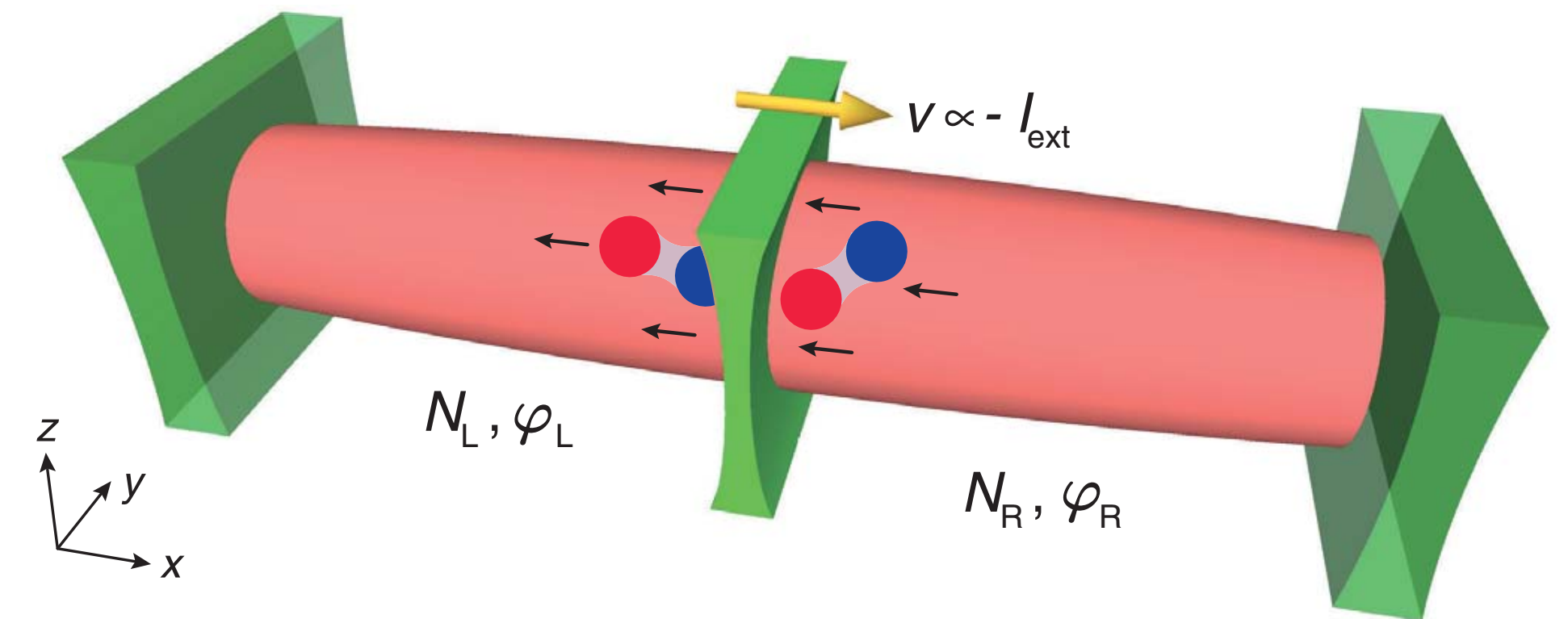
Modélisation classique de la jonction : description dans le cadre RCSJ

Caractéristique courant-tension pour un courant extérieur constant

Prochain cours : que se passe-t-il si on module ce courant ?

Transposition aux jonctions atomiques

Barrière mobile



Premiers pas vers une description quantique de la jonction

Sera approfondie à partir du cours 4 avec la quantification de n et de φ