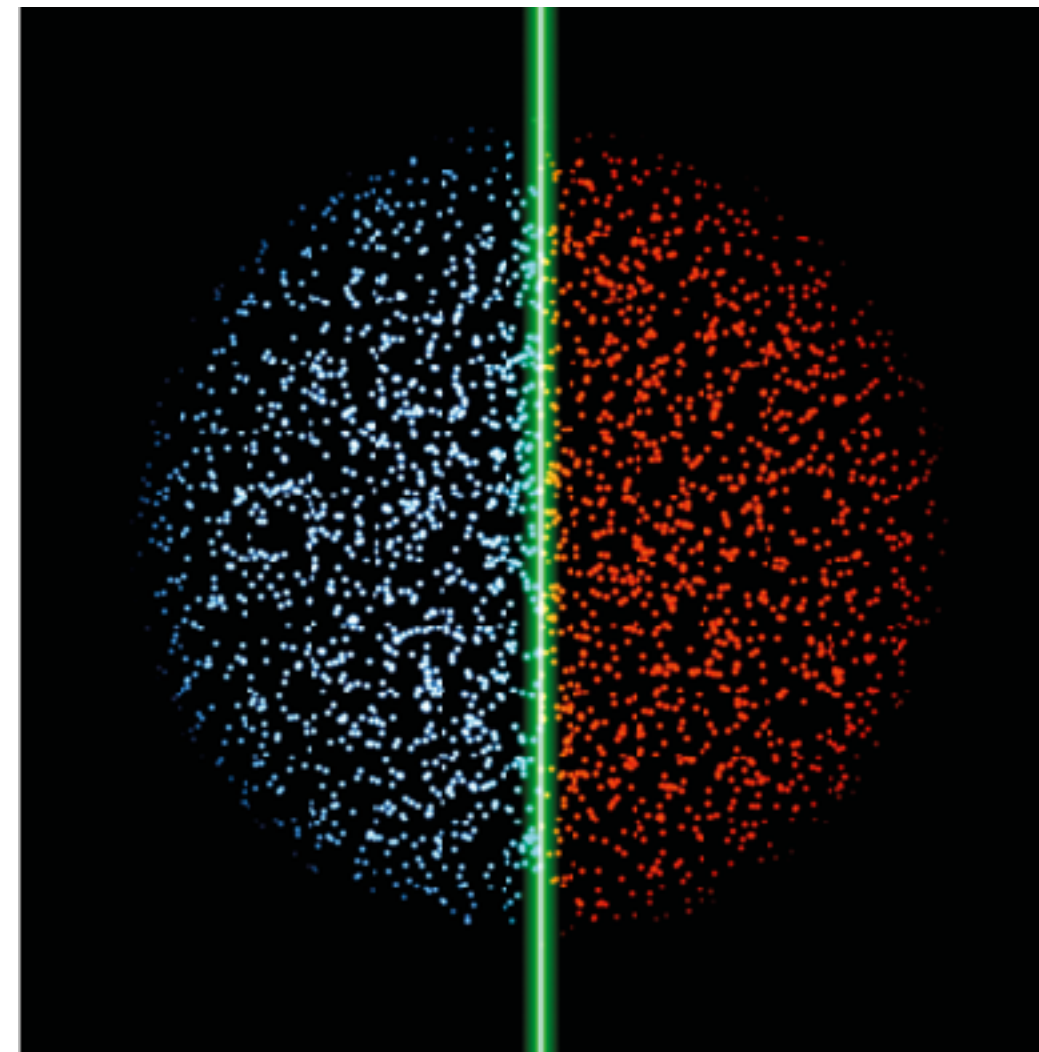


Chaire *Atomes et rayonnement*, cours 2025-26
Fluides quantiques couplés et jonctions Josephson

Cours 3 : L'effet Josephson alternatif et les résonances de Shapiro



diapositives

notes de cours

Séminaires

Aujourd'hui : Jérôme Beugnon, Laboratoire Kastler Brossel, Sorbonne Université, Collège de France, ENS-PSL, CNRS
La superfluidité révélée en une seule image

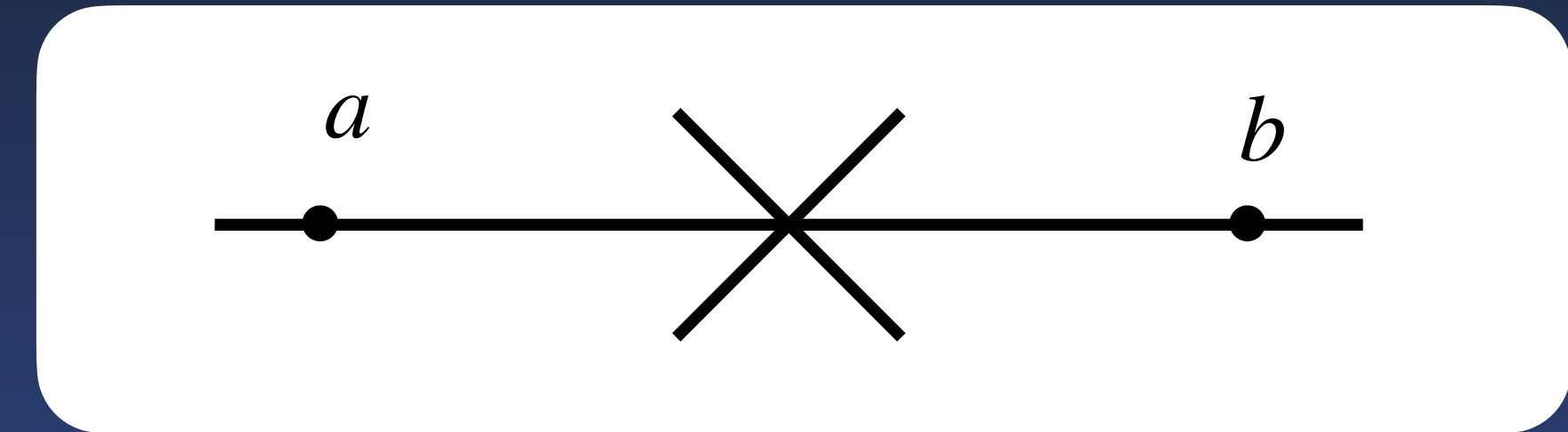
Vendredi 12 juin : Benoît Vermersch, Quobly & Université Grenoble Alpes
Observing the quantum Mpemba effect in a quantum processor

Vendredi 19 juin : Klaus Mølmer, Københavns Universitet & Niels Bohr Institute, Copenhague
Sensing with quantum trajectories

Vendredi 26 juin : Eleni Diamanti, LIP6 Sorbonne Université
Ressources et applications des réseaux quantiques

Le point sur les cours précédents

La jonction idéale et les deux relations de Josephson



Le modèle RCSJ (Resistively and Capacitively Shunted Junction)

Choix d'unités sans dimension

- intensités mesurées en unités de I_c

- temps mesurés en unités de $t_0 = \frac{\hbar}{2eRI_c}$

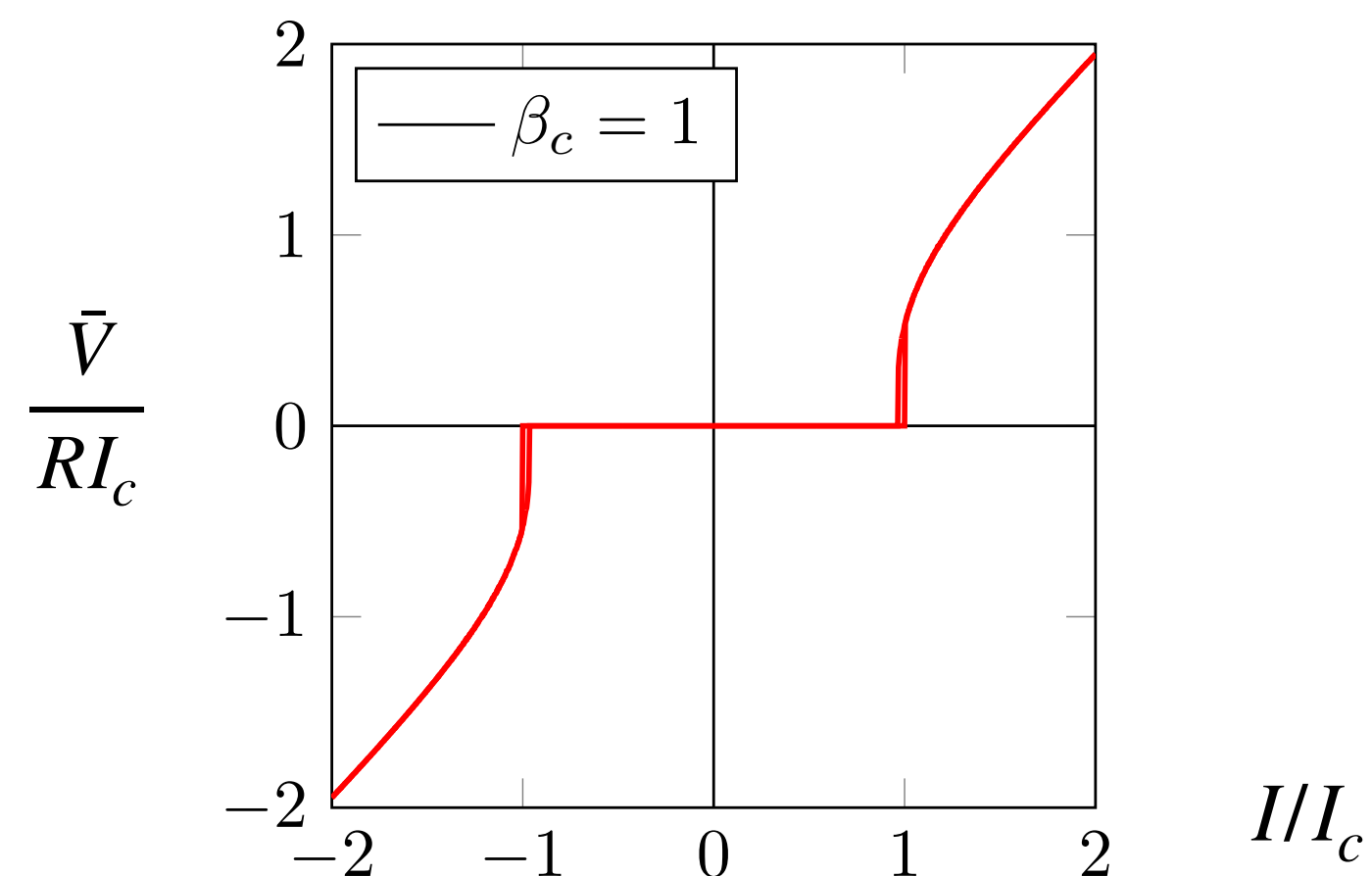
- jonction caractérisée par le paramètre de Stewart-McCumber $\beta_c = \frac{2eR^2CI_c}{\hbar}$

Le point sur les cours précédents (2) : la caractéristique d'une jonction

Pour une jonction alimentée par un générateur de courant délivrant une intensité constante, quelle est la différence de potentiel électrique moyen (jonction supra) ou de potentiel chimique moyen (jonction atomique) ?

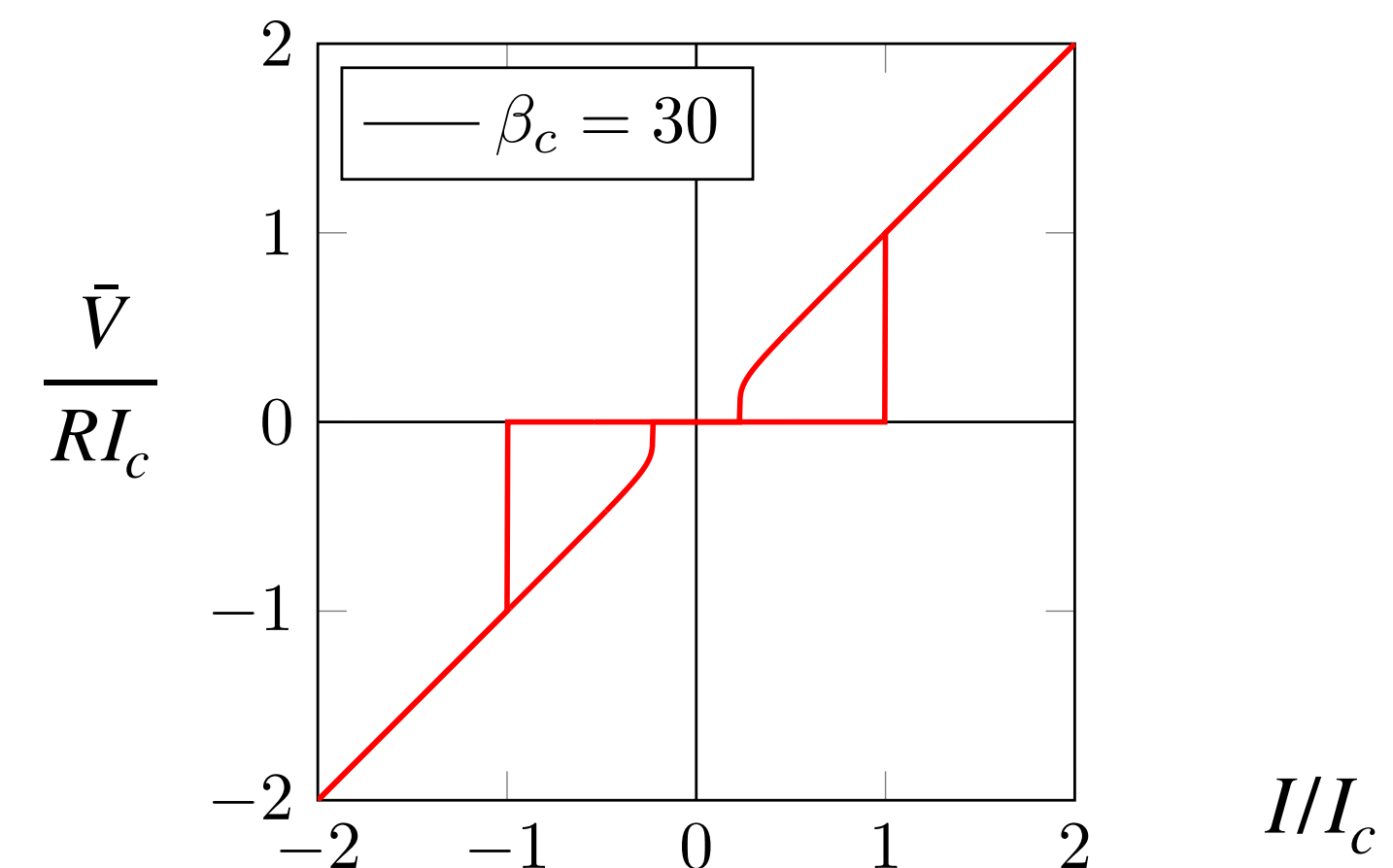
Cette caractéristique dépend de $\beta_c = \frac{2eR^2CI_c}{\hbar}$

Limite résistive ($C \rightarrow 0$ ou de manière équivalente $R \rightarrow 0$) : $\beta_c \lesssim 1$



pas d'hystérésis

Limite capacitive (faible dissipation) : $\beta_c \gg 1$



hystérésis marquée

La question abordée aujourd'hui

Que se passe-t-il si on module l'intensité traversant la jonction ?

$$I(t) = I_0 + I_1 \sin(\omega t)$$

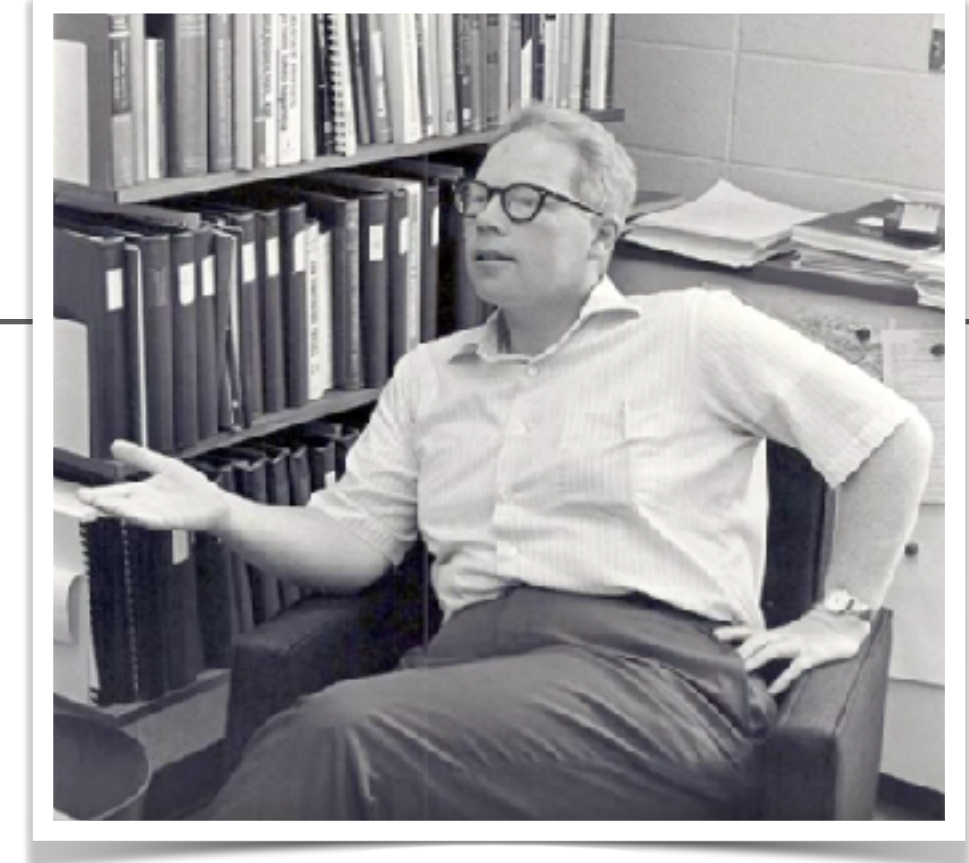
Réponse déjà présente dans l'article de Josephson (1962) :

il peut apparaître une différence de potentiel moyenne quantifiée : $2e \bar{V} = n \hbar \omega$ n entier

Phénomène observé dès 1963 par Shapiro

Rôle central pour la réalisation de standards électriques

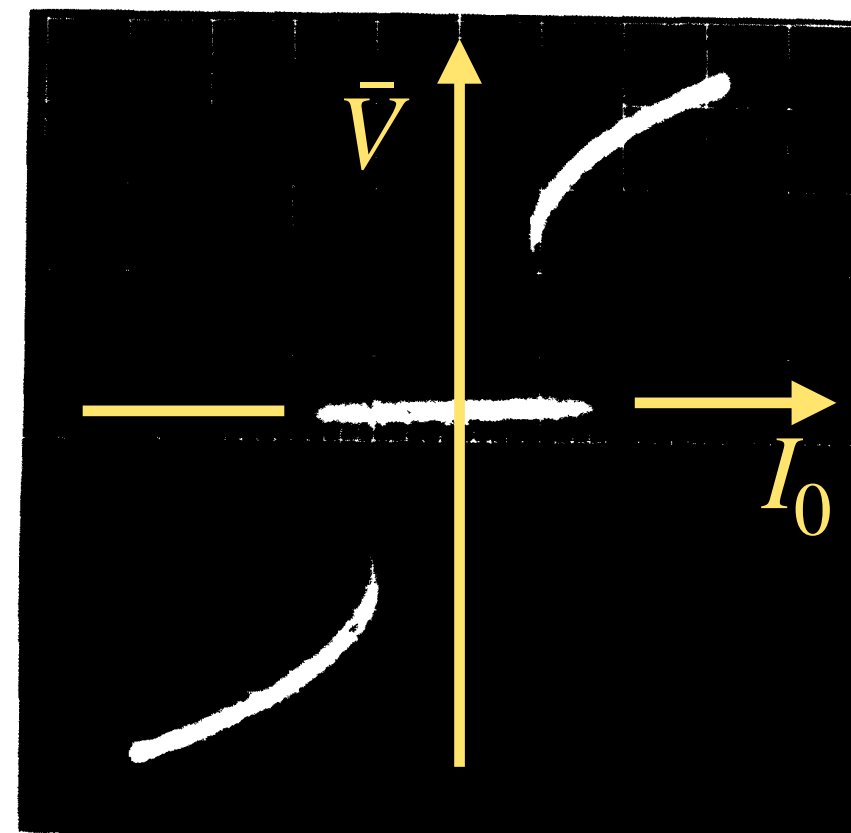
Un exemple de résultat



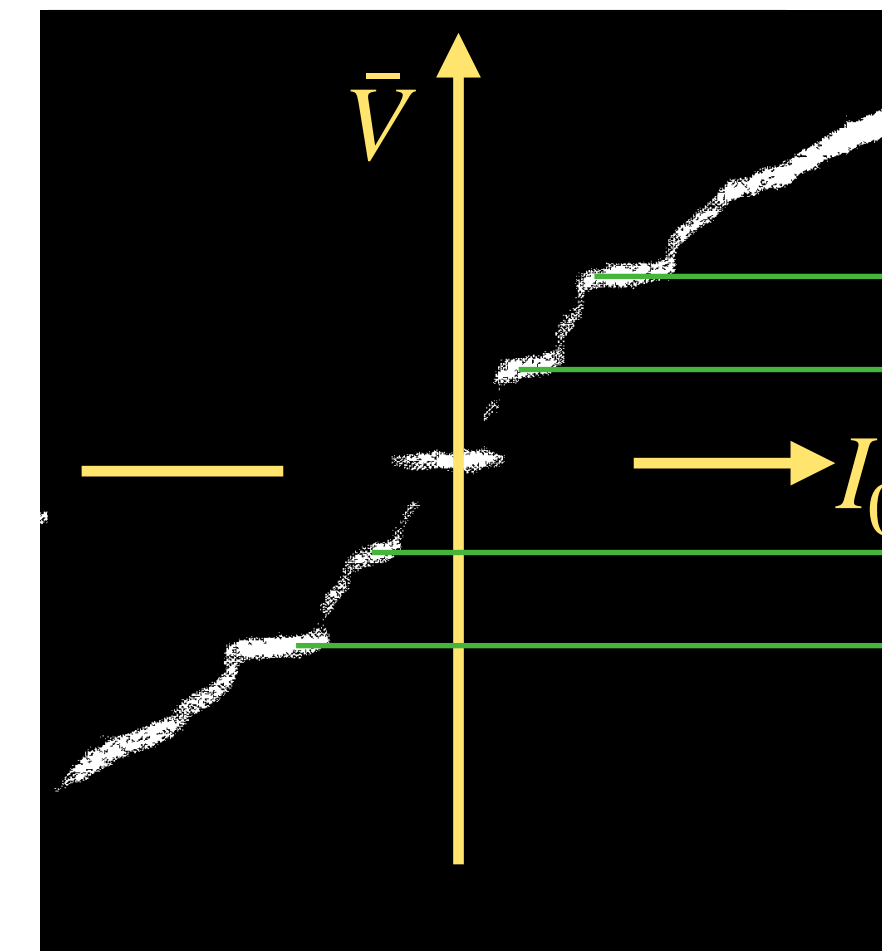
VOLUME 11, NUMBER 2 PHYSICAL REVIEW LETTERS 15 JULY 1963

JOSEPHSON CURRENTS IN SUPERCONDUCTING TUNNELING: THE EFFECT OF MICROWAVES
AND OTHER OBSERVATIONS*

Sidney Shapiro
Arthur D. Little, Inc., Cambridge, Massachusetts
(Received 13 June 1963)



$$I(t) = I_0$$



$$\frac{\hbar\omega}{2e} = 51.5 \mu\text{V}$$

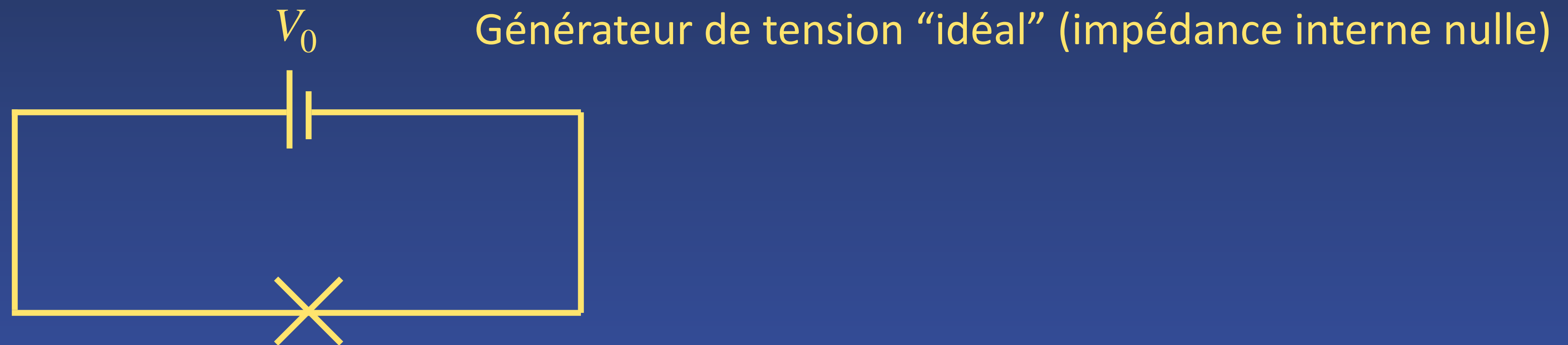
$$I(t) = I_0 + I_1 \sin(\omega t) \quad \frac{\omega}{2\pi} = 24.850 \text{ GHz}$$

Largeur totale horizontale : 0.5 mA, verticale 0.4 mV

Plan du cours

1. L'effet Josephson alternatif
2. Les résonances de Shapiro
3. Un standard électrique
4. Résonances de Shapiro pour des jonctions atomiques

Equation du mouvement pour l'effet Josephson alternatif



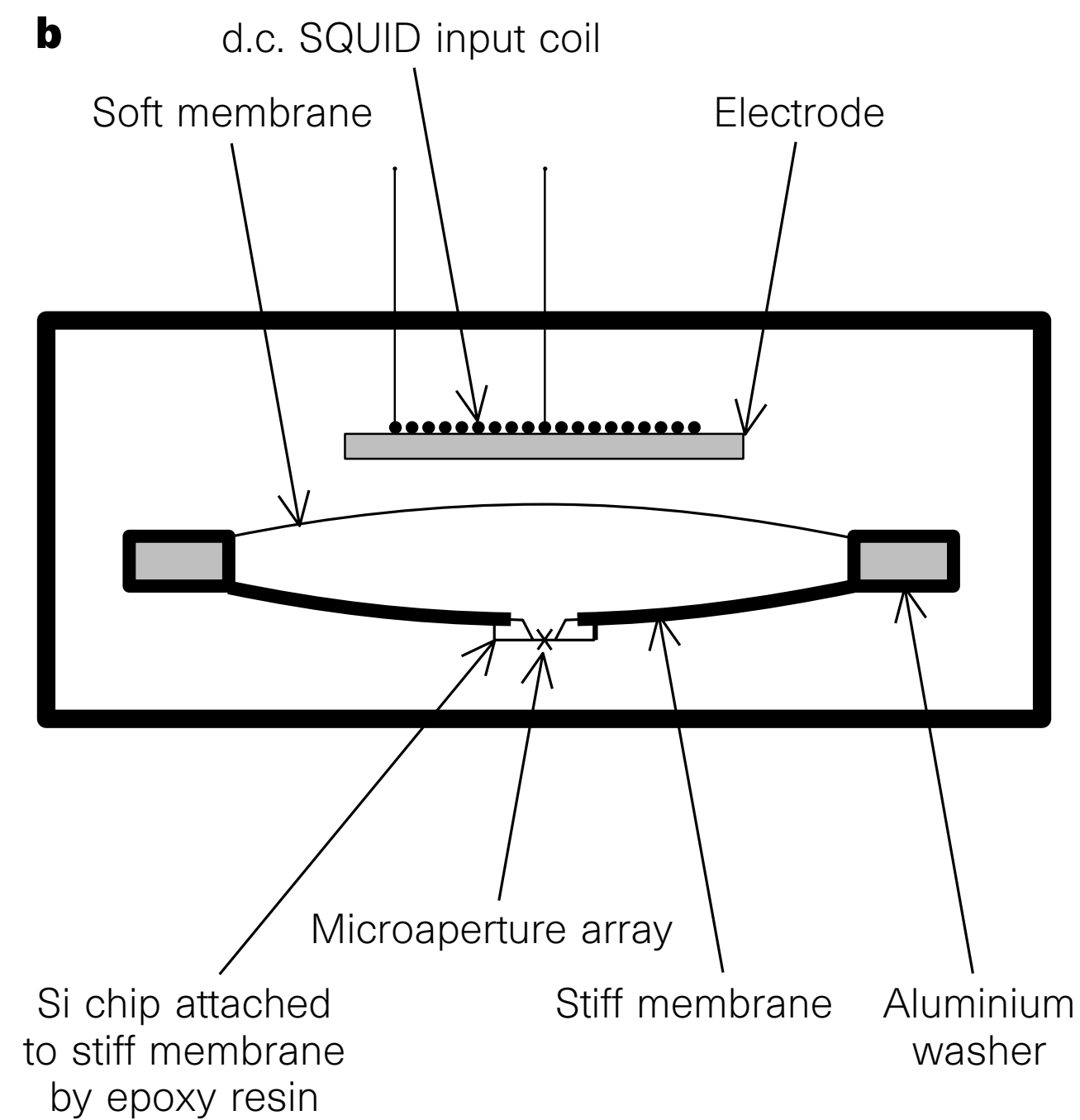
$$I(t) = I_c \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\hbar\omega = 2eV_0$$

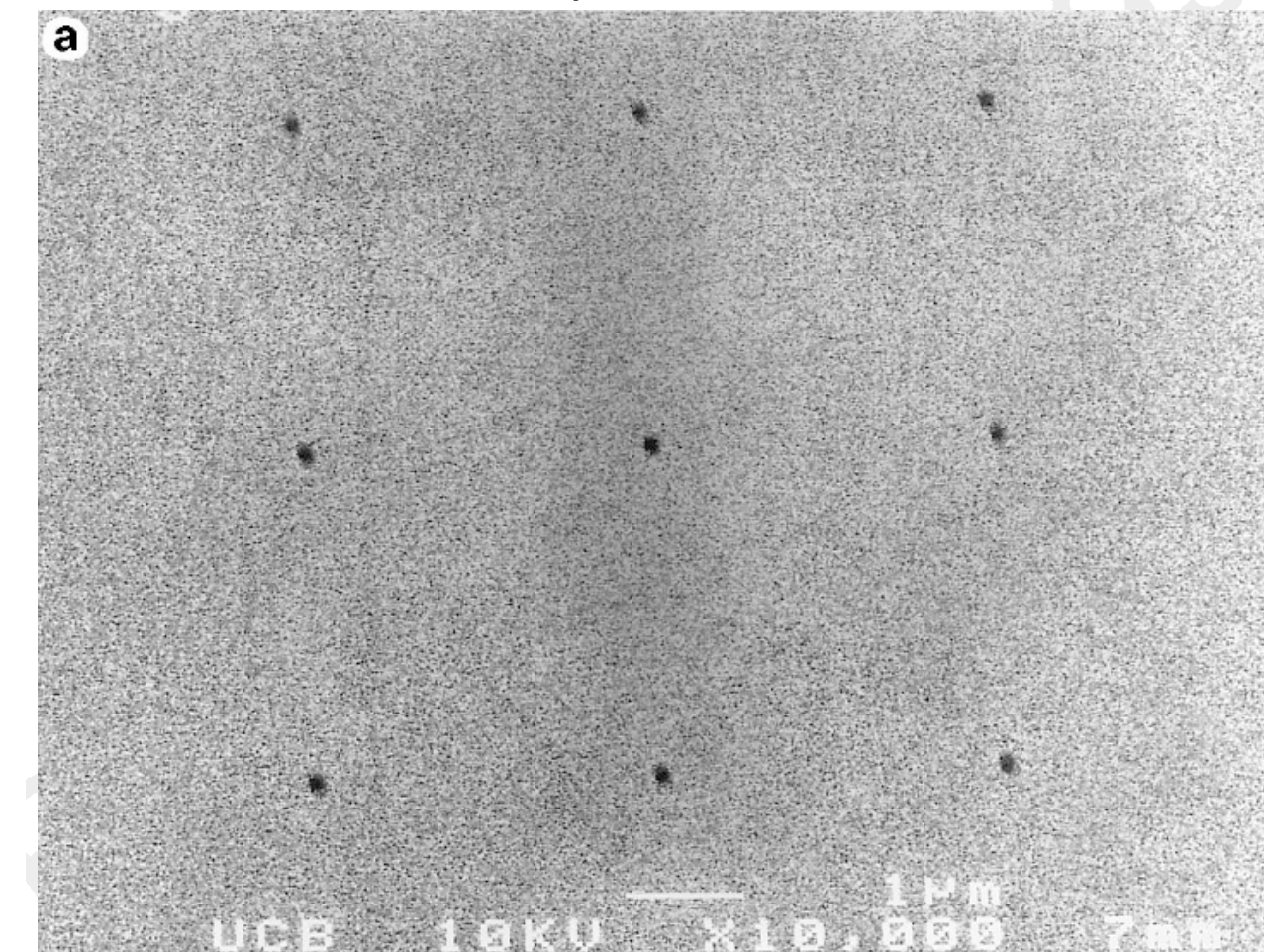
Expériences sur ^3He superfluide

Avenel & Varoquaux (1988)

Pereverzev & al.; Nature **388**, 449 (1997) [groupe de R. Packard]



65 × 65 trous, diamètre 100 nm



Courant oscillant attendu à la fréquence

$$\hbar\omega = \frac{m}{\rho}\Delta P$$

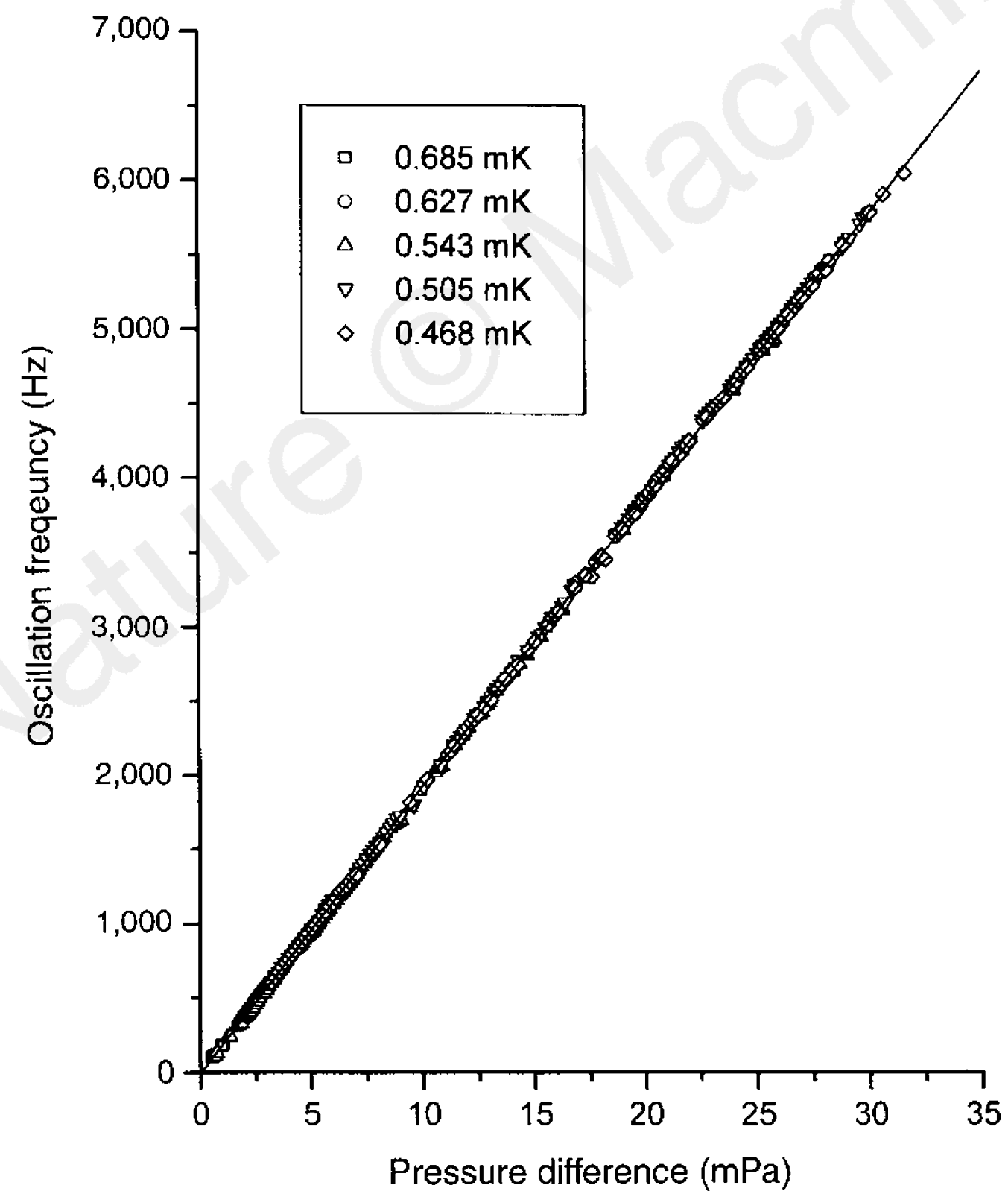
$$m = 2m_{\text{He}} \quad \rho = 82 \text{ kg/m}^3$$

Une électrode déforme la paroi souple

Différence de pression $\Delta P \Leftrightarrow$ différence de potentiel V_0

Expériences sur ^3He superfluide (suite)

Pereverzev & al.; Nature **388**, 449 (1997) [groupe de R. Packard]

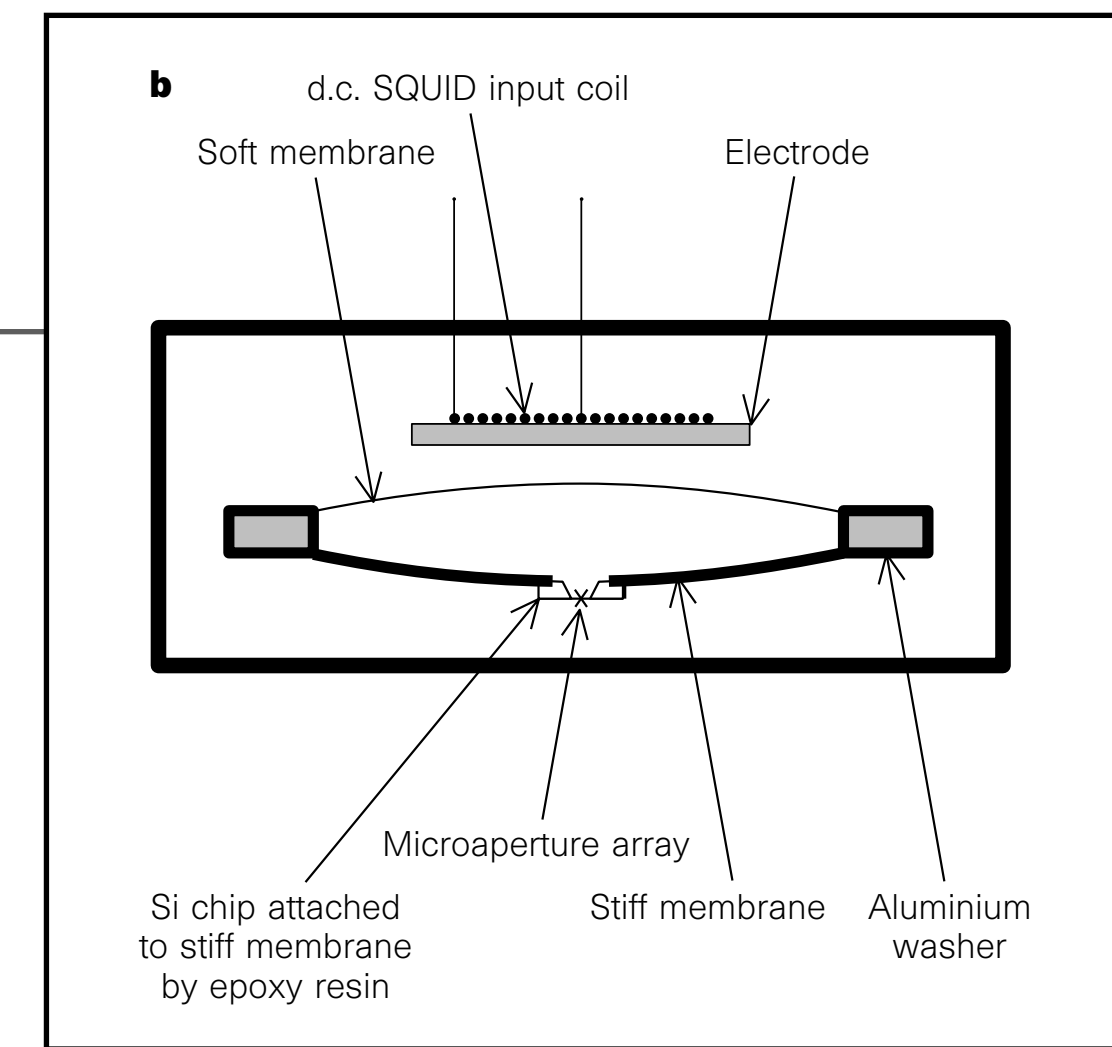


$$\hbar\omega = \frac{m}{\rho}\Delta P$$

$$m = 2m_{\text{He}} \quad \rho = 82 \text{ kg/m}^3$$

Pente mesurée : 194(15) kHz/Pa

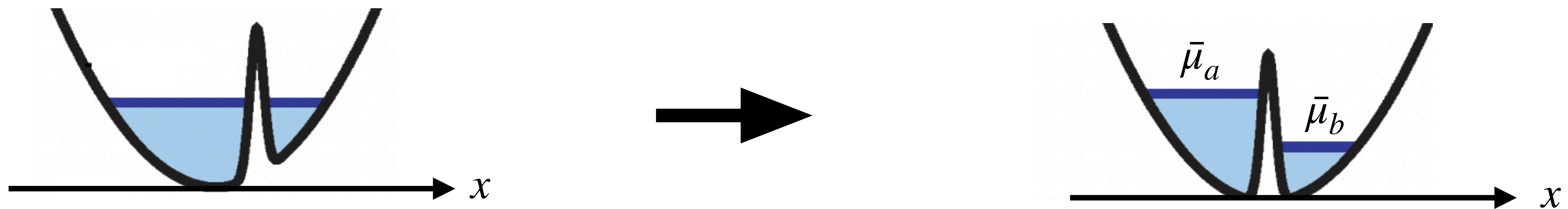
Pente attendue : 183.7 kHz/Pa



Expériences sur un gaz d'atomes piégés

Levy et al., Nature 449, 579 (2007) [groupe de J. Steinhauer]

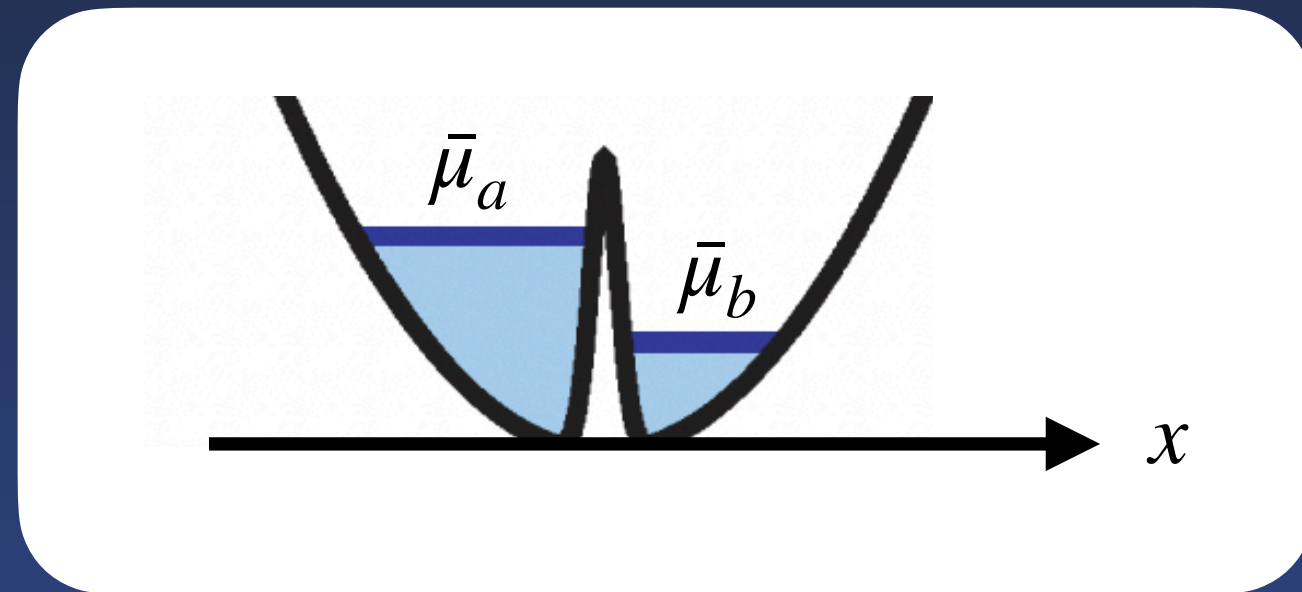
Gaz de 10^5 atomes de rubidium, avec une barrière initialement décalée par rapport au centre



On recentre la barrière en un temps court (5 à 10 ms),
ce qui crée une différence significative de potentiel chimique

$$\overline{\Delta\mu} = \bar{\mu}_a - \bar{\mu}_b \quad \text{comparable à } \bar{\mu}_a, \bar{\mu}_b \quad \text{et } \gg \hbar\omega_p = \sqrt{E_C E_J}$$
$$\sim 1 \text{ kHz} \qquad \qquad \qquad \sim 100 \text{ Hz}$$

Expériences sur un gaz d'atomes piégés (suite)

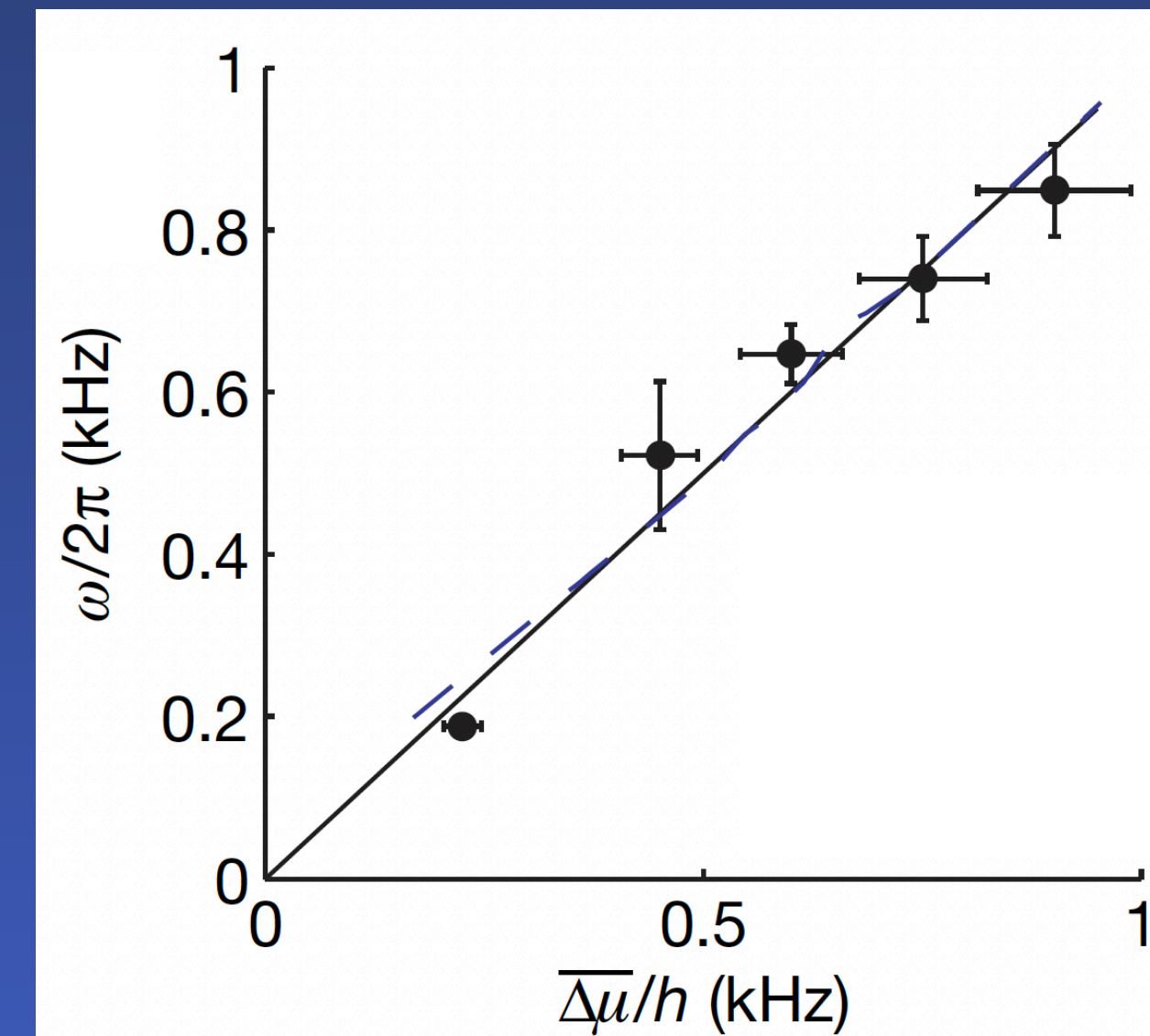


Levy et al., Nature 449, 579 (2007)
[groupe de J. Steinhauer]

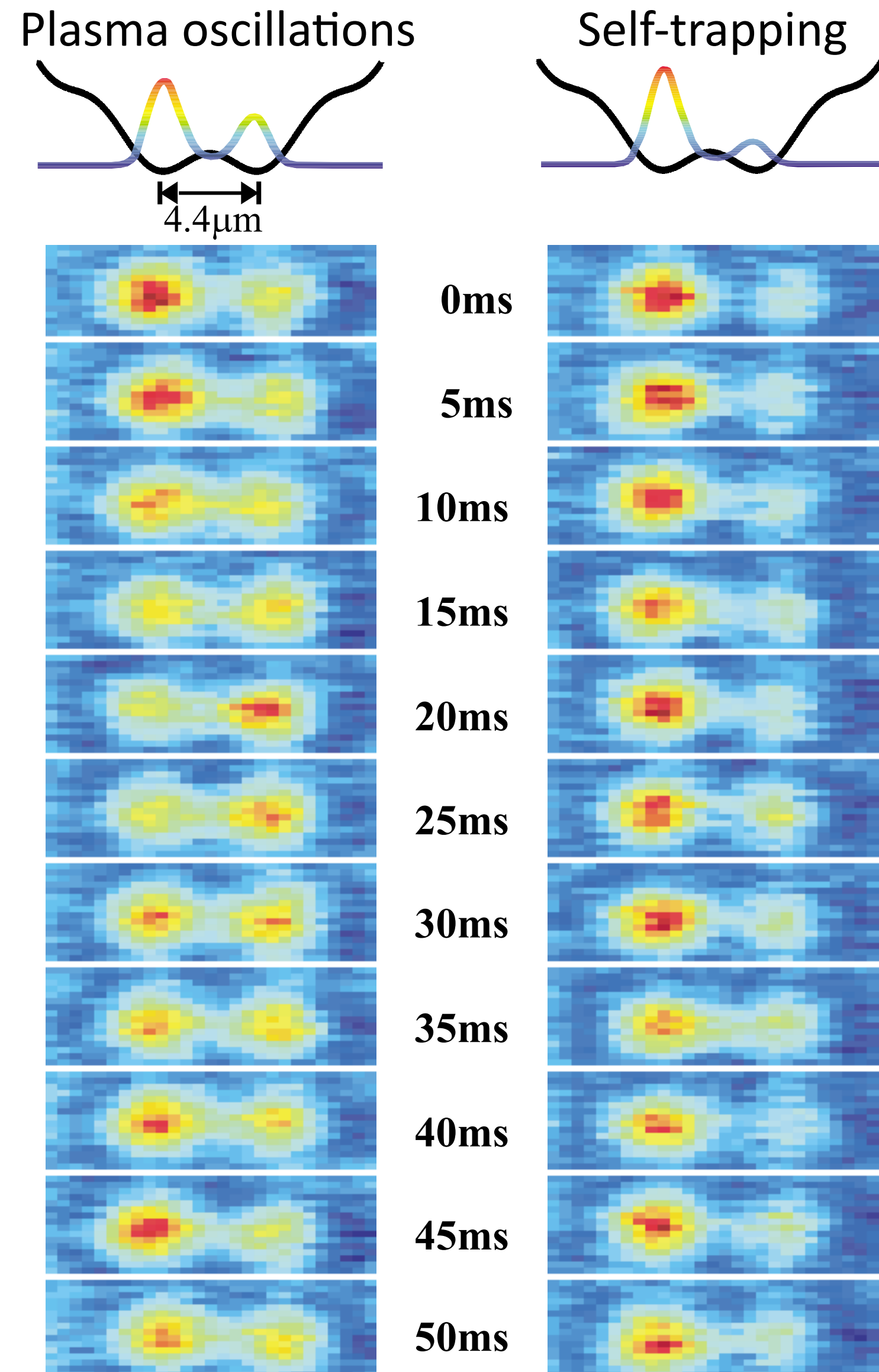
- Evolution des populations N_a et N_b ?

\sim oscillation à la fréquence $\overline{\Delta\mu}/h$

- Validité de l'approximation $nE_C \ll \overline{\Delta\mu}$?



Expériences sur un gaz d'atomes piégés (suite) : l'autopiégeage



Albiez et al., Phys. Rev. Lett. 95, 010402 (2005)
[groupe de M. Oberthaler]

Condensat de ~ 1000 atomes de rubidium

Dans le régime d'autopiégeage, la fréquence des oscillations était trop élevée pour être résolue expérimentalement

Plan du cours

1. L'effet Josephson alternatif

2. Les résonances de Shapiro

3. Un standard électrique

4. Résonances de Shapiro pour des jonctions atomiques

Un élément de l'article de Josephson

Volume 1, number 7

PHYSICS LETTERS

1 July 1962

POSSIBLE NEW EFFECTS IN SUPERCONDUCTIVE TUNNELLING *

B. D. JOSEPHSON
Cavendish Laboratory, Cambridge, England

Received 8 June 1962

$$V_{\text{tot}}(t) = V + V_1 \sin(2\pi\nu t)$$

$$2eV = n h \nu$$

n integer

Applied r. f. fields can be treated by noting that the oscillations in V frequency-modulate the supercurrent. Thus if a DC voltage V on which is superimposed an AC voltage of frequency ν is applied across the barrier, the current has Fourier components at frequencies $2eV/h \pm n\nu$, where n is an integer. If for some n , $2eV/h = n\nu$, the supercurrent has a DC component dependent on the magnitude and phase of the AC voltage. Hence the DC characteristic has a zero slope resistance part over a range of current dependent on the magnitude of the AC voltage.

Modulation du courant ou de la tension d'une jonction supraconductrice

Fréquence typique de la modulation : 10 à 100 GHz (comparable ou supérieur à la fréquence plasma)

Analyse dans le cadre du modèle RCSJ

En pratique, on irradie la jonction avec un rayonnement microonde → modulation en intensité

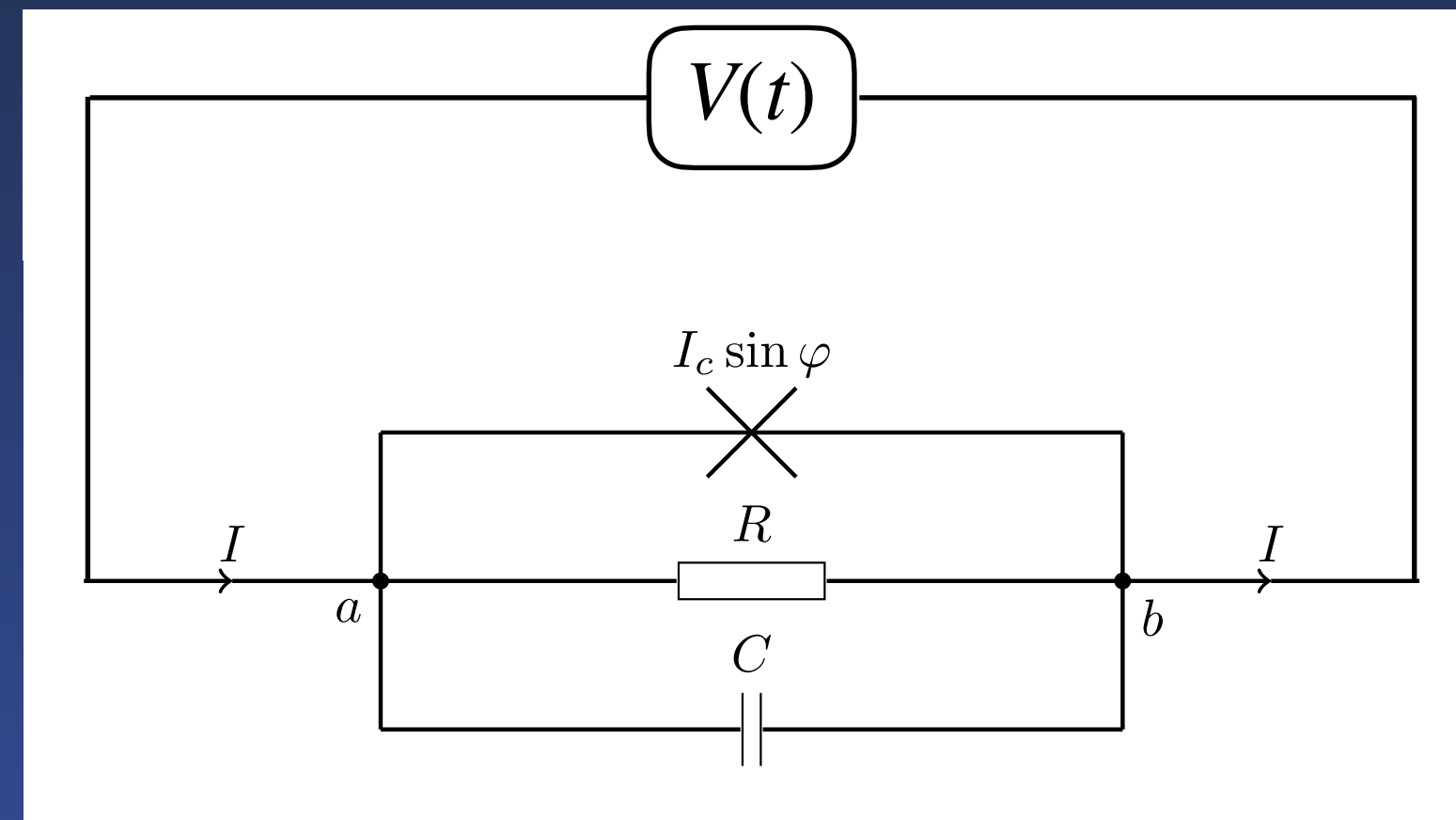
Nécessite un traitement numérique

On commence par le modèle plus simple d'une modulation en tension, fournie un générateur "idéal"

$$V(t) = V_0 + V_1 \sin(\omega t)$$

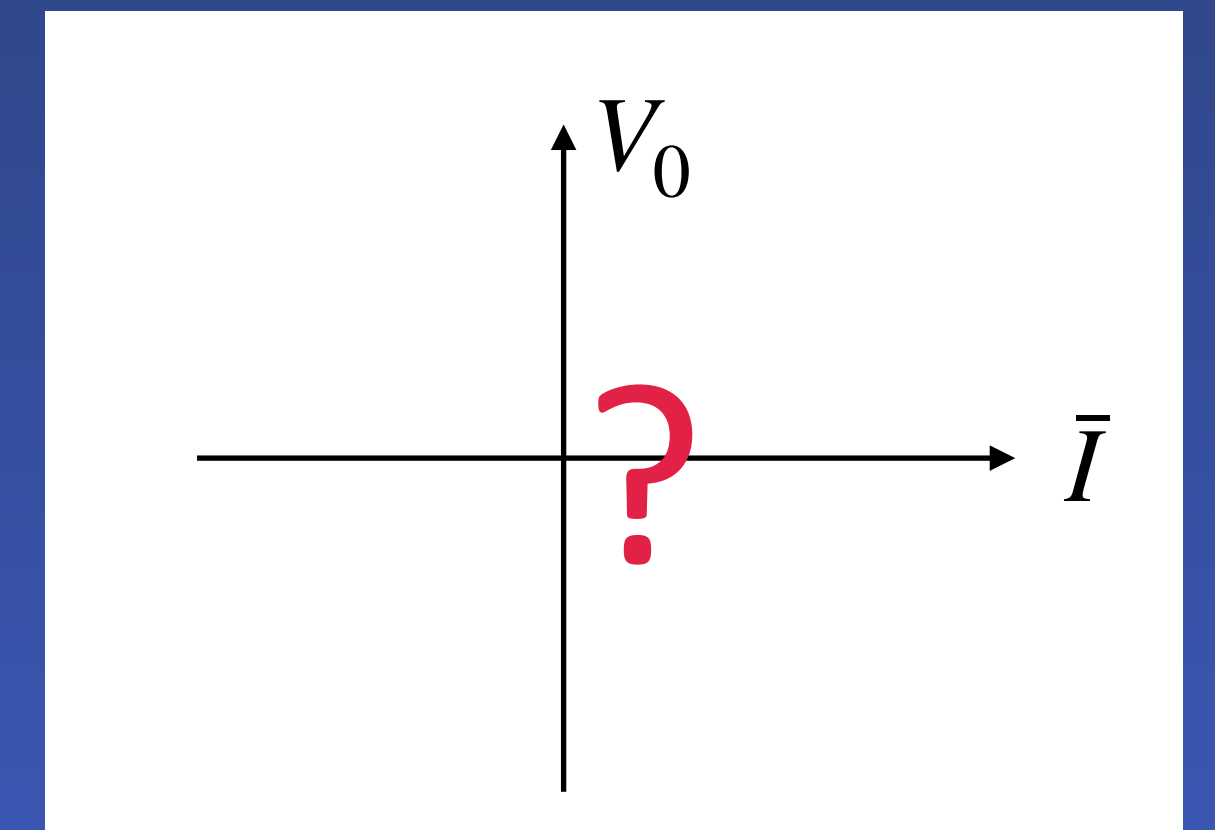
Générateur de tension idéal :

$$V(t) = V_0 + V_1 \sin(\omega t)$$



Quelle est l'intensité moyenne \bar{I} circulant dans la jonction ?

$$e^{-i\lambda \cos(\omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n(\lambda) e^{-in\omega t}$$



Diode modulée en courant (modèle RCSJ)

Il faut résoudre l'équation d'évolution $I(t) = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\varphi} + \frac{\hbar C}{2e} \ddot{\varphi}$ avec $I(t) = I_0 + I_1 \sin(\omega t)$

Combien de paramètres ?

Même choix d'unités sans dimension que précédemment : $i_0 = \frac{I_0}{I_c}$ $i_1 = \frac{I_1}{I_c}$

• unité de temps : $t_0 = \frac{\hbar}{2eRI_c}$ $\tau = \frac{t}{t_0}$ $\tilde{\omega} = \omega t_0$

• paramètre de Stewart-McCumber : $\beta_c = \frac{2eI_c R^2 C}{\hbar}$

$i_0 + i_1 \sin(\tilde{\omega}\tau) = \sin \varphi + \frac{d\varphi}{d\tau} + \beta_c \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}$ 4 paramètres sans dimension : $i_0, i_1, \tilde{\omega}, \beta_c$

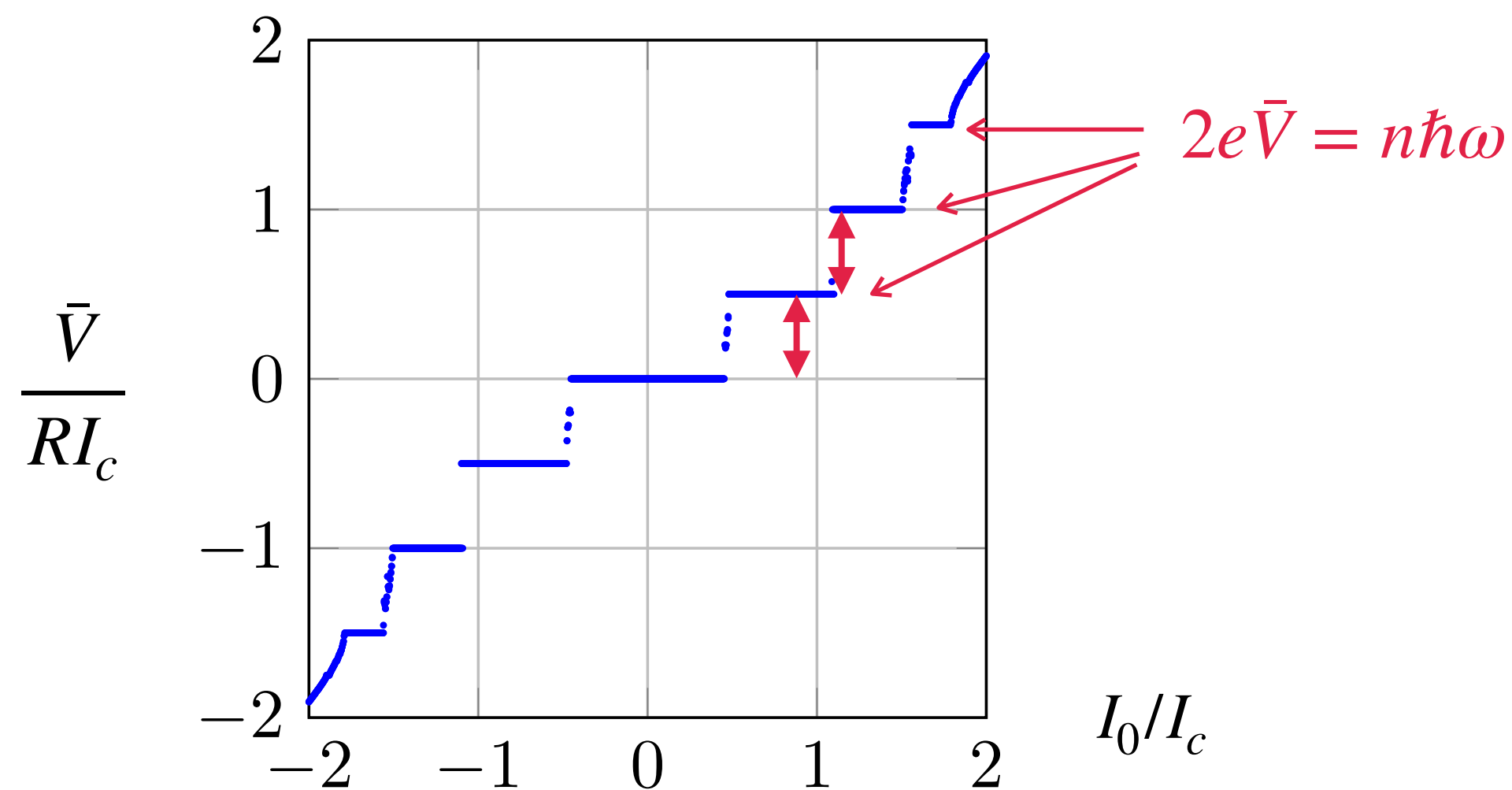
Caractéristique courant-tension : $\overline{V(t)} = \frac{\hbar}{2e} \overline{\dot{\varphi}}$ en fonction de $\overline{I(t)} = I_0$

Caractéristique courant-tension

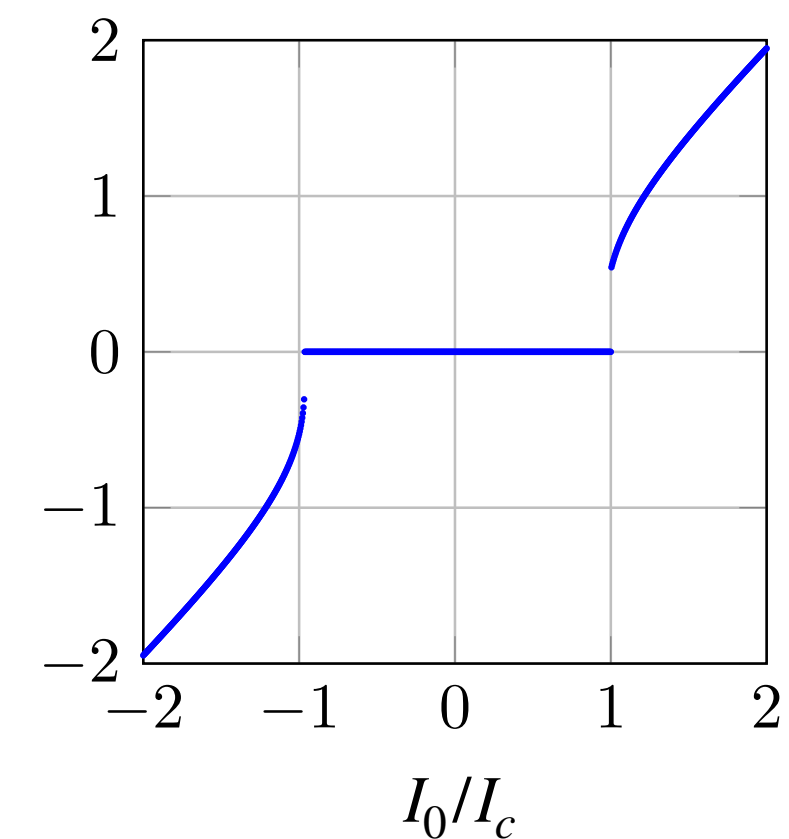
$$i_0 + i_1 \sin(\tilde{\omega}\tau) = \sin \varphi + \frac{d\varphi}{d\tau} + \beta_c \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}$$

Caractéristique courant-tension : $\overline{V(t)} = \frac{\hbar}{2e} \overline{\dot{\varphi}}$ en fonction de $\frac{\overline{I(t)}}{I_c} = i_0$

Un premier exemple : $i_1 \equiv \frac{I_1}{I_c} = 1$ $\tilde{\omega} \equiv \omega t_0 = 0.5$ $\beta_c = 1$



à comparer au cas sans modulation:

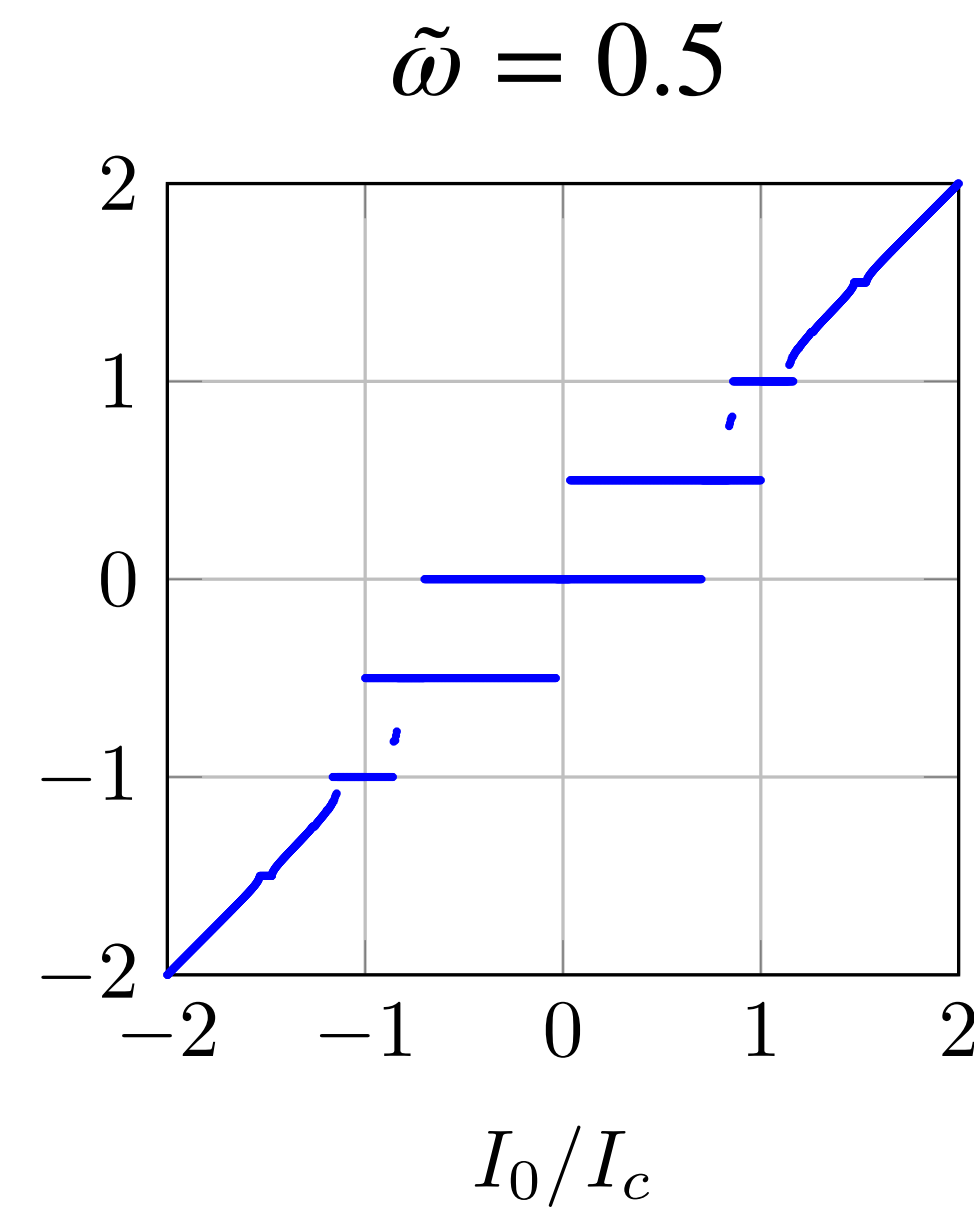
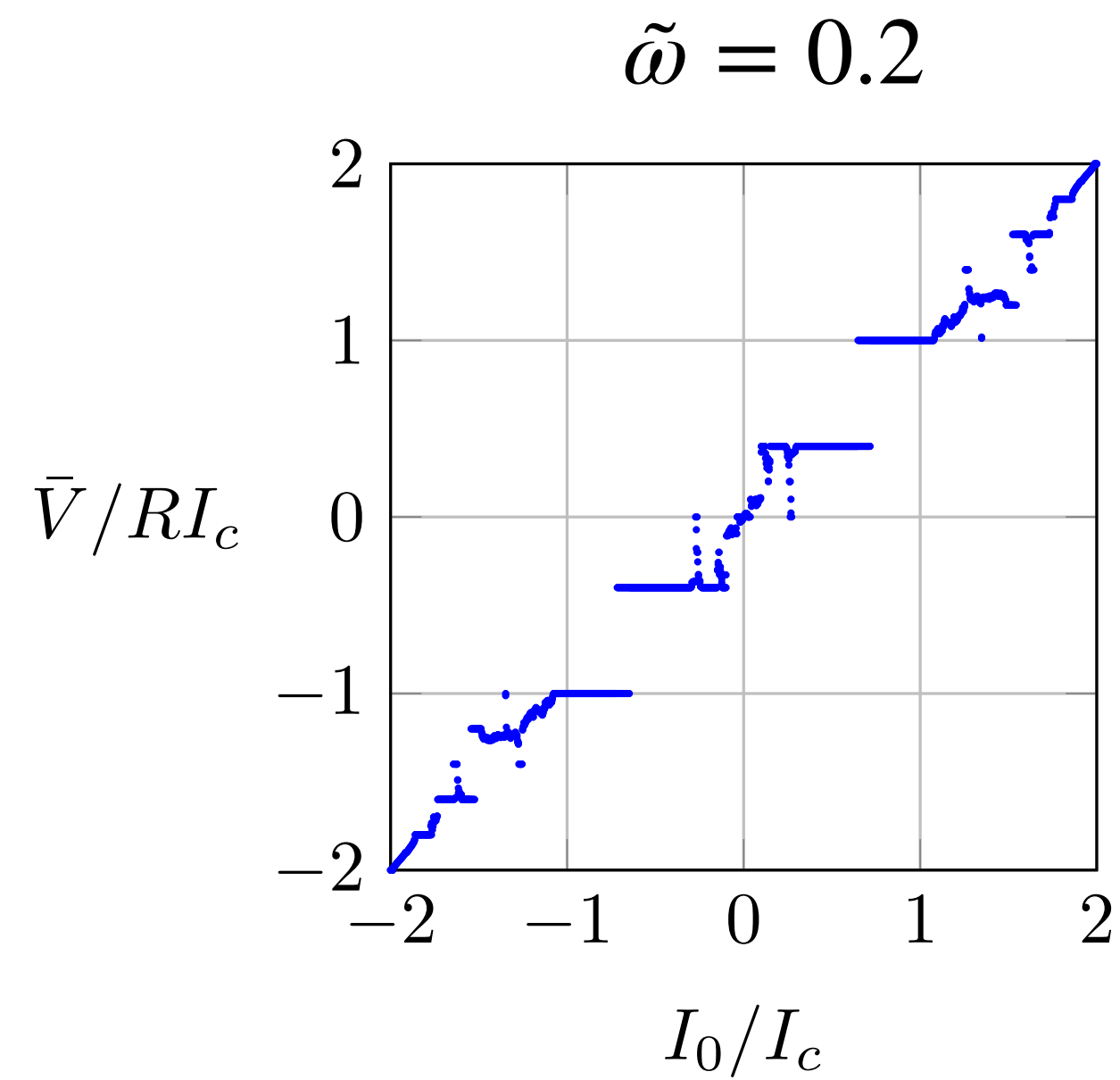
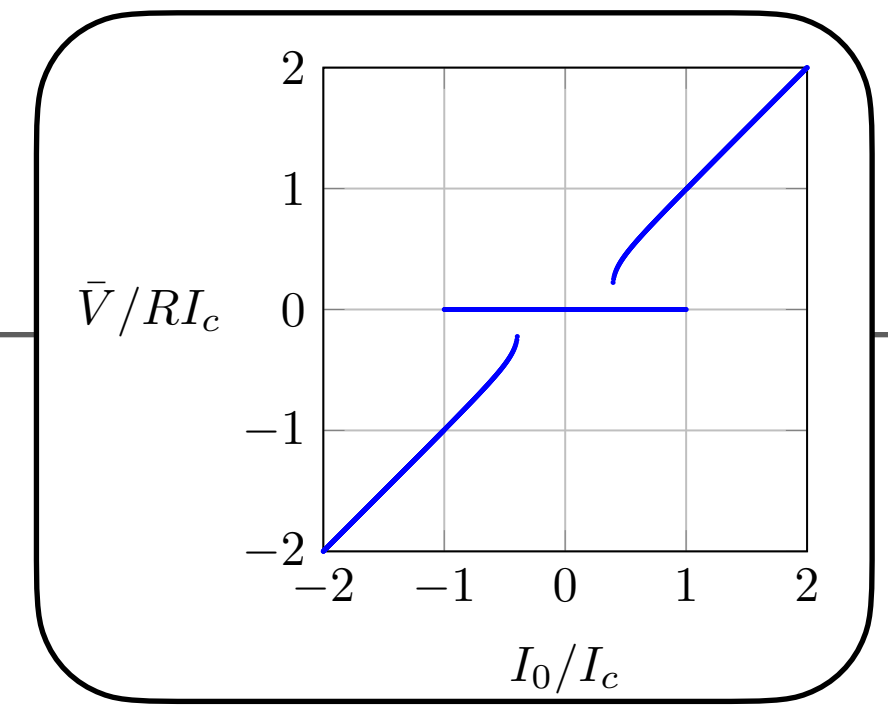


Evolution de la phase φ ?
$$\overline{V(t)} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} V(t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \frac{\hbar}{2e} \int_0^{2\pi/\omega} \dot{\varphi}(t) dt = \frac{\hbar\omega}{2e} \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = n$$

La phase φ est verrouillée sur la modulation et augmente de $2n\pi$ par période

Caractéristiques courant-tension (suite)

On choisit $\beta_c = 10$ (effets résistifs faibles) et $i_1 \equiv \frac{I_1}{I_c} = 3$



Possibilité d'observer un comportement chaotique, plusieurs branches d'hystérésis

Plan du cours

1. L'effet Josephson alternatif

2. Les résonances de Shapiro

3. Un standard électrique

Le Volt Josephson

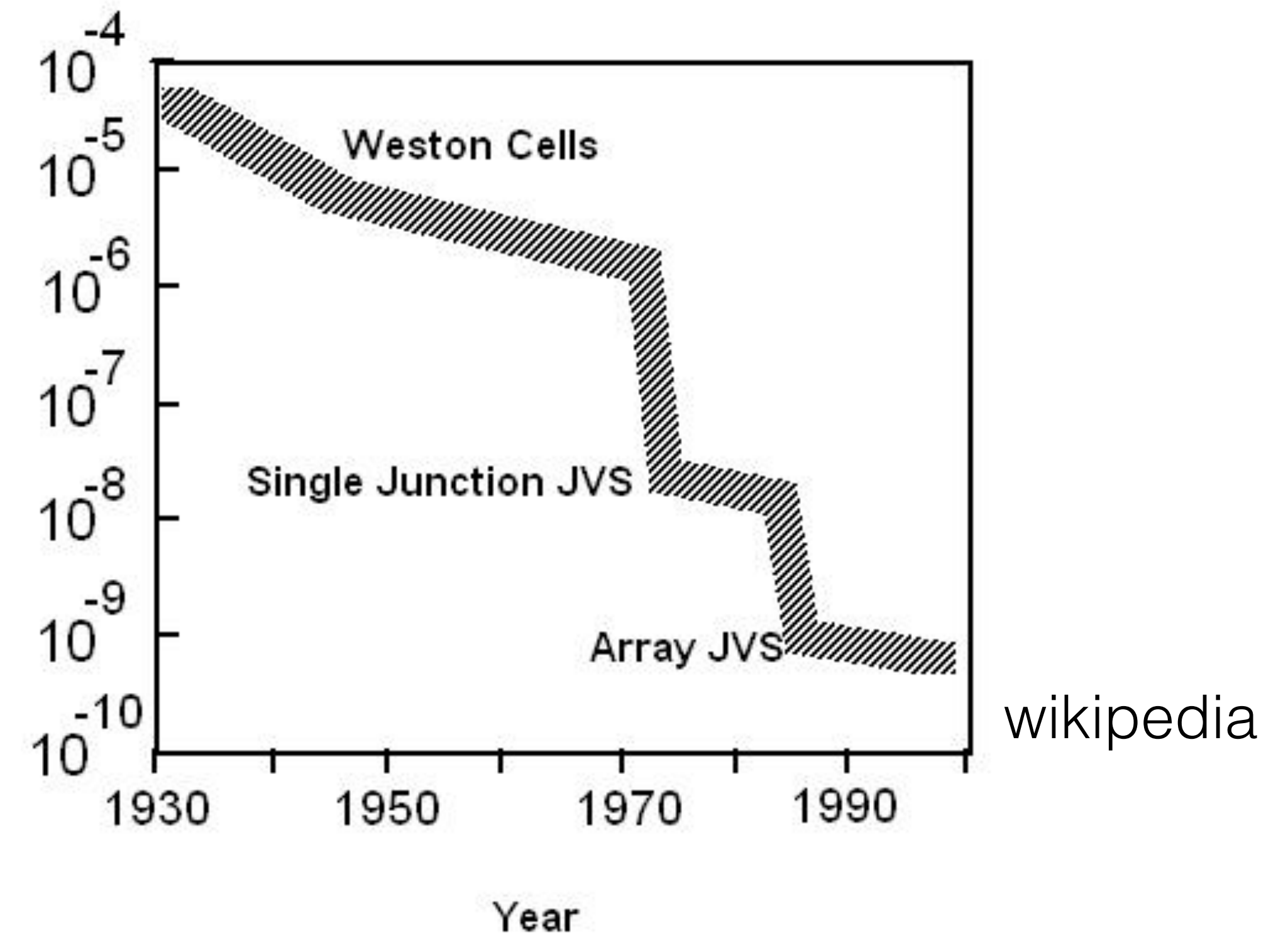
4. Résonances de Shapiro pour des jonctions atomiques

Une révolution pour les mesures électriques

à partir de 1911, la pile Weston



cadmium + mercure
1.018638 V @ 20°C



Les jonctions Josephson sont aussi stables que les piles Weston

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 150, NUMBER 1

7 OCTOBER 1966

Experimental Test of the Josephson Frequency-Voltage Relation*†

D. N. LANGENBERG, W. H. PARKER, AND B. N. TAYLOR‡

*Department of Physics and Laboratory for Research on the Structure of Matter,
University of Pennsylvania, Philadelphia, Pennsylvania*

(Received 31 May 1966)

The Josephson frequency-voltage relation in superconduction's $\nu = 2eV/h$ has been tested by measuring frequency-voltage ratios in Josephson junctions using three different Josephson-effect phenomena

The measured frequency-voltage ratio in this case was equal to the currently accepted value of $2e/h$ to within an experimental accuracy of 0.006% (60 ppm). The frequency-voltage ratio was also found to be independent of the type of junction used, temperature, magnetic field, harmonic number, voltage polarity, microwave power, and frequency to within the 10-ppm precision of the measurements.

Les jonctions Josephson sont plus stables que les piles Weston

VOLUME 21, NUMBER 23

PHYSICAL REVIEW LETTERS

2 DECEMBER 1968

EXPERIMENTAL COMPARISON OF THE JOSEPHSON VOLTAGE-FREQUENCY RELATION IN DIFFERENT SUPERCONDUCTORS*

John Clarke

Inorganic Materials Research Division, Lawrence Radiation Laboratory and Department of Physics,
University of California, Berkeley, California 94720

(Received 8 July 1968; revised manuscript received 14 October 1968)

Using the ac Josephson effect we have demonstrated experimentally that $2e/h$ is identical in lead, tin, and indium to within 1 part in 10^8 .

VOLUME 51, NUMBER 4

PHYSICAL REVIEW LETTERS

25 JULY 1983

High-Precision Test of the Universality of the Josephson Voltage-Frequency Relation

Jaw-Shen Tsai,^(a) A. K. Jain, and J. E. Lukens

Department of Physics, State University of New York at Stony Brook, Stony Brook, New York 11794

(Received 11 May 1983)

The Josephson voltage-frequency relation has been compared between two quite different (and nonideal) types of Josephson junctions—an indium microbridge and a planar normal-metal barrier junction of niobium with a copper normal region. It is found that the constant of proportionality between voltage and frequency is the same in both the junctions to at least 2 parts in 10^{16} .

Metrologia 9, 155–166 (1973)

Volt Maintenance at NBS via $2e/h$: A New Definition of the NBS Volt*

B. F. Field, T. F. Finnegan, and J. Toots

Institute for Basic Standards, National Bureau of Standards, Washington, D.C. 20234, U.S.A.

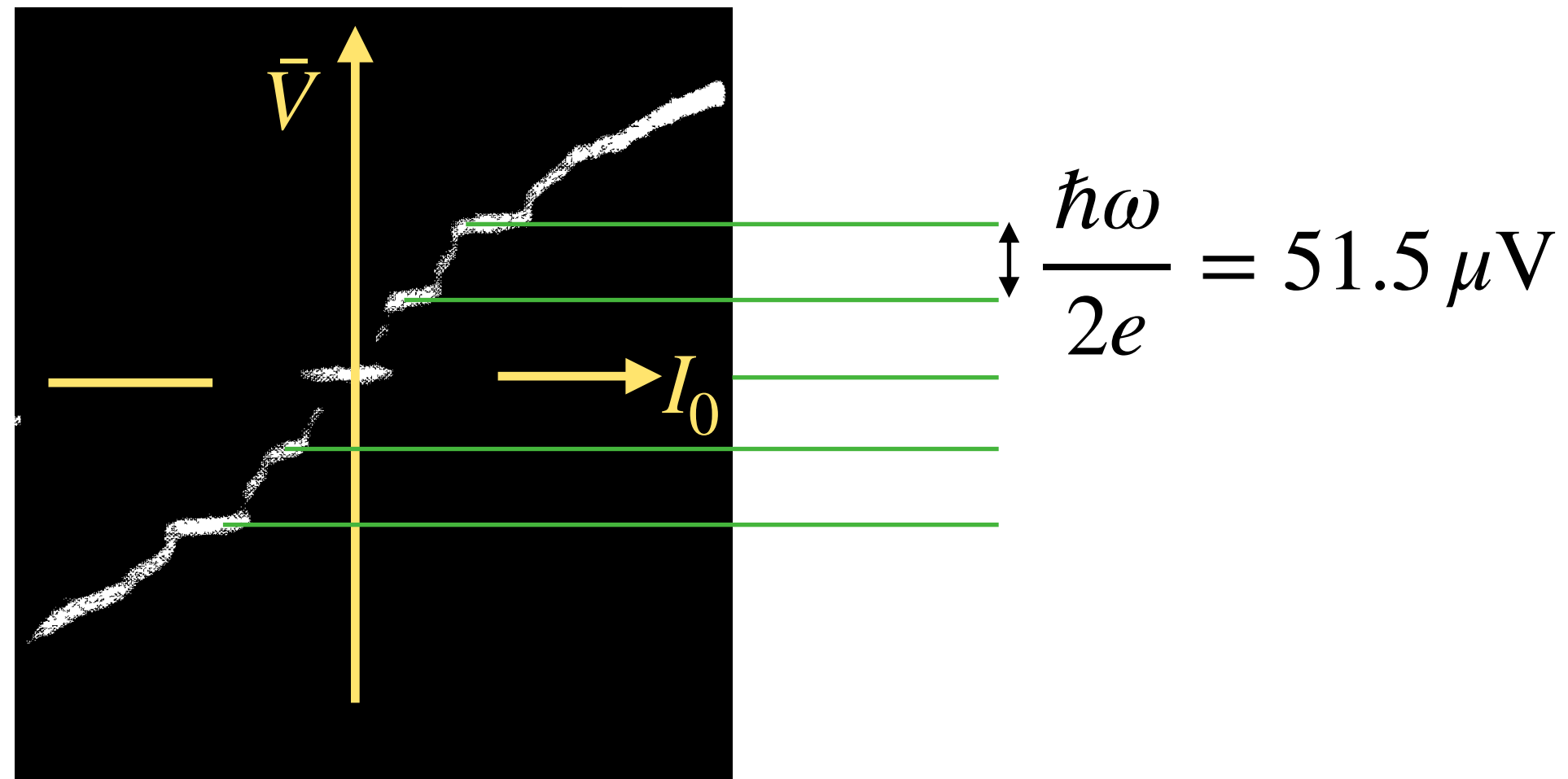
Received: March 16, 1973

This new definition has been made possible by the use of thin film tunnel junctions (capable of producing 10 mV outputs) and high accuracy voltage comparators.

The adopted value of $2e/h$ is $483593.420 \text{ GHz}/V_{\text{NBS}}$. The precision (one standard deviation) with which the new unit of emf can be maintained with the present techniques and apparatus is about 2 parts in 10^8 .

Conversion voltage-fréquence

Shapiro (1963)



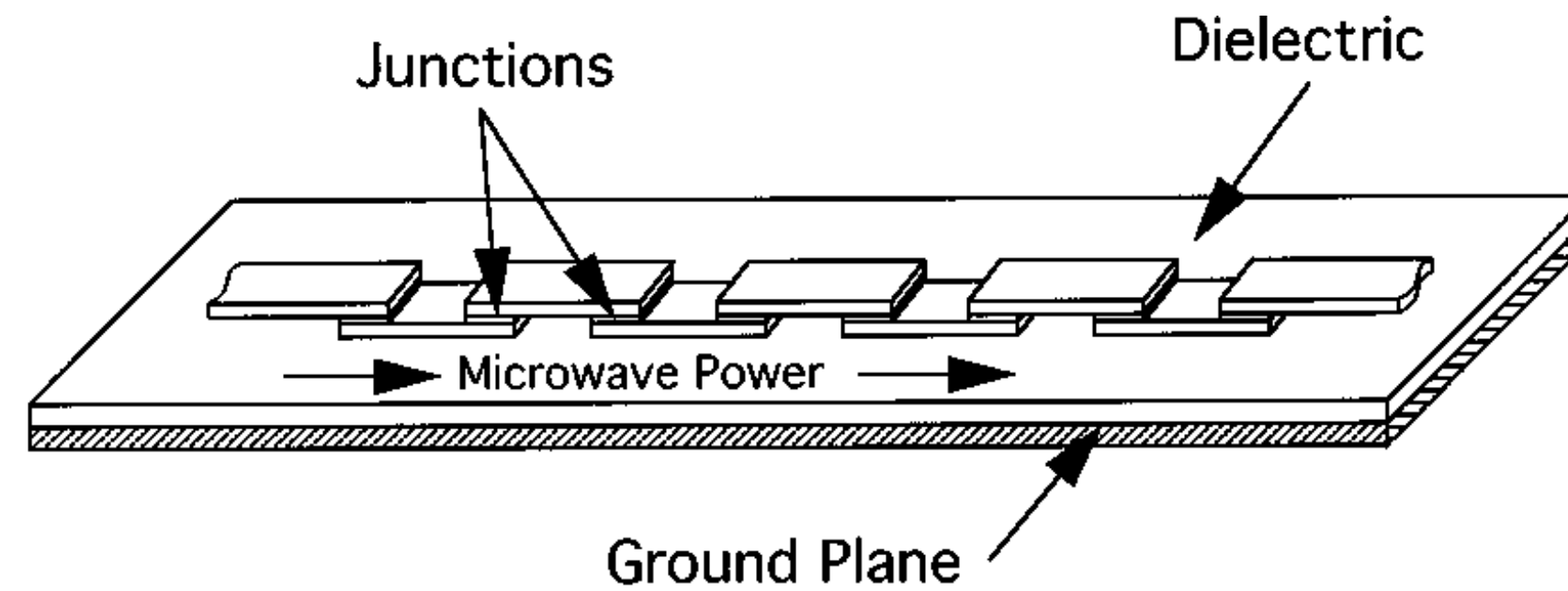
$$I(t) = I_0 + I_1 \sin(\omega t)$$

$$\frac{\omega}{2\pi} = 24.850 \text{ GHz}$$

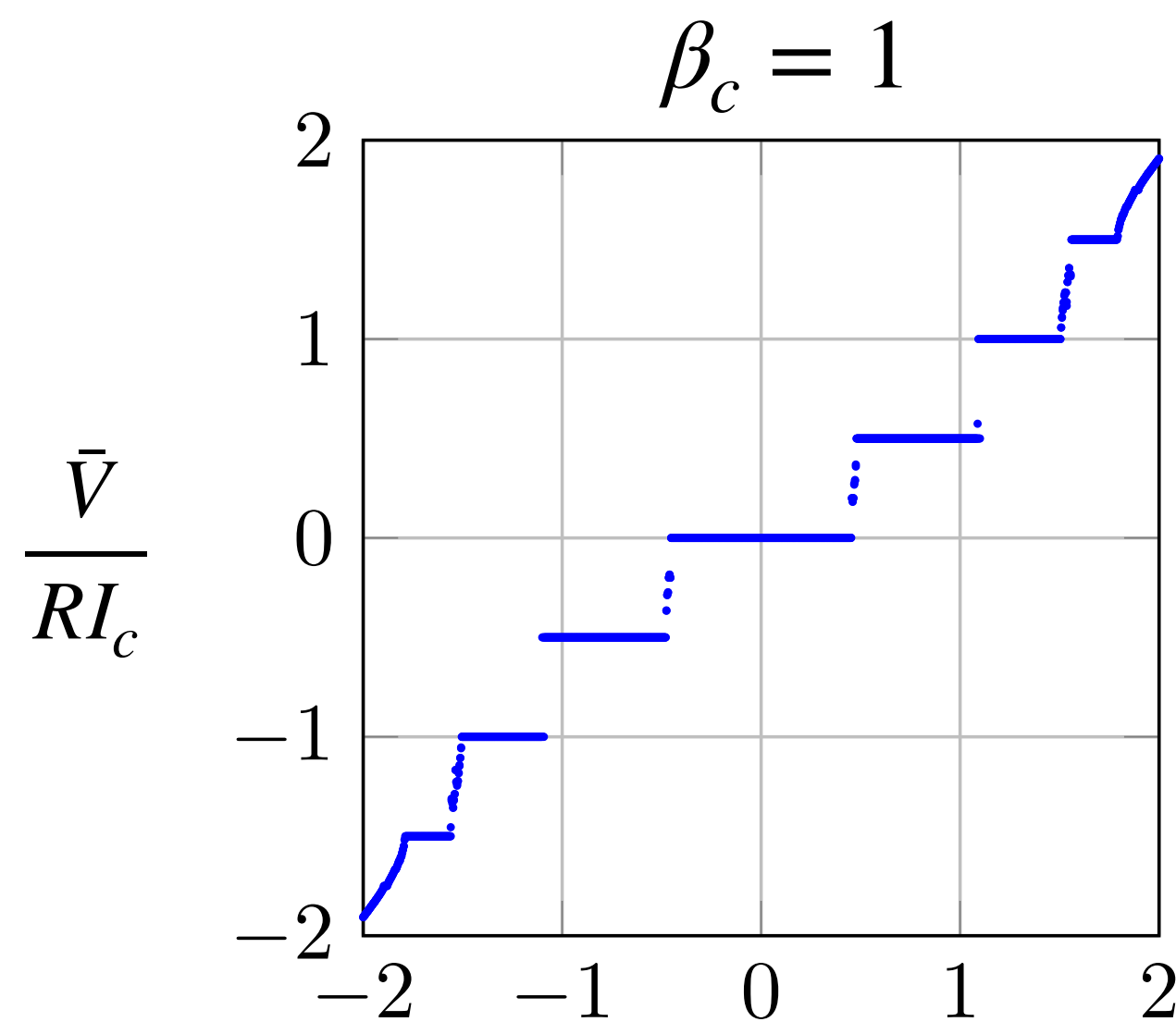
On souhaite un standard dans le domaine du volt ou de la dizaine de volts

Il va falloir mettre des dizaines de milliers de jonctions Josephson en série

La mise en série de jonctions



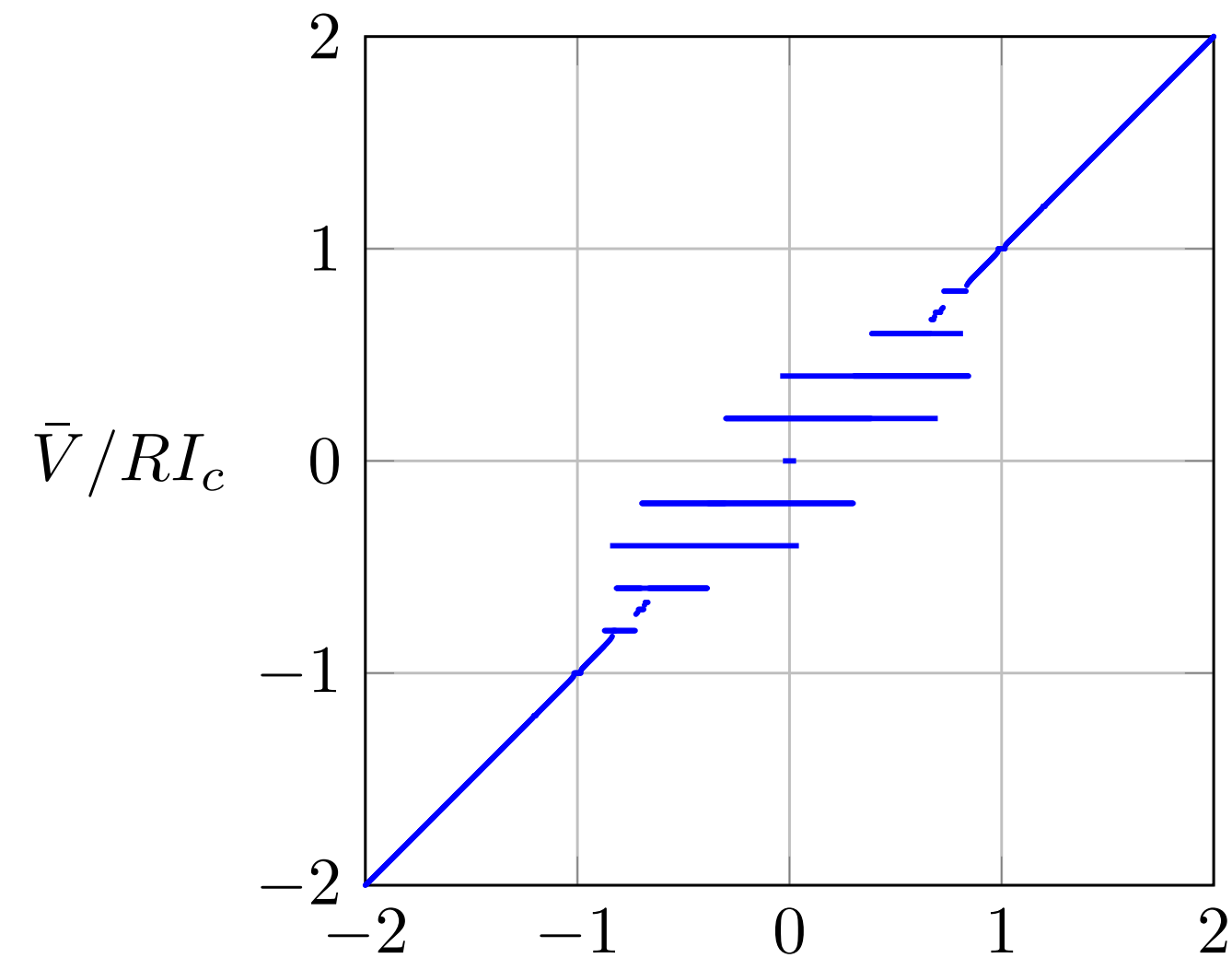
Hamilton (2000)



Pour ce type de caractéristique, il faut appliquer à chaque diode un courant spécifique qui la positionne sur le plateau recherché

Relativement simple pour une dizaine de diodes, beaucoup plus difficile pour 10^4 diodes en série

Plateaux de tension à courant moyen nul



$$\beta = 100, i_1 = 10, \tilde{\omega} = 0.2$$

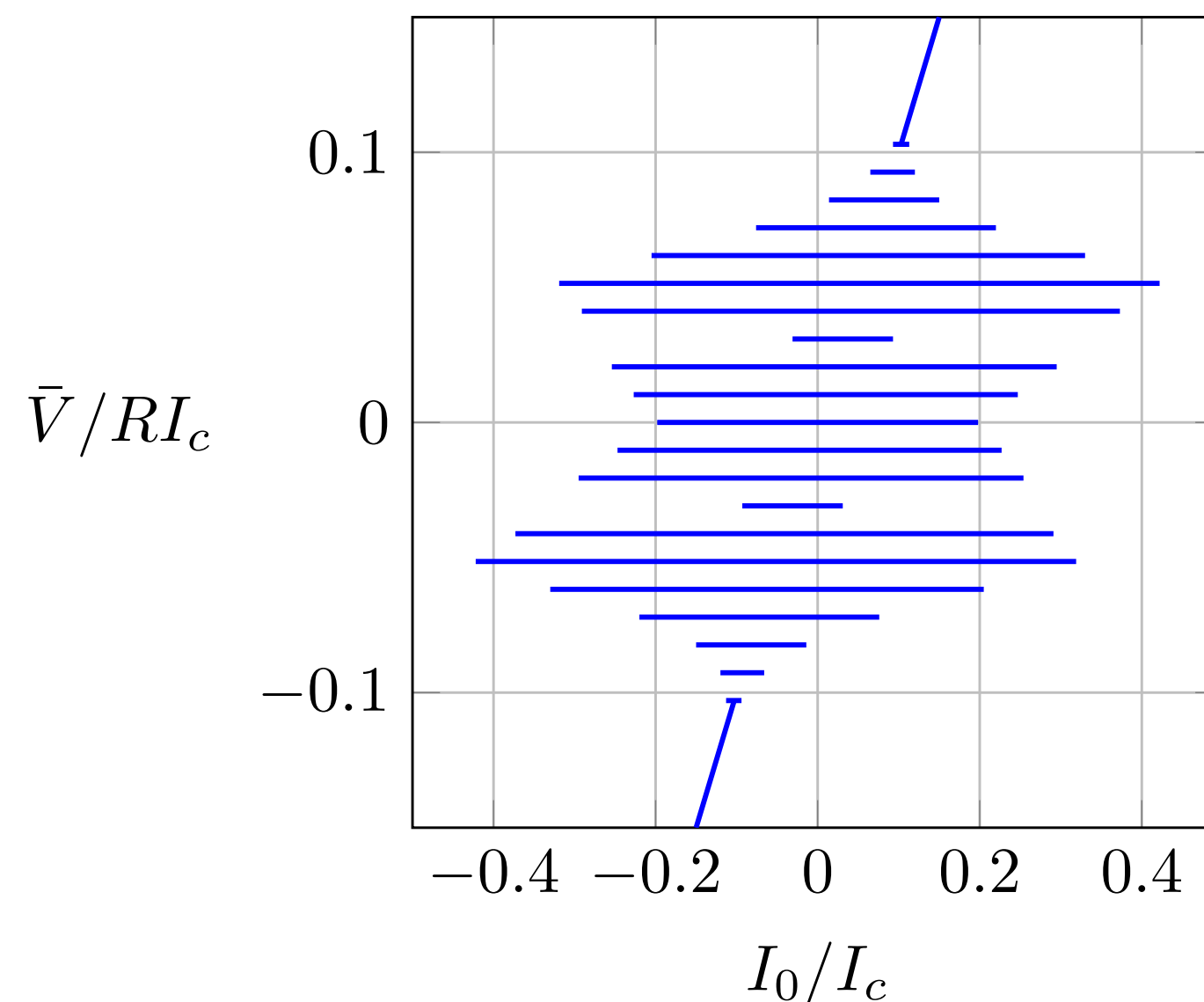
Utilisation de diodes à grand facteur β_c

Un courant purement sinusoïdal

$$I(t) = I_1 \sin(\omega t)$$

fournit un ou plusieurs plateaux

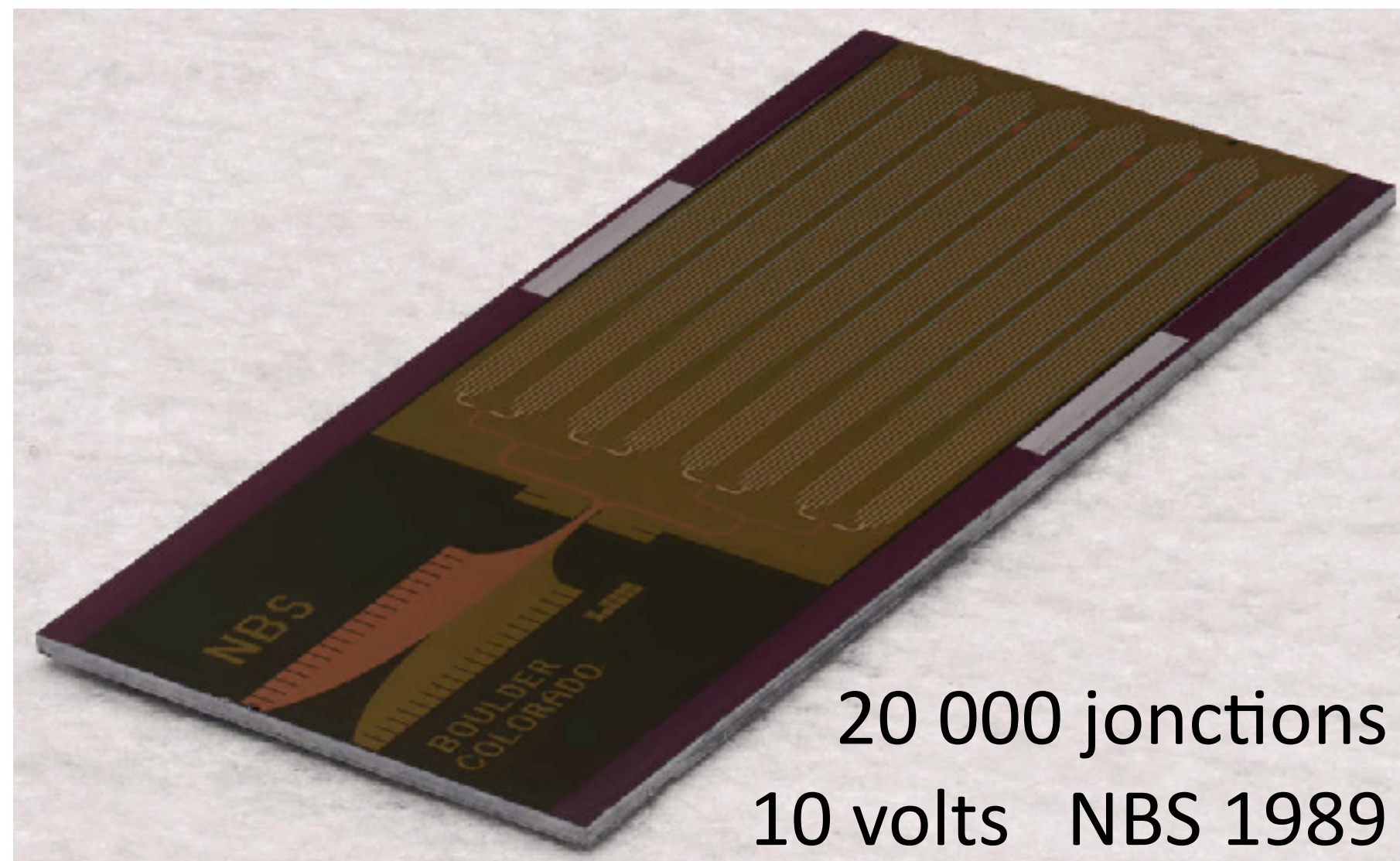
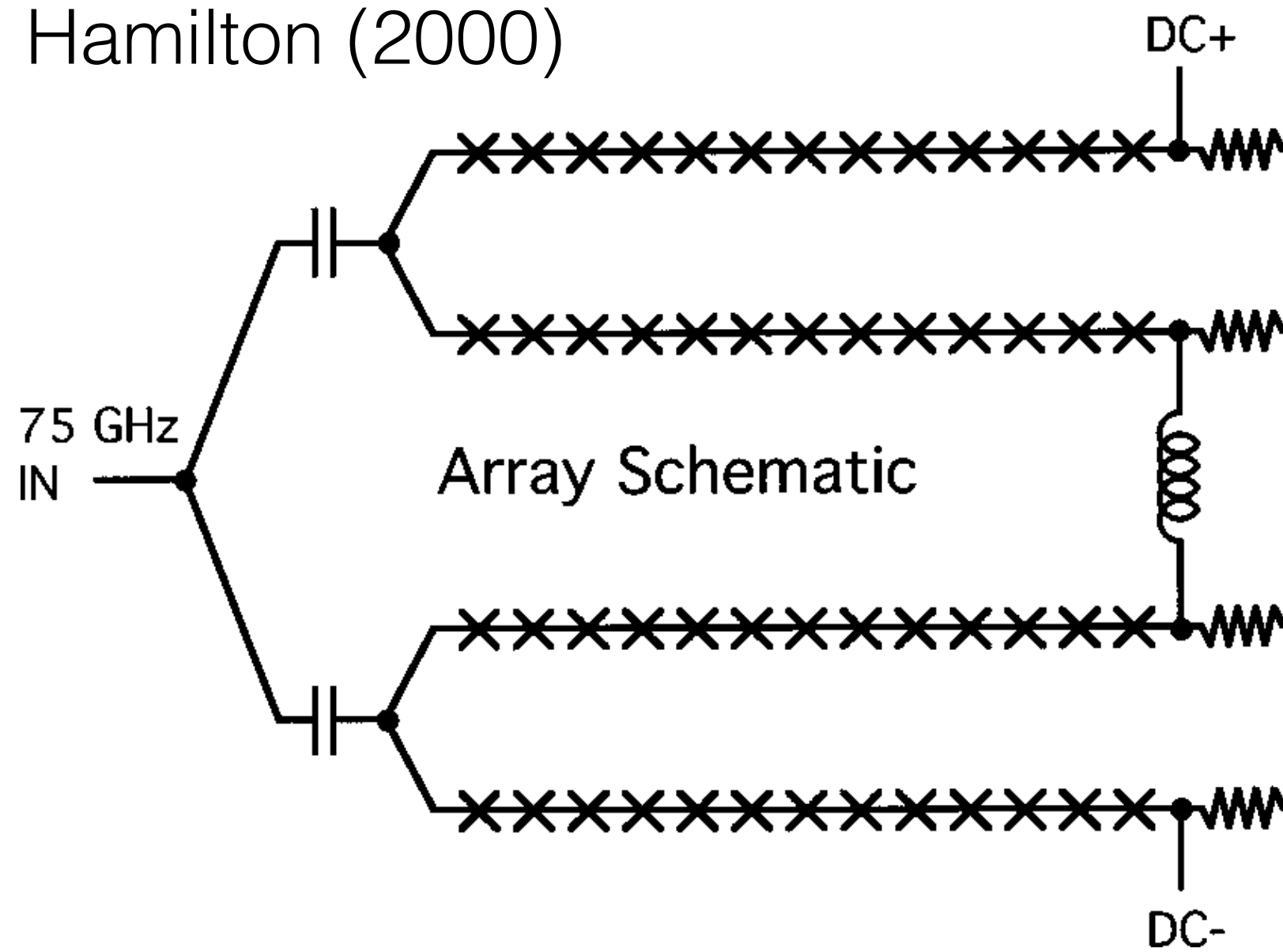
$$\text{de tension } V_n = \hbar\omega/2e$$



$$\beta = 10^5, i_1 = 80, \tilde{\omega} = 10^{-2}$$

Réseaux de jonctions Josephson

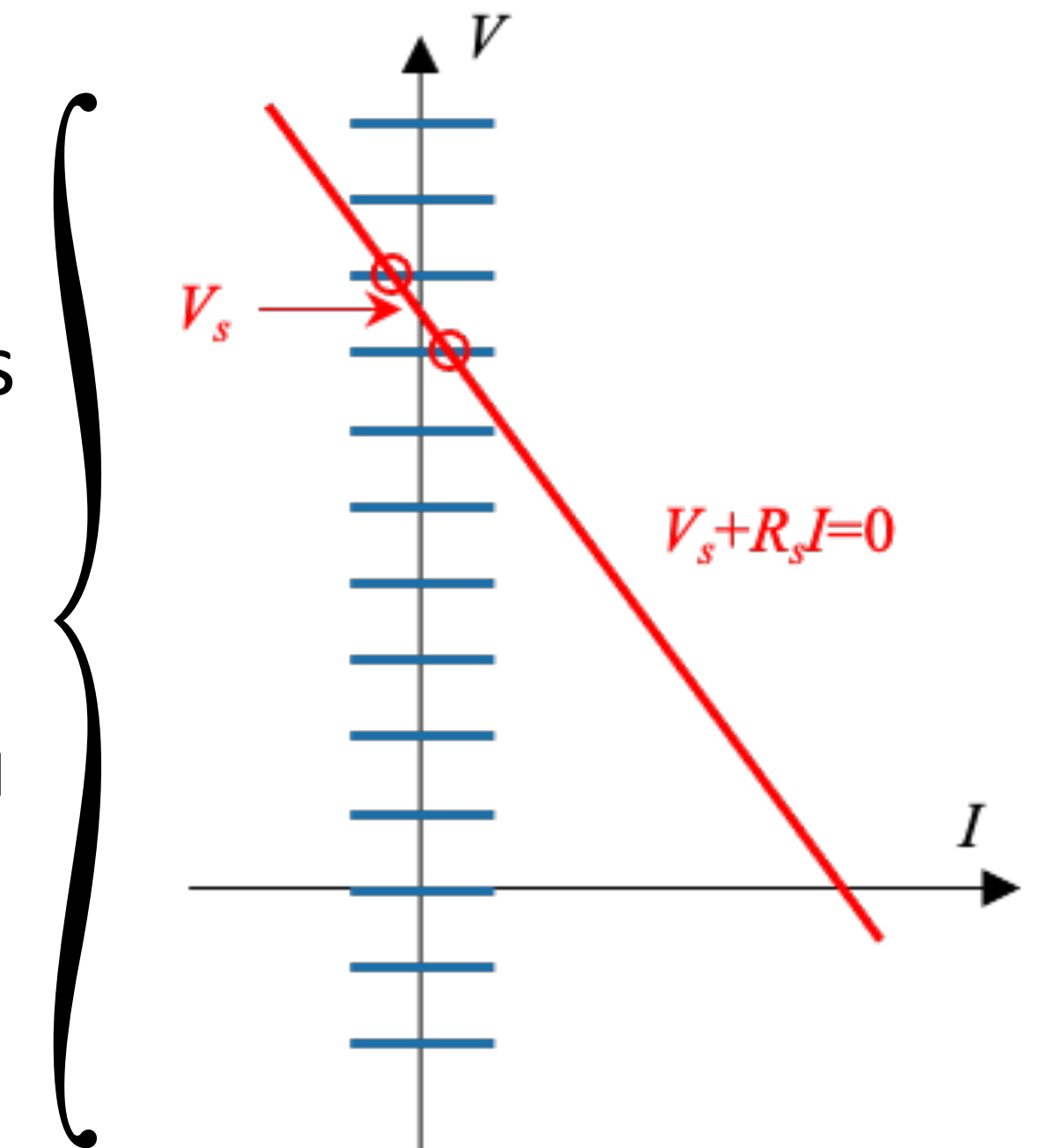
Hamilton (2000)



$$\omega/2\pi = 75 \text{ GHz}$$

10^5 valeurs quantifiées
entre 0 V et 10 V
(pas de 0.12 mV)

On verrouille le réseau
sur la tension désirée



*stable pendant plusieurs heures
une fois le verrouillage atteint*

Le système d'unités actuel

Jusqu'en 2018, l'effet Josephson et l'effet Hall quantique fournissaient une valeur de e/h et de e^2/h



À partir du 20 mai 2019 :

$$e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$+ c, \Delta\nu_{\text{cesium}}, k_B, N_a$$

Intensité électrique I : nombre de charges / seconde

Potentiel électrique V : dérivé de $P = VI$ (P : puissance)

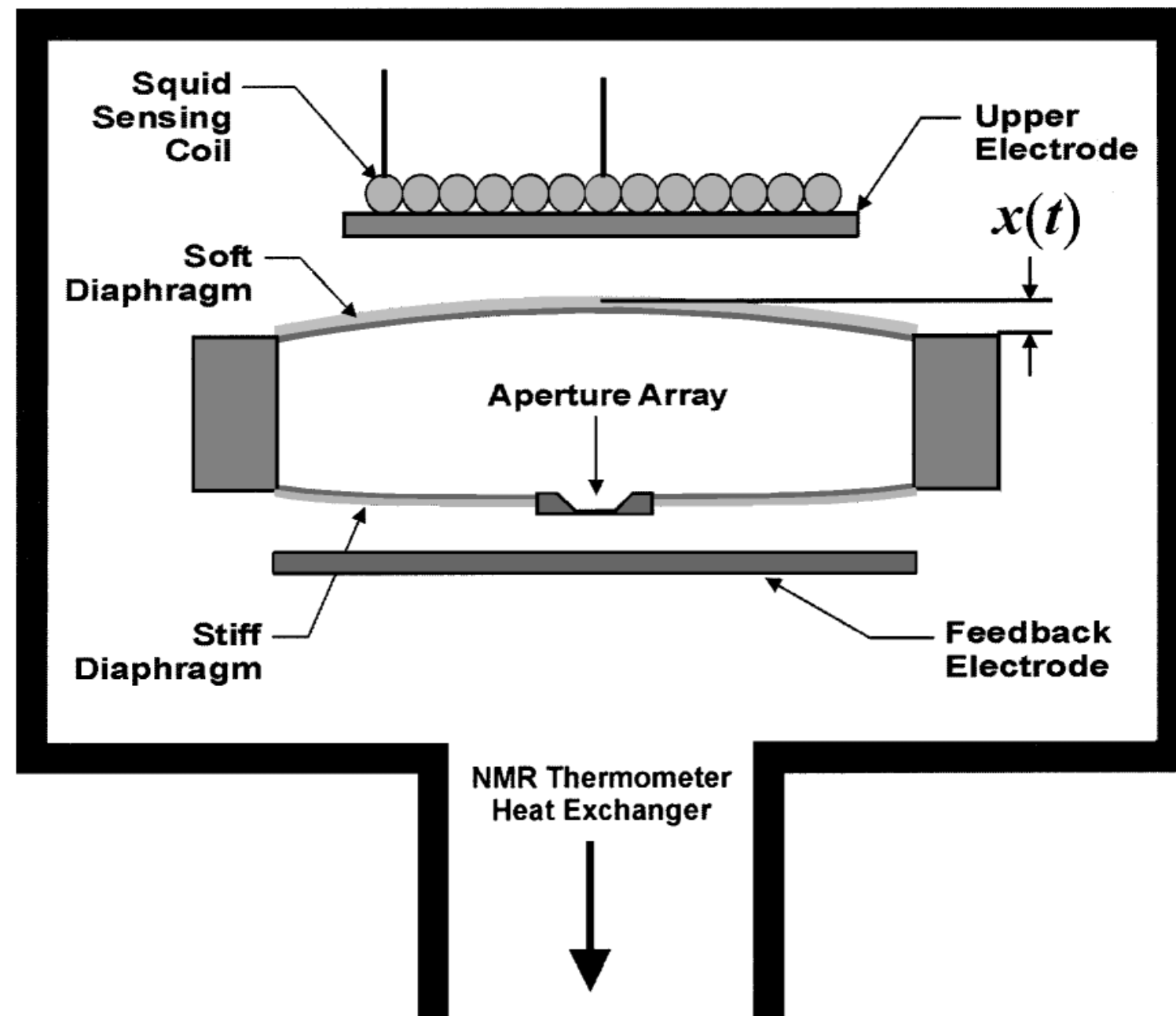
Plan du cours

1. L'effet Josephson alternatif
2. Les résonances de Shapiro
3. Un standard électrique
4. Résonances de Shapiro pour des jonctions atomiques

Résonances de Shapiro dans ^3He superfluide

Simmonds et al., PRL (2001)

Retour sur l'expérience de Berkeley avec une pression modulée



réseau de 4225 trous (diamètre 115 nm)

$$P = P_0 + P_1 \sin(\omega t)$$

équivalent à une modulation en tension

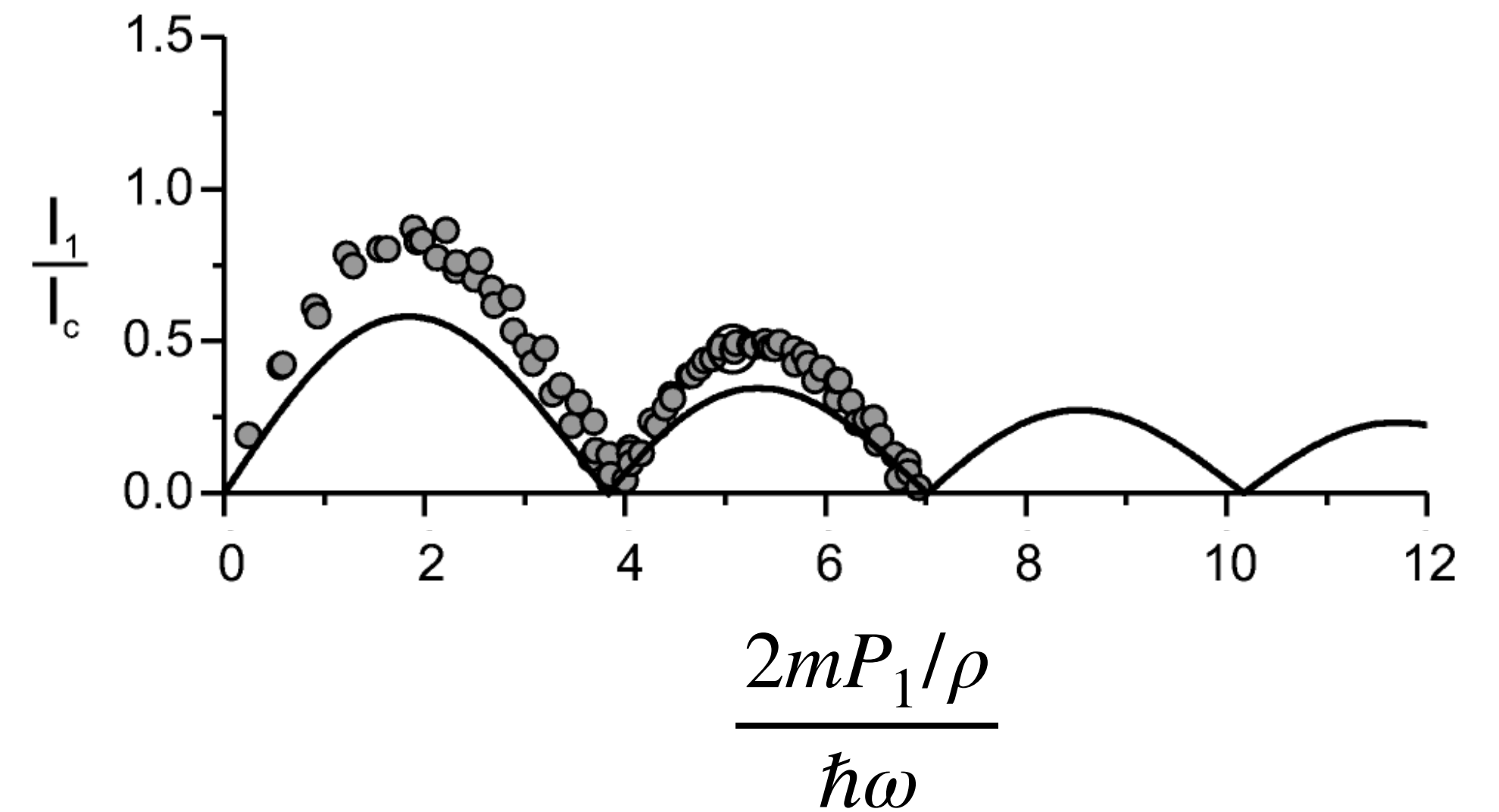
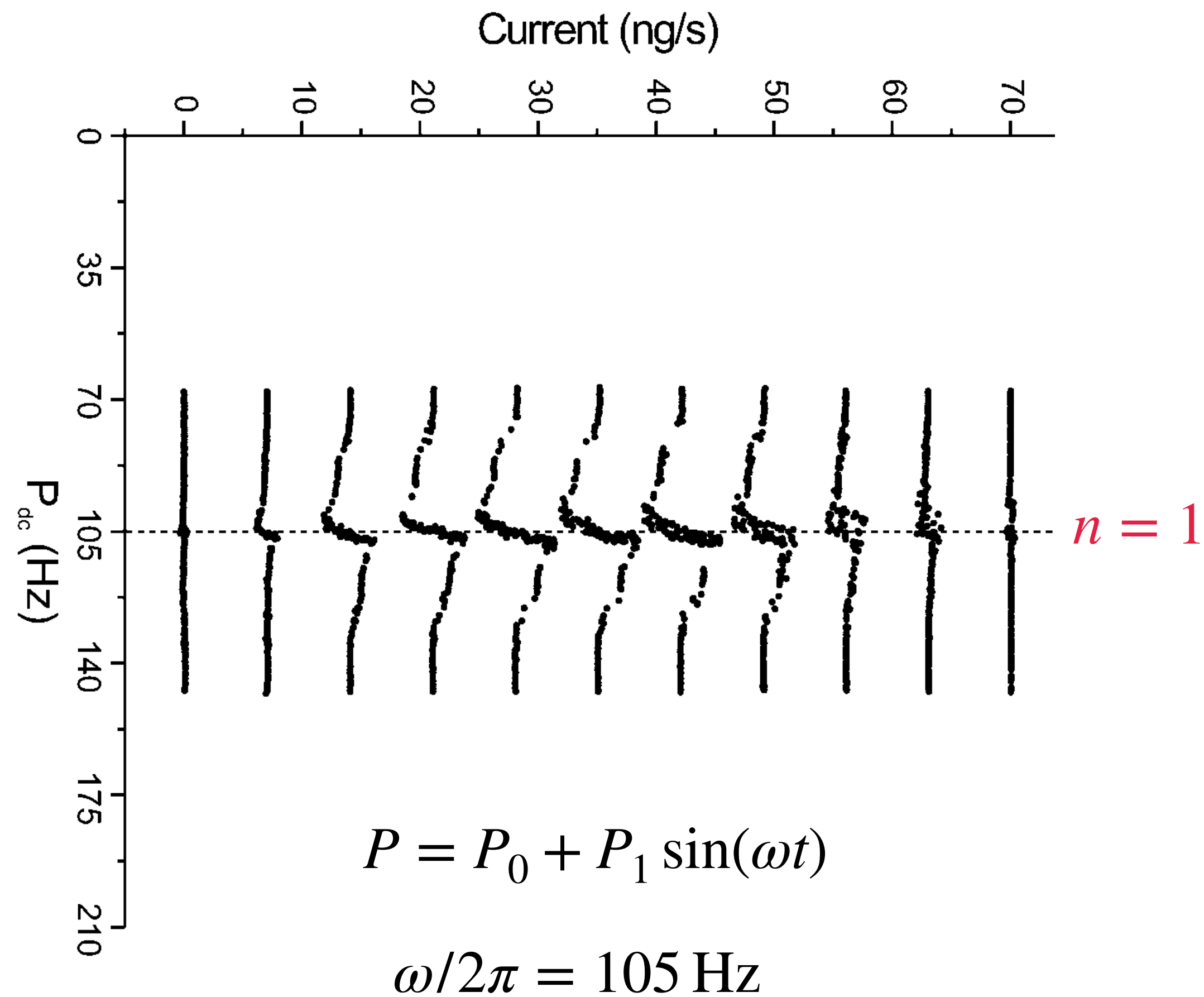
Résonance attendue si $\frac{2mP_0}{\rho} = n \hbar \omega$

$2m$: masse d'une paire de Cooper ^3He - ^3He

ρ : masse volumique

Résonances de Shapiro dans ^3He superfluide (suite)

Simmonds et al., PRL (2001)



On retrouve la loi attendue
en fonction de Bessel

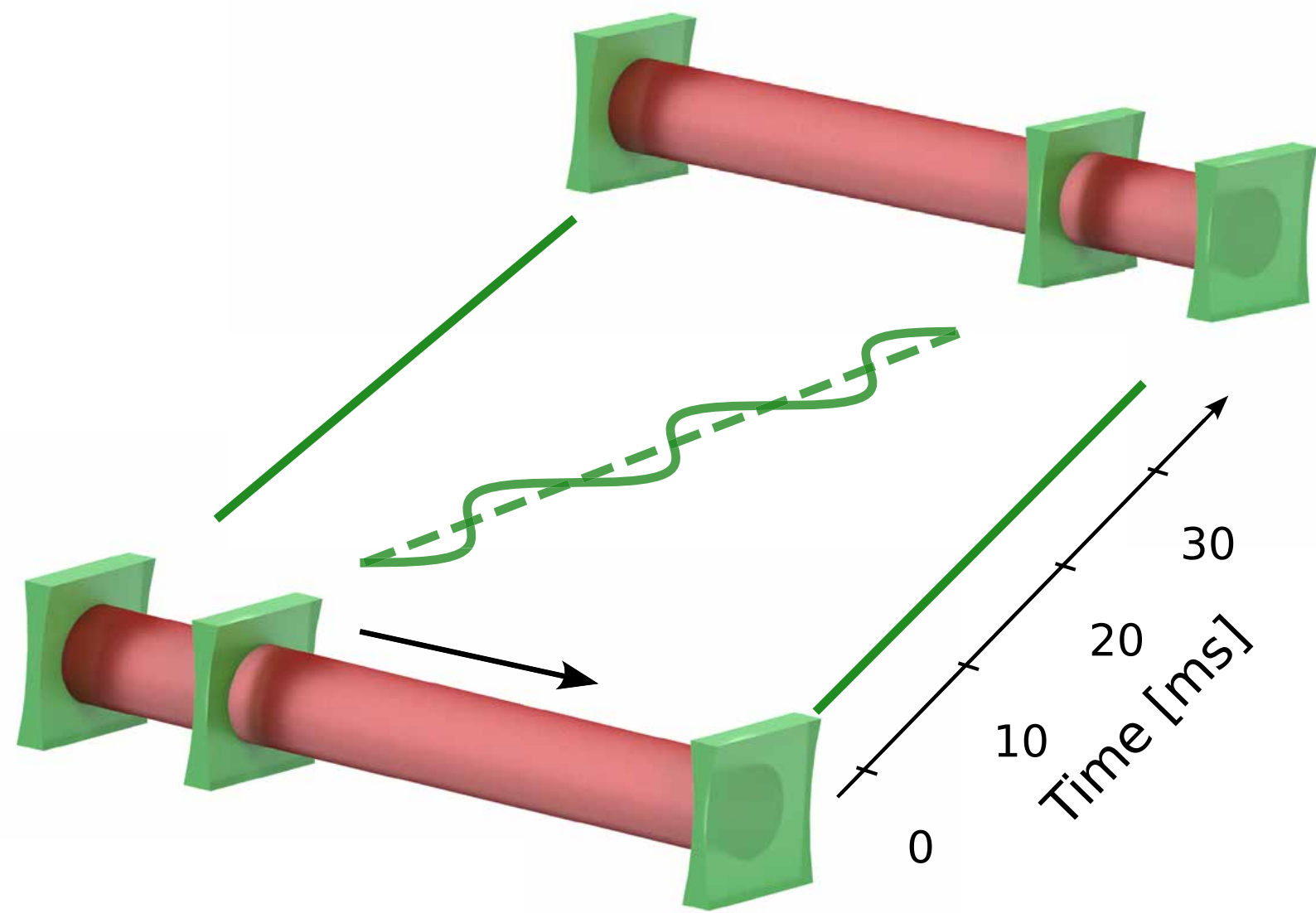
Chaque courbe correspond à une valeur de P_1

Barrière mobile dans un gaz quantique

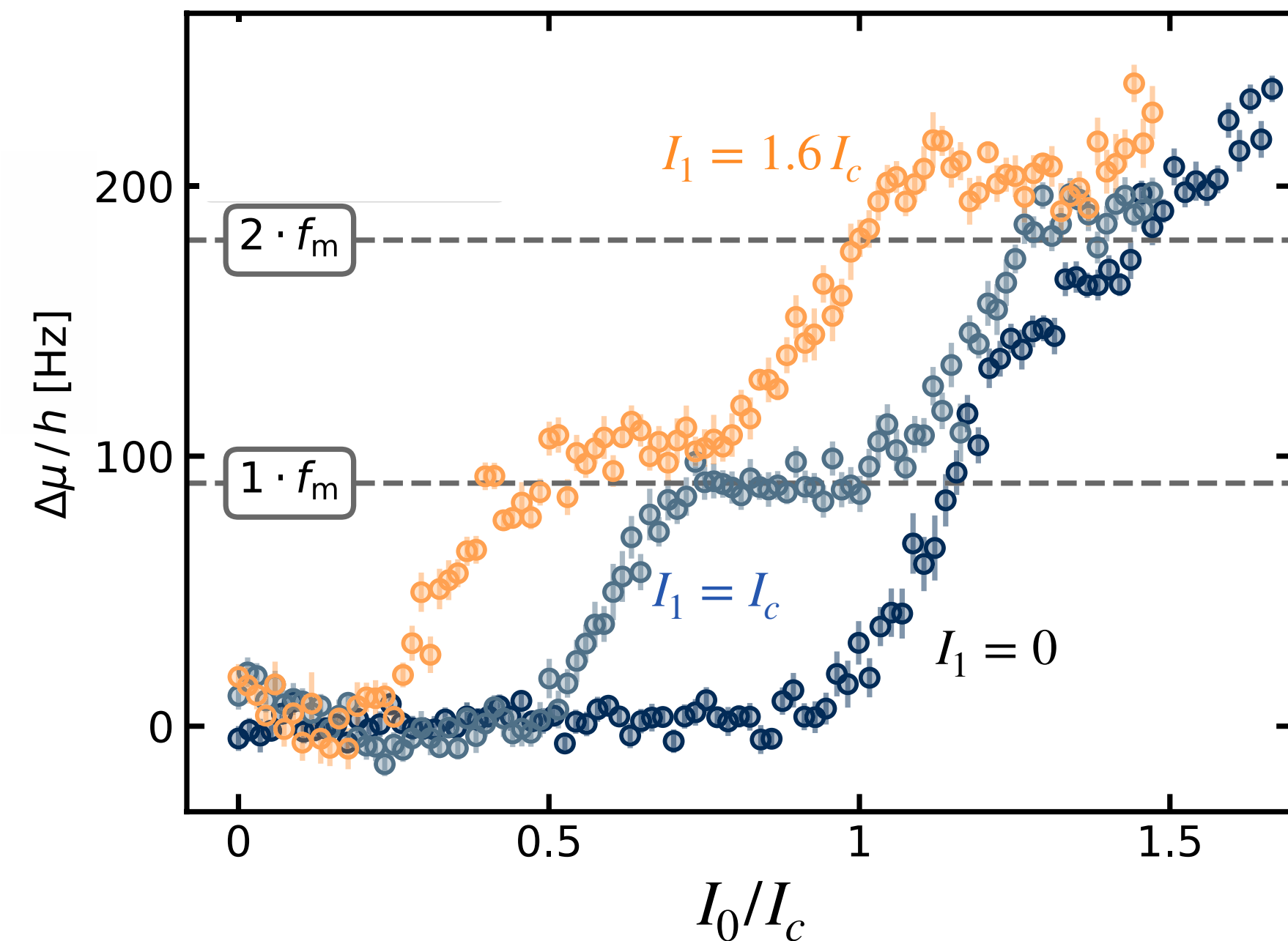
Del Pace et al, Science (2025) [groupe de G. Roati, Florence]: gaz 2D de fermions ${}^6\text{Li}$ dans le régime unitaire

Bernhart et al, Science (2025) [groupe de H. Ott, Kaiserslautern]: gaz 3D de bosons ${}^{87}\text{Rb}$

théorie par Singh et al, PRL (2024) [groupes de L. Mathey & L. Amico]

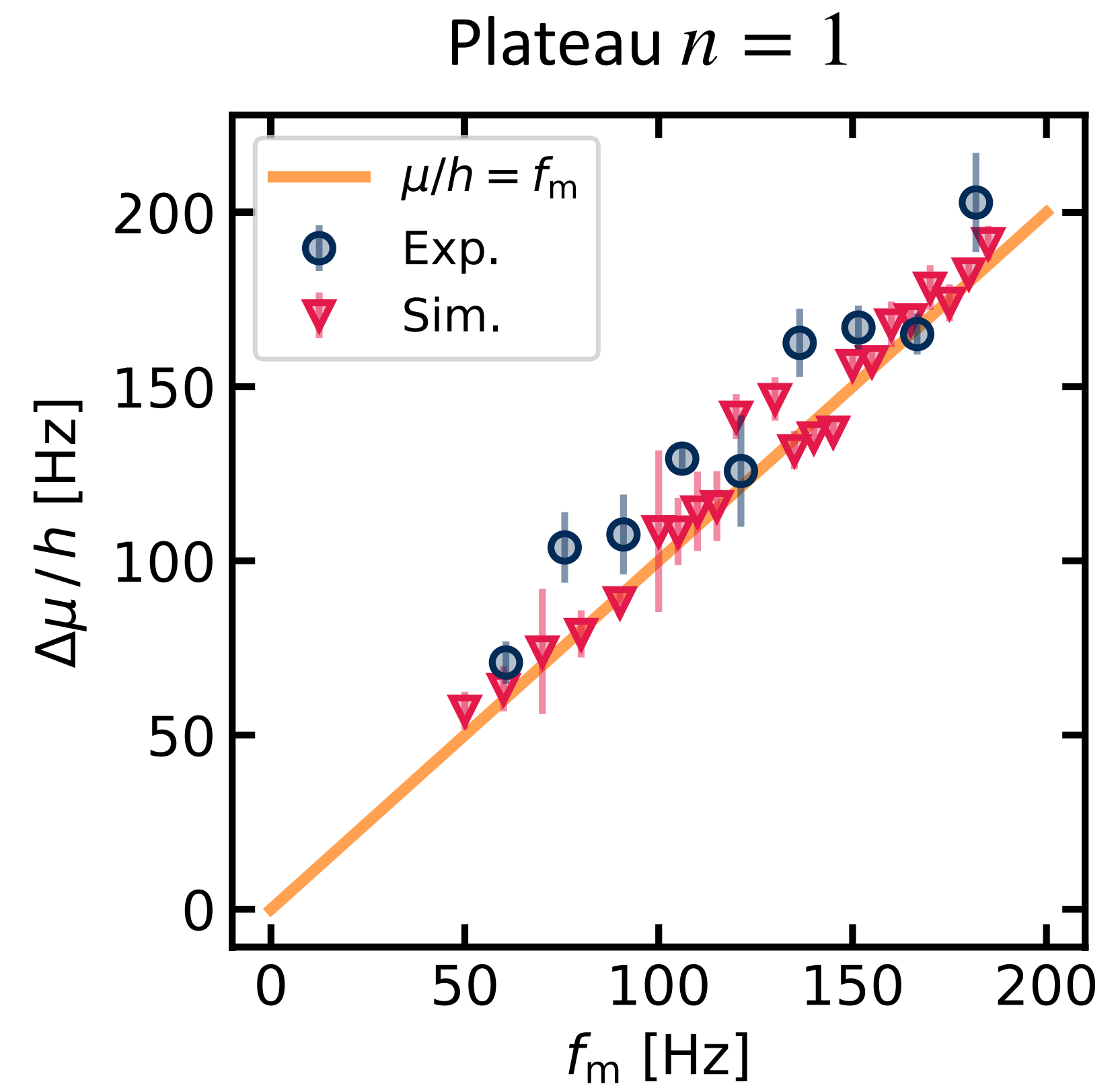
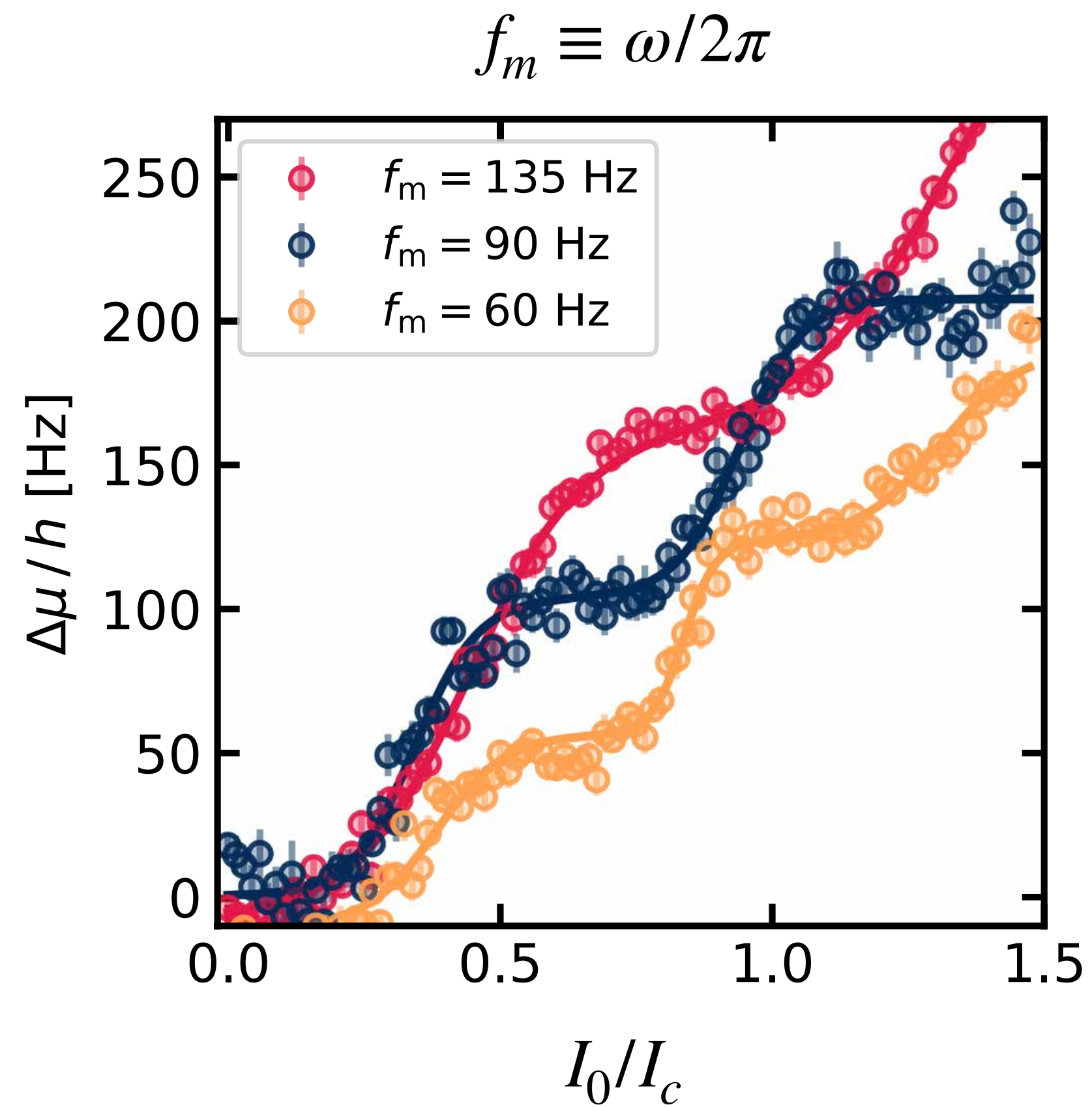


$$v = v_0 + v_1 \sin(\omega t)$$



Barrière mobile et plateaux

Bernhart et al, Science (2025) [groupe de H. Ott] : gaz 3D de bosons ^{87}Rb

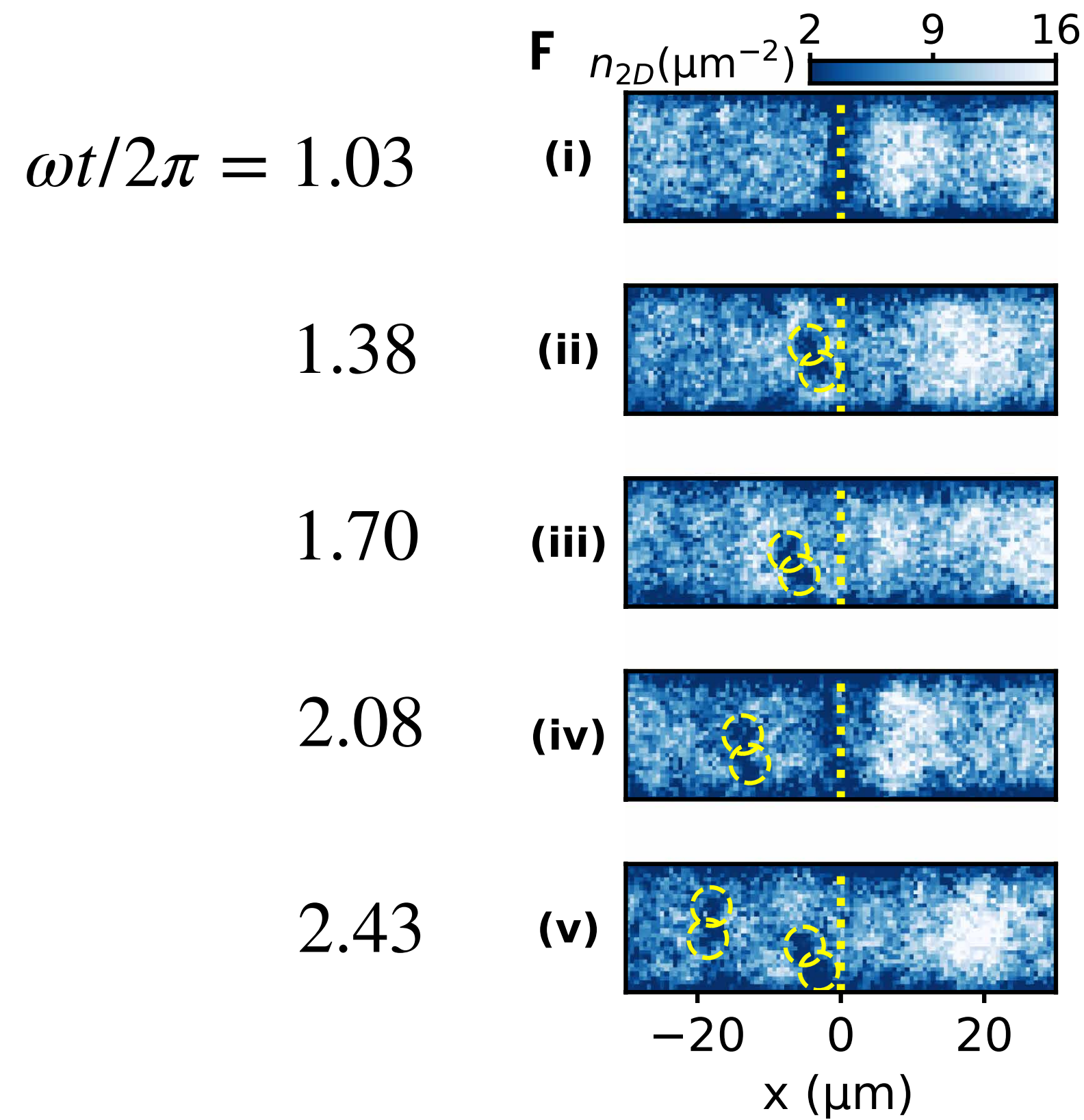


Processus dissipatifs en jeu

La dissipation est indispensable pour verrouiller la phase $\varphi(t)$ sur la modulation en courant

$$2e\overline{V(t)} = \hbar\omega \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta\varphi = \phi(T) - \phi(0) \\ T = 2\pi/\omega \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = 2\pi n$$

$$n = 1$$



Del Pace et al, Science (2025):
gaz 2D de fermions ${}^6\text{Li}$ dans le régime unitaire

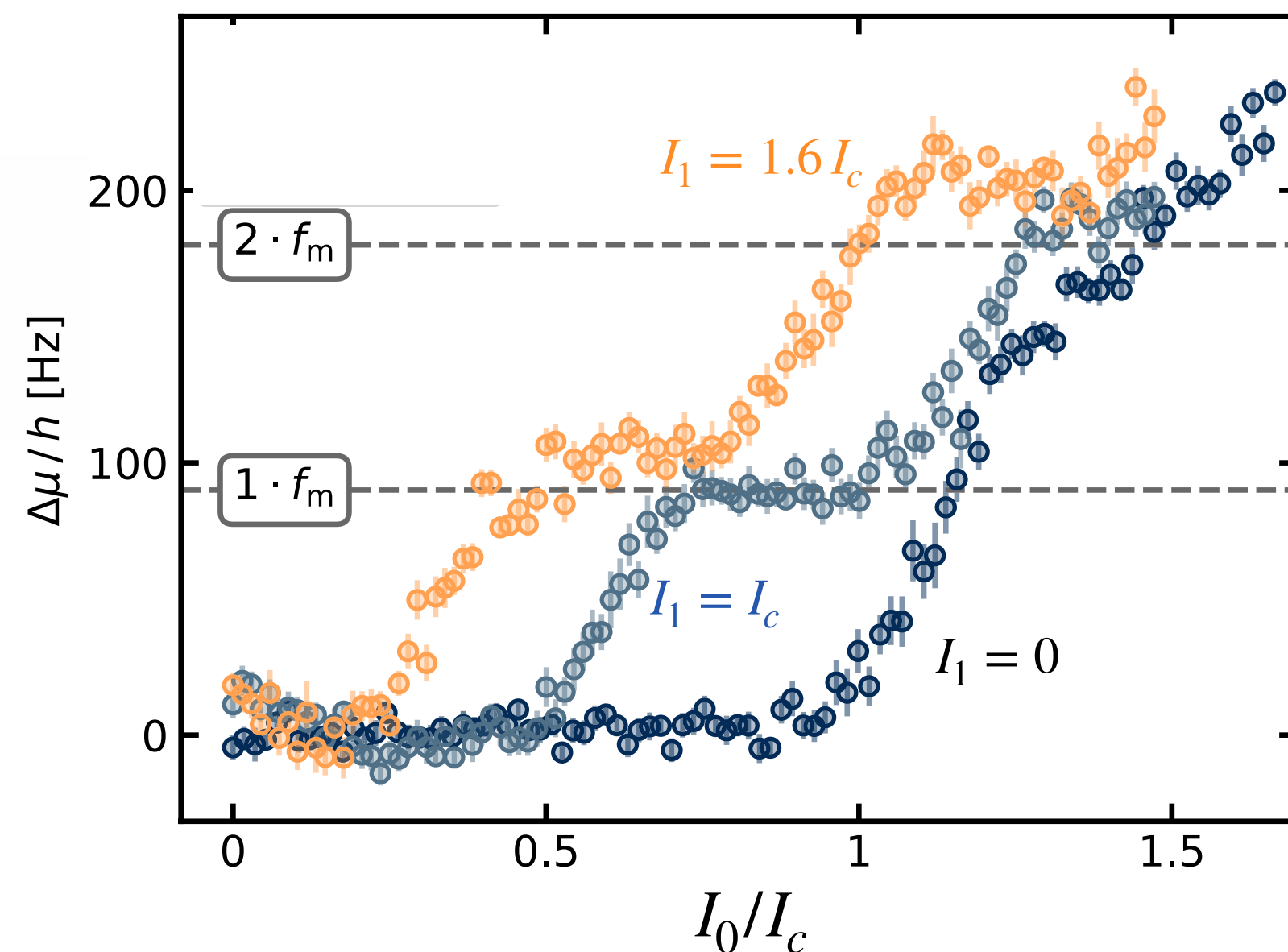
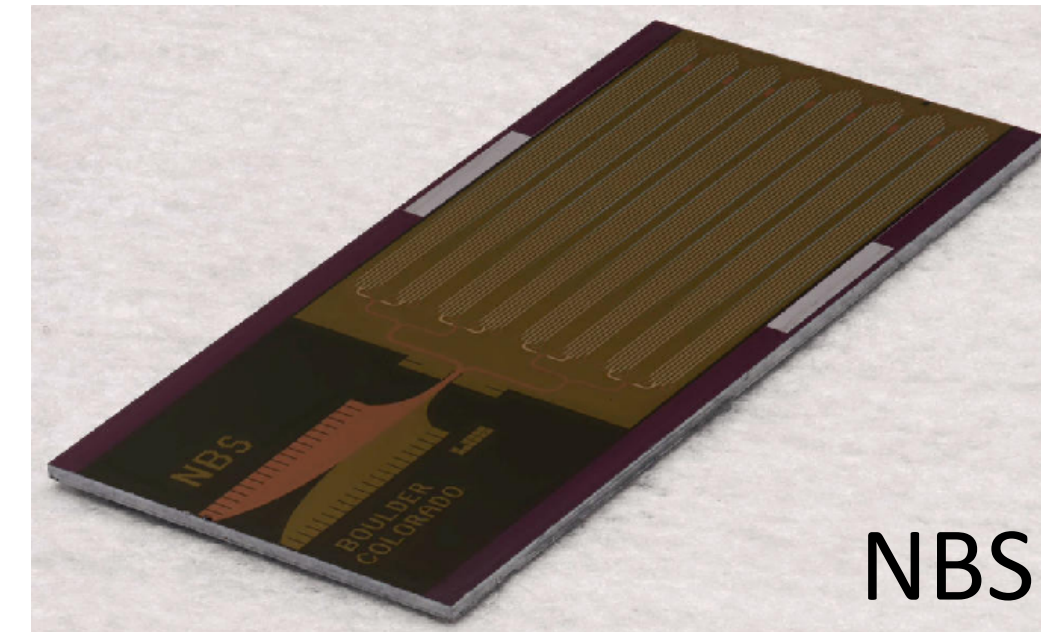
Pour $n = 1$, émission d'une paire de vortex par période de la modulation

Conclusion

Anderson (1970) après consultation de l'avocat en charge des brevets aux Bell Labs :

Josephson's paper was so complete that no one else was ever going to be very successful in patenting any substantial aspect of the Josephson effect

Cet effet a permis un changement radical dans la définition des unités électriques



Transposition à des jonctions atomiques : comment tirer parti de la “quantification” $\Delta\mu = n \hbar\omega$ du potentiel chimique ?