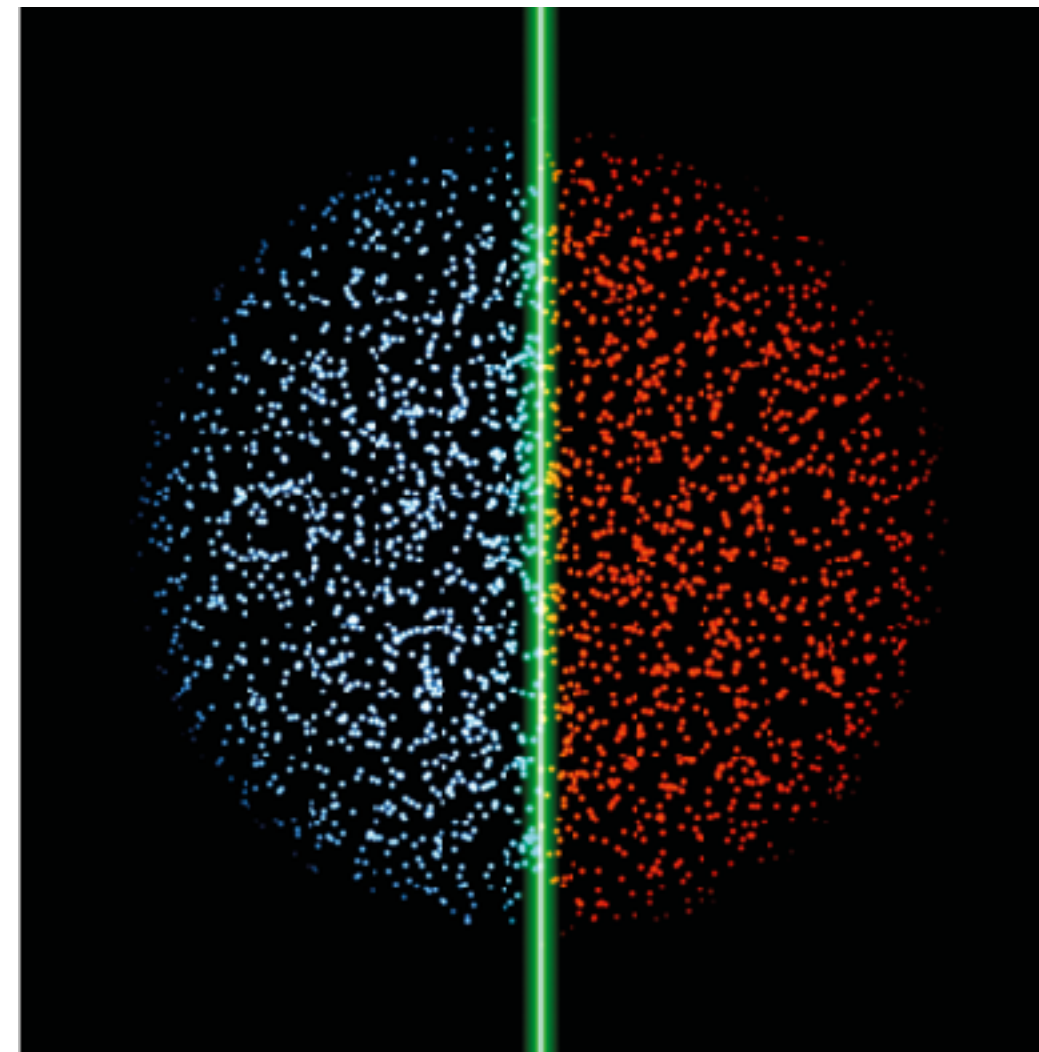


Chaire *Atomes et rayonnement*, cours 2025-26
Fluides quantiques couplés et jonctions Josephson

Cours 4 : Les jonctions atomiques internes



diapositives

notes de cours



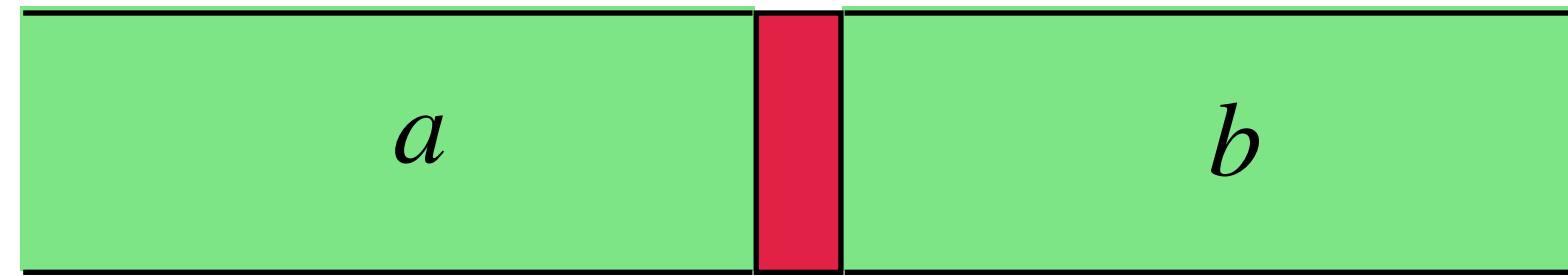
Séminaires

Aujourd'hui : Benoît Vermersch, Quobly & Université Grenoble Alpes
Observing the quantum Mpemba effect in a quantum processor

Vendredi 19 juin : Klaus Mølmer, Københavns Universitet & Niels Bohr Institute, Copenhagen
Sensing with quantum trajectories

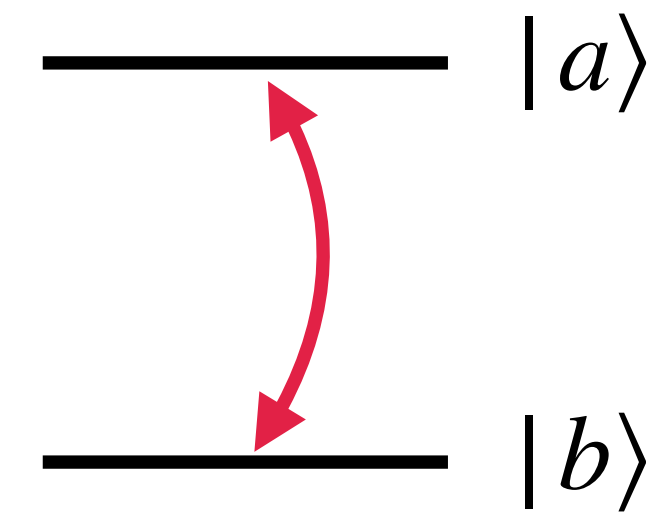
Vendredi 26 juin : Eleni Diamanti, LIP6 Sorbonne Université
Ressources et applications des réseaux quantiques

Jonctions externes vs. jonctions internes



a, b : états externes

$$\psi(x, t) = \alpha_a(t)\Phi_a(x) + \alpha_b(t)\Phi_b(x)$$



états internes (par exemple le spin)

$$|\psi(t)\rangle = \alpha_a(t)|a\rangle + \alpha_b(t)|b\rangle$$

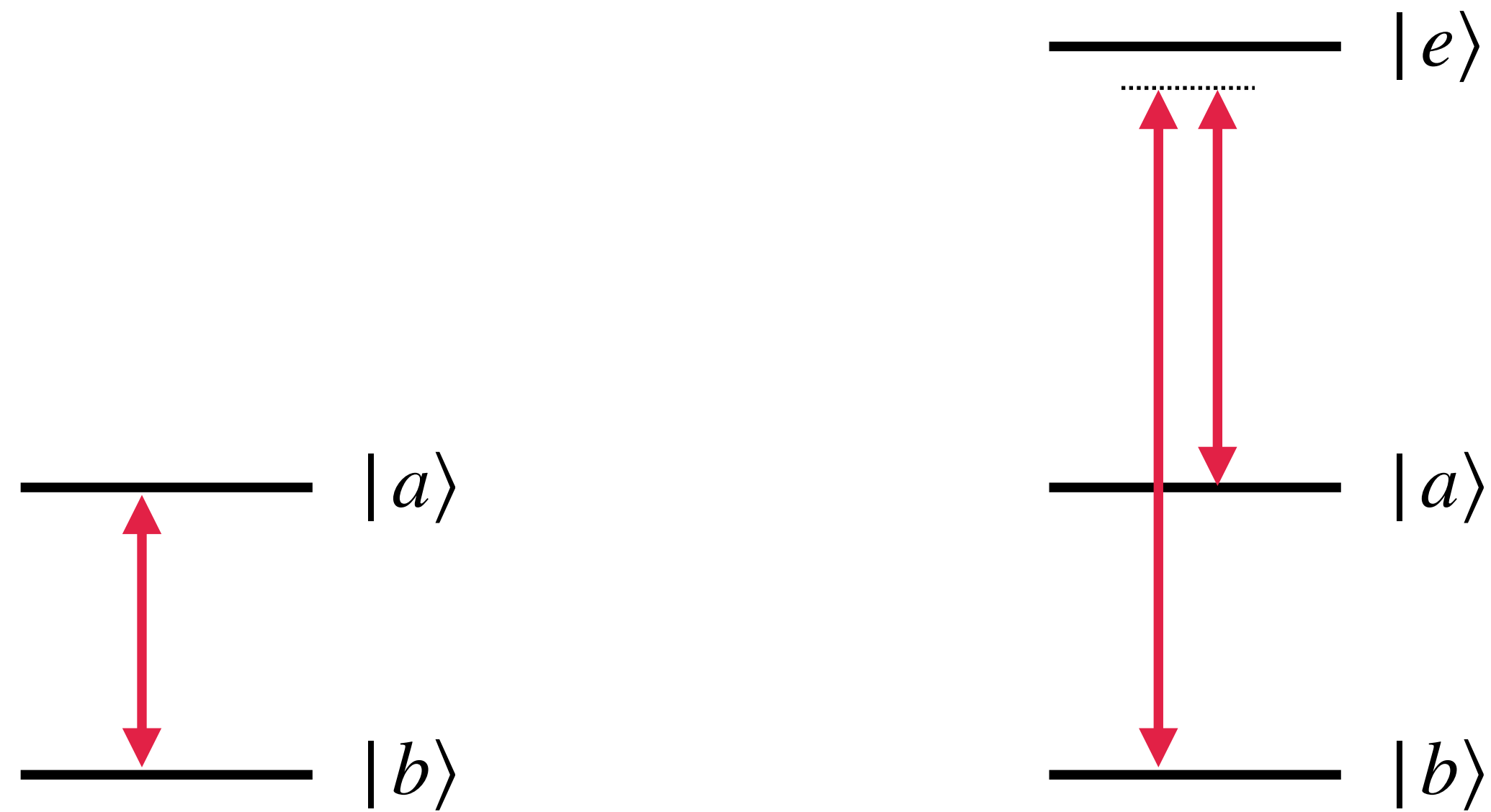
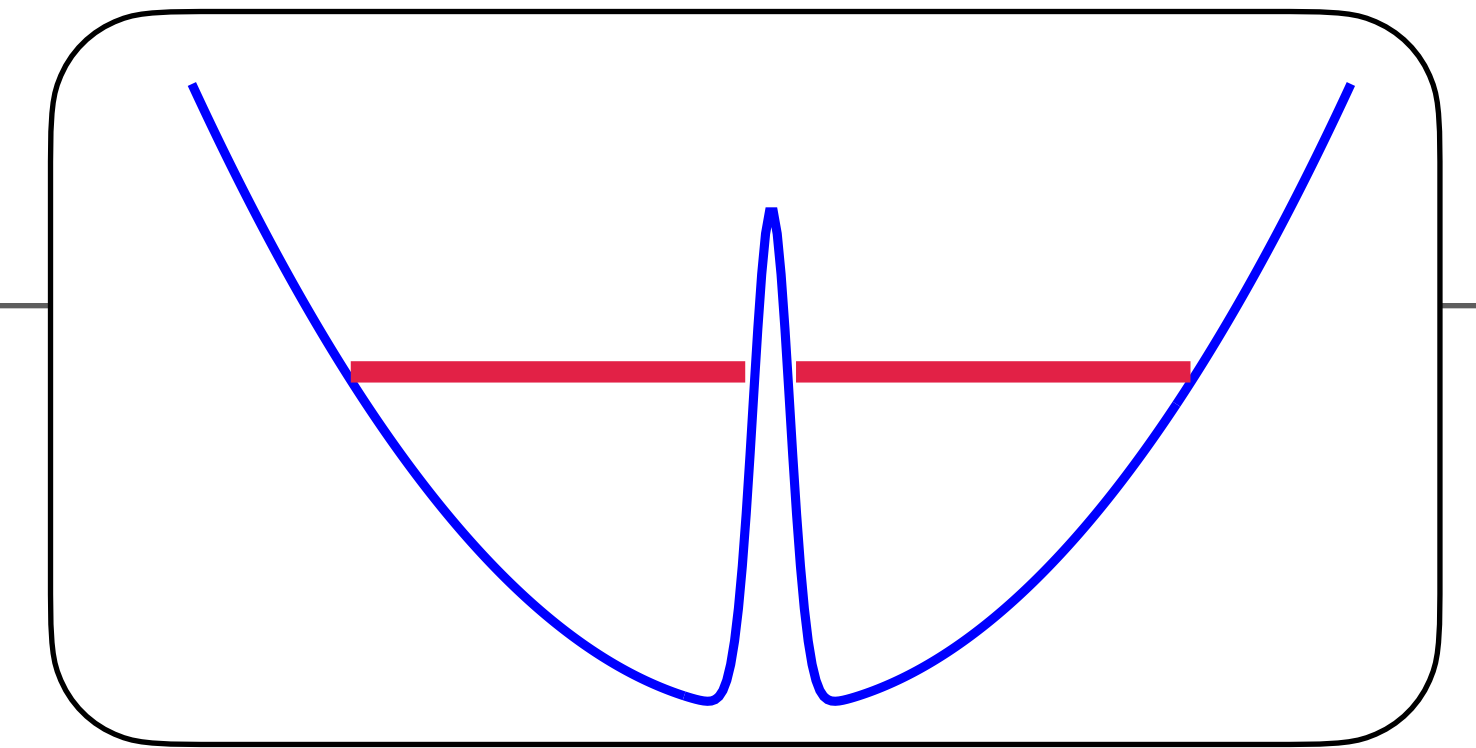
*Les atomes sont tous localisés
dans la même région spatiale*

1966 : proposition initiale de Leggett, basée sur un modèle de supraconducteur à deux bandes

1971-72 : découverte de la superfluidité de ^3He (Osheroff, Lee & Richardson)

1973-74 : analyse des différentes phases du liquide par Leggett, à partir des anomalies d'expériences de RMN expliquées en termes d'effet Josephson interne

Transposition à des gaz d'atomes froids



Différences potentiellement importantes avec une jonction externe :

- Le couplage tunnel, caractérisé par l'énergie E_J , peut être grand
- L'énergie de charge E_C , qui dépend des interactions entre atomes, va faire intervenir les trois types d'interaction $a - a$, $b - b$, $a - b$

Plan du cours

1. Préliminaire : l'atome habillé

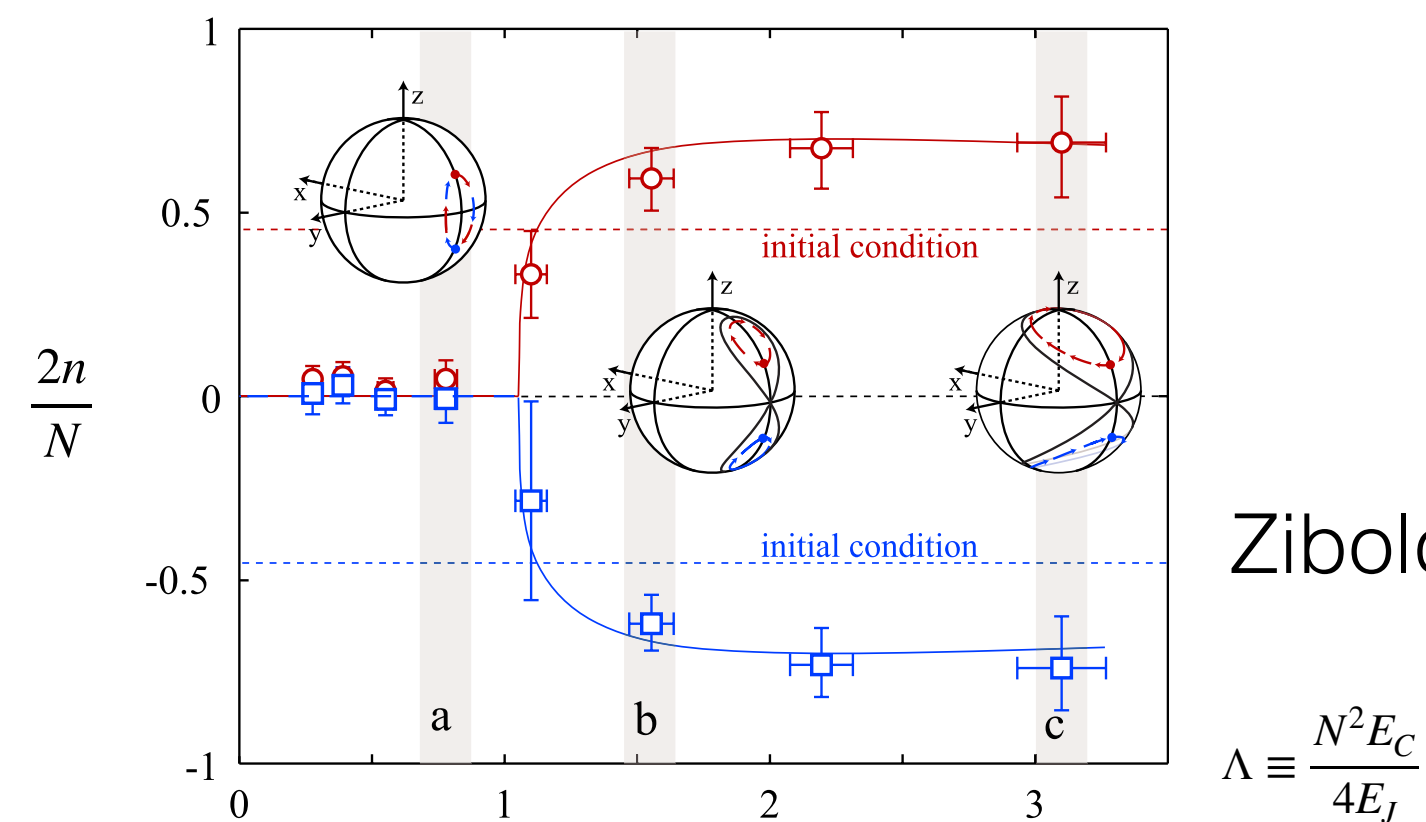
Système à deux niveaux couplé à un champ monochromatique quasi-résonnant

2. L'approximation du mode spatial unique

Représentation de Schwinger et algèbre d'un grand moment cinétique

3. La jonction Josephson retrouvée

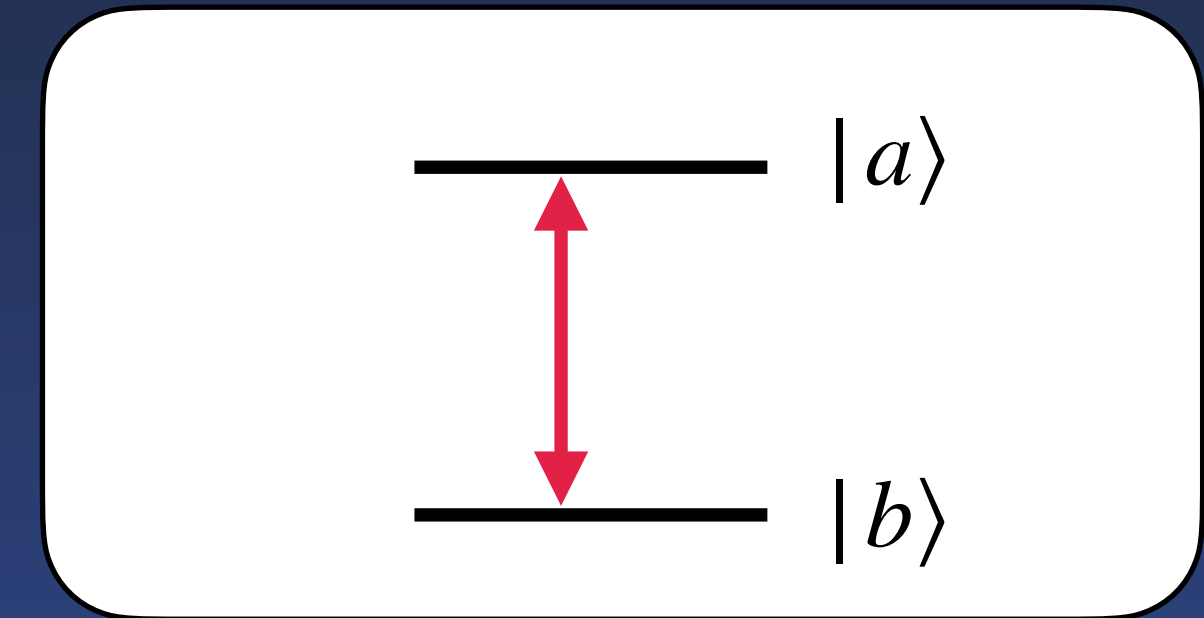
4. États stationnaires et bifurcation



Zibold et al., PRL 105, 204101

$$\Lambda \equiv \frac{N^2 E_C}{4E_J}$$

Couplage d'un atome unique avec un champ monochromatique



- Fréquence de Rabi, désaccord
- L'approximation du champ tournant (RWA, *rotating wave approximation*)
- Hamiltonien effectif indépendant du temps
- Etats "habillés"

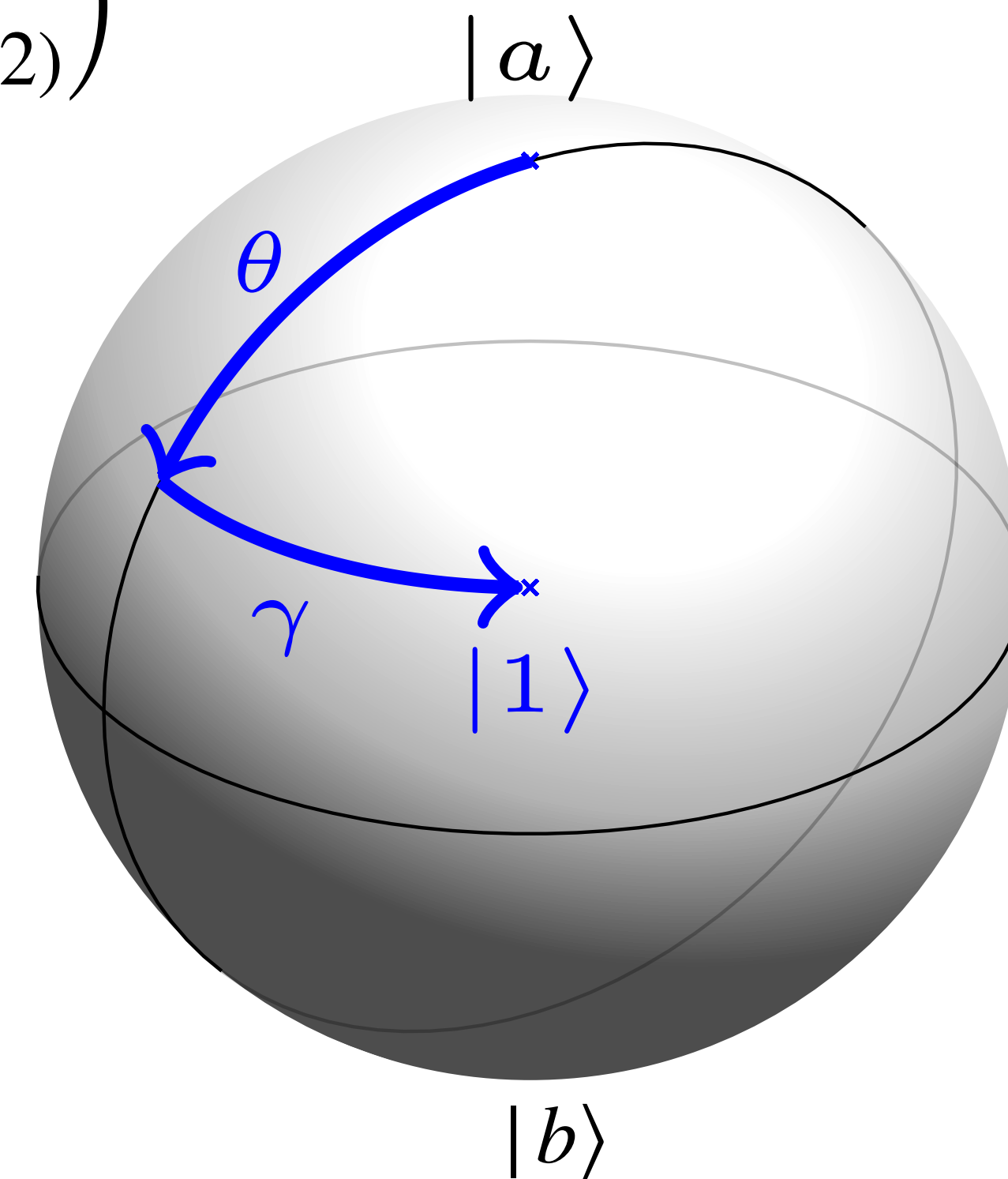
États habillés et sphère de Bloch

Couplage en $\cos(\omega t)$: états habillés $|1\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$ $|2\rangle = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$

Couplage en $\cos(\omega t + \gamma)$: états habillés $|1\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\gamma} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$ $|2\rangle = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ e^{i\gamma} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$

Représentation sur une sphère de rayon 1 par les deux points diamétralement opposés :

- Colatitude θ , longitude γ pour $|1\rangle$
- Colatitude $\pi - \theta$, longitude $\gamma + \pi$ pour $|2\rangle$



Pour une excitation résonante ($\Delta = 0$): $\theta = \pi/2 \rightarrow$ les états habillés sont sur l'équateur

Plan du cours

1. Préliminaire : l'atome habillé

2. L'approximation du mode spatial unique

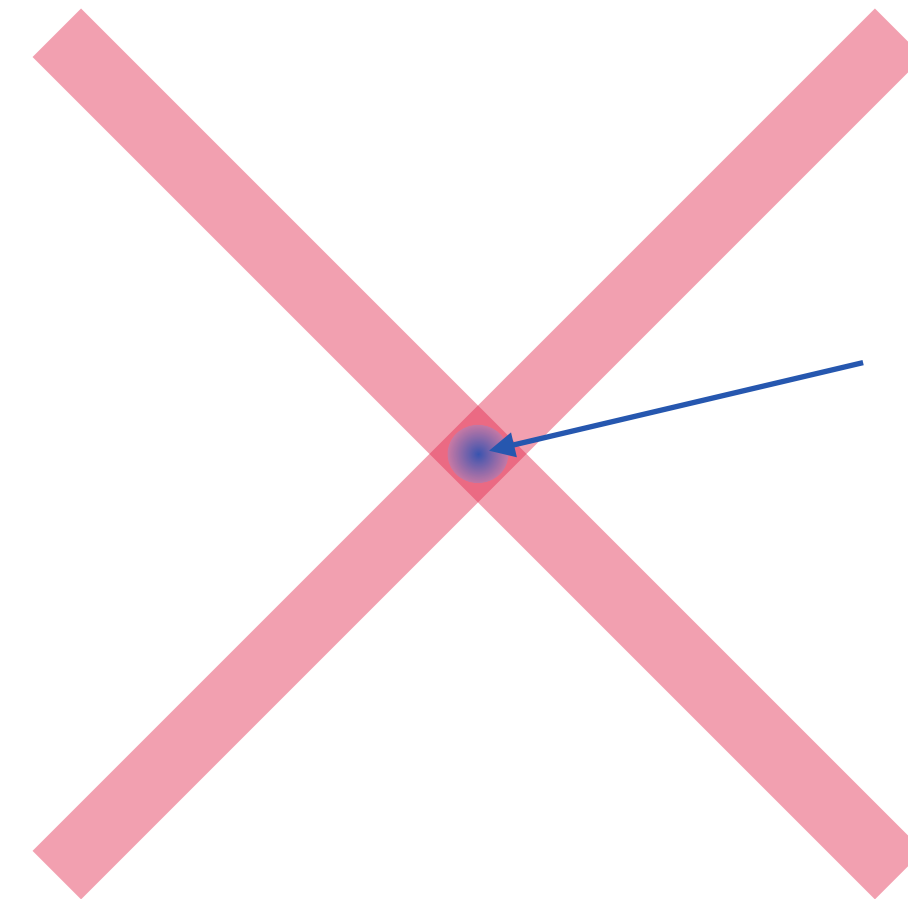
Représentation de Schwinger et algèbre d'un grand moment cinétique

3. La jonction Josephson retrouvée

4. États stationnaires et bifurcation

Le mode spatial unique

Gaz confiné dans un piège de grande raideur



fonction d'onde $\Phi(\mathbf{r})$

$$\int |\Phi(\mathbf{r})|^2 d^3r = 1$$

Les fréquences d'oscillations ω_i ($i = x, y, z$) sont supposées telles que $\hbar\omega_i \gg \mu_s$

μ_s : potentiel chimique “de spin” liés à la différence des coefficients d'interaction

$$g_{aa} - g_{bb} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}(g_{aa} + g_{bb}) - g_{ab}$$

La fonction d'onde spatiale reste alors inchangée au cours de l'évolution des degrés de liberté de spin

- Espace de Hilbert à N particules et seconde quantification

- Opérateurs création $\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger$ et destruction \hat{a}, \hat{b}

- Hamiltonien décrivant le couplage cohérent au champ micro-onde ou laser

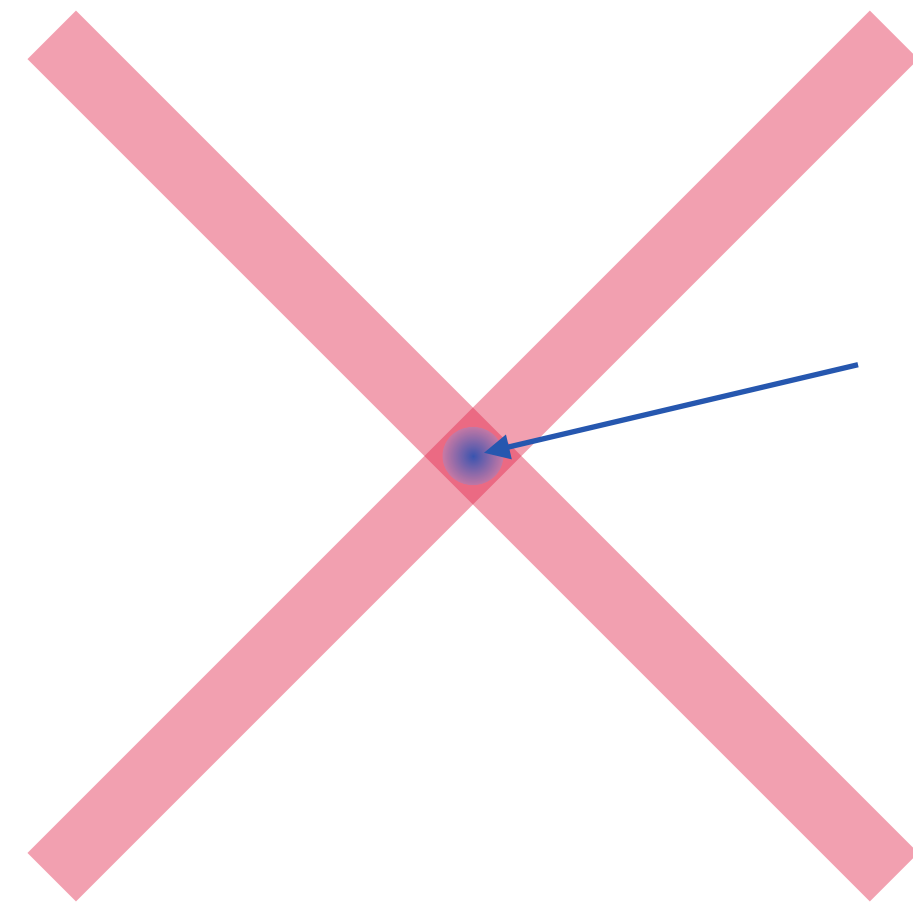
Opérateur "à un corps": première quantification $|a\rangle\langle b| \longrightarrow$ seconde quantification $\hat{a}^\dagger \hat{b}$

- Représentation de Schwinger

Algèbre de moment cinétique avec $J = \frac{N}{2}$

$$\hat{H}_{\text{coh}} = -\hbar\Omega\hat{J}_x - \hbar\Delta\hat{J}_z$$

Énergie d'interaction entre atomes (s'il y a un seul état interne)



fonction d'onde $\Phi(\vec{r})$

$$\int |\Phi(\vec{r})|^2 d^3r = 1$$

Approximation de champ moyen :

$$E_{\text{int}} = \frac{1}{2} \iint \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') d^3r d^3r'$$

$\rho(\vec{r})$: densité au point \vec{r}

$$\rho(\vec{r}) = N |\Phi(\vec{r})|^2$$

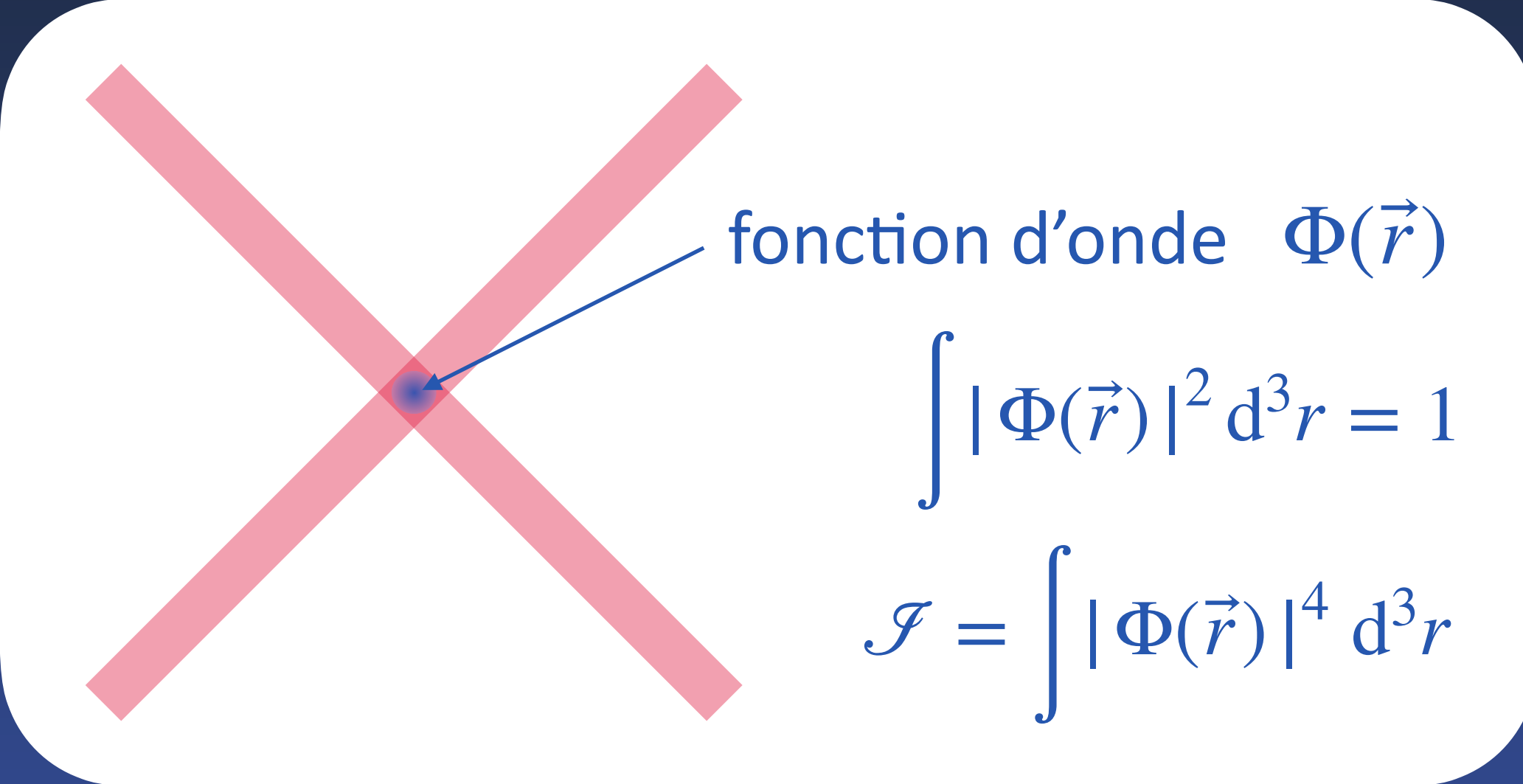
Pour des interactions locales : $V(\vec{r} - \vec{r}') = g \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ $\implies E_{\text{int}} = \frac{1}{2} g N^2 \int |\Phi(\vec{r})|^4 d^3r$

On note $\mathcal{I} = \int |\Phi(\vec{r})|^4 d^3r$ [dimension : (volume)⁻¹]

$$E_{\text{int}} = \frac{1}{2} \mathcal{I} g N^2$$

Énergie d'interaction entre atomes (un seul état interne)

$$E_{\text{int}} = \frac{1}{2} \mathcal{J} g N^2$$



fonction d'onde $\Phi(\vec{r})$

$$\int |\Phi(\vec{r})|^2 d^3r = 1$$
$$\mathcal{J} = \int |\Phi(\vec{r})|^4 d^3r$$

The diagram shows a white rounded rectangle containing a large red 'X' over a blue dot. An arrow points from the text 'fonction d'onde $\Phi(\vec{r})$ ' to the blue dot. Below the rectangle are two mathematical equations.

Énergie d'interaction entre atomes (deux états internes a et b)

Trois constantes d'interaction :

$$\left\{ \begin{array}{l} a - a : g_{aa} \\ b - b : g_{bb} \\ a - b : g_{ab} \end{array} \right.$$

L'hamiltonien total de la jonction interne (approximation du mode spatial unique)

Couplage avec le champ cohérent : $\hat{H}_{\text{coh}} = -\hbar\Omega\hat{J}_x - \hbar\Delta\hat{J}_z$

Interactions entre atomes (à une constante additive près) : $\hat{H}_{\text{int}} = \hbar\Delta_{\text{int}}\hat{J}_z + \frac{E_C}{2}\hat{J}_z^2$

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{coh}} + \hat{H}_{\text{int}} = -\hbar\Omega\hat{J}_x - \hbar\tilde{\Delta}\hat{J}_z + \frac{E_C}{2}\hat{J}_z^2$$

avec $\tilde{\Delta} \equiv \Delta - \Delta_{\text{int}}$

Hamiltonien de Lipkin - Meshkov - Glick (LMG)

Proposé initialement (1965) comme banc d'essai pour tester différentes méthodes d'approximation

Plan du cours

1. Préliminaire : l'atome habillé

2. L'approximation du mode spatial unique

3. La jonction Josephson retrouvée

Passage de la dynamique quantique à la dynamique classique

4. États stationnaires et bifurcation

De la dynamique quantique à la dynamique classique

On se place en point de vue de Heisenberg :

- On choisit un état initial $|\psi\rangle$ qui va rester fixé
- On fait évoluer les opérateurs $\hat{\mathcal{O}}$ décrivant les quantités physiques pertinentes, ici les composantes \hat{J}_i

$$\text{Équation d'évolution : } i\hbar \frac{d\hat{\mathcal{O}}}{dt} = [\hat{\mathcal{O}}, \hat{H}]$$

- On prend la valeur moyenne sur l'état initial : $i\hbar \frac{d\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle}{dt} = \langle [\hat{\mathcal{O}}, \hat{H}] \rangle$: retrouve-t-on la dynamique classique ?

Un exemple préliminaire : une particule de masse m en mouvement dans le potentiel $V(x)$:

$$\text{Hamiltonien } \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad \text{avec } [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

Equations de Heisenberg pour l'hamiltonien LMG

$$\hat{H} = -\hbar\Omega\hat{J}_x - \hbar\tilde{\Delta}\hat{J}_z + \frac{E_C}{2}\hat{J}_z^2 \quad i\hbar\frac{d\hat{O}}{dt} = [\hat{O}, \hat{H}]$$

Évolution des trois composantes du moment cinétique $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$:

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hat{J}_z \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{J}_x}{dt} = \tilde{\Delta}\hat{J}_y - \frac{E_C}{2\hbar} (\hat{J}_y\hat{J}_z + \hat{J}_z\hat{J}_y) \\ \frac{d\hat{J}_y}{dt} = \Omega\hat{J}_z - \tilde{\Delta}\hat{J}_x + \frac{E_C}{2\hbar} (\hat{J}_x\hat{J}_z + \hat{J}_z\hat{J}_x) \\ \frac{d\hat{J}_z}{dt} = -\Omega\hat{J}_y \end{array} \right.$$

On prend la valeur moyenne : $\langle \hat{J}_\alpha \hat{J}_\beta \rangle \approx \langle \hat{J}_\alpha \rangle \langle \hat{J}_\beta \rangle \quad ???$

Quand peut-on avoir $\langle \hat{J}_\alpha \hat{J}_\beta \rangle \approx \langle \hat{J}_\alpha \rangle \langle \hat{J}_\beta \rangle$?

Grand nombre N de particules $\Rightarrow J = \frac{N}{2} \gg 1$

On sait par ailleurs que $\hat{J}^2 = J(J+1) \approx J^2$

→ Si l'hypothèse $\langle \hat{J}_\alpha \hat{J}_\beta \rangle \approx \langle \hat{J}_\alpha \rangle \langle \hat{J}_\beta \rangle$ est vérifiée, on doit avoir $\langle J_x \rangle^2 + \langle J_y \rangle^2 + \langle J_z \rangle^2 \approx J^2$

- C'est bien le cas si on prend l'état initial $|J, M_z = \pm J\rangle$, $\alpha = x, y, z$
- Plus généralement, OK si on prend un **“état cohérent de spin”** : $|J, M_{\vec{u}} = J\rangle$ \vec{u} : vecteur unitaire quelconque
- Ne convient pas pour beaucoup d'autres classes d'états, par exemple $|J, M_z = 0\rangle$

Équations d'évolution des moyennes $\langle \hat{J}_\alpha \rangle$

$$\text{Approximation } \langle \hat{J}_\alpha \hat{J}_\beta \rangle \approx \langle \hat{J}_\alpha \rangle \langle \hat{J}_\beta \rangle \implies \begin{cases} \frac{dJ_x}{dt} = \bar{\Delta} J_y - \frac{E_C}{\hbar} J_y J_z \\ \frac{dJ_y}{dt} = \Omega J_z - \bar{\Delta} J_x + \frac{E_C}{\hbar} J_x J_z \\ \frac{dJ_z}{dt} = -\Omega J_y \end{cases}$$

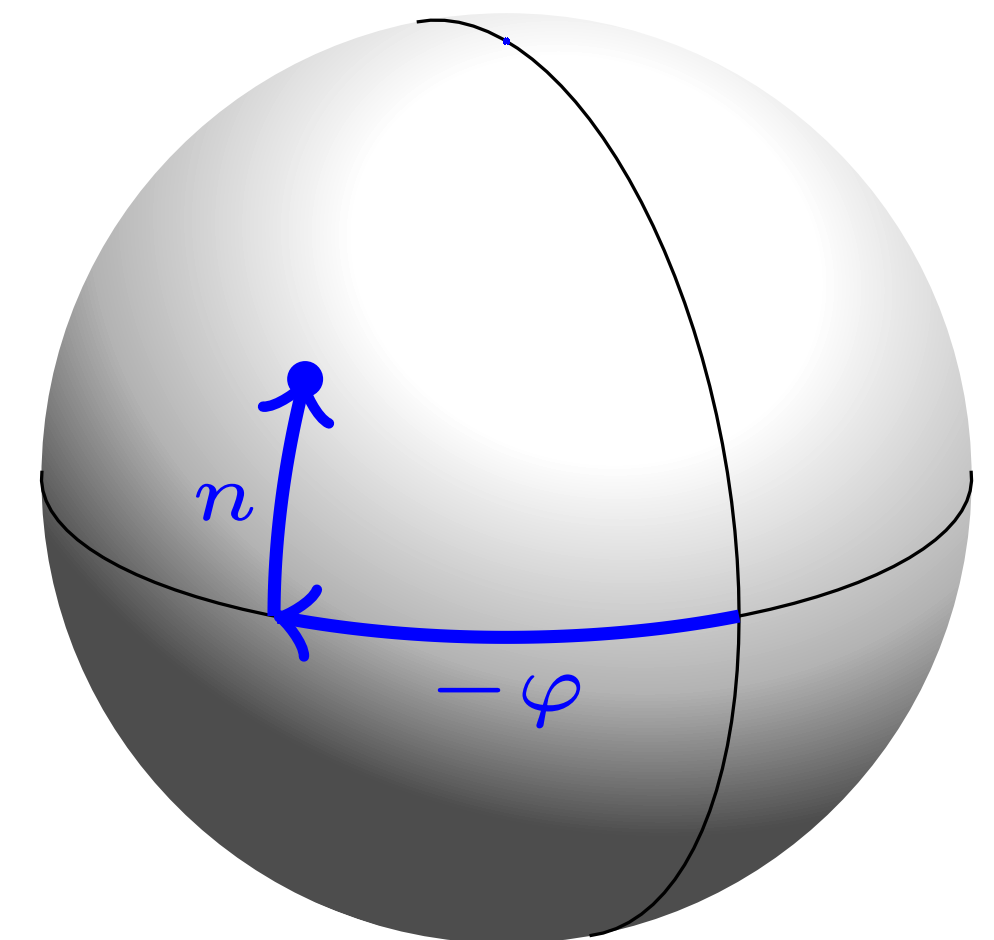
Paramétrisation du vecteur "moment cinétique moyen" $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2} (\hat{N}_a - \hat{N}_b) \implies J_z = n$$

$$J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = \frac{N^2}{4} \implies J_x^2 + J_y^2 = \frac{N^2}{4} \underbrace{\left(1 - \frac{4n^2}{N^2}\right)}_{\gamma^2(n)}$$

$$J_x = \frac{N}{2} \gamma(n) \cos \varphi \quad J_y = -\frac{N}{2} \gamma(n) \sin \varphi$$

$$|N_a = N, N_b = 0\rangle$$



$$|N_a = 0, N_b = N\rangle$$

Dictionnaire de passage entre jonctions externes et internes

jonction externe

$$E(n, \varphi) = - E_J \gamma(n) \cos \varphi + \overline{\Delta\mu} n + \frac{E_C}{2} n^2$$

Energie tunnel E_J

Potentiel chimique $\overline{\Delta\mu}$

Energie de charge
(compressibilité) E_C

jonction interne

$$\langle \hat{H}_{\text{LMG}} \rangle = - \hbar \Omega J_x - \hbar \tilde{\Delta} J_z + \frac{E_C}{2} J_z^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} J_x = \frac{N}{2} \gamma(n) \cos \varphi \\ J_z = n \end{array} \right.$$

$$= - \frac{N \hbar \Omega}{2} \gamma(n) \cos \varphi - \hbar \tilde{\Delta} n + \frac{E_C}{2} n^2$$

$N \hbar \Omega / 2$ fréquence de Rabi

$-\hbar \tilde{\Delta}$ désaccord renormalisé

E_C Interactions différentielles

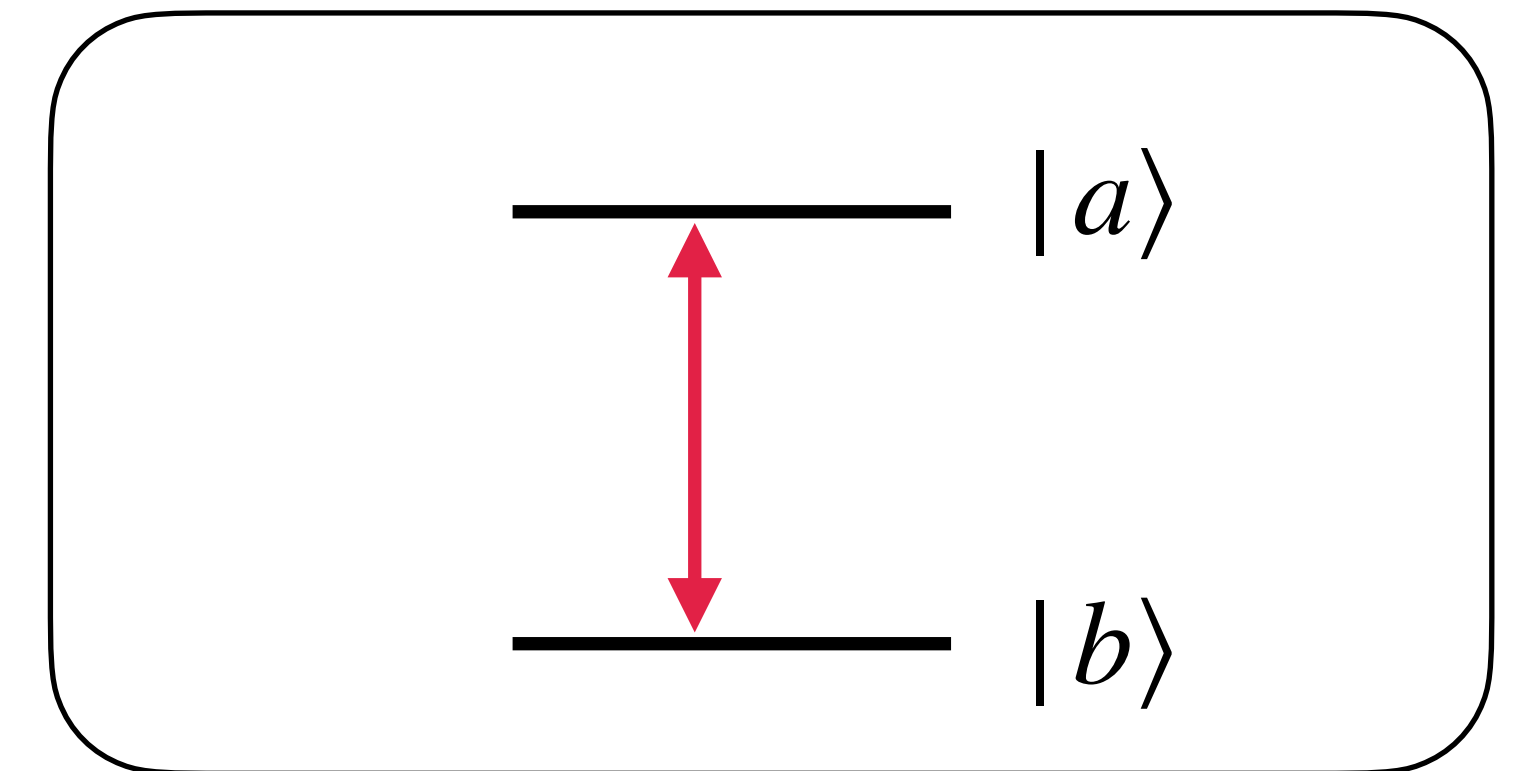
$$\mathcal{J}(g_{aa} + g_{bb} - 2g_{ab})$$

Jonction interne vs. jonction externe

$$E(n, \varphi) = - E_J \gamma(n) \cos \varphi + \frac{E_C}{2} n^2 + \dots$$

Couplage tunnel \leftrightarrow couplage cohérent $E_J = N\hbar\Omega/2$

*Exploration de régimes où E_J devient plus important
(en comparaison avec les autres paramètres du problème)*



Energie de charge $E_C = (g_{aa} + g_{bb} - 2g_{ab}) \int |\Phi|^4$

Exploration du régime $E_C < 0$ même si tous les g_{ij} sont séparément positifs

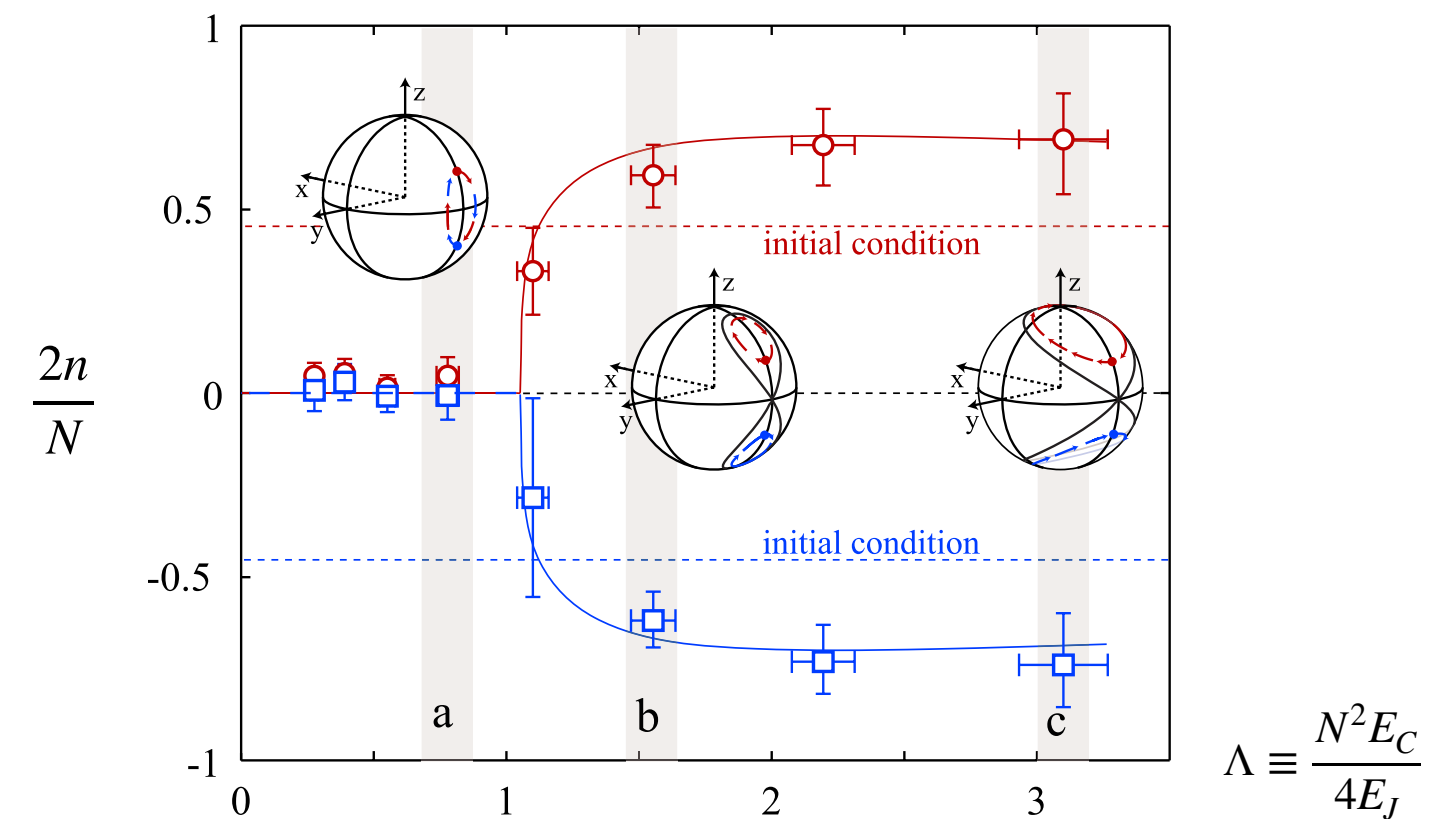
Plan du cours

1. Préliminaire : l'atome habillé

2. L'approximation du mode spatial unique

3. La jonction Josephson retrouvée

4. États stationnaires et bifurcation



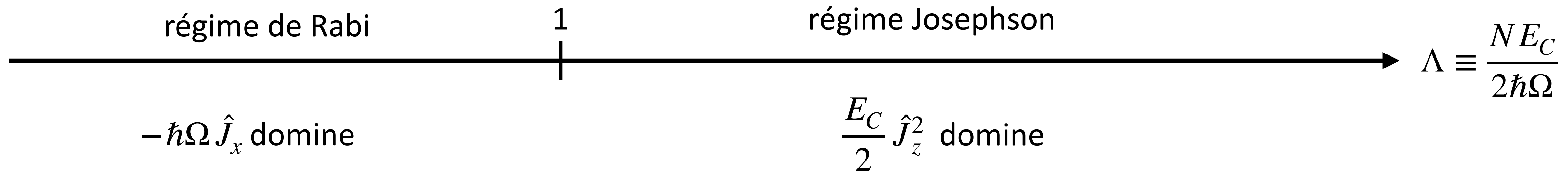
Zibold et al., PRL 105, 204101

L'hamiltonien et son état ~~fondamental~~ de plus haute énergie

On choisit pour simplifier un désaccord renormalisé $\tilde{\Delta}$ nul :

$$\hat{H} = -\hbar\Omega \hat{J}_x + \frac{E_C}{2} \hat{J}_z^2$$

Ces deux termes ne commutent pas !



état le plus haut : $|J, M_x = -J\rangle$
 énergie : $\frac{1}{2}N\hbar\Omega$

bifurcation

evol. douce

Si $E_C > 0$: état le plus haut $|J, M_z = \pm J\rangle$, énergie $\frac{N^2 E_C}{8}$

Si $E_C < 0$: état le plus haut $|J, M_z = 0\rangle$, énergie nulle

Courbes iso-énergies et bifurcation ($E_C < 0$)

$$\Lambda \equiv \frac{NE_C}{2\hbar\Omega} < 0$$

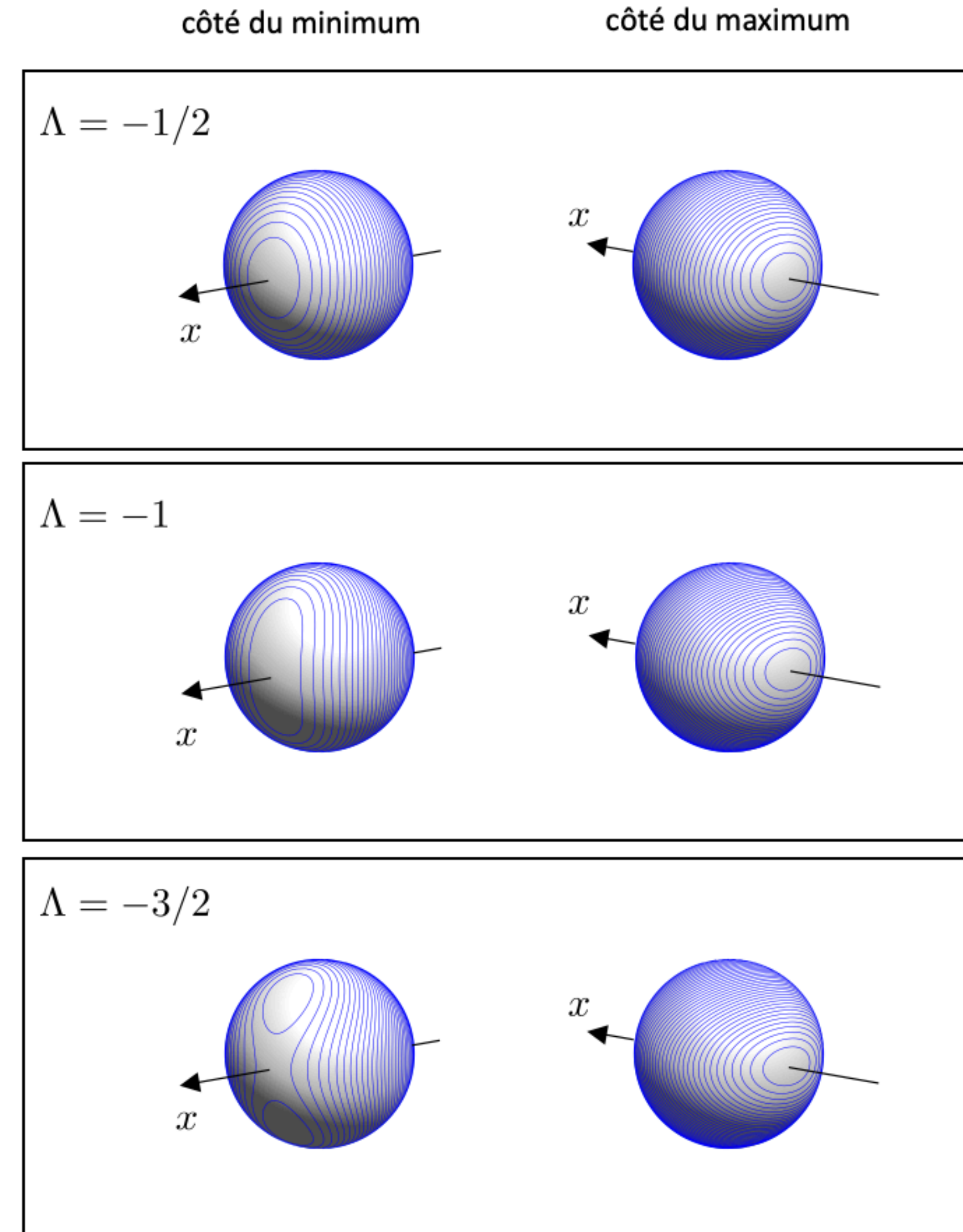
$$E(n, \varphi) = -\frac{N\hbar\Omega}{2} \gamma(n) \cos \varphi - \frac{|E_C|}{2} n^2$$

Minimum obtenu pour $\varphi = 0$

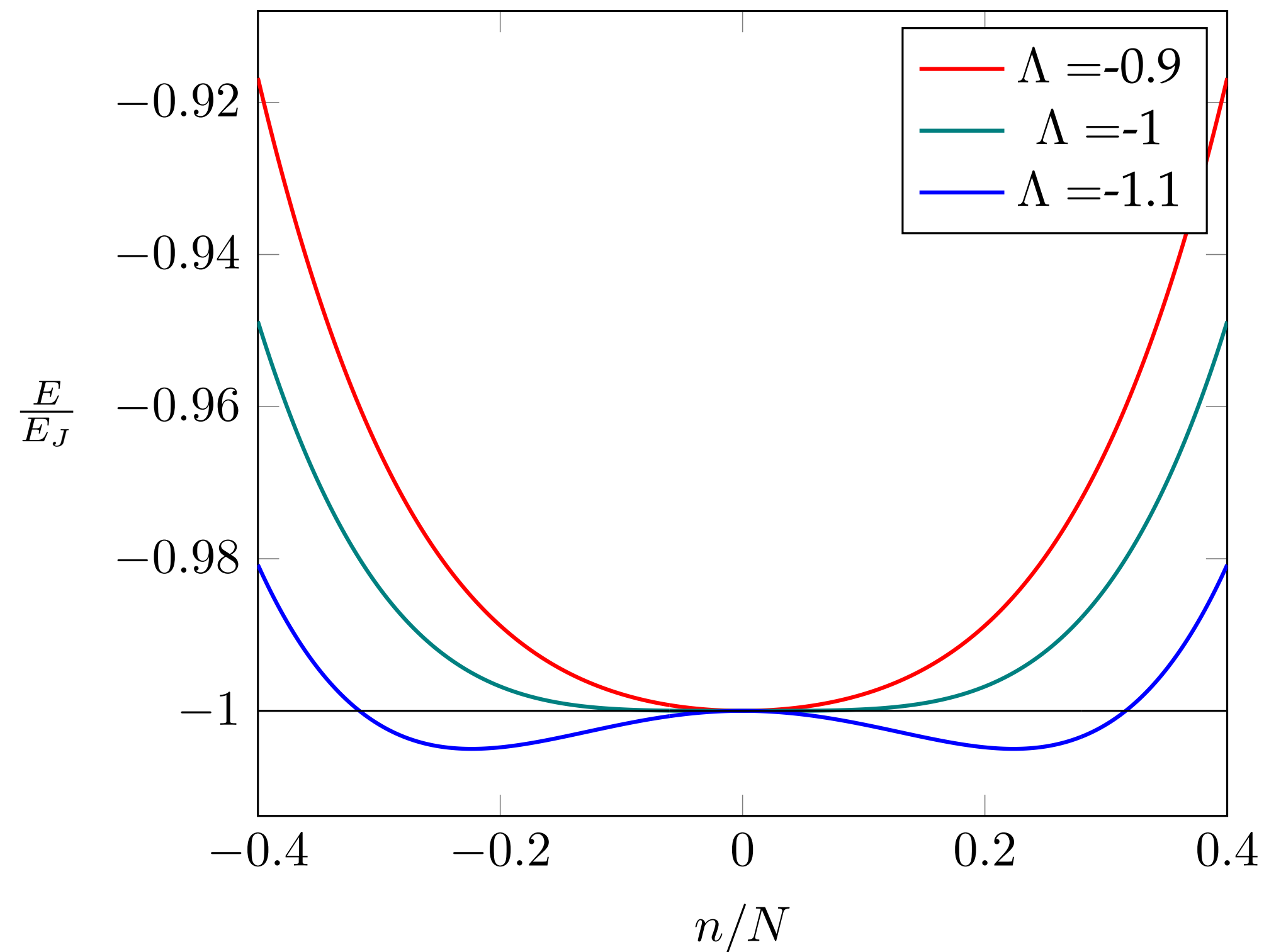
Maximum obtenu pour $\varphi = \pi$

Bifurcation du minimum pour $\Lambda = -1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } -1 < \Lambda < 0 : \text{ minimum en } n = 0 \\ \text{si } \Lambda < -1 : \text{ minimum en } n = \pm \frac{N}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}} \end{array} \right.$$



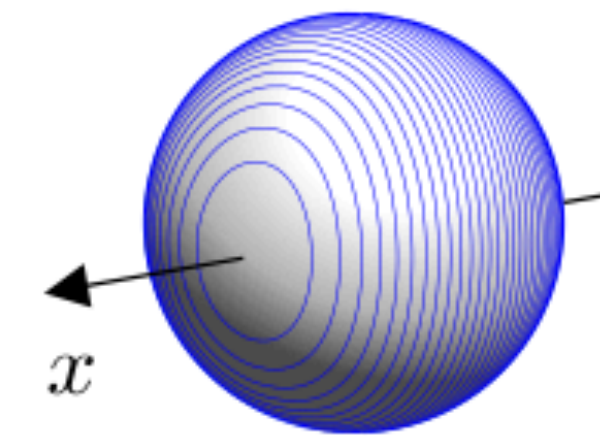
Transition para-ferromagnétisme pour $E_C < 0$



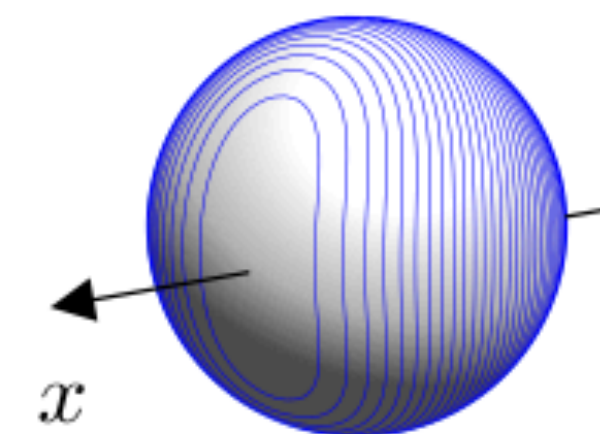
Brisure de symétrie Z_2 due à
la compétition entre J_x et J_z^2

Transition de phase pour une jonction étendue
étudiée dans le groupe de Trento

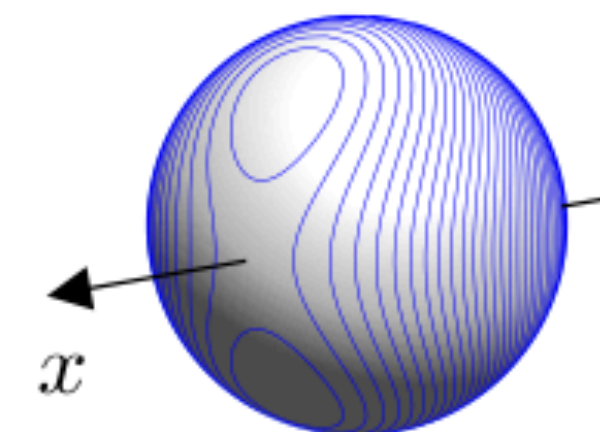
$\Lambda = -1/2$



$\Lambda = -1$



$\Lambda = -3/2$



Courbes iso-énergies et bifurcation ($E_C > 0$)

$$\Lambda \equiv \frac{NE_C}{2\hbar\Omega} > 0$$

$$E(n, \varphi) = -\frac{N\hbar\Omega}{2} \gamma(n) \cos \varphi - \frac{|E_C|}{2} n^2$$

Minimum obtenu pour $\varphi = 0$

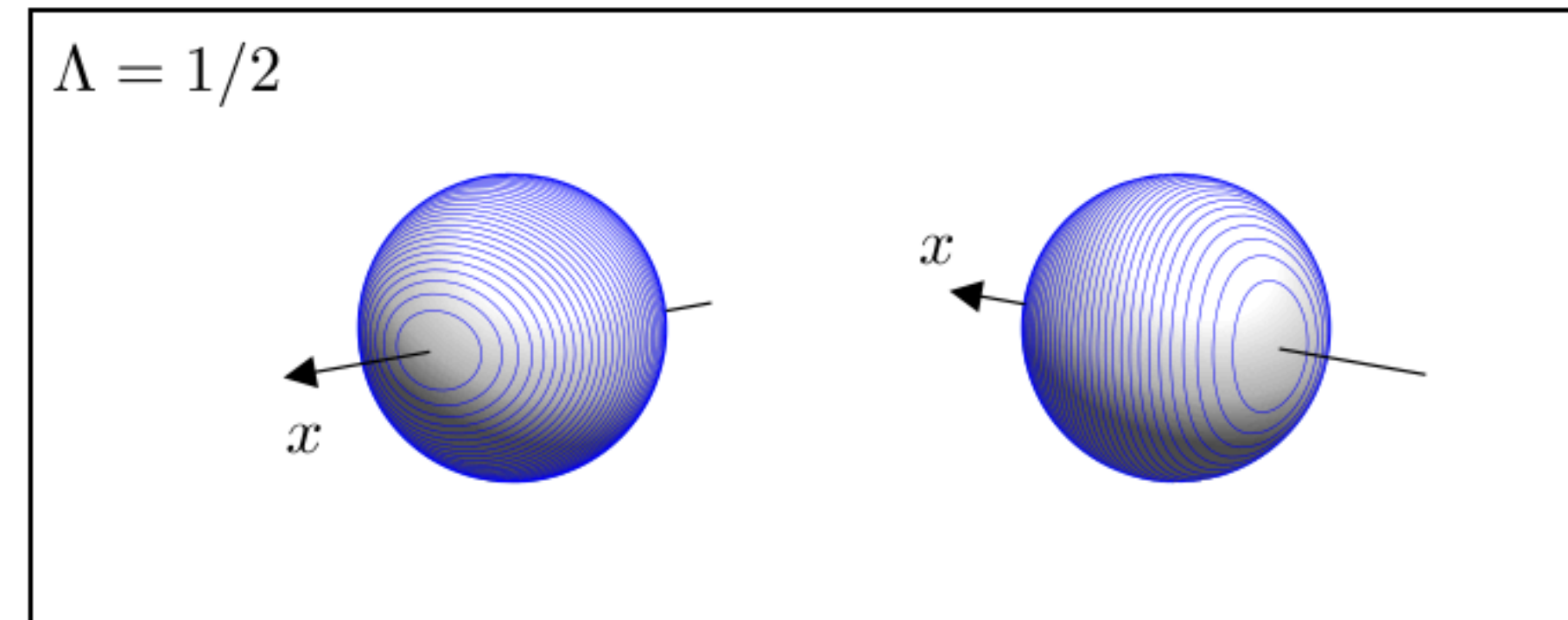
Maximum obtenu pour $\varphi = \pi$

Bifurcation du maximum pour $\Lambda = 1$

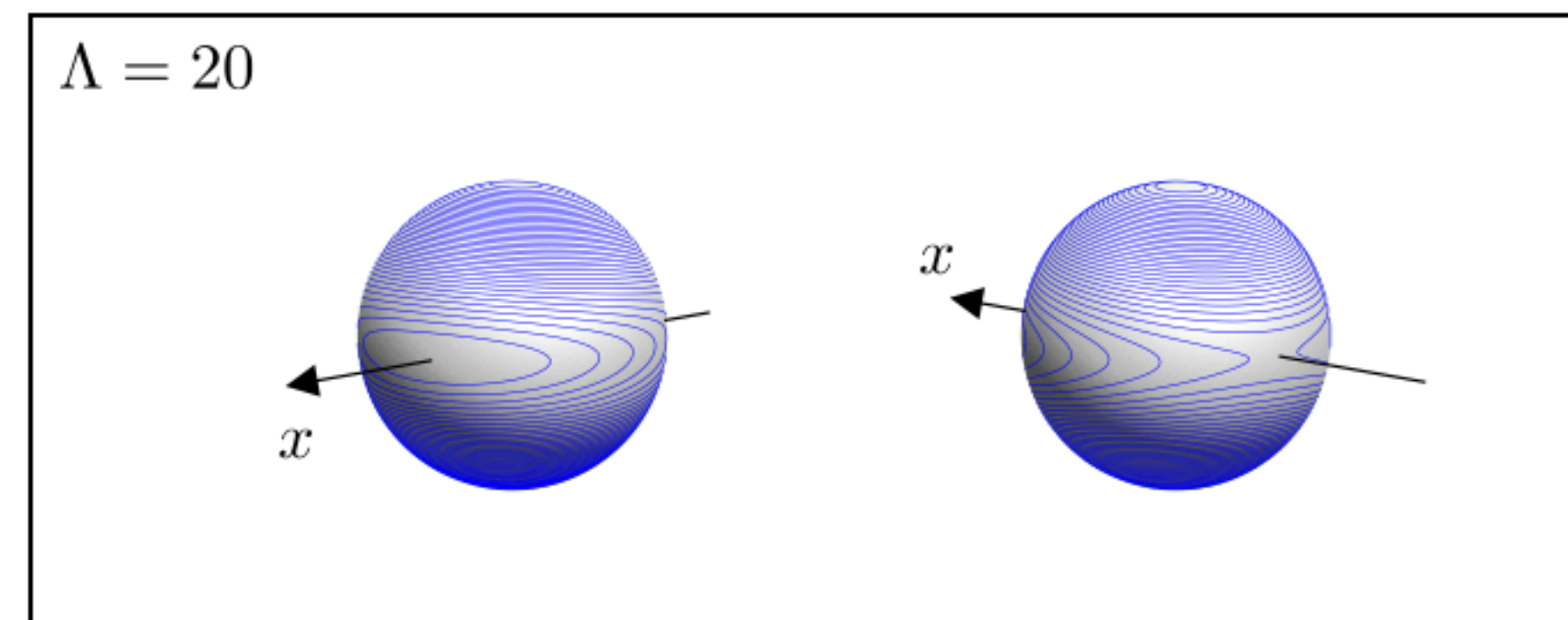
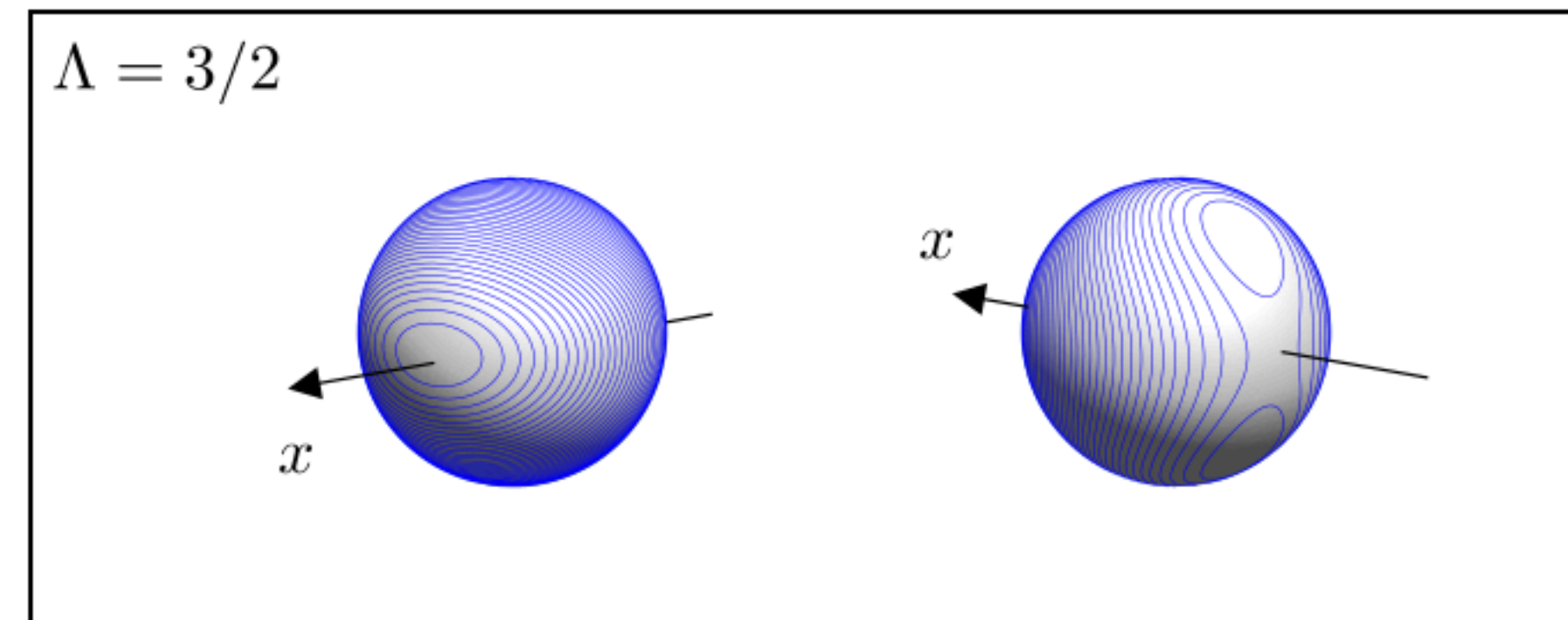
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } 0 < \Lambda < 1 : \text{maximum en } n = 0 \\ \text{si } 1 < \Lambda : \text{maximum en } n = \pm \frac{N}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}} \end{array} \right.$$

côté du minimum

côté du maximum



Rabi



Josephson

La dynamique de la jonction retrouvée ($E_C > 0$)

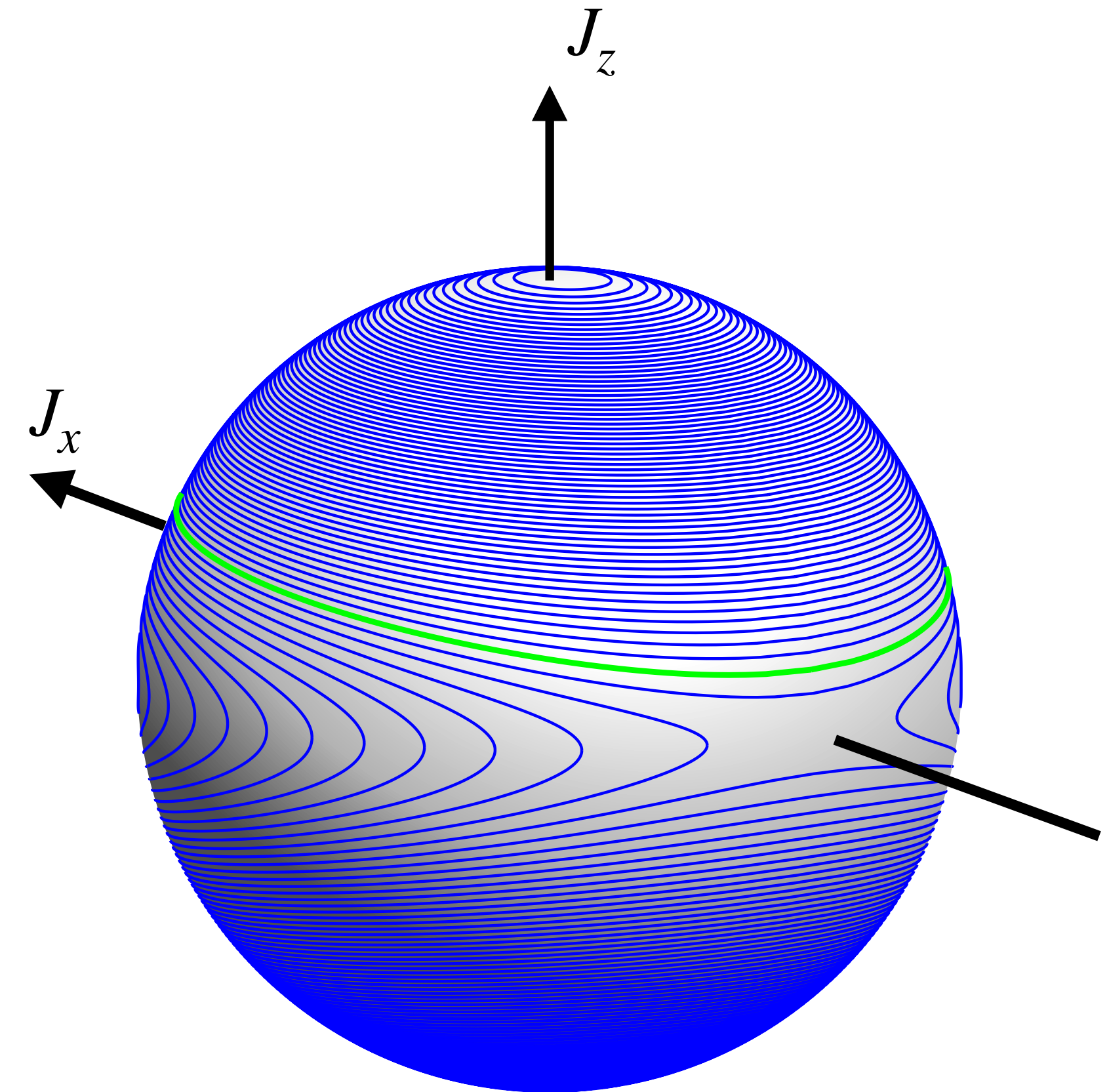
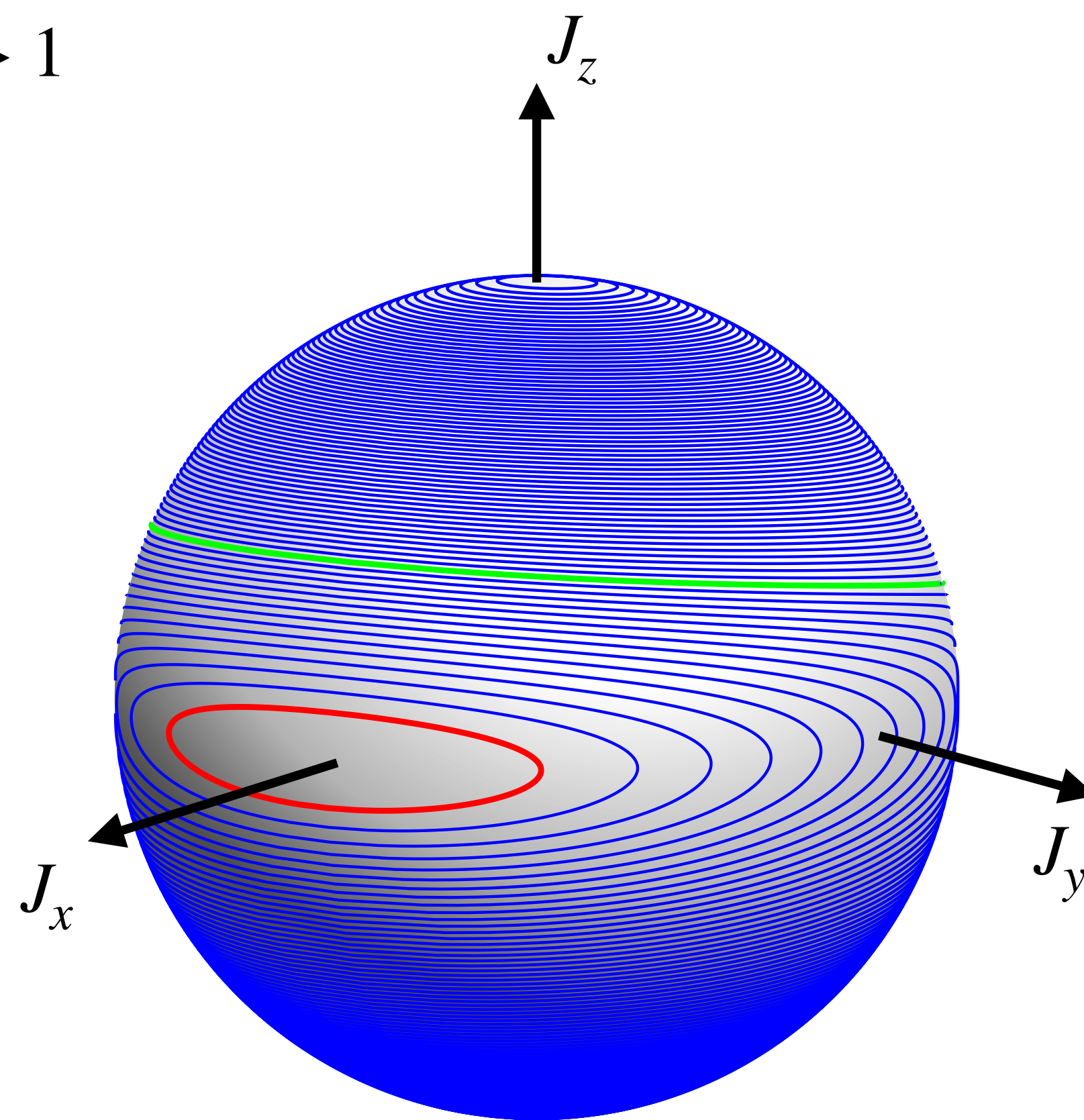
Régime Josephson $\Lambda \equiv \frac{N^2 E_C}{4E_J} \gg 1$

ici $\Lambda = 20$

Auto-piégeage

Oscillation plasma

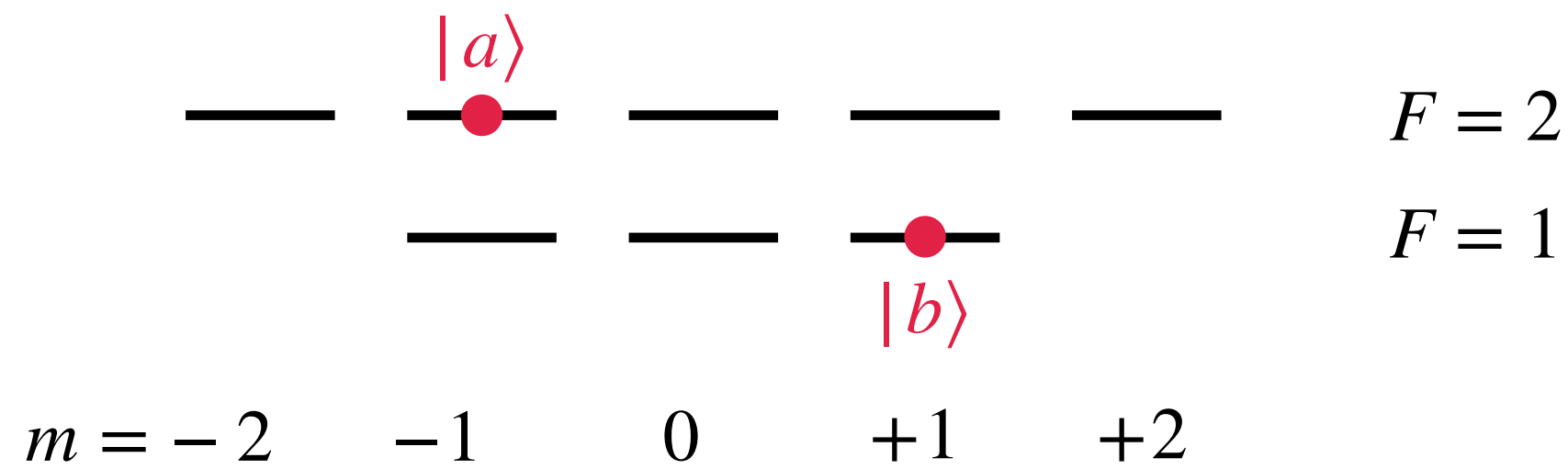
+ états comprimés
(cours 5)



Première mise en évidence ($E_C > 0$)

Zibold et al., PRL 105, 204101
[groupe de M. Oberthaler, Heidelberg]

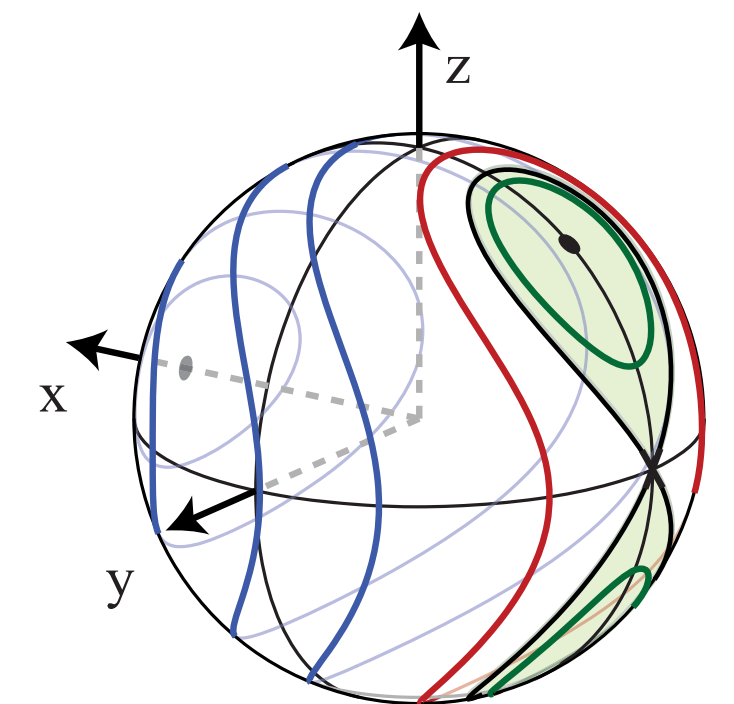
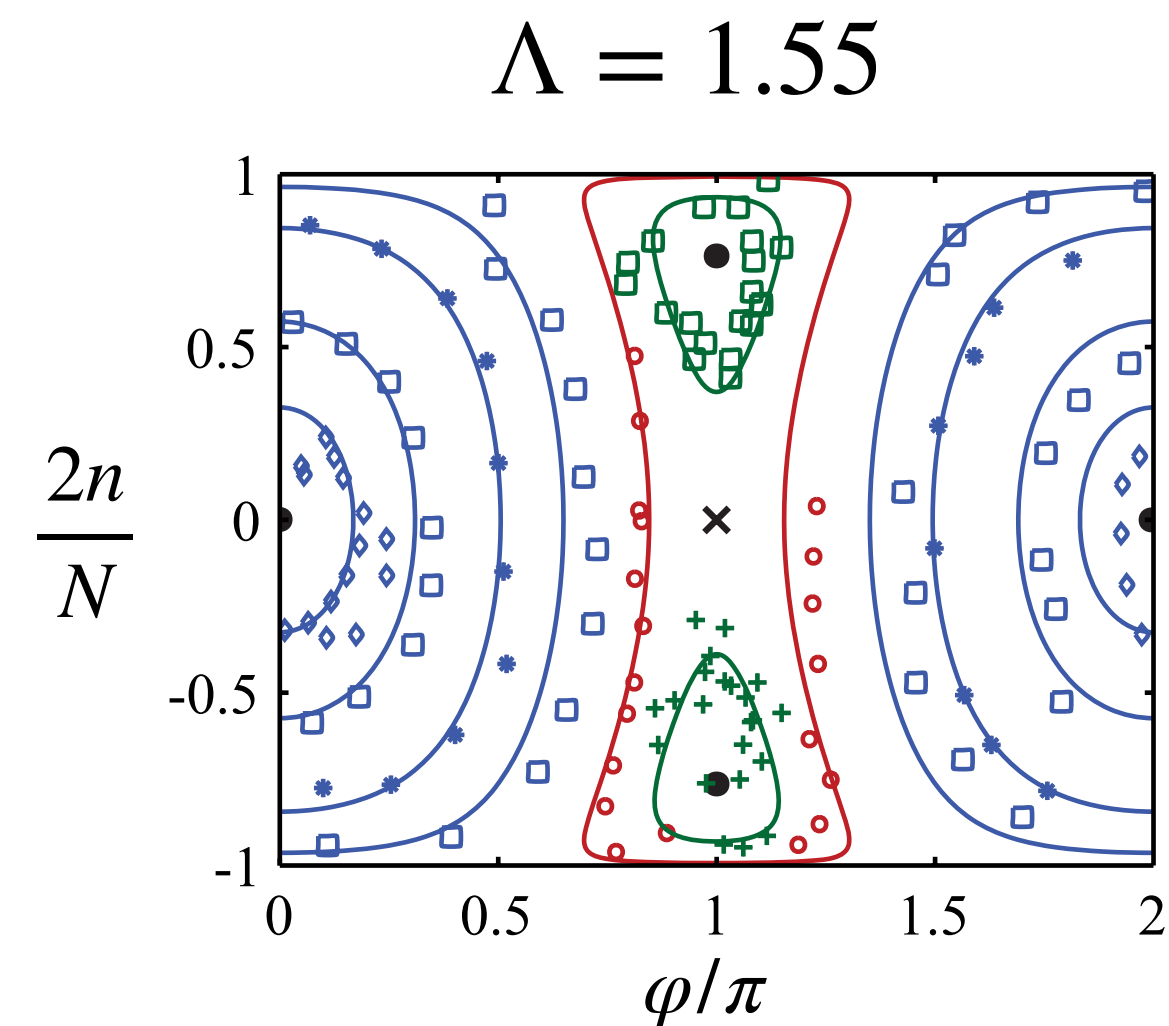
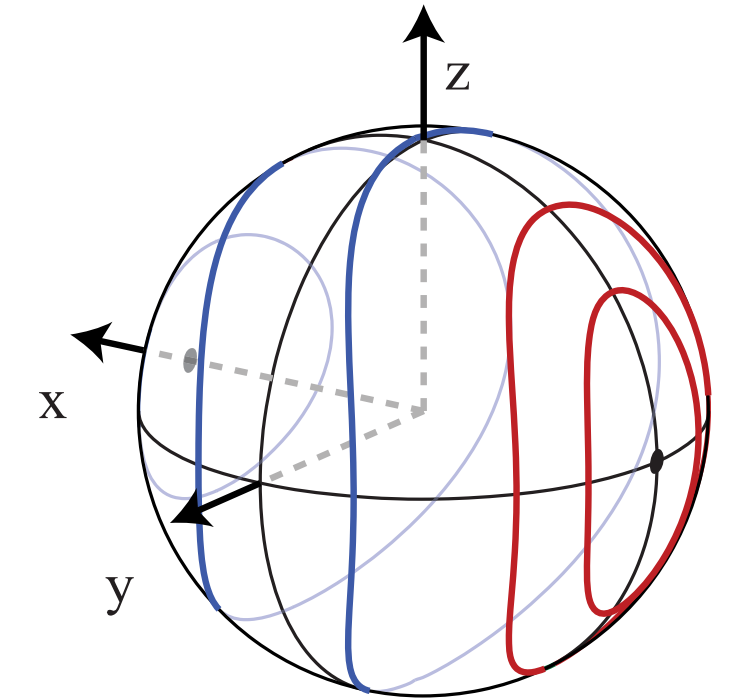
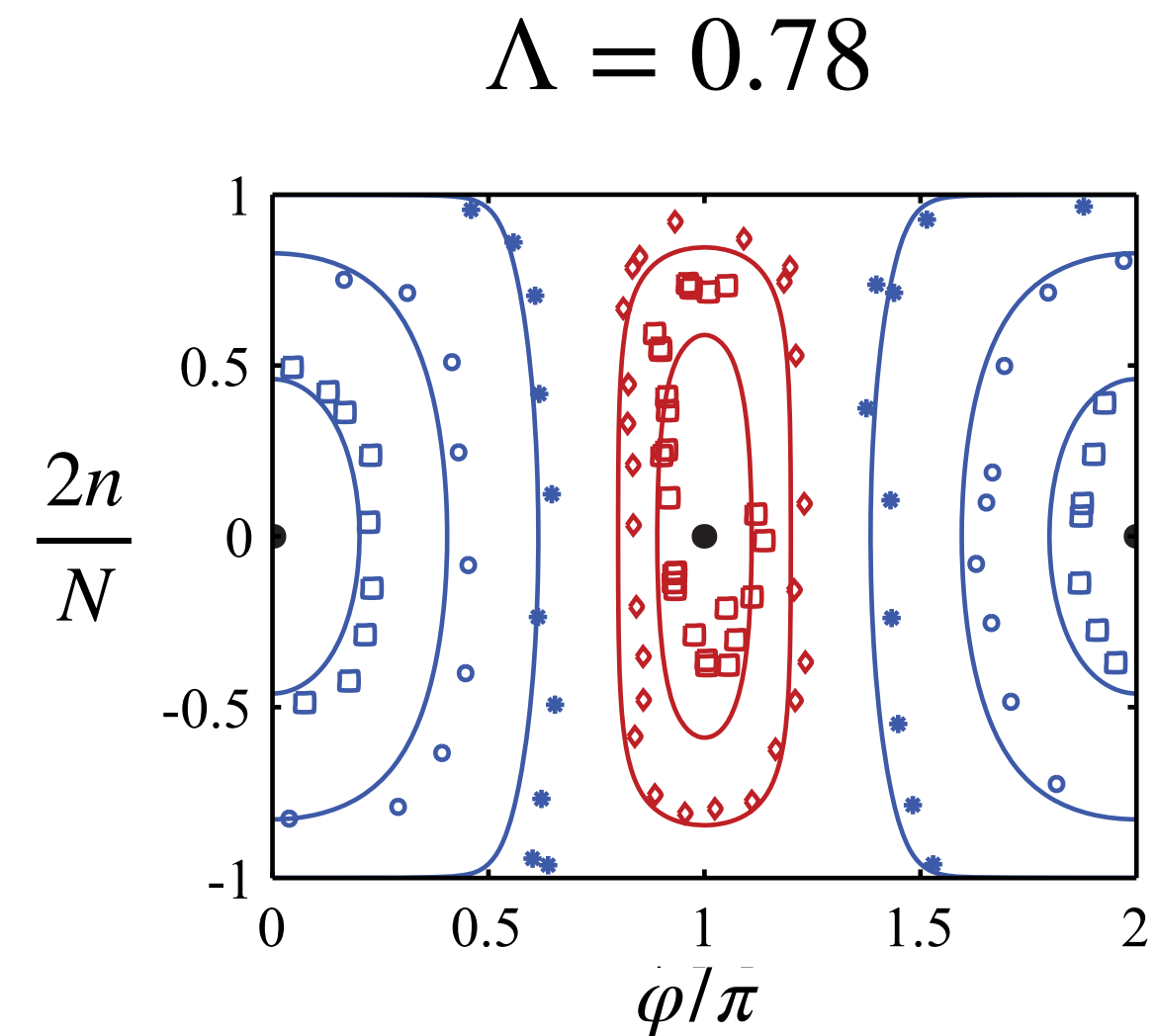
500 atomes de ^{87}Rb dans un piège fortement confinant



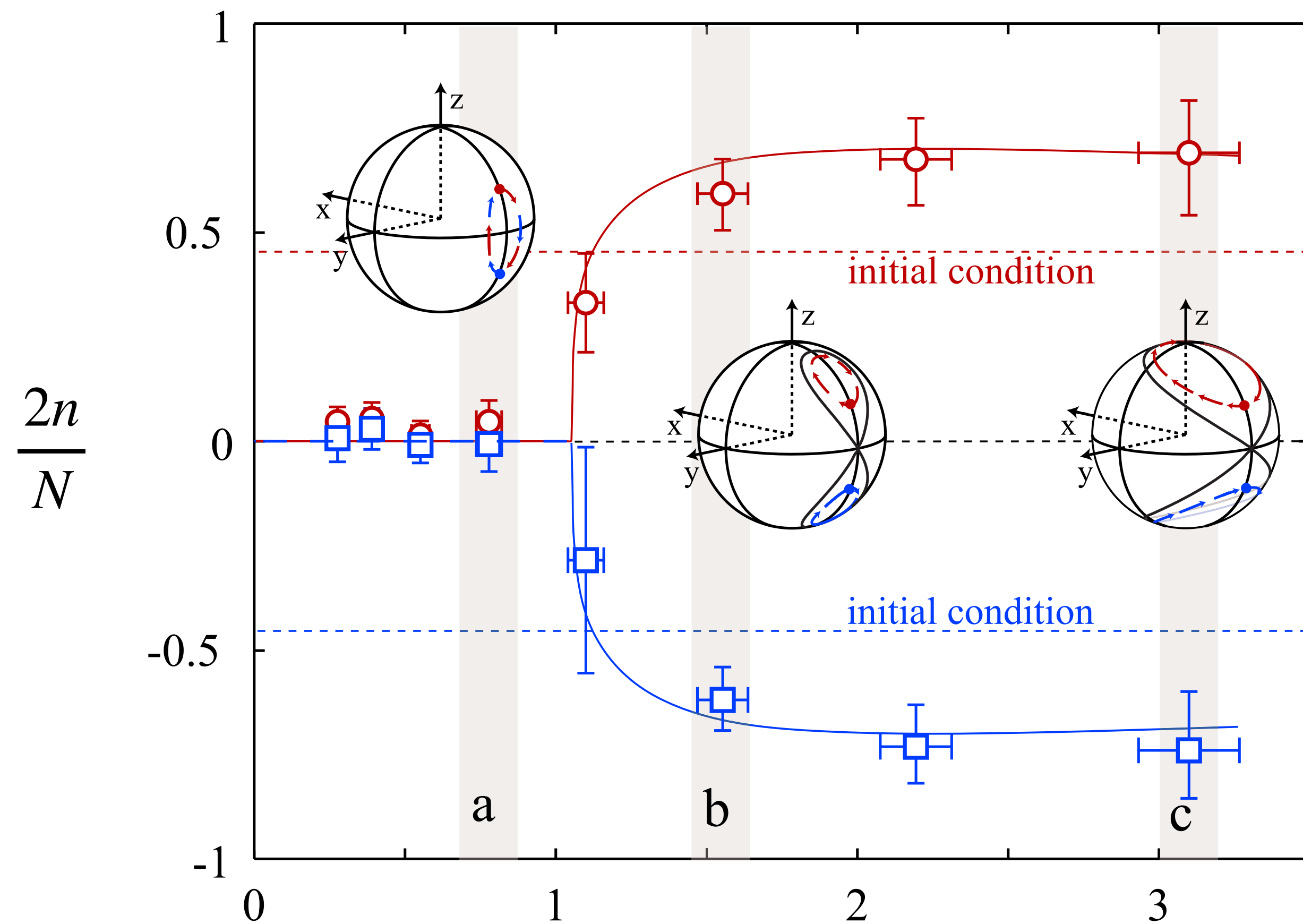
Préparation des atomes en un point donné de la sphère de Bloch : état cohérent de spin

Après un temps d'évolution t , on mesure le déséquilibre n ou la phase relative φ

$$\Lambda \equiv \frac{NE_C}{2\hbar\Omega}$$



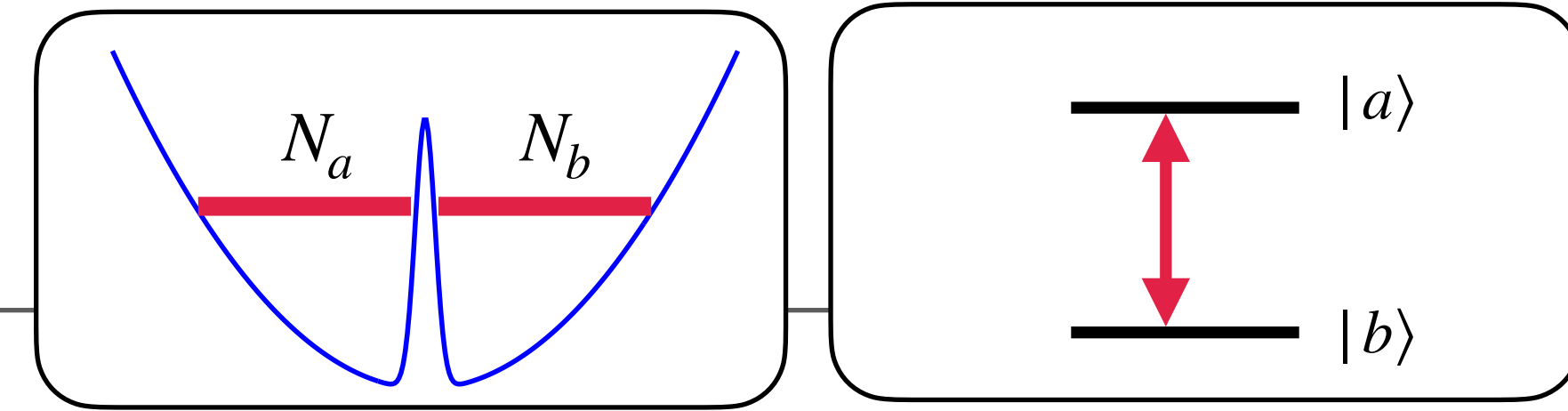
Recherche des points stationnaires par moyenne d'une trajectoire $\{n, \varphi\}$



$$E_C > 0$$

$$\Lambda \equiv \frac{NE_C}{2\hbar\Omega}$$

Conclusions



Extension du concept de jonction Josephson à des degrés de liberté internes

Utile pour ^3He liquide superfluide et pour les gaz atomiques ultrafroids

Paramétrisation du problème en terme de dynamique d'un grand moment cinétique ($J = N/2$)

Représentation de Schwinger

Hamiltonien quantique de la jonction $\hat{H} = -\hbar\Omega\hat{J}_x + \frac{E_C}{2}\hat{J}_z^2 + \dots$ (LMG)

La jonction usuelle retrouvée dans l'approximation $\langle\hat{J}_\alpha\hat{J}_\beta\rangle \approx \langle\hat{J}_\alpha\rangle\langle\hat{J}_\beta\rangle$: états cohérents de spin

Que se passe-t-il pour des états de spin tels que l'approximation classique n'est plus valable ?

L'état fondamental lui-même peut-il être non-classique ?