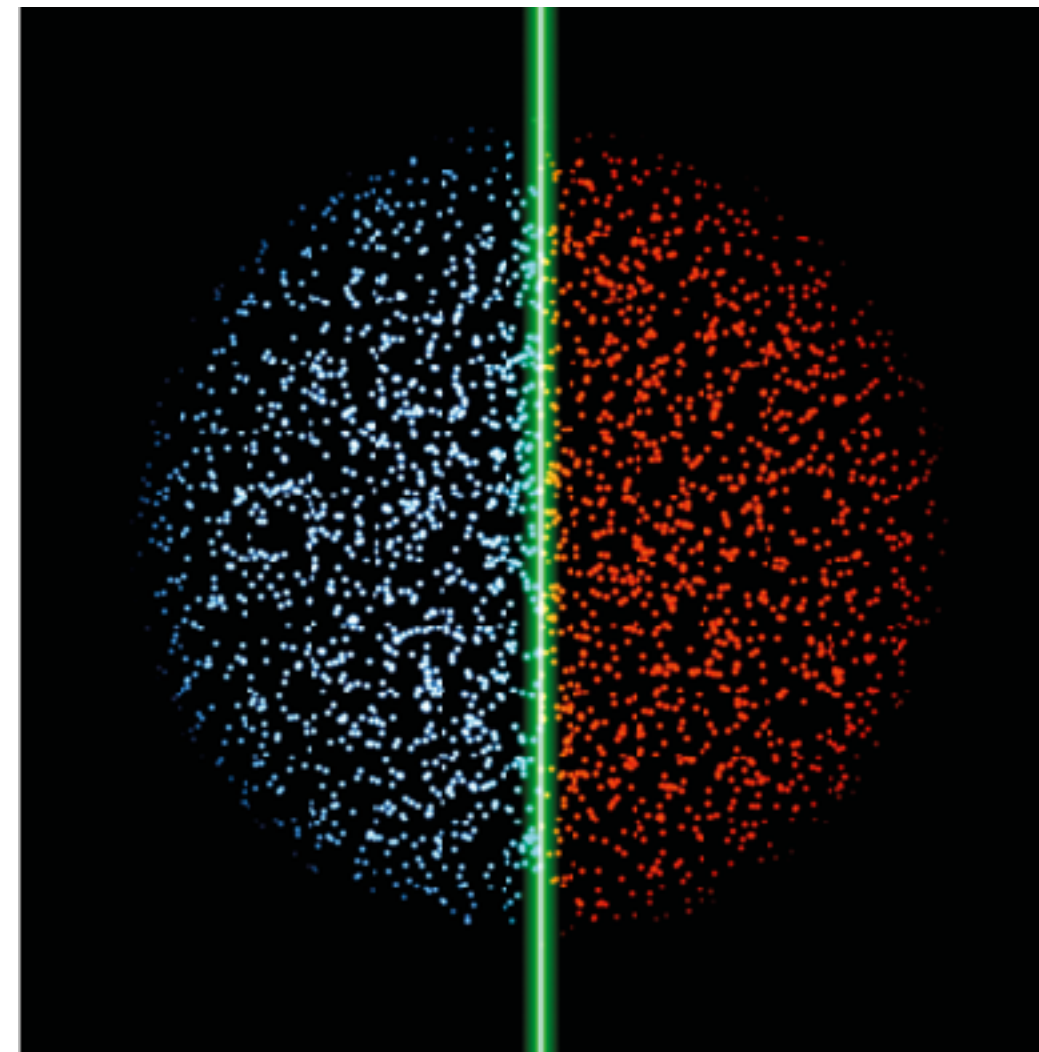


Chaire *Atomes et rayonnement*, cours 2025-26  
Fluides quantiques couplés et jonctions Josephson

Cours 4 : Les jonctions atomiques internes



diapositives

notes de cours



# Séminaires

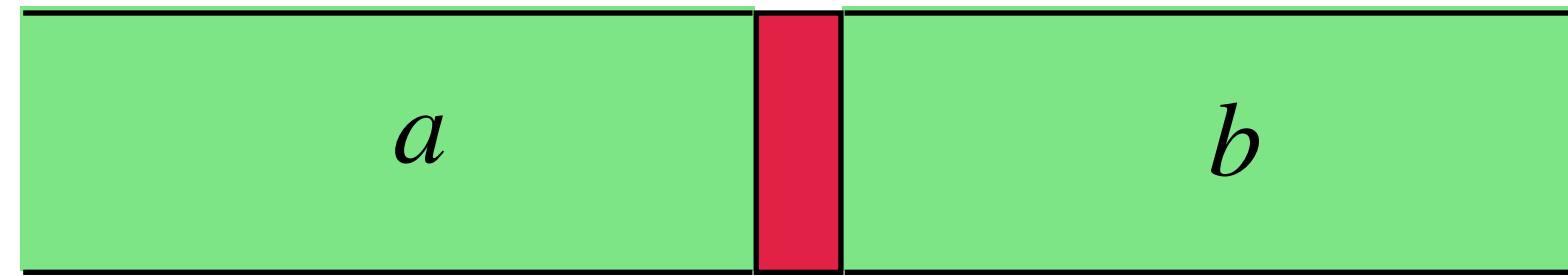
---

Aujourd'hui : Benoît Vermersch, Quobly & Université Grenoble Alpes  
*Observing the quantum Mpemba effect in a quantum processor*

Vendredi 19 juin : Klaus Mølmer, Københavns Universitet & Niels Bohr Institute, Copenhagen  
*Sensing with quantum trajectories*

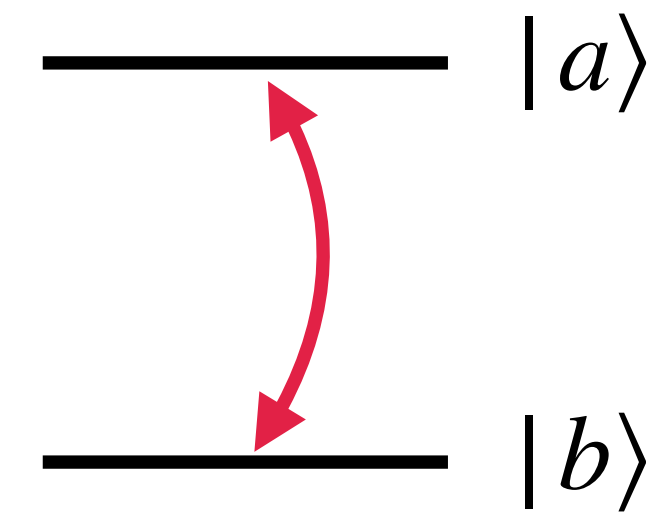
Vendredi 26 juin : Eleni Diamanti, LIP6 Sorbonne Université  
*Ressources et applications des réseaux quantiques*

# Jonctions externes vs. jonctions internes



$a, b$  : états externes

$$\psi(x, t) = \alpha_a(t)\Phi_a(x) + \alpha_b(t)\Phi_b(x)$$



états internes (par exemple le spin)

$$|\psi(t)\rangle = \alpha_a(t)|a\rangle + \alpha_b(t)|b\rangle$$

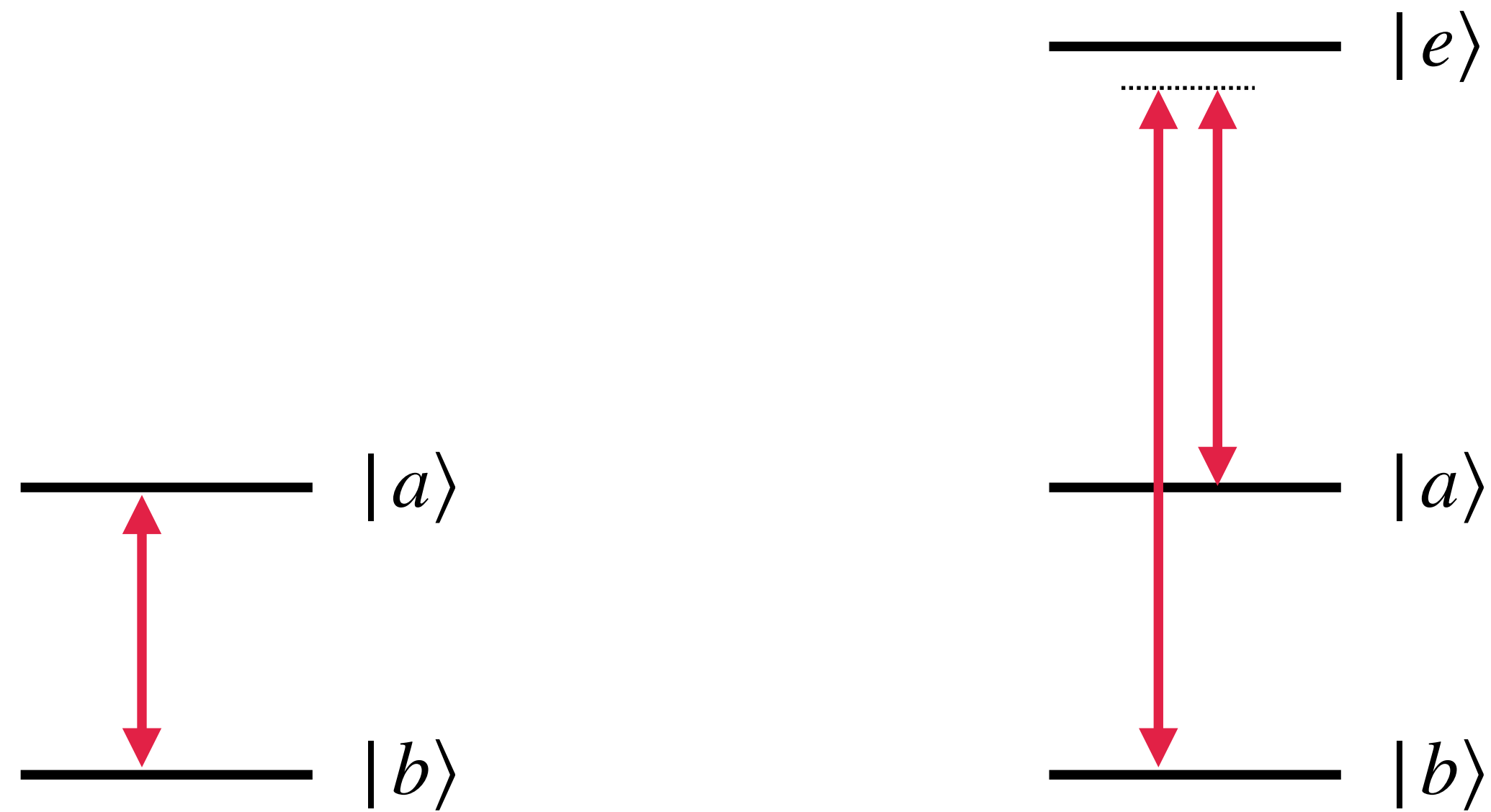
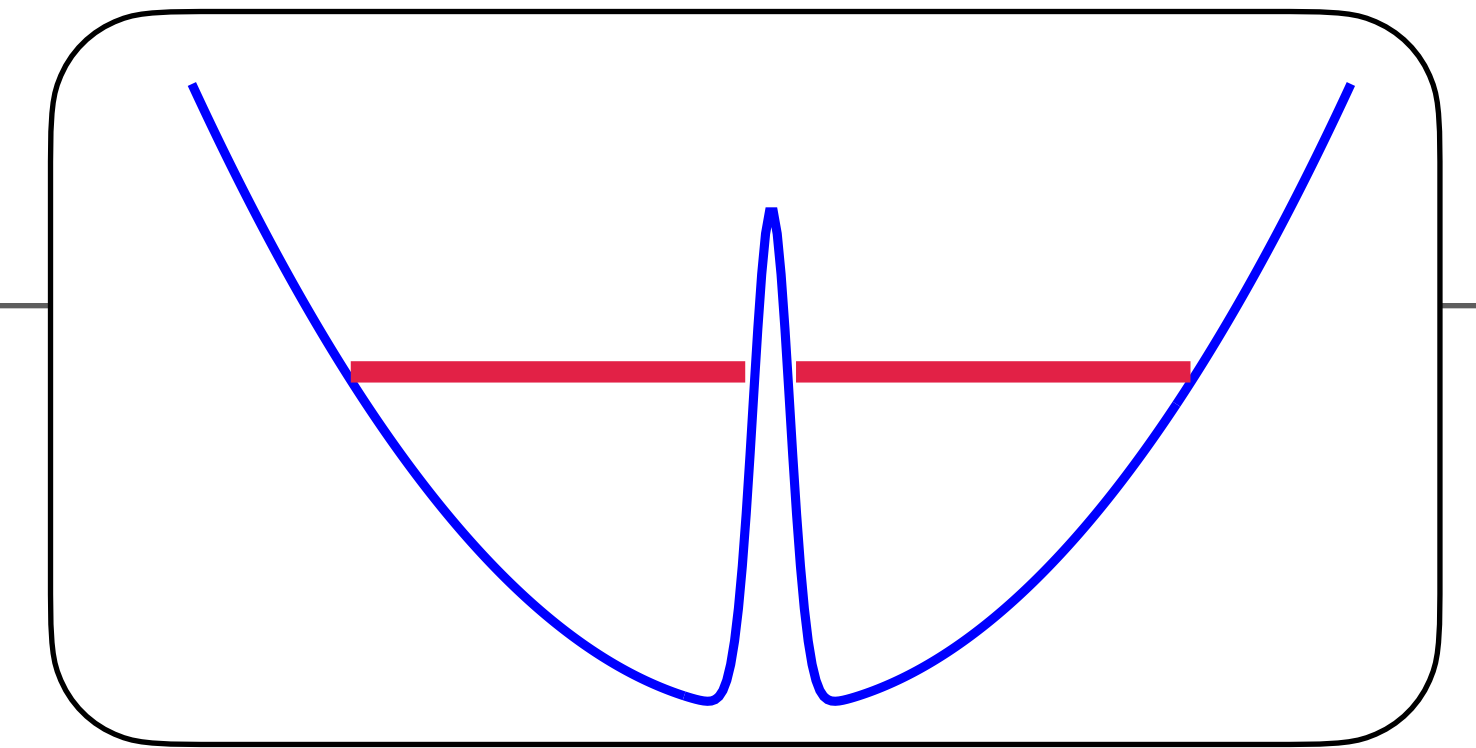
*Les atomes sont tous localisés  
dans la même région spatiale*

1966 : proposition initiale de Leggett, basée sur un modèle de supraconducteur à deux bandes

1971-72 : découverte de la superfluidité de  $^3\text{He}$  (Osheroff, Lee & Richardson)

1973-74 : analyse des différentes phases du liquide par Leggett, à partir des anomalies d'expériences de RMN expliquées en termes d'effet Josephson interne

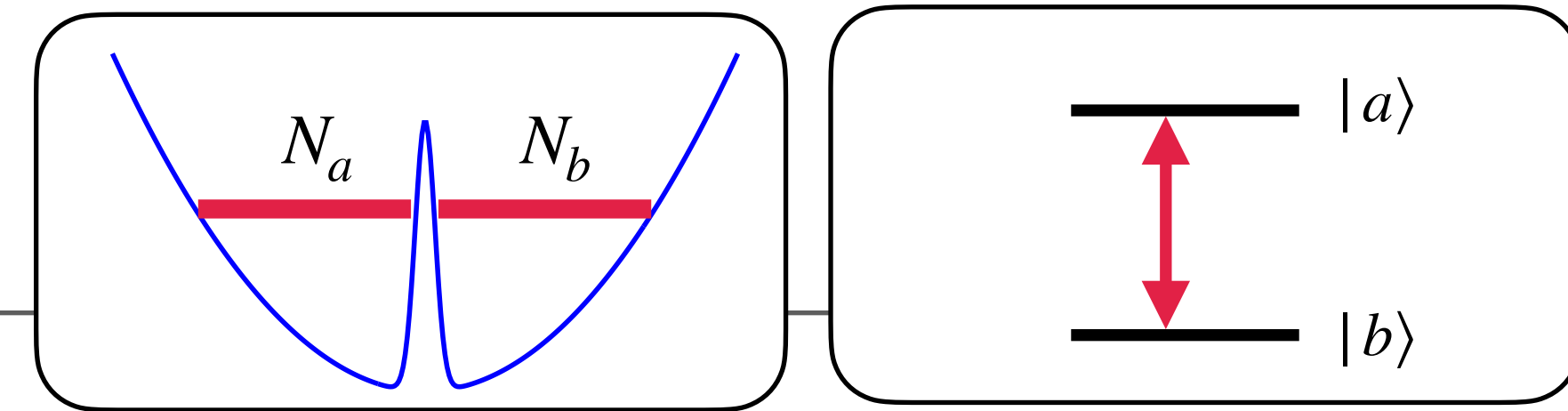
# Transposition à des gaz d'atomes froids



Différences potentiellement importantes avec une jonction externe :

- Le couplage tunnel, caractérisé par l'énergie  $E_J$ , peut être grand
- L'énergie de charge  $E_C$ , qui dépend des interactions entre atomes, va faire intervenir les trois types d'interaction  $a - a$ ,  $b - b$ ,  $a - b$

# Régime Josephson et régime de Rabi



$$N_a(t) = \bar{N}_a + n(t)$$

$$N_b(t) = \bar{N}_b - n(t)$$

$$\bar{\Delta\mu} = \mu(\bar{N}_a) - \mu(\bar{N}_b)$$

Énergie de la jonction : 
$$E(n, \varphi) = \bar{\Delta\mu} n + \frac{E_C}{2} n^2 - E_J \gamma(n) \cos \varphi$$

$$\gamma(n) \equiv \sqrt{\left(1 + \frac{n}{\bar{N}_a}\right) \left(1 - \frac{n}{\bar{N}_b}\right)}$$

Ca particulier simple :  $N_a = N_b = N/2$  et  $\gamma(n) = \sqrt{1 - 4n^2/N^2}$

*oscillation plasma au voisinage de l'état fondamental*



Les jonctions internes permettent d'étudier plus facilement la transition entre les deux régimes

*Possible bifurcation de l'état fondamental de la jonction à la transition*

# Plan du cours

## 1. Préliminaire : l'atome habillé

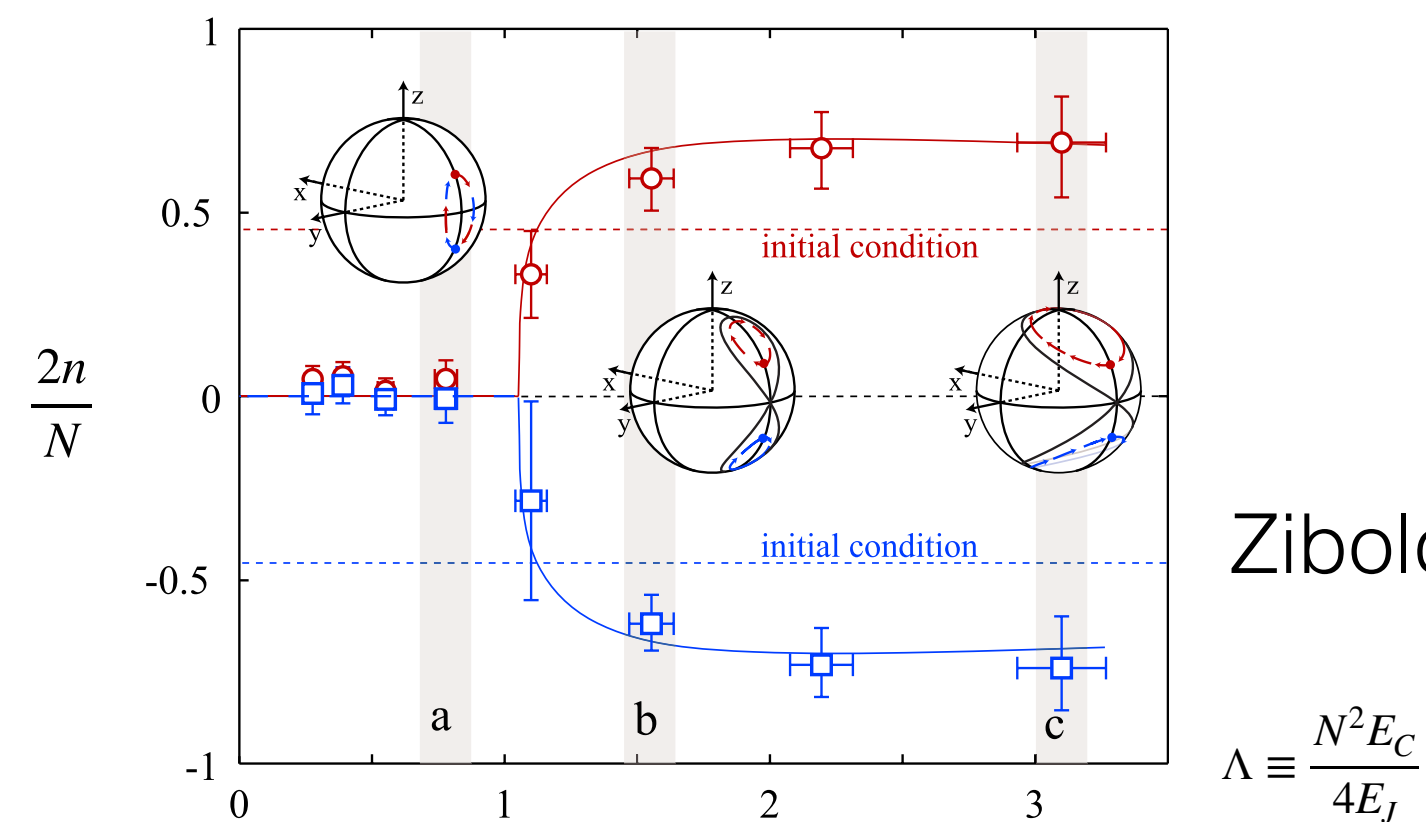
*Système à deux niveaux couplé à un champ monochromatique quasi-résonnant*

## 2. L'approximation du mode spatial unique

*Représentation de Schwinger et algèbre d'un grand moment cinétique*

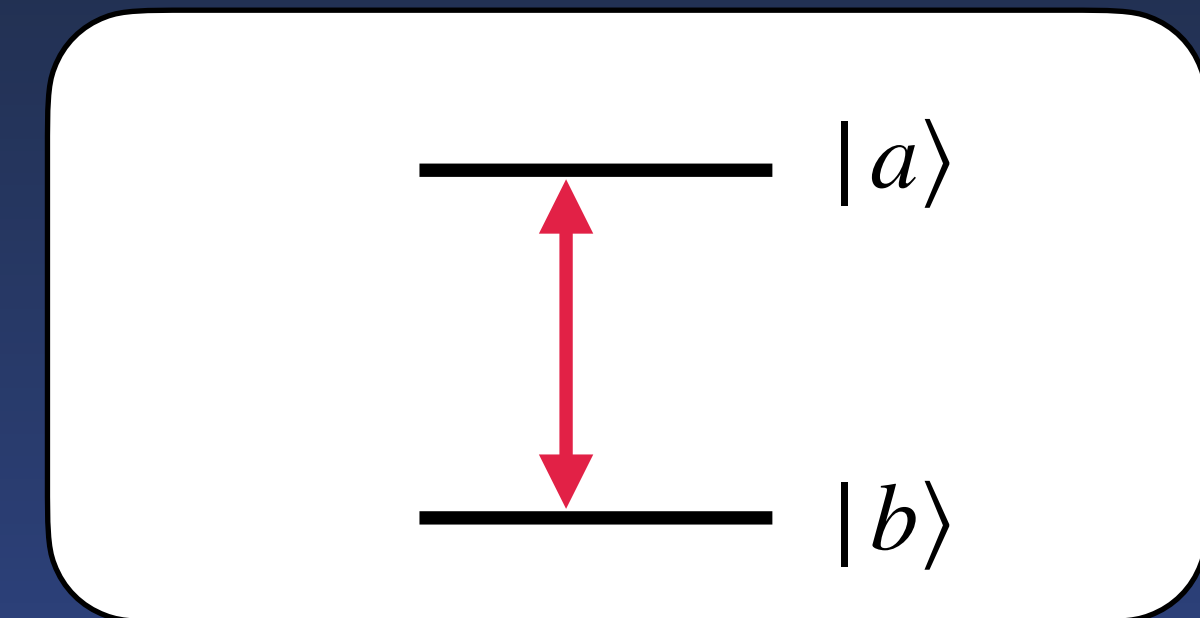
## 3. La jonction Josephson retrouvée

## 4. États stationnaires et bifurcation



Zibold et al., PRL 105, 204101

## Couplage d'un atome unique avec un champ monochromatique



- Fréquence de Rabi, désaccord
- L'approximation du champ tournant (RWA, *rotating wave approximation*)
- Hamiltonien effectif indépendant du temps
- Etats "habillés"

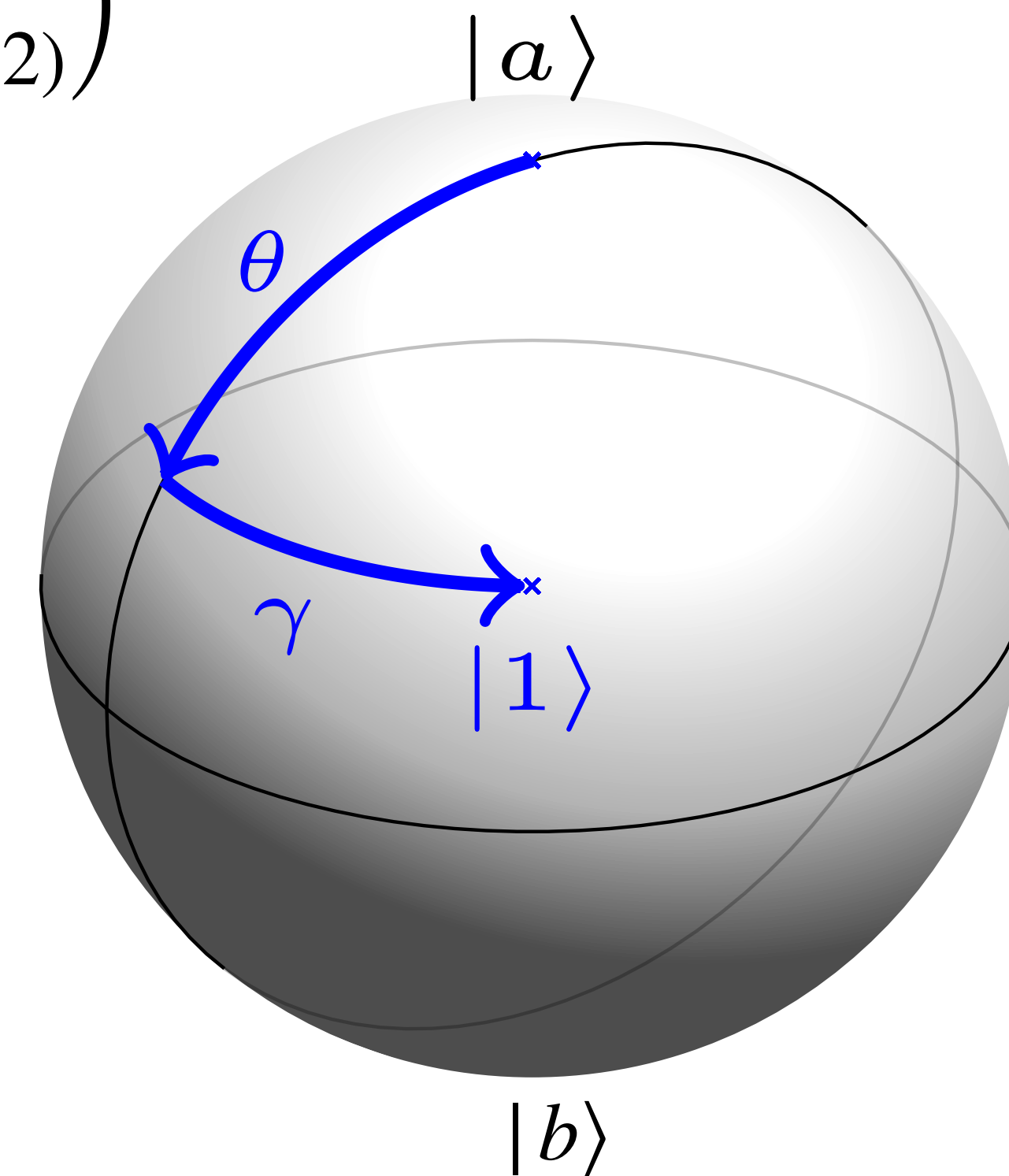
# Sphère de Bloch et états habillés

Couplage en  $\cos(\omega t)$  : états habillés  $|1\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$   $|2\rangle = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$

Couplage en  $\cos(\omega t + \gamma)$  : états habillés  $|1\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\gamma} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$   $|2\rangle = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ e^{i\gamma} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$

Représentation sur une sphère de rayon 1 par les deux points diamétralement opposés :

- Colatitude  $\theta$ , longitude  $\gamma$  pour  $|1\rangle$
- Colatitude  $\pi - \theta$ , longitude  $\gamma + \pi$  pour  $|2\rangle$



*Pour une excitation résonante ( $\Delta = 0$ ):  $\theta = \pi/2 \rightarrow$  les états habillés sont sur l'équateur*

# Plan du cours

---

1. Préliminaire : l'atome habillé

2. L'approximation du mode spatial unique

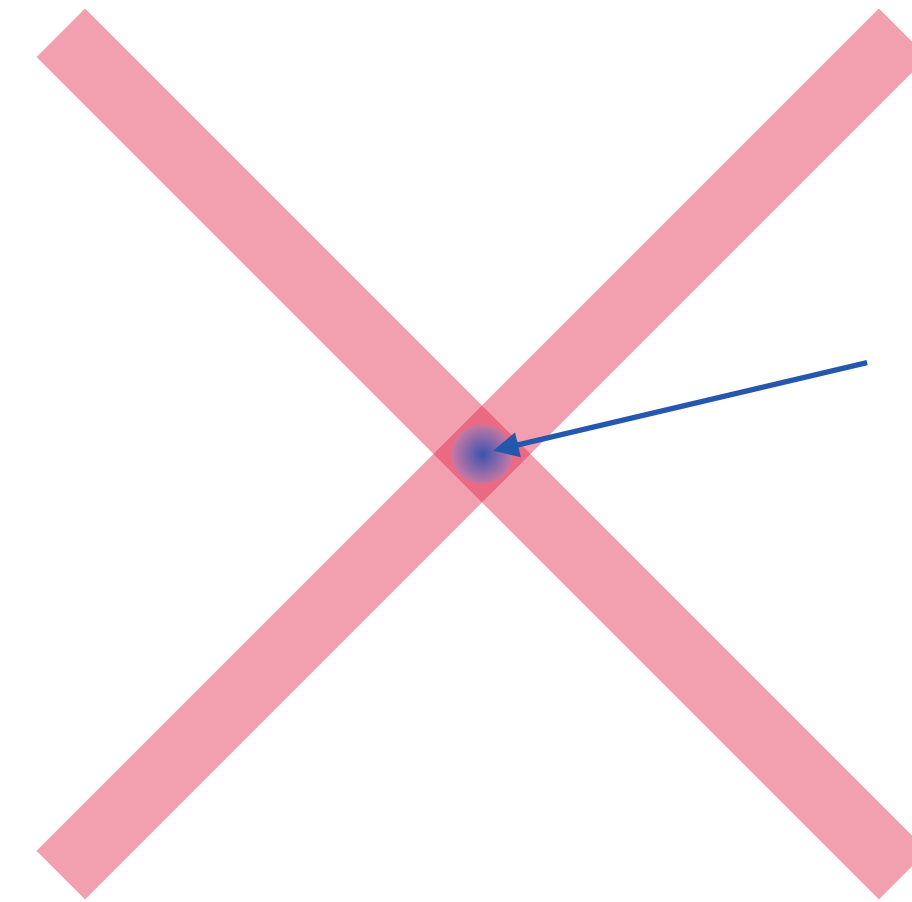
*Représentation de Schwinger et algèbre d'un grand moment cinétique*

3. La jonction Josephson retrouvée

4. États stationnaires et bifurcation

# Le mode spatial unique

Gaz confiné dans un piège de grande raideur



fonction d'onde  $\Phi(\mathbf{r})$

$$\int |\Phi(\mathbf{r})|^2 d^3r = 1$$

Les fréquences d'oscillations  $\omega_i$  ( $i = x, y, z$ ) sont supposées telles que  $\hbar\omega_i \gg \mu_s$

$\mu_s$  : potentiel chimique “de spin” liés à la différence des coefficients d'interaction

$$g_{aa} - g_{bb} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}(g_{aa} + g_{bb}) - g_{ab}$$

La fonction d'onde spatiale reste alors inchangée au cours de l'évolution des degrés de liberté de spin

- Espace de Hilbert à  $N$  particules et seconde quantification

- Opérateurs création  $\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger$  et destruction  $\hat{a}, \hat{b}$

- Hamiltonien décrivant le couplage cohérent au champ micro-onde ou laser

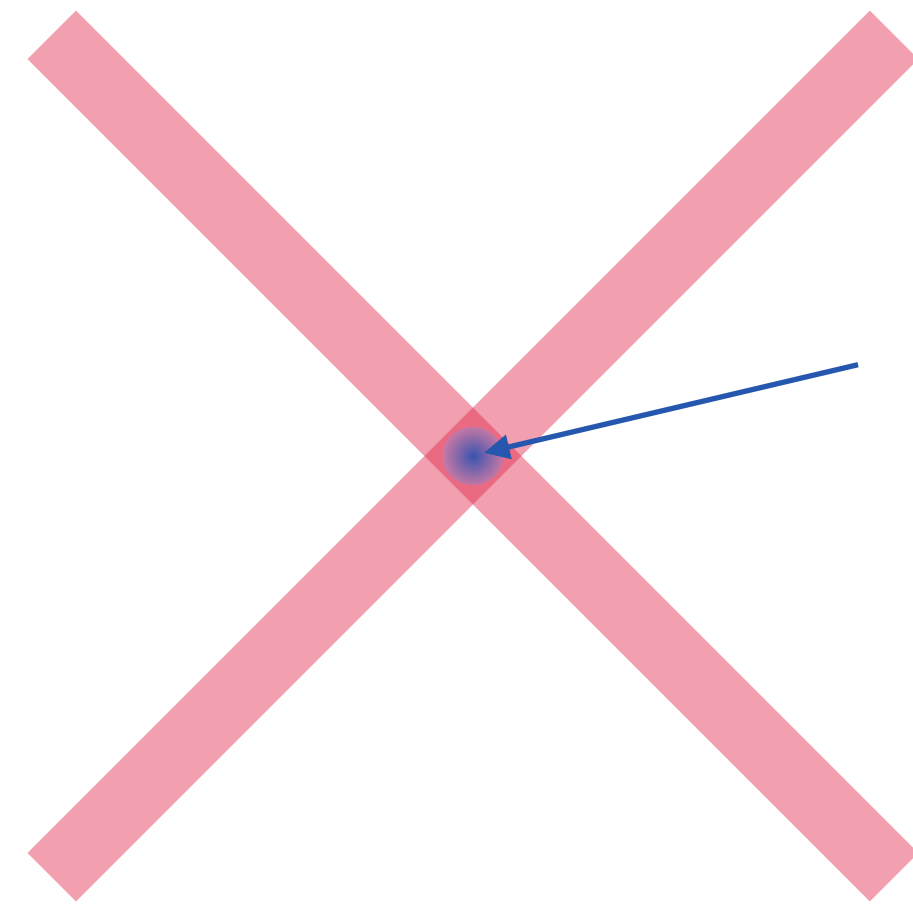
*Opérateur "à un corps": première quantification  $|a\rangle\langle b| \longrightarrow$  seconde quantification  $\hat{a}^\dagger \hat{b}$*

- Représentation de Schwinger

*Algèbre de moment cinétique avec  $J = \frac{N}{2}$*

$$\hat{H}_{\text{coh}} = -\hbar\Omega\hat{J}_x - \hbar\Delta\hat{J}_z$$

# Énergie d'interaction entre atomes (s'il y a un seul état interne)



fonction d'onde  $\Phi(\vec{r})$

$$\int |\Phi(\vec{r})|^2 d^3r = 1$$

Approximation de champ moyen :

$$E_{\text{int}} = \frac{1}{2} \iint \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') d^3r d^3r'$$

$\rho(\vec{r})$  : densité au point  $\vec{r}$

$$\rho(\vec{r}) = N |\Phi(\vec{r})|^2$$

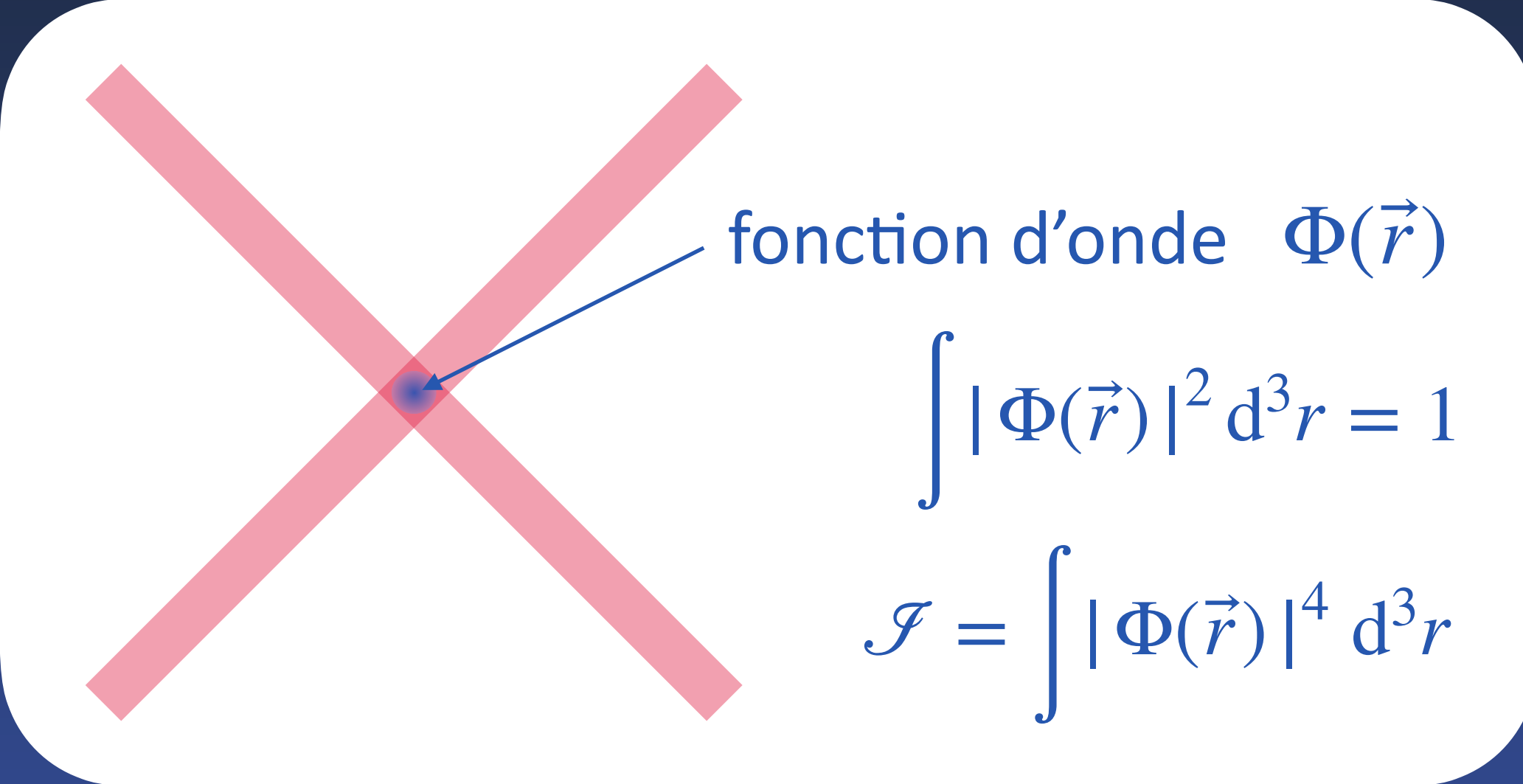
Pour des interactions locales :  $V(\vec{r} - \vec{r}') = g \delta(\vec{r} - \vec{r}')$   $\implies E_{\text{int}} = \frac{1}{2} g N^2 \int |\Phi(\vec{r})|^4 d^3r$

On note  $\mathcal{I} = \int |\Phi(\vec{r})|^4 d^3r$  [dimension : (volume)<sup>-1</sup>]

$$E_{\text{int}} = \frac{1}{2} \mathcal{I} g N^2$$

Énergie d'interaction entre atomes (un seul état interne)

$$E_{\text{int}} = \frac{1}{2} \mathcal{J} g N^2$$



fonction d'onde  $\Phi(\vec{r})$

$$\int |\Phi(\vec{r})|^2 d^3r = 1$$
$$\mathcal{J} = \int |\Phi(\vec{r})|^4 d^3r$$

The diagram shows a white rounded rectangle containing a large red 'X' over a blue dot. An arrow points from the text 'fonction d'onde  $\Phi(\vec{r})$ ' to the blue dot. Below the rectangle are two mathematical equations:  $\int |\Phi(\vec{r})|^2 d^3r = 1$  and  $\mathcal{J} = \int |\Phi(\vec{r})|^4 d^3r$ .

Énergie d'interaction entre atomes (deux états internes  $a$  et  $b$ )

Trois constantes d'interaction :

$$\left\{ \begin{array}{l} a - a : g_{aa} \\ b - b : g_{bb} \\ a - b : g_{ab} \end{array} \right.$$

# L'hamiltonien total de la jonction interne (approximation du mode spatial unique)

Couplage avec le champ cohérent :  $\hat{H}_{\text{coh}} = -\hbar\Omega\hat{J}_x - \hbar\Delta\hat{J}_z$

Interactions entre atomes (à une constante additive près) :  $\hat{H}_{\text{int}} = \hbar\Delta_{\text{int}}\hat{J}_z + \frac{E_C}{2}\hat{J}_z^2$

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{coh}} + \hat{H}_{\text{int}} = -\hbar\Omega\hat{J}_x - \hbar\tilde{\Delta}\hat{J}_z + \frac{E_C}{2}\hat{J}_z^2$$

avec  $\tilde{\Delta} \equiv \Delta - \Delta_{\text{int}}$

## Hamiltonien de Lipkin - Meshkov - Glick (LMG)

*Proposé initialement (1965) comme banc d'essai pour tester différentes méthodes d'approximation*

# Plan du cours

---

1. Préliminaire : l'atome habillé

2. L'approximation du mode spatial unique

3. La jonction Josephson retrouvée

*Passage de la dynamique quantique à la dynamique classique*

4. États stationnaires et bifurcation

# De la dynamique quantique à la dynamique classique

On se place en point de vue de Heisenberg :

- On choisit un état initial  $|\psi\rangle$  qui va rester fixé
- On fait évoluer les opérateurs  $\hat{\mathcal{O}}$  décrivant les quantités physiques pertinentes, ici les composantes  $\hat{J}_i$

$$\text{Équation d'évolution : } i\hbar \frac{d\hat{\mathcal{O}}}{dt} = [\hat{\mathcal{O}}, \hat{H}]$$

- On prend la valeur moyenne sur l'état initial :  $i\hbar \frac{d\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle}{dt} = \langle [\hat{\mathcal{O}}, \hat{H}] \rangle$  : retrouve-t-on la dynamique classique ?

Un exemple préliminaire : une particule de masse  $m$  en mouvement dans le potentiel  $V(x)$  :

$$\text{Hamiltonien } \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad \text{avec } [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

# Equations de Heisenberg pour l'hamiltonien LMG

$$\hat{H} = -\hbar\Omega\hat{J}_x - \hbar\tilde{\Delta}\hat{J}_z + \frac{E_C}{2}\hat{J}_z^2 \quad i\hbar\frac{d\hat{O}}{dt} = [\hat{O}, \hat{H}]$$

Évolution des trois composantes du moment cinétique  $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$  :

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hat{J}_z \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{J}_x}{dt} = \tilde{\Delta}\hat{J}_y - \frac{E_C}{2\hbar} (\hat{J}_y\hat{J}_z + \hat{J}_z\hat{J}_y) \\ \frac{d\hat{J}_y}{dt} = \Omega\hat{J}_z - \tilde{\Delta}\hat{J}_x + \frac{E_C}{2\hbar} (\hat{J}_x\hat{J}_z + \hat{J}_z\hat{J}_x) \\ \frac{d\hat{J}_z}{dt} = -\Omega\hat{J}_y \end{array} \right.$$

On prend la valeur moyenne :  $\langle \hat{J}_\alpha \hat{J}_\beta \rangle \approx \langle \hat{J}_\alpha \rangle \langle \hat{J}_\beta \rangle \quad ???$

# Quand peut-on avoir $\langle \hat{J}_\alpha \hat{J}_\beta \rangle \approx \langle \hat{J}_\alpha \rangle \langle \hat{J}_\beta \rangle$ ?

Grand nombre  $N$  de particules  $\Rightarrow J = \frac{N}{2} \gg 1$

On sait par ailleurs que  $\hat{J}^2 = J(J+1) \approx J^2$

→ Si l'hypothèse  $\langle \hat{J}_\alpha \hat{J}_\beta \rangle \approx \langle \hat{J}_\alpha \rangle \langle \hat{J}_\beta \rangle$  est vérifiée, on doit avoir  $\langle J_x \rangle^2 + \langle J_y \rangle^2 + \langle J_z \rangle^2 \approx J^2$

- C'est bien le cas si on prend l'état initial  $|J, M_z = \pm J\rangle$ ,  $\alpha = x, y, z$
- Plus généralement, OK si on prend un "état cohérent de spin" :  $|J, M_{\vec{u}}\rangle = J$   $\vec{u}$  : vecteur unitaire quelconque
- Ne convient pas pour beaucoup d'autres classes d'états, par exemple  $|J, M_z = 0\rangle$

# Équations d'évolution des moyennes $\langle \hat{J}_\alpha \rangle$

$$\text{Approximation } \langle \hat{J}_\alpha \hat{J}_\beta \rangle \approx \langle \hat{J}_\alpha \rangle \langle \hat{J}_\beta \rangle \implies \begin{cases} \frac{dJ_x}{dt} = \bar{\Delta} J_y - \frac{E_C}{\hbar} J_y J_z \\ \frac{dJ_y}{dt} = \Omega J_z - \bar{\Delta} J_x + \frac{E_C}{\hbar} J_x J_z \\ \frac{dJ_z}{dt} = -\Omega J_y \end{cases}$$

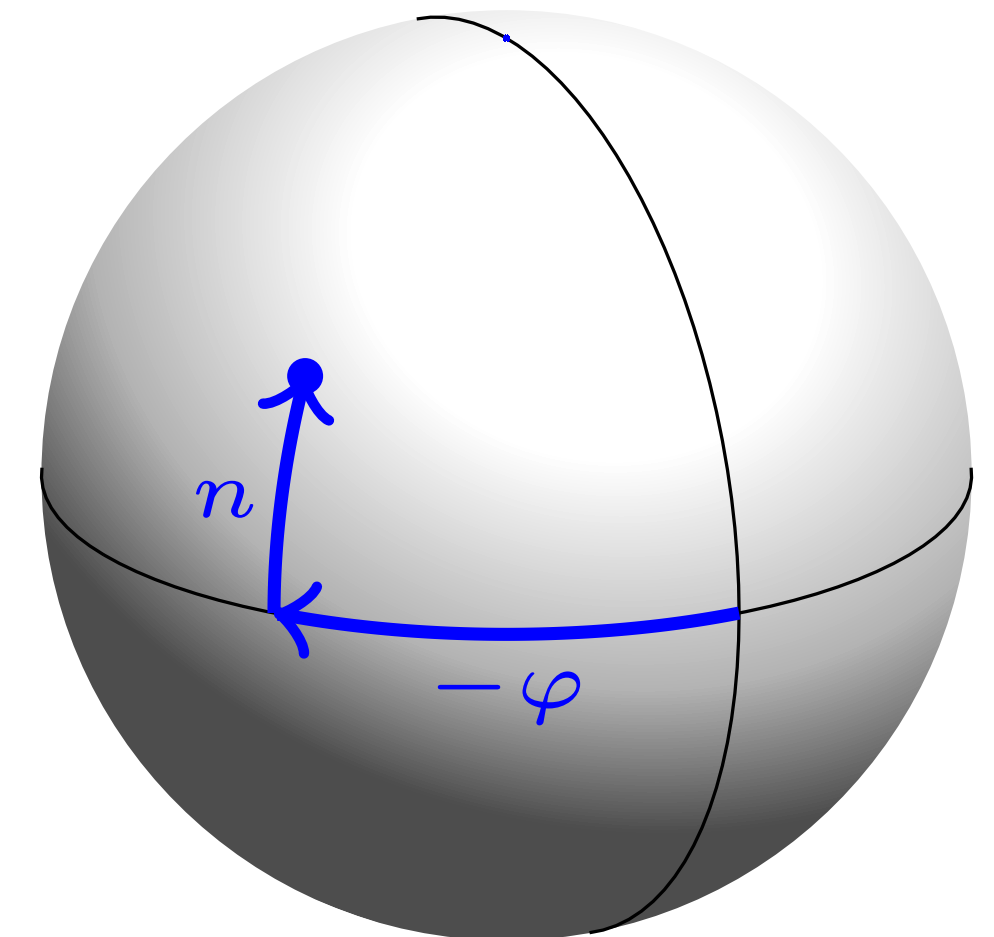
Paramétrisation du vecteur "moment cinétique moyen"  $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2} (\hat{N}_a - \hat{N}_b) \implies J_z = n$$

$$J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = \frac{N^2}{4} \implies J_x^2 + J_y^2 = \frac{N^2}{4} \underbrace{\left(1 - \frac{4n^2}{N^2}\right)}_{\gamma^2(n)}$$

$$J_x = \frac{N}{2} \gamma(n) \cos \varphi \quad J_y = -\frac{N}{2} \gamma(n) \sin \varphi$$

$$|N_a = N, N_b = 0\rangle$$



$$|N_a = 0, N_b = N\rangle$$

# Dictionnaire de passage entre jonctions externes et internes

jonction externe

$$E(n, \varphi) = - E_J \gamma(n) \cos \varphi + \overline{\Delta\mu} n + \frac{E_C}{2} n^2$$

Energie tunnel  $E_J$

Potentiel chimique  $\overline{\Delta\mu}$

Energie de charge  
(compressibilité)  $E_C$

jonction interne

$$\langle \hat{H}_{\text{LMG}} \rangle = - \hbar \Omega J_x - \hbar \tilde{\Delta} J_z + \frac{E_C}{2} J_z^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} J_x = \frac{N}{2} \gamma(n) \cos \varphi \\ J_z = n \end{array} \right.$$

$$= - \frac{N \hbar \Omega}{2} \gamma(n) \cos \varphi - \hbar \tilde{\Delta} n + \frac{E_C}{2} n^2$$

$N \hbar \Omega / 2$  fréquence de Rabi

$-\hbar \tilde{\Delta}$  désaccord renormalisé

$E_C$  Interactions différentielles

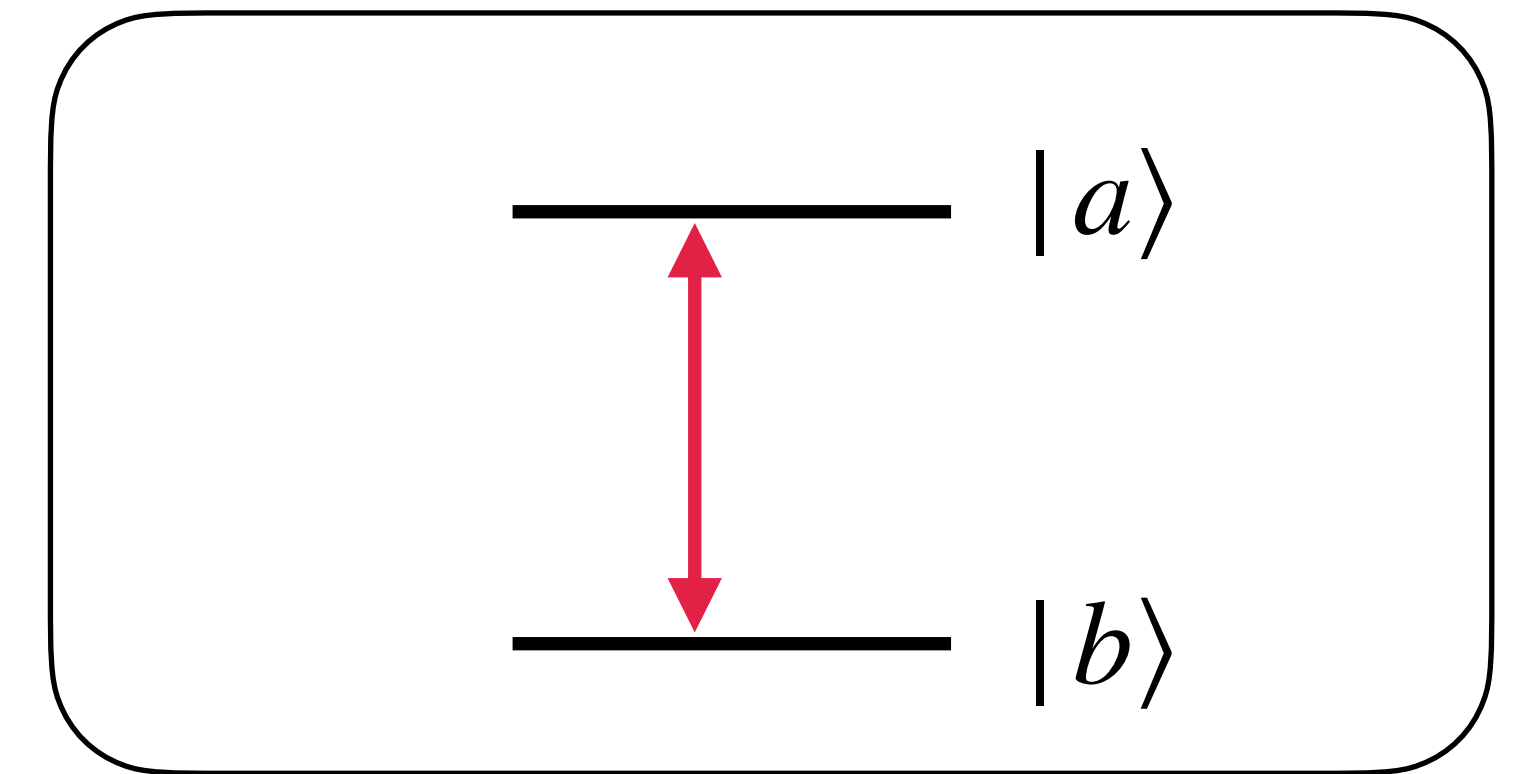
$$\mathcal{J}(g_{aa} + g_{bb} - 2g_{ab})$$

# Jonction interne vs. jonction externe

$$E(n, \varphi) = - E_J \gamma(n) \cos \varphi + \frac{E_C}{2} n^2 + \dots$$

Couplage tunnel  $\leftrightarrow$  couplage cohérent  $E_J = N\hbar\Omega/2$

*Exploration de régimes où  $E_J$  devient plus important  
(en comparaison avec les autres paramètres du problème)*



Energie de charge  $E_C = (g_{aa} + g_{bb} - 2g_{ab}) \int |\Phi|^4$

*Exploration du régime  $E_C < 0$  même si tous les  $g_{ij}$  sont séparément positifs*

*(N.B. : pas de risque de démixtion tant que l'approximation du mode spatial unique est valide)*

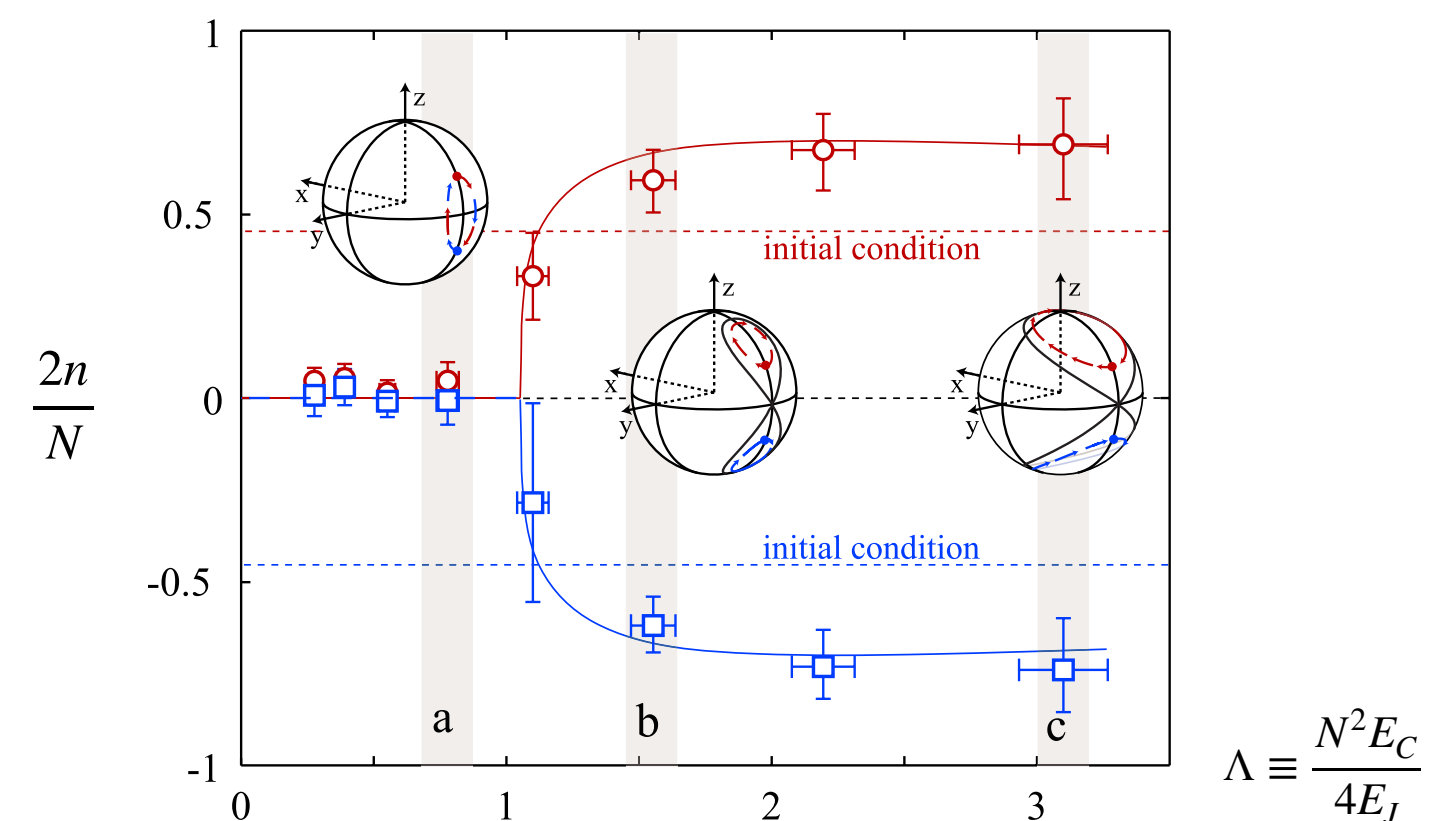
# Plan du cours

1. Préliminaire : l'atome habillé

2. L'approximation du mode spatial unique

3. La jonction Josephson retrouvée

4. États stationnaires et bifurcation



Zibold et al., PRL 105, 204101

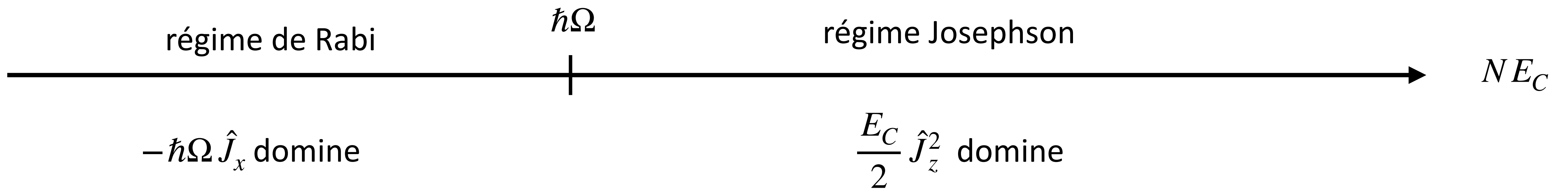


# L'hamiltonien et son état ~~fondamental~~ de plus haute énergie

On choisit pour simplifier un désaccord renormalisé  $\tilde{\Delta}$  nul :

$$\hat{H} = -\hbar\Omega \hat{J}_x + \frac{E_C}{2} \hat{J}_z^2$$

*Ces deux termes ne commutent pas !*



état le plus haut :  $|J, M_x = -J\rangle$   
 énergie :  $\frac{1}{2}N\hbar\Omega$

*bifurcation* → Si  $E_C > 0$  : état le plus haut  $|J, M_z = \pm J\rangle$ , énergie  $\frac{N^2 E_C}{8}$

*evol. douce* → Si  $E_C < 0$  : état le plus haut  $|J, M_z = 0\rangle$ , énergie nulle

# Courbes iso-énergies et bifurcation ( $E_C < 0$ )

$$\Lambda \equiv \frac{N^2 E_C}{4E_J} < 0$$

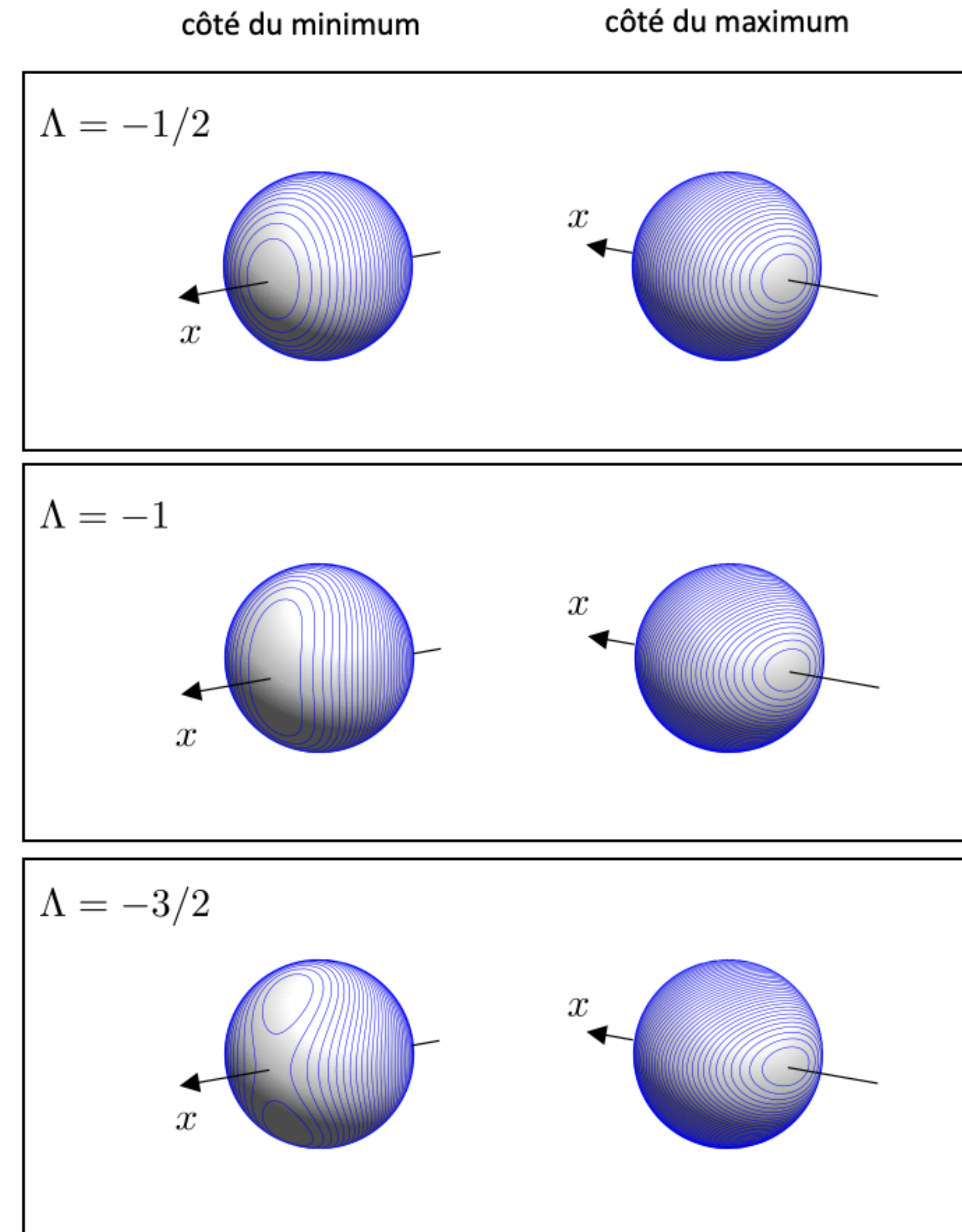
$$E(n, \varphi) = - E_J \gamma(n) \cos \varphi - \frac{|E_C|}{2} n^2$$

Minimum obtenu pour  $\varphi = 0$

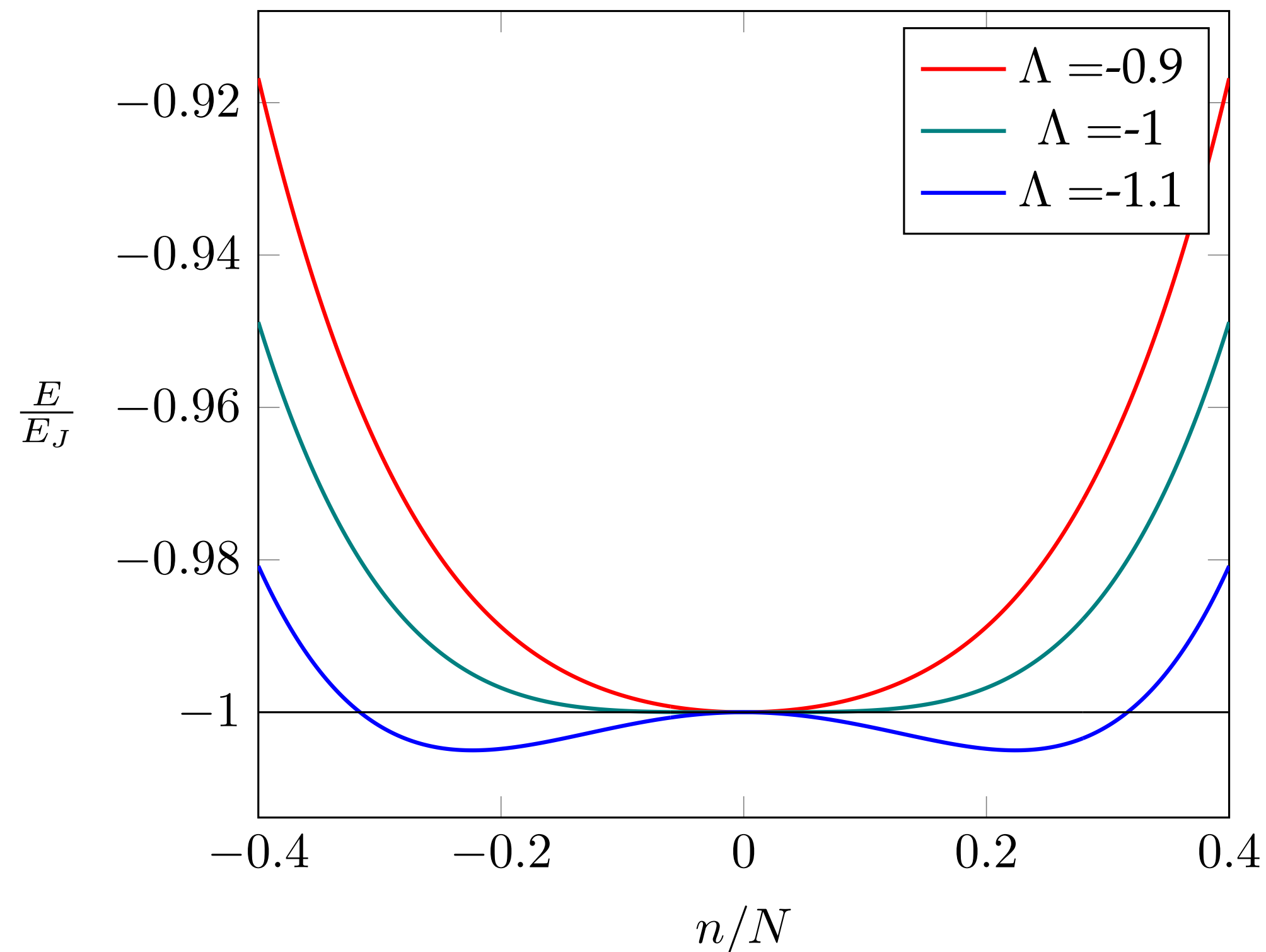
Maximum obtenu pour  $\varphi = \pi$

Bifurcation du minimum pour  $\Lambda = -1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } -1 < \Lambda < 0 : \text{minimum en } n = 0 \\ \text{si } \Lambda < -1 : \text{minimum en } n = \pm \frac{N}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}} \end{array} \right.$$



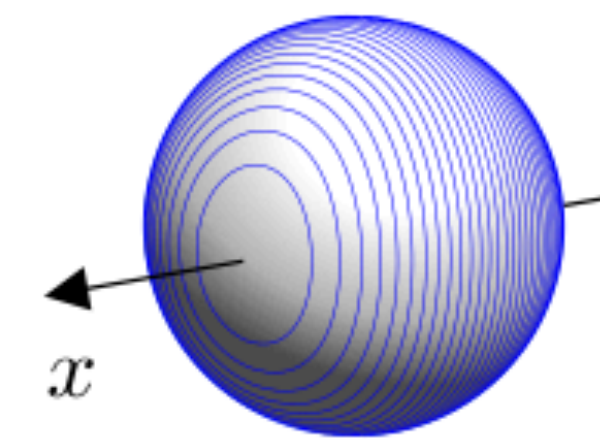
# Transition para-ferromagnétisme pour $E_C < 0$



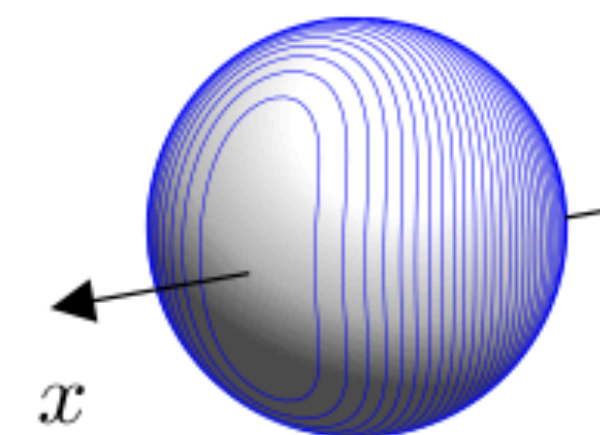
Brisure de symétrie  $Z_2$  due à  
la compétition entre  $J_x$  et  $J_z^2$

Transition de phase pour une jonction étendue  
étudiée dans le groupe de Trento

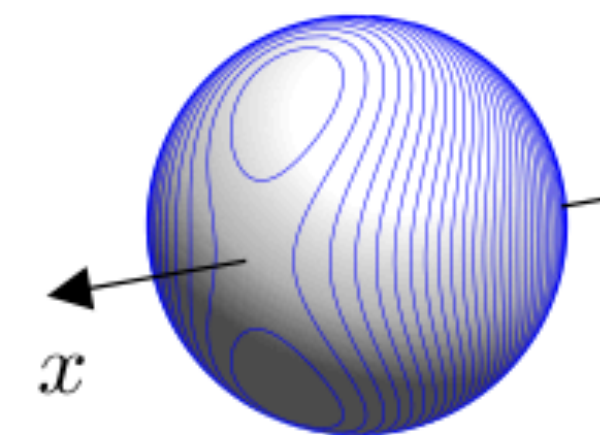
$\Lambda = -1/2$



$\Lambda = -1$



$\Lambda = -3/2$



# Courbes iso-énergies et bifurcation ( $E_C > 0$ )

$$\Lambda \equiv \frac{N^2 E_C}{4E_J} > 0$$

$$E(n, \varphi) = - E_J \gamma(n) \cos \varphi + \frac{E_C}{2} n^2$$

Minimum obtenu pour  $\varphi = 0$

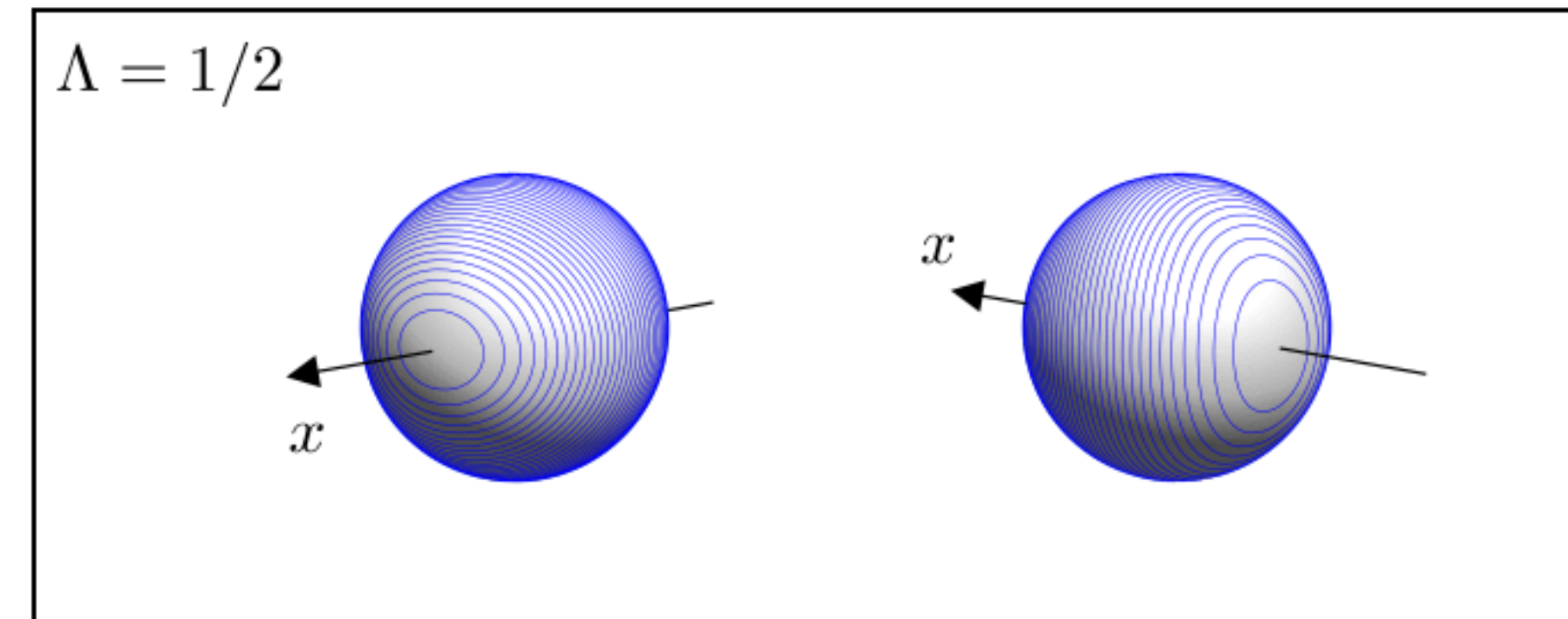
Maximum obtenu pour  $\varphi = \pi$

Bifurcation du maximum pour  $\Lambda = 1$

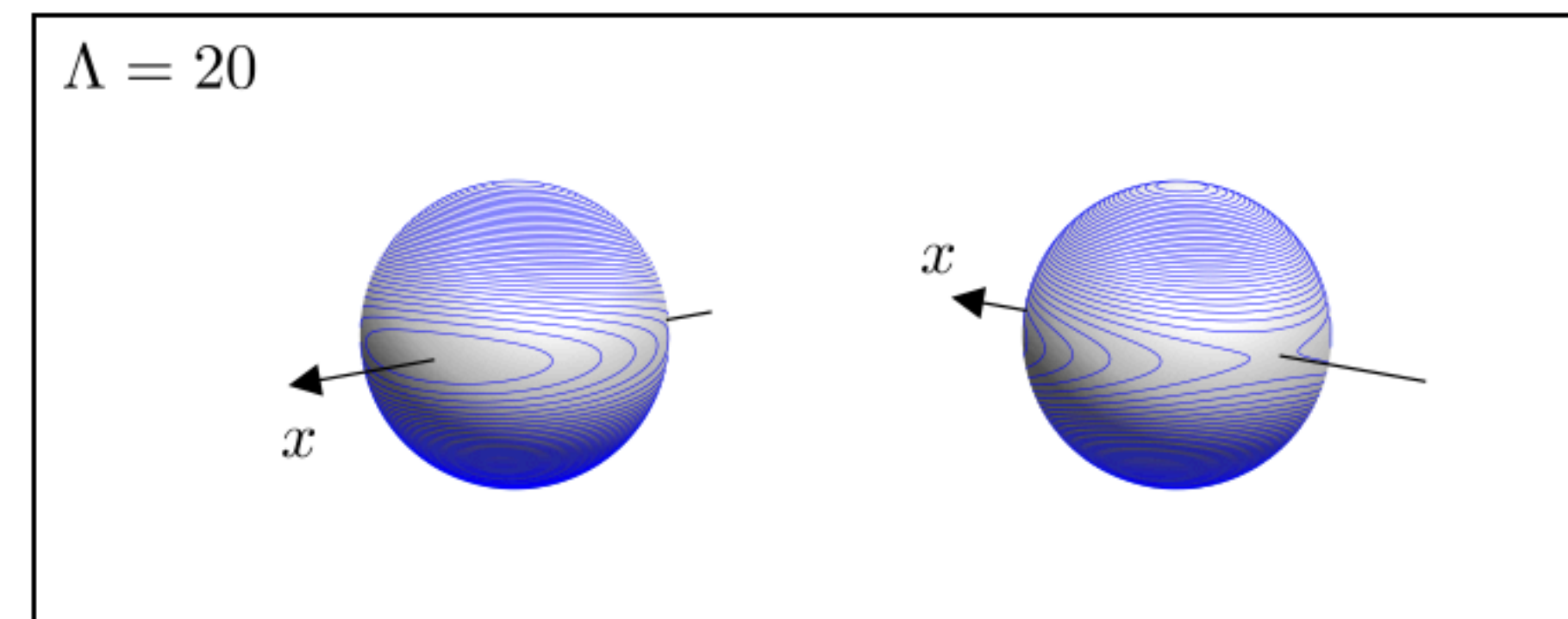
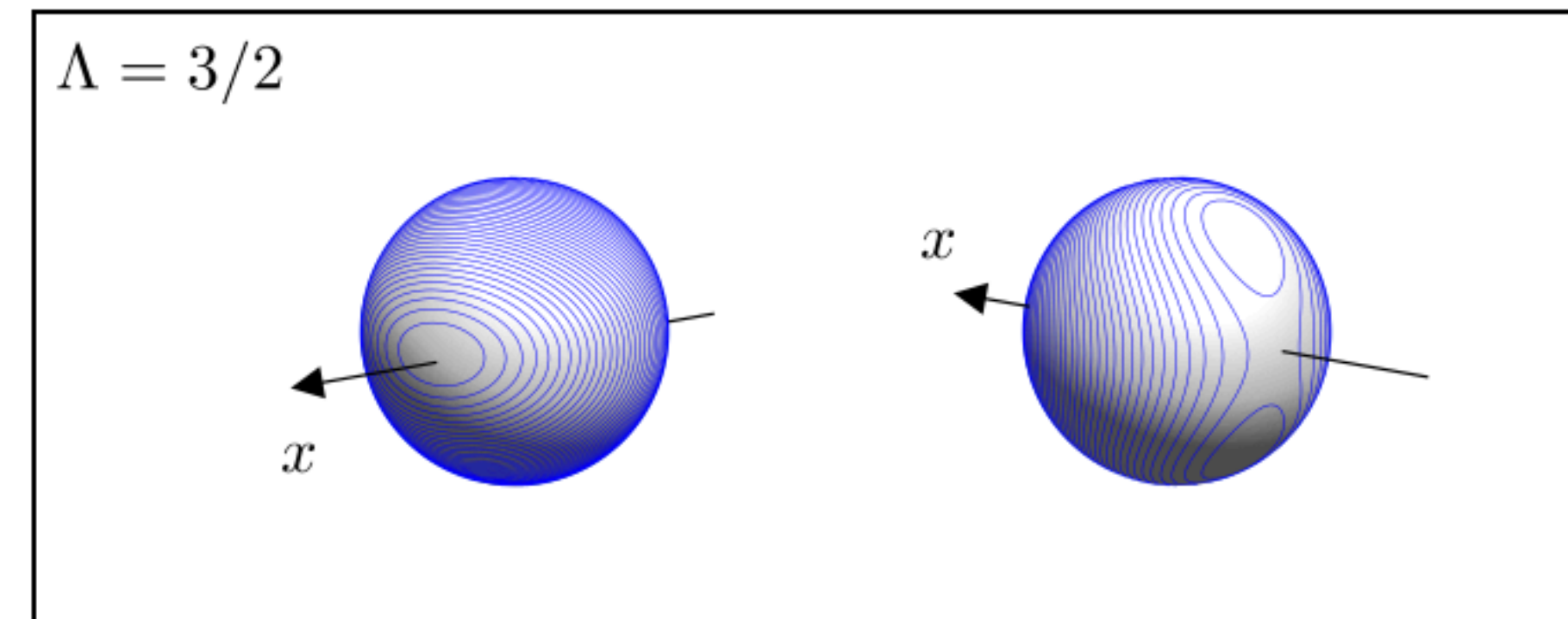
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } 0 < \Lambda < 1 : \text{maximum en } n = 0 \\ \text{si } 1 < \Lambda : \text{maximum en } n = \pm \frac{N}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}} \end{array} \right.$$

côté du minimum

côté du maximum



**Rabi**



**Josephson**

# La dynamique de la jonction retrouvée ( $E_C > 0$ )

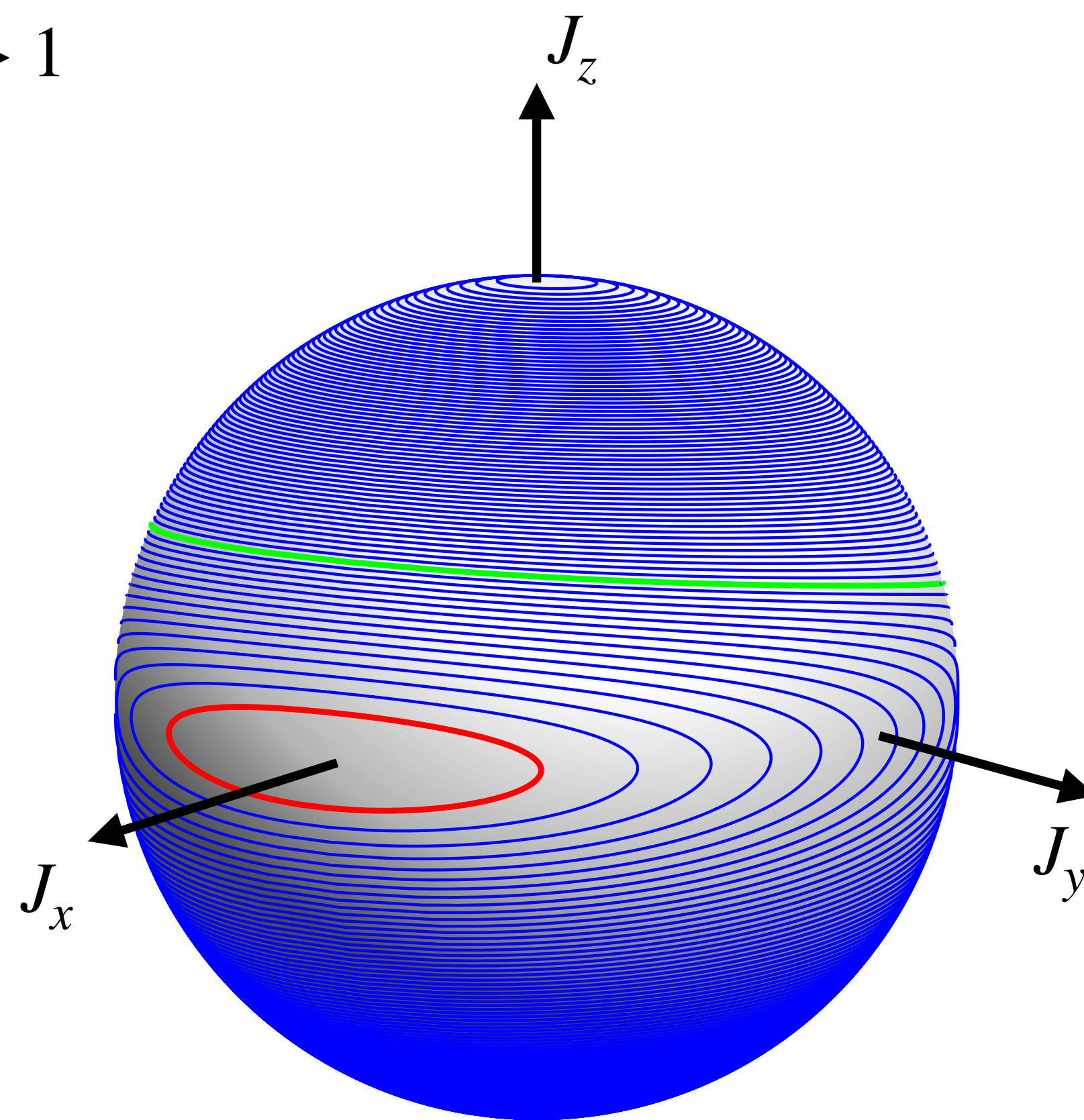
Régime Josephson  $\Lambda \equiv \frac{N^2 E_C}{4E_J} \gg 1$

ici  $\Lambda = 20$

Auto-piégeage

Oscillation plasma

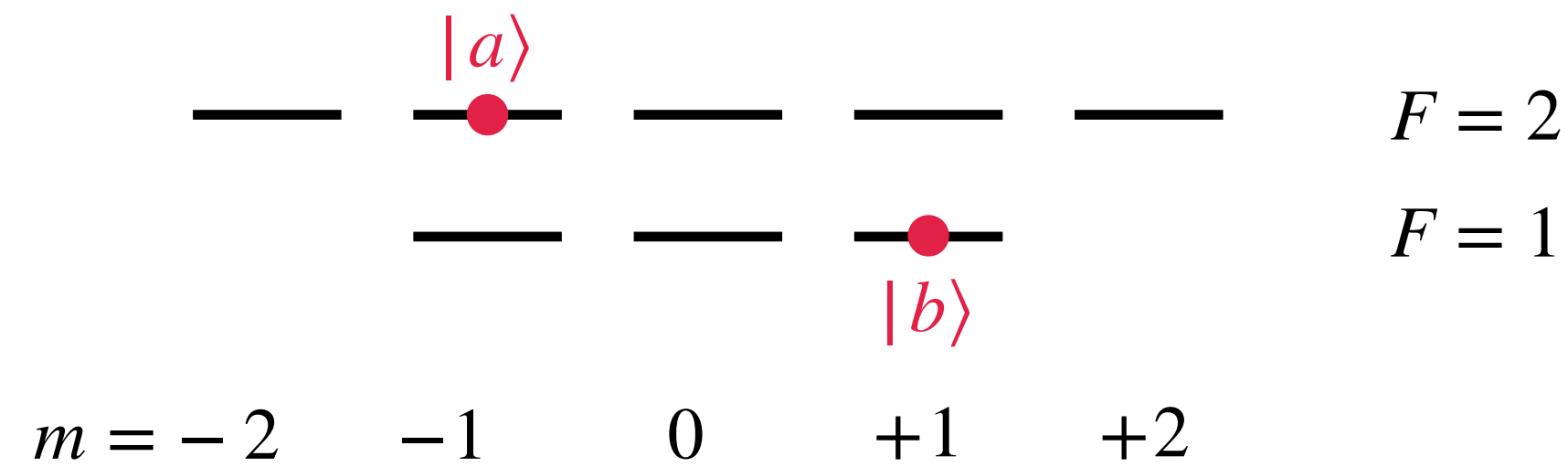
+ états comprimés  
(cours 5)



# Première mise en évidence ( $E_C > 0$ )

Zibold et al., PRL 105, 204101  
[groupe de M. Oberthaler, Heidelberg]

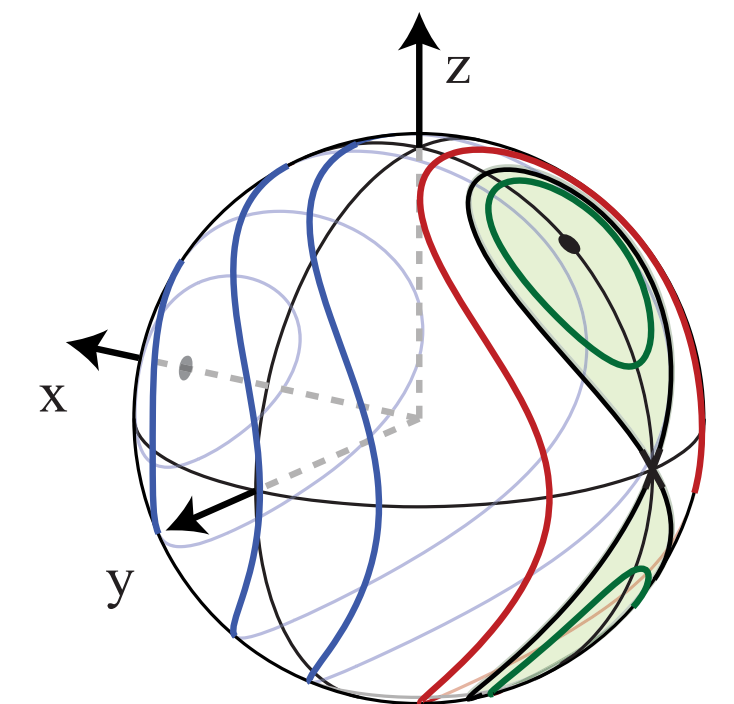
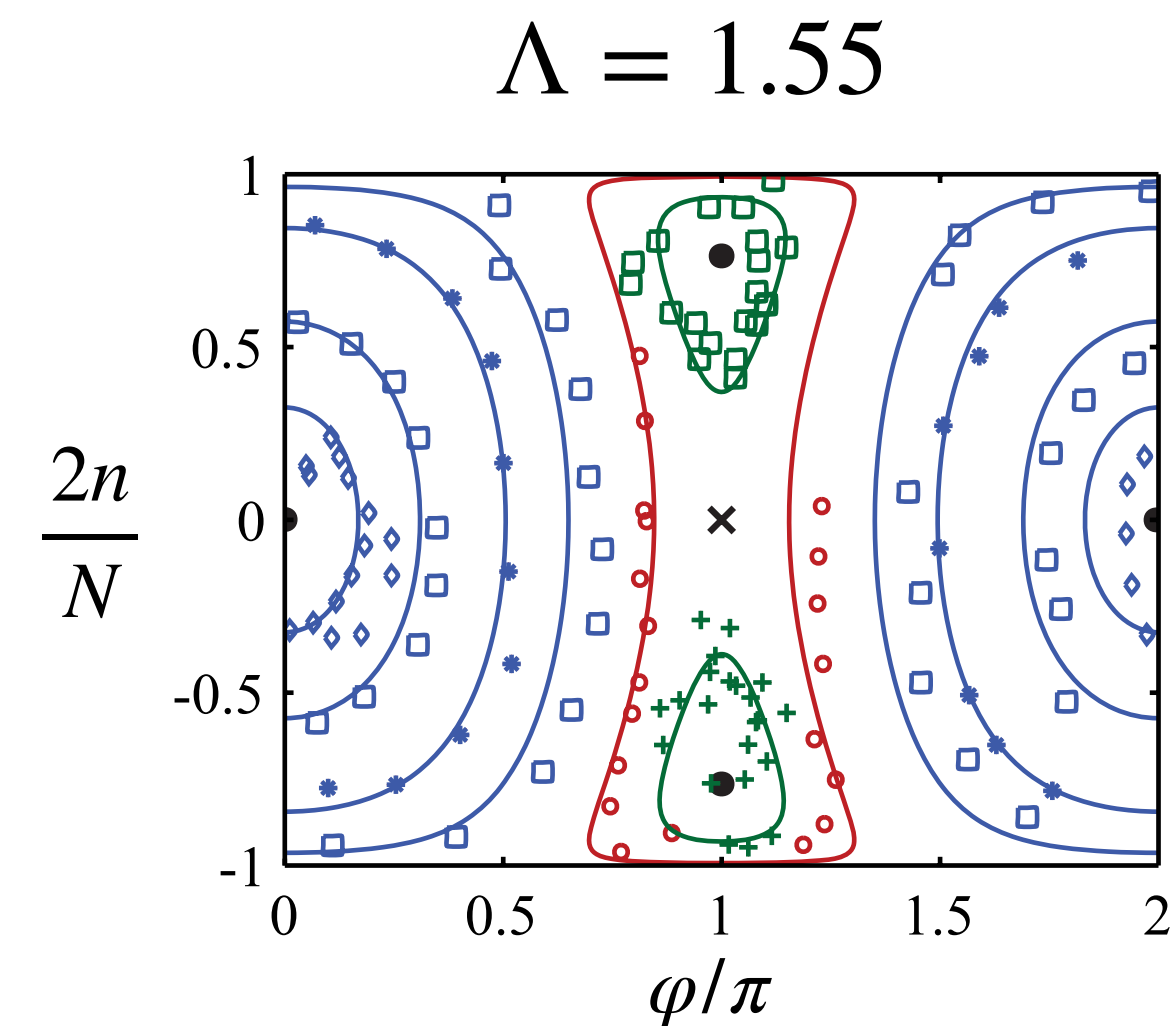
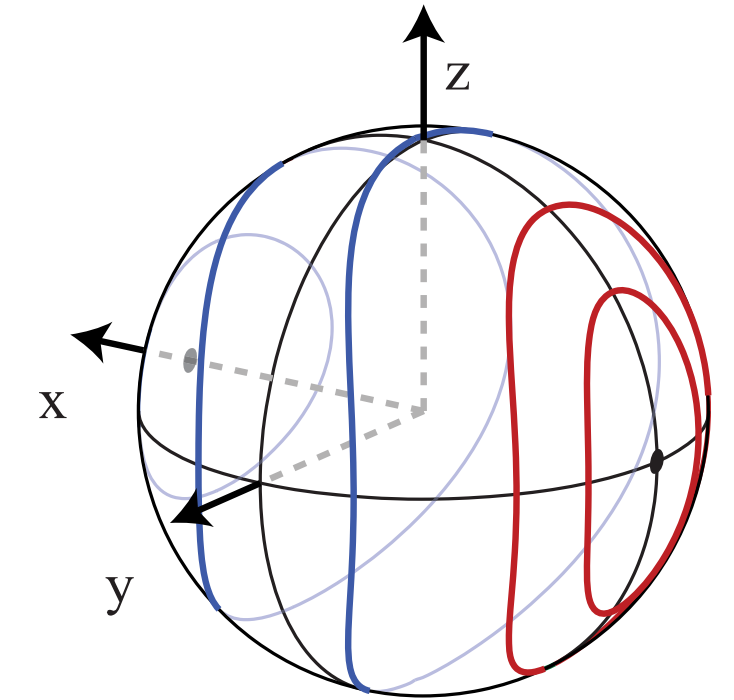
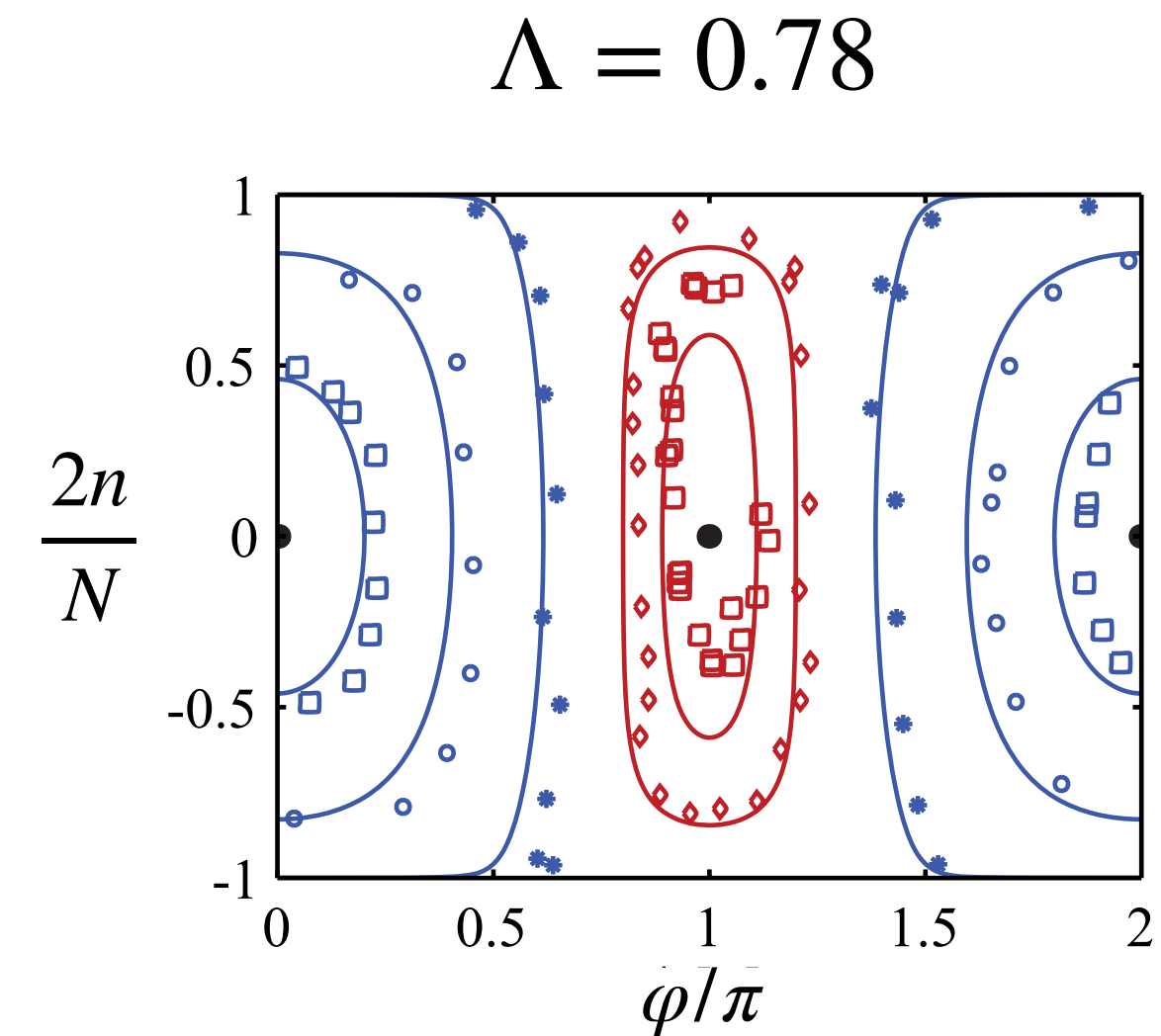
500 atomes de  $^{87}\text{Rb}$  dans un piège fortement confinant



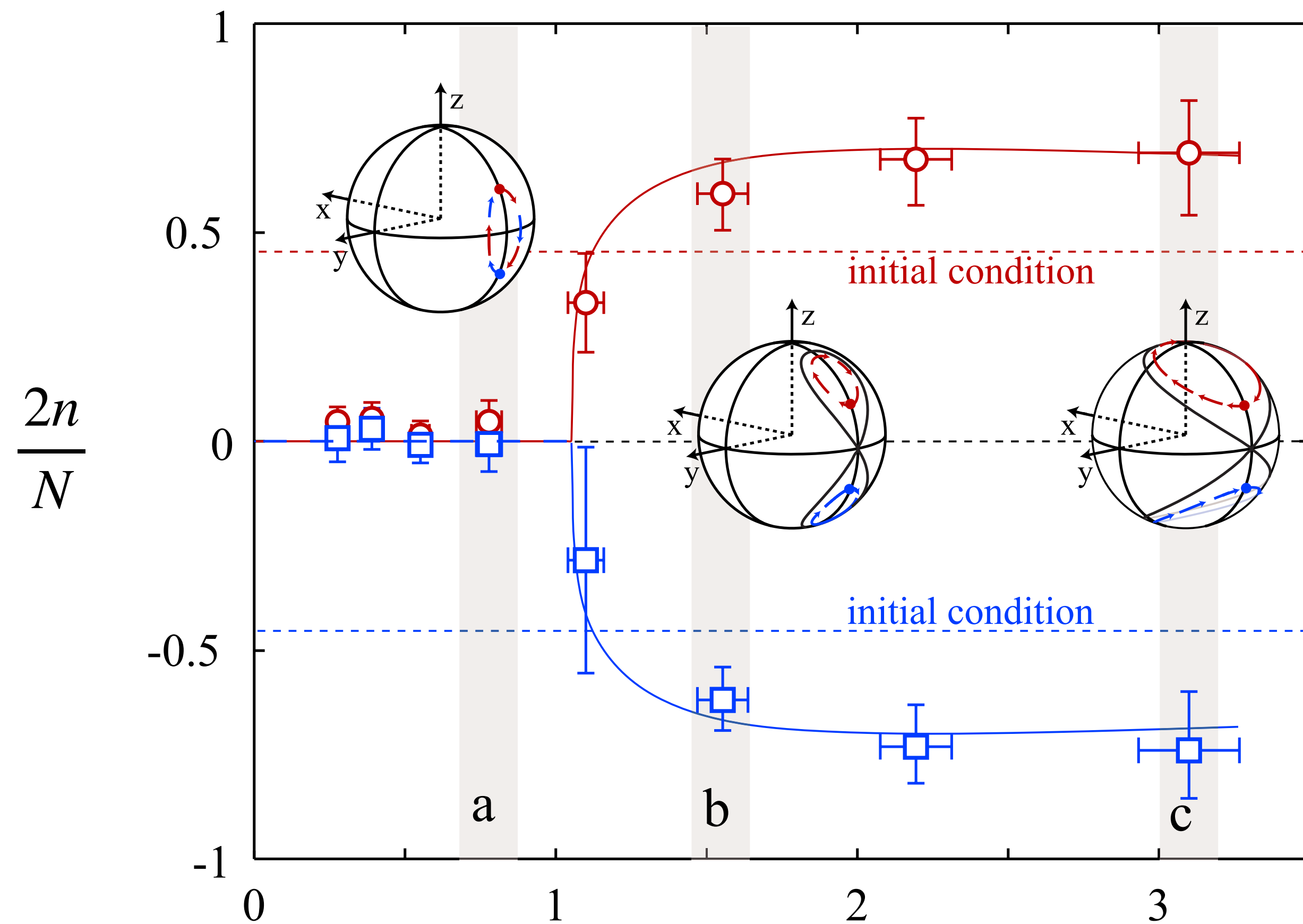
Préparation des atomes en un point donné de la sphère de Bloch : état cohérent de spin

Après un temps d'évolution  $t$ , on mesure le déséquilibre  $n$  ou la phase relative  $\varphi$

$$\Lambda = \frac{N^2 E_C}{4E_J} = \frac{NE_C}{2\hbar\Omega}$$



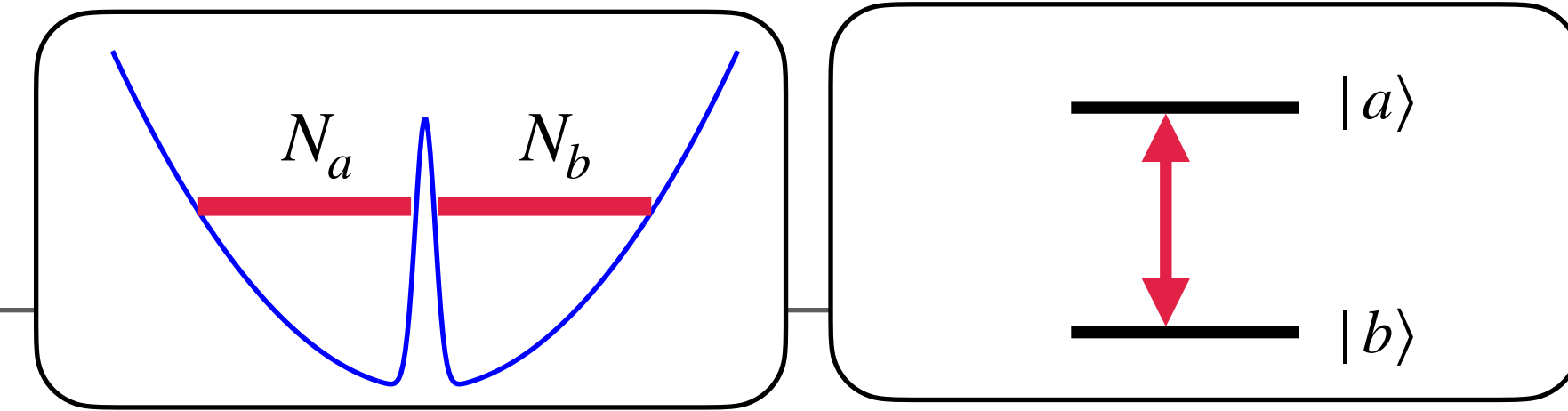
Recherche des points stationnaires par moyenne d'une trajectoire  $\{n, \varphi\}$



$$E_C > 0$$

$$\Lambda \equiv \frac{N^2 E_C}{4E_J}$$

# Conclusions



Extension du concept de jonction Josephson à des degrés de liberté internes

*Utile pour  $^3\text{He}$  liquide superfluide et pour les gaz atomiques ultrafroids*

Paramétrisation du problème en terme de dynamique d'un grand moment cinétique ( $J = N/2$ )

*Représentation de Schwinger*

*Hamiltonien quantique de la jonction*  $\hat{H} = -\hbar\Omega\hat{J}_x + \frac{E_C}{2}\hat{J}_z^2 + \dots$  (LMG)

*La jonction usuelle retrouvée dans l'approximation*  $\langle \hat{J}_\alpha \hat{J}_\beta \rangle \approx \langle \hat{J}_\alpha \rangle \langle \hat{J}_\beta \rangle$  : états cohérents de spin

***Que se passe-t-il pour des états de spin tels que l'approximation classique n'est plus valable ?***

***L'état fondamental lui-même peut-il être non-classique ?***