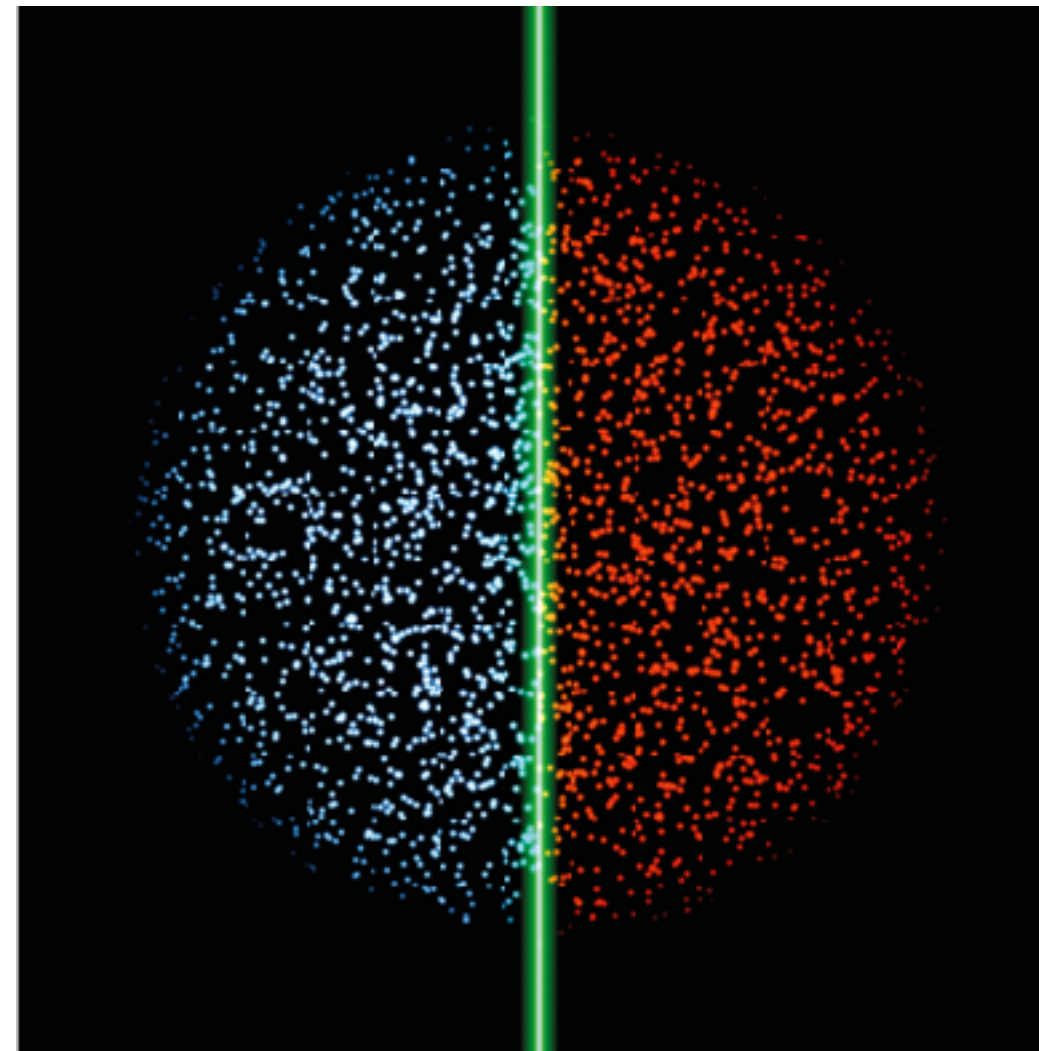


Chaire *Atomes et rayonnement*, cours 2025-26
Fluides quantiques couplés et jonctions Josephson

Cours 5 : Les condensats fragmentés



diapositives

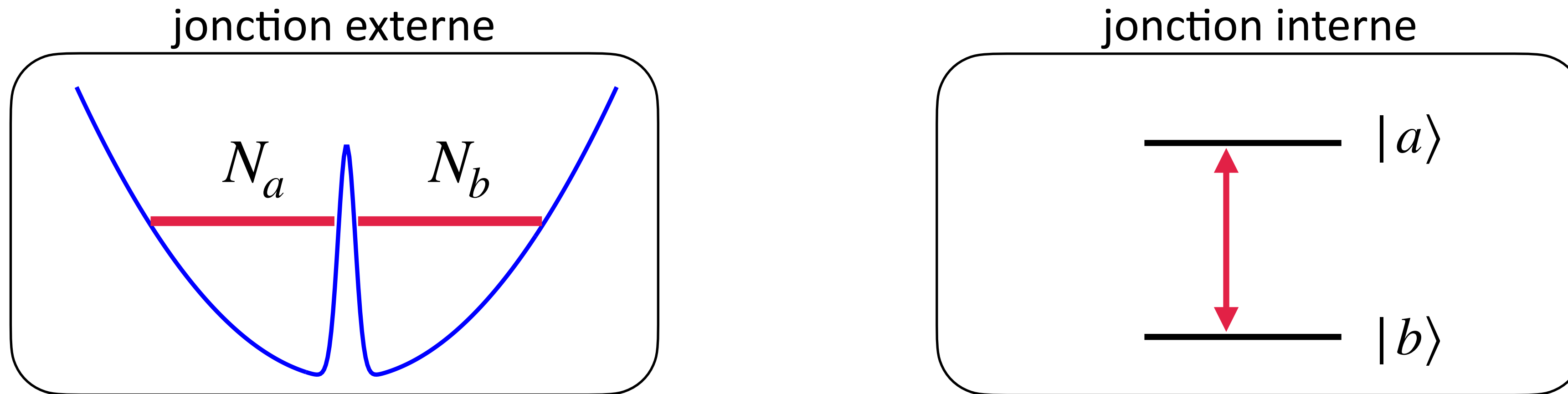
notes de cours

Séminaires

Aujourd'hui : Klaus Mølmer, Københavns Universitet & Niels Bohr Institute, Copenhagen
Sensing with quantum trajectories

Vendredi 26 juin : Eleni Diamanti, LIP6 Sorbonne Université
Ressources et applications des réseaux quantiques

Description d'une jonction Josephson atomique



Fonction d'onde macroscopique : $|\Psi(t)\rangle = [\alpha_a(t)|a\rangle + \alpha_b(t)|b\rangle]^{\otimes N}$

tous les atomes sont dans le même état $\alpha_a(t)|a\rangle + \alpha_b(t)|b\rangle$ avec $|\alpha_a|^2 + |\alpha_b|^2 = 1$

Paramétrisation par les variables n et φ obéissant aux relations de Josephson :

$$N_a(t) = N|\alpha_a(t)|^2 = \bar{N}_a + n(t) \quad N_b(t) = N|\alpha_b(t)|^2 = \bar{N}_b - n(t)$$

La phase φ est donnée par l'argument du nombre complexe $\alpha_a\alpha_b^*$

Buts de ce cours

Étudier l'état fondamental d'une jonction atomique et montrer que ce n'est pas toujours un état factorisé

$$|\Psi_{\text{fond}}\rangle \neq [\alpha_a(t)|a\rangle + \alpha_b(t)|b\rangle]^{\otimes N}$$

$|\Psi_{\text{fond}}\rangle$ est alors un exemple d'état comprimé ou de "condensat fragmenté"

Caractériser les distributions en n et φ de cet état fondamental

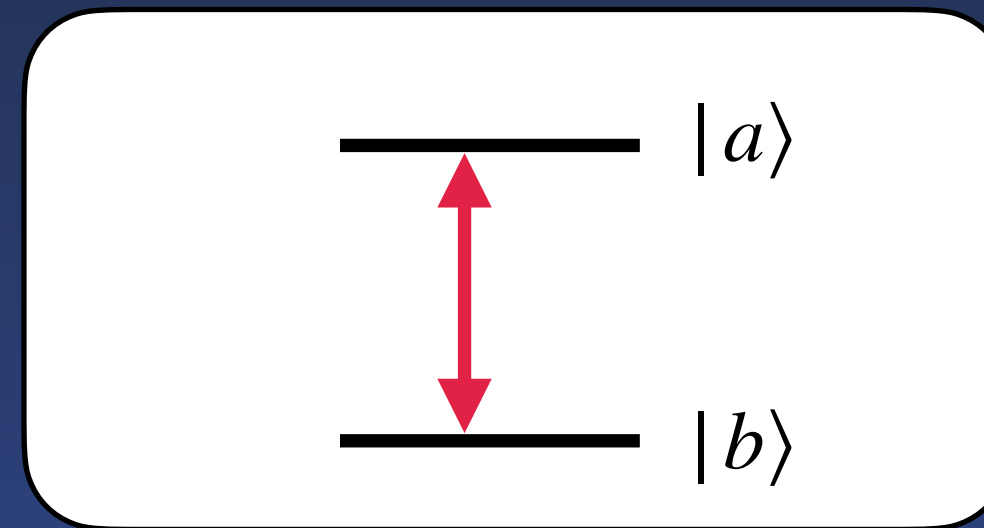
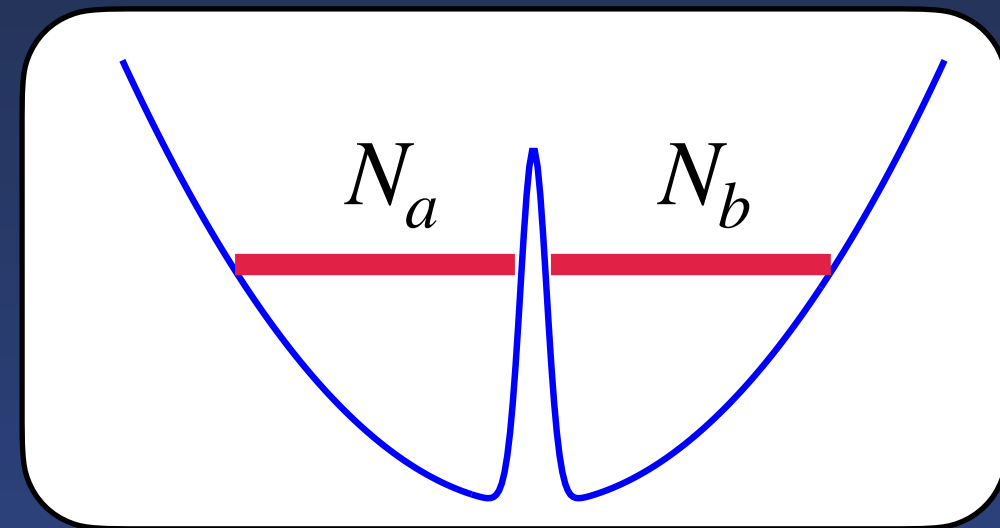
Décrire la mise en évidence d'un condensat fragmenté pour une assemblée d'atomes de spin 1

1.

Deux outils importants

États cohérents de spin & distribution de Husimi

La description de l'état quantique d'une jonction



- Espace des états de dimension $N + 1$
- Hamiltonien pour un couplage résonnant

opérateurs création $\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger$ et destruction \hat{a}, \hat{b}

$$\hat{a}^\dagger |N_a, N_b\rangle = \sqrt{N_a + 1} |N_a + 1, N_b\rangle$$

$$\begin{aligned} \hat{a} |N_a, N_b\rangle &= \sqrt{N_a} |N_a - 1, N_b\rangle \quad \text{si } N_a \neq 0 \\ &= 0 \quad \text{si } N_a = 0 \end{aligned}$$

Lien avec la dynamique d'un grand moment cinétique

États d'un moment cinétique $J = N/2$ \longleftrightarrow États symétriques d'une assemblée de N systèmes à deux niveaux (i.e. spins 1/2)

*Représentation
de Schwinger*

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{J}_x = \frac{1}{2} (\hat{a}\hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{b}) \\ \hat{J}_y = \frac{i}{2} (\hat{a}\hat{b}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{b}) \\ \hat{J}_z = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{b}^\dagger\hat{b}) \end{array} \right.$$

$$[\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hat{J}_x, \dots$$

$$|J, M_z = +J\rangle \longleftrightarrow |N_a = N, N_b = 0\rangle$$

$$|J, M_z = 0\rangle \longleftrightarrow |N_a = \frac{N}{2}, N_b = \frac{N}{2}\rangle$$

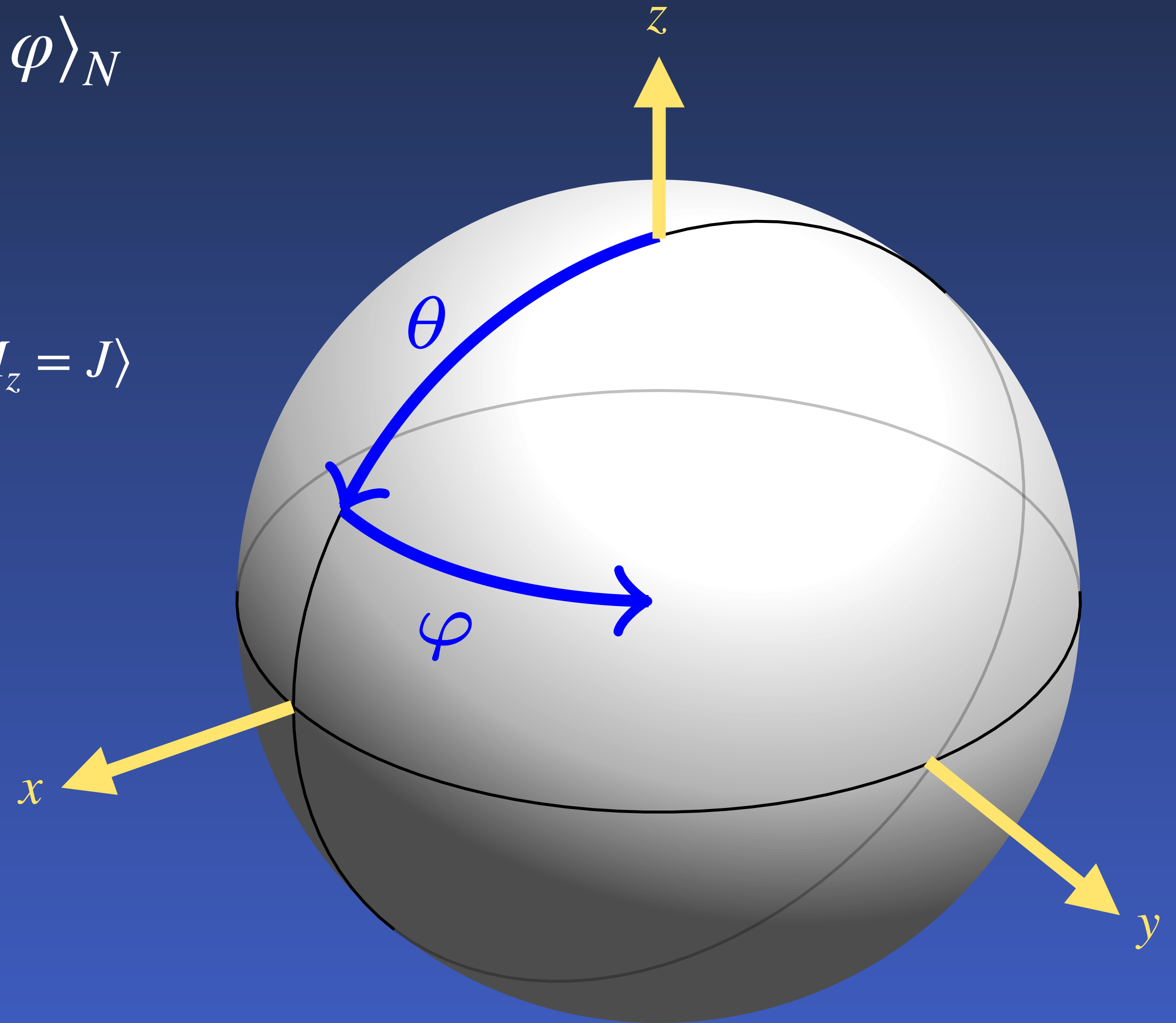
$$|J, M_z = -J\rangle \longleftrightarrow |N_a = 0, N_b = N\rangle$$

on supposera N pair

Outil n°1 : les états cohérents de spin $|\theta, \varphi\rangle_N$

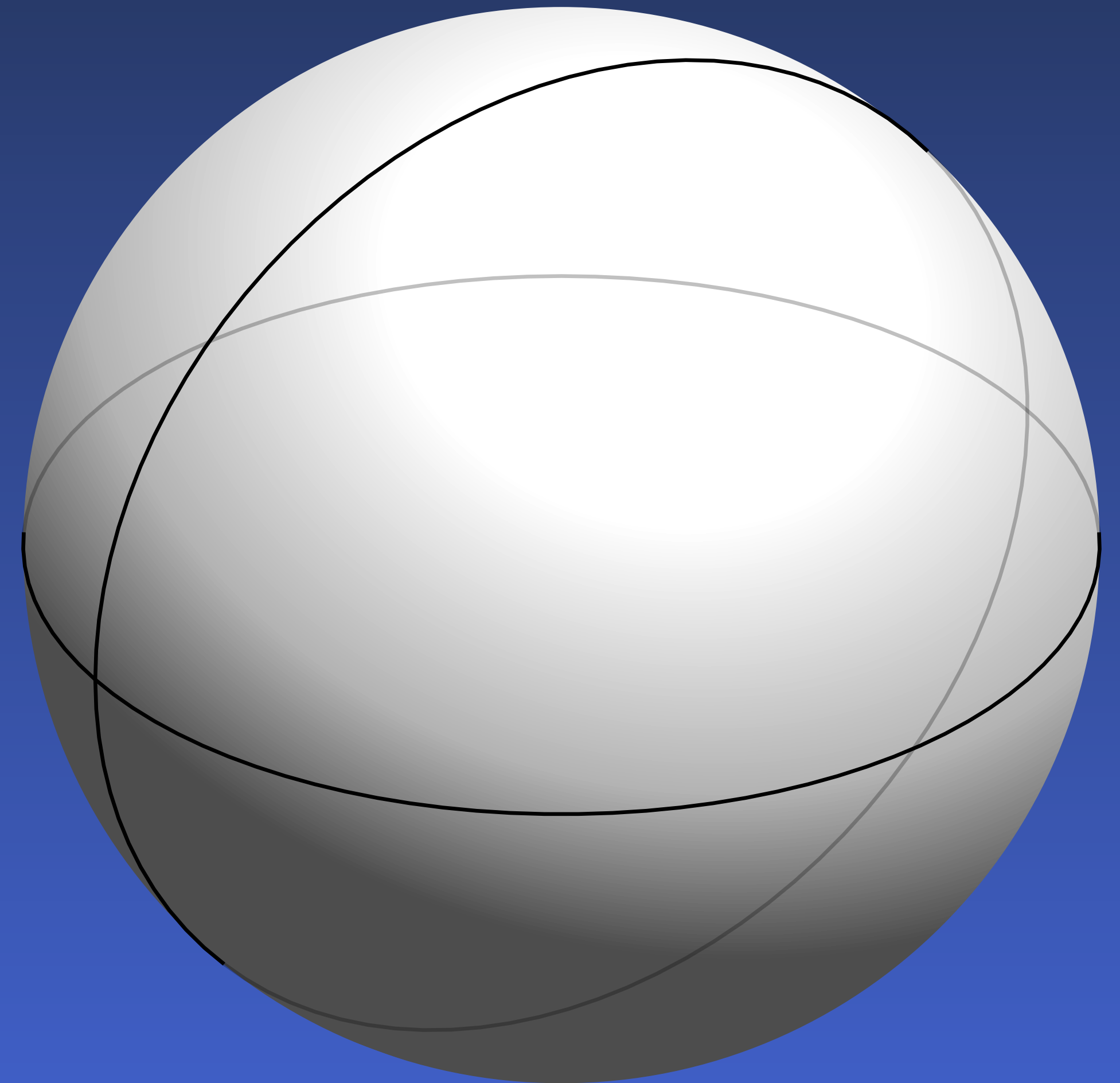
obtenu par deux rotations successives de l'état $|J, M_z = J\rangle$

$$\begin{aligned} |\theta, \varphi\rangle &= e^{-i\varphi\hat{J}_z} e^{-i\theta\hat{J}_y} |J, M_z = +J\rangle \\ &= |J, M_{\vec{u}} = +J\rangle \end{aligned}$$



Quelques propriétés des états cohérents de spin

- nombre infini
- système générateur : résolution de l'identité
- quasi-orthogonalité pour $N \gg 1$

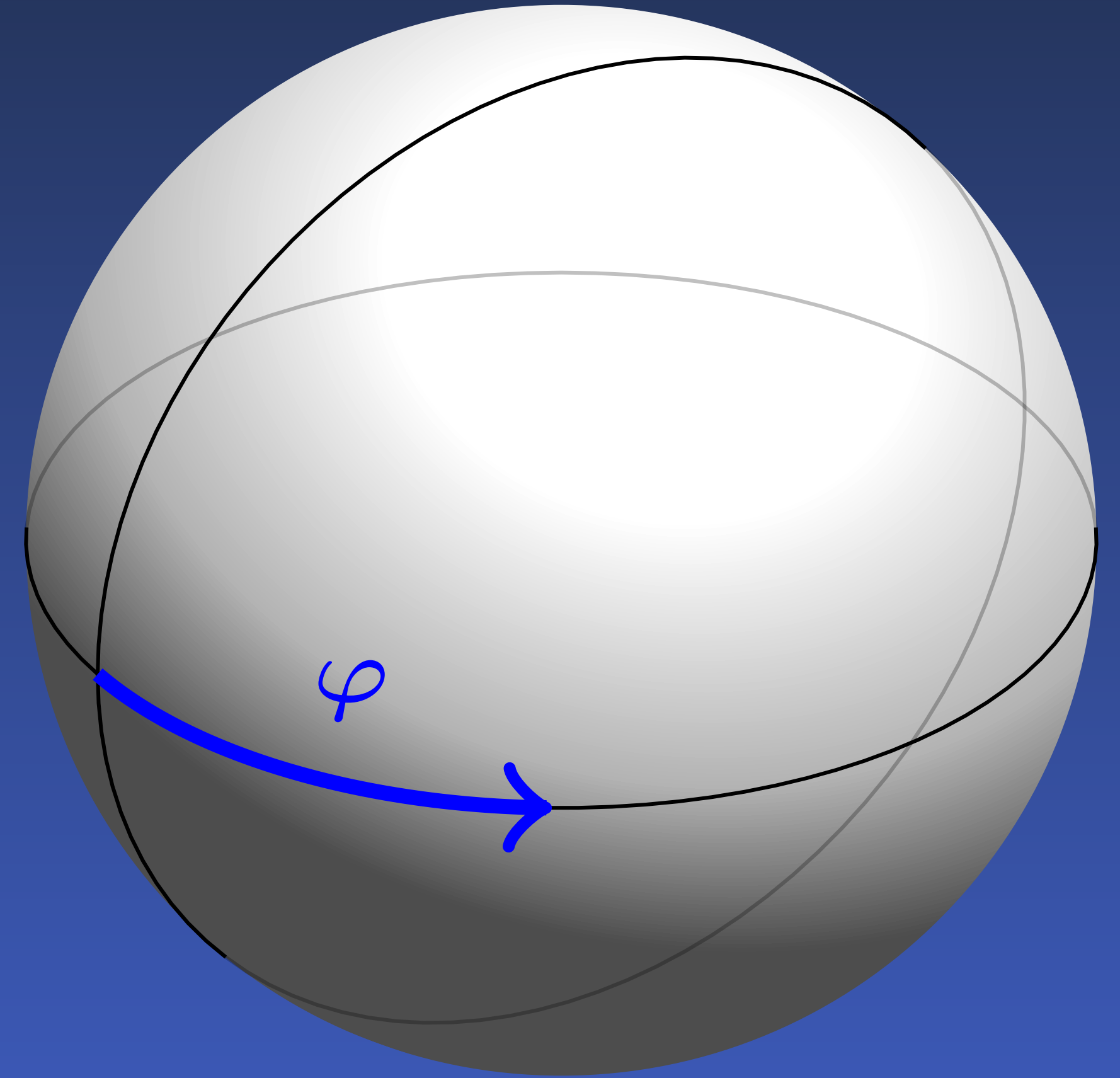


Un cas particulier utile : les états “de phase”

- Définition : état cohérent de spin localisé sur l'équateur :

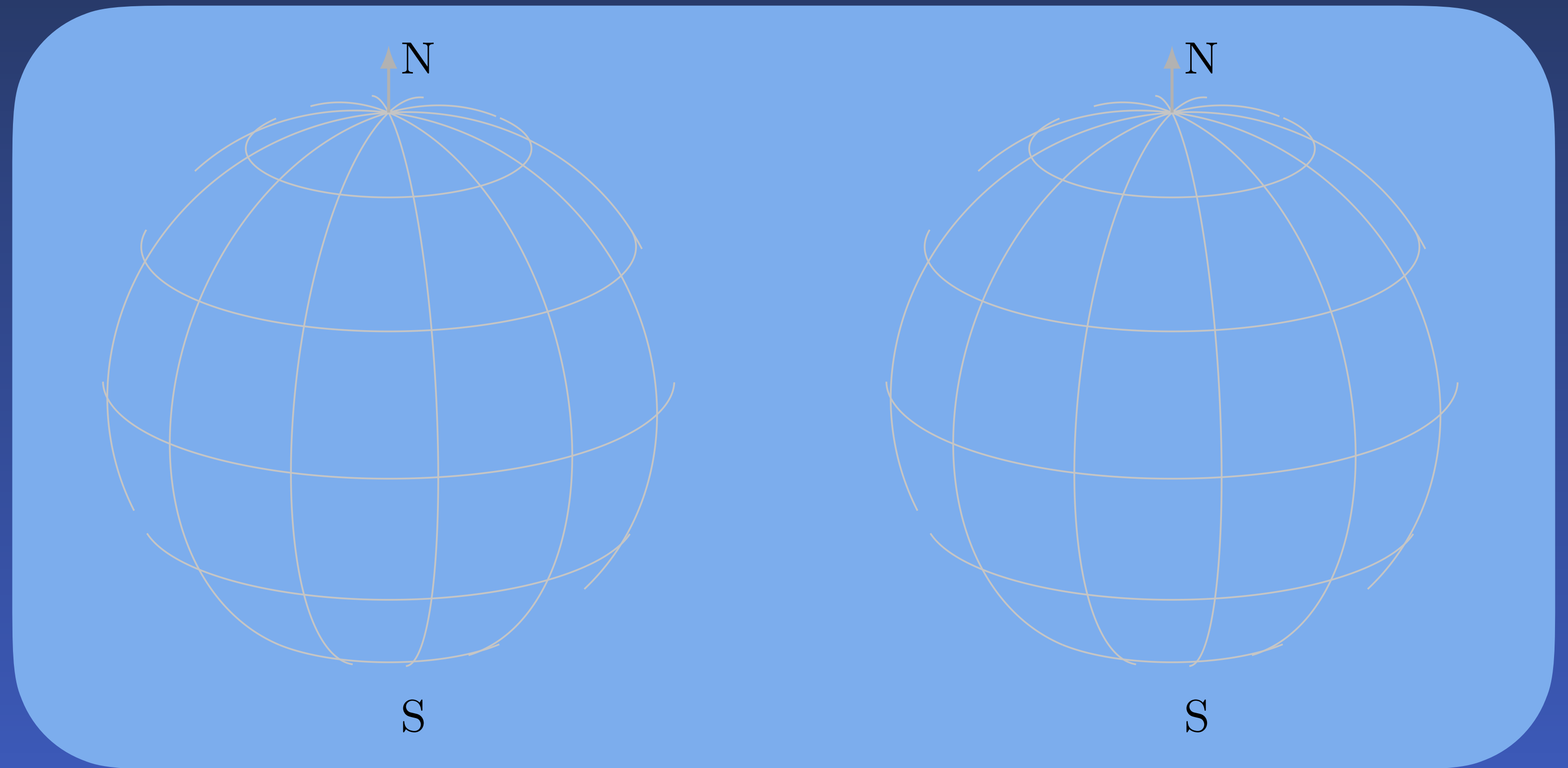
$$|\theta, \varphi\rangle \text{ avec } \theta = \pi/2$$

- Distribution de la variable n pour un état de phase



Outil n°2 : la distribution de Husimi pour un état $|\Psi\rangle$ quelconque de la jonction

- Définition : recouvrement de $|\Psi\rangle$ avec les états cohérents de spin
- Exemples pour $N = 100$



état de phase $|\frac{\pi}{2}, \varphi = 0\rangle$

état nombre $|N_a = \frac{N}{2}, N_b = \frac{N}{2}\rangle$

2.

L'état fondamental de la jonction

Recherche de l'état fondamental par une approche variationnelle

On considère une jonction opérant "à résonance" :

$$\overline{\Delta\mu} = 0 \text{ pour une jonction externe, } \tilde{\Delta} = 0 \text{ pour une jonction interne}$$

$$\text{Hamiltonien } \hat{H} = -\frac{E_J}{N} (\hat{a}\hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{b}) + \frac{E_C}{4} (\hat{N}_a^2 + \hat{N}_b^2) \quad \text{avec } E_C \geq 0$$

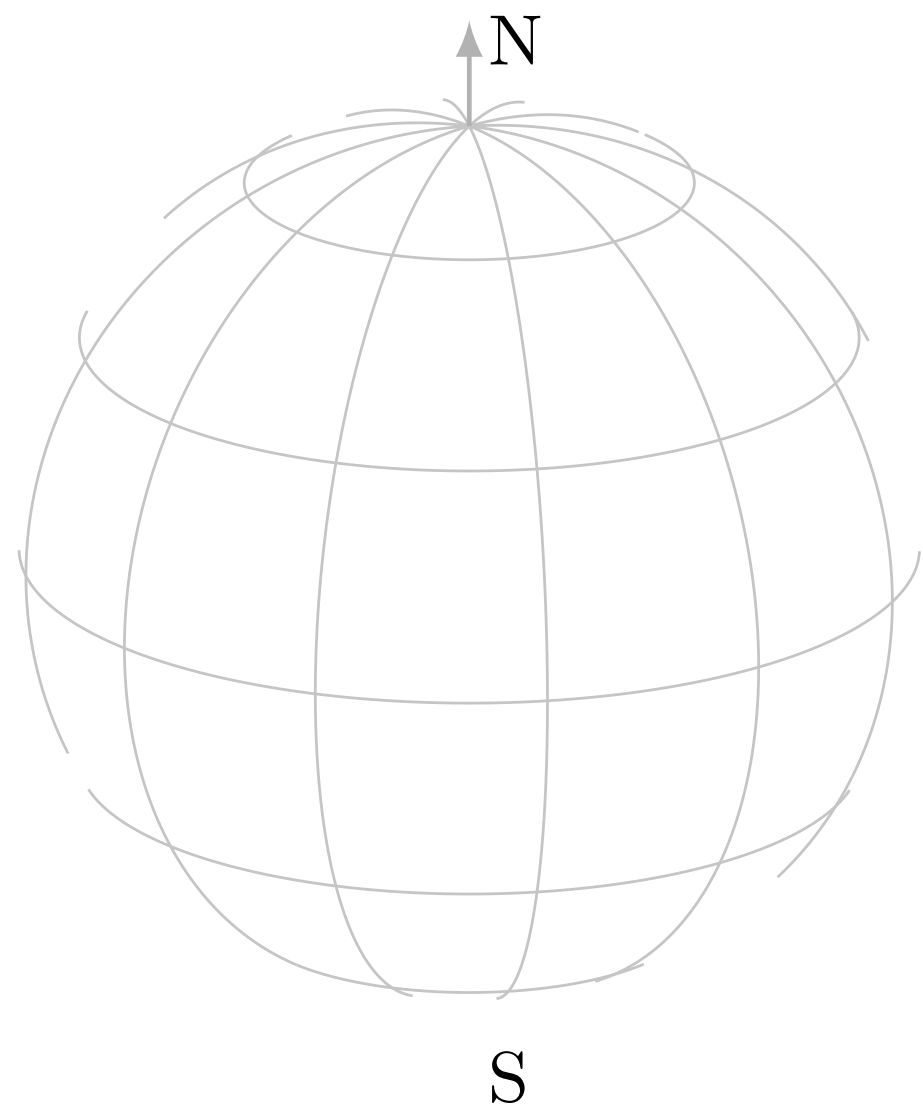
Approche variationnelle avec des fonctions d'essai interpolant entre les états connus pour les deux cas extrêmes :

- le cas $E_C = 0$: $\hat{H} = -\frac{2E_J}{N}\hat{J}_x$ état fondamental $|J, M_x = J\rangle$, c.a.d. l'état de phase $|\frac{\pi}{2}, \varphi = 0\rangle$
- le cas $E_J = 0$: $\hat{H} = \frac{E_C}{4}(\hat{N}_a^2 + \hat{N}_b^2)$ état fondamental $|N_a = \frac{N}{2}, N_b = \frac{N}{2}\rangle$ également noté $|n = 0\rangle$ ou $|J, M_z = 0\rangle$

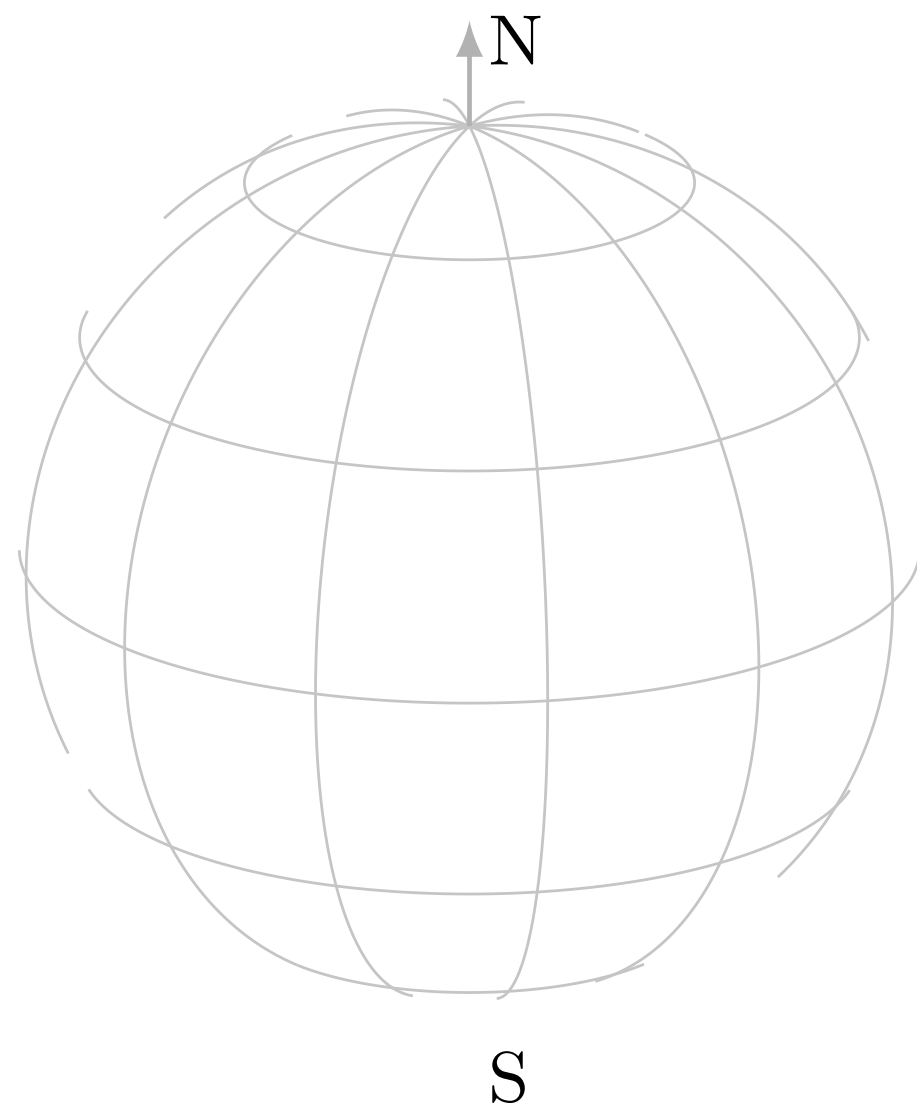
Fonctions d'essai à un paramètre variationnel $|\psi(\zeta)\rangle$

Distributions de Husimi pour ces fonctions d'essai ($N = 100$)

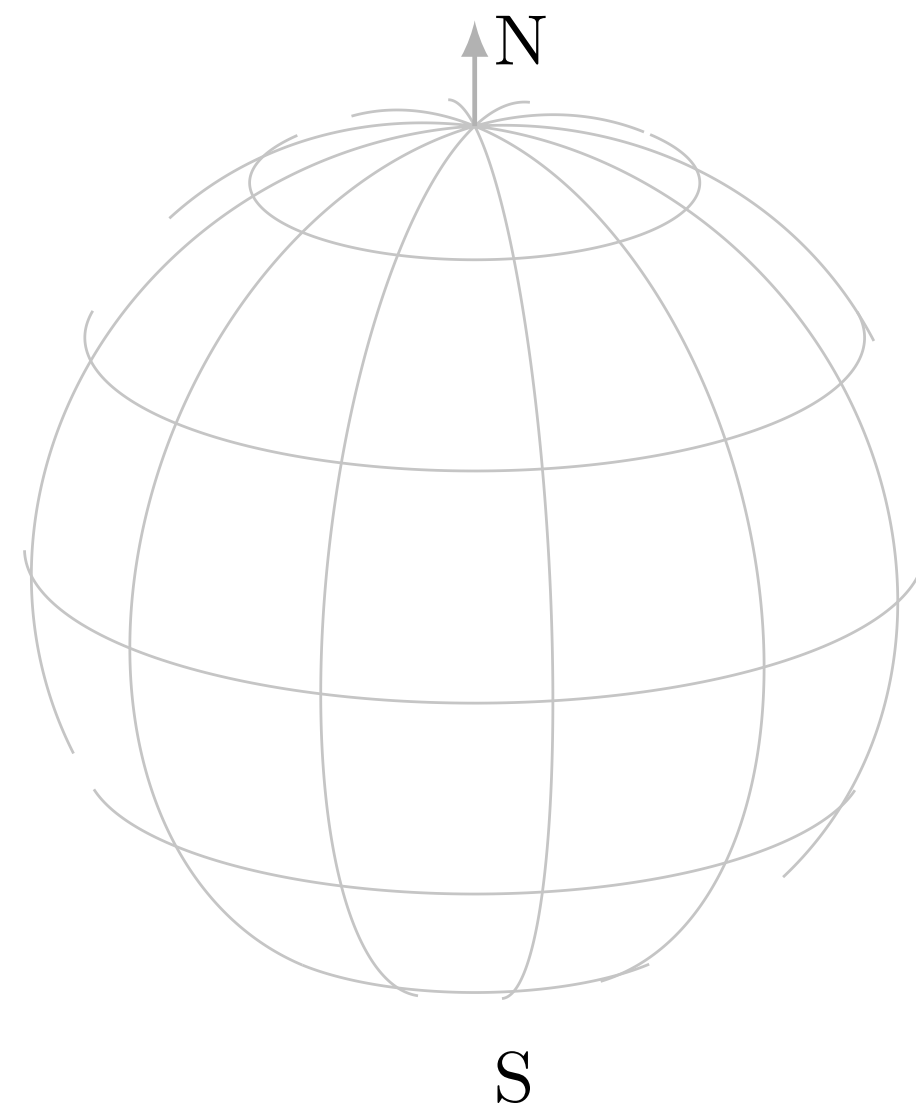
$$|\Psi(\zeta)\rangle \propto \sum_n e^{-\zeta n^2/N} |n\rangle$$



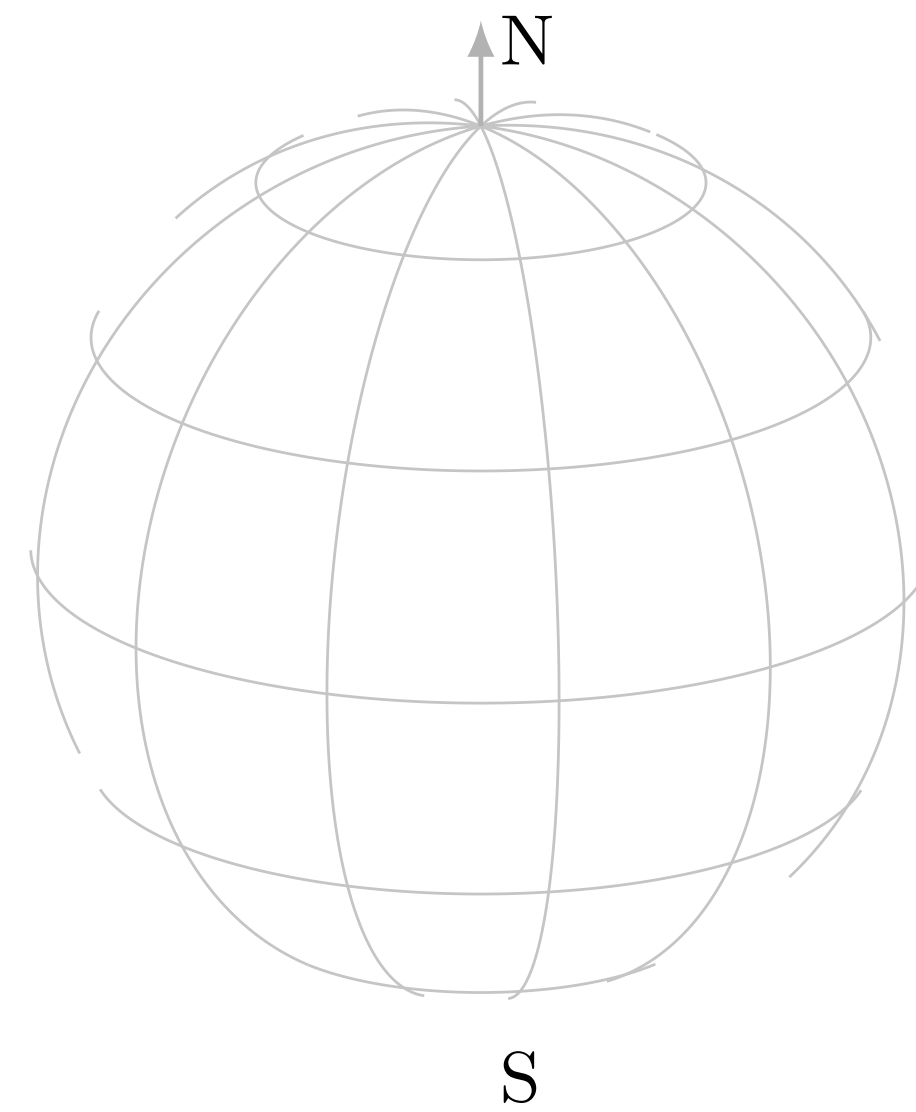
$$\zeta = 1$$



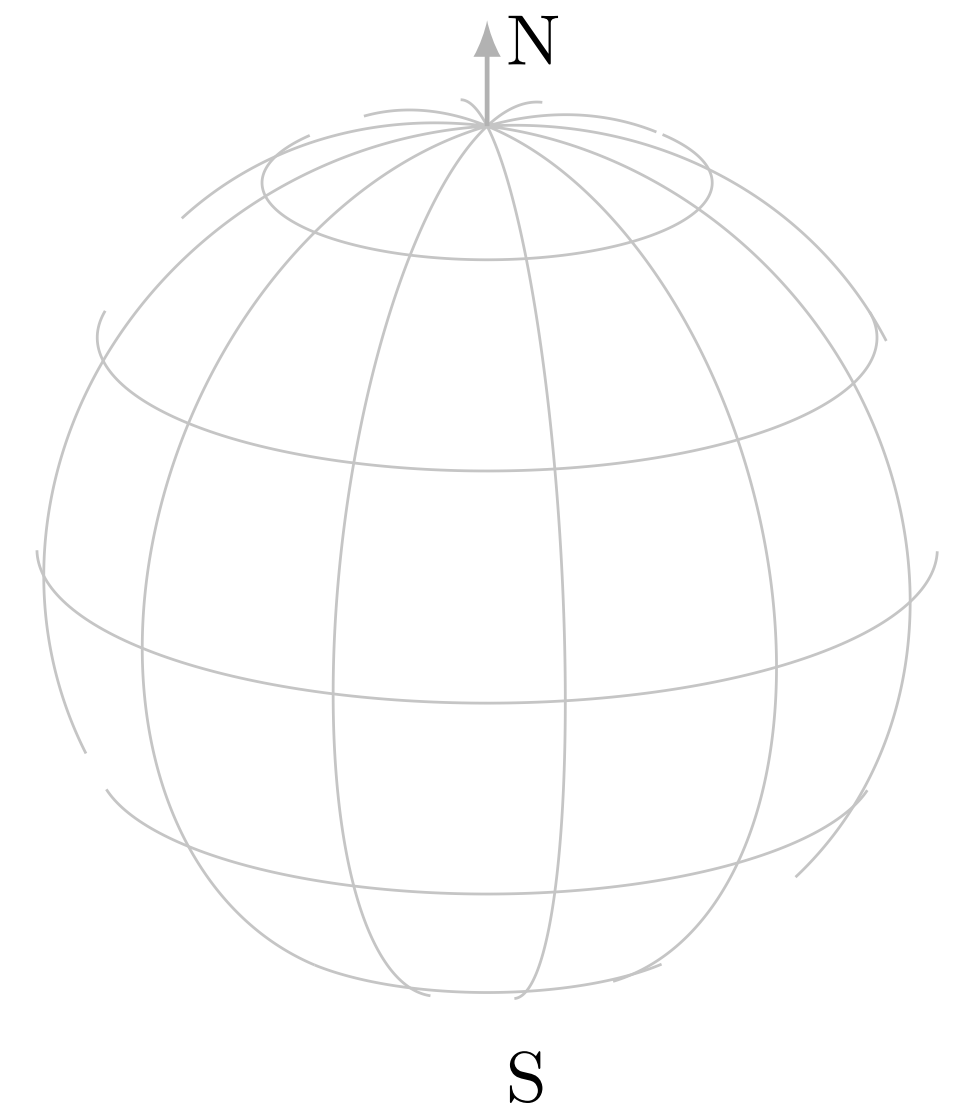
$$\zeta = 2$$



$$\zeta = 5$$



$$\zeta = 10$$



$$\zeta = 50$$

Quelle distribution en phase pour ces états ?

Calcul de l'énergie moyenne pour $|\Psi(\zeta)\rangle$

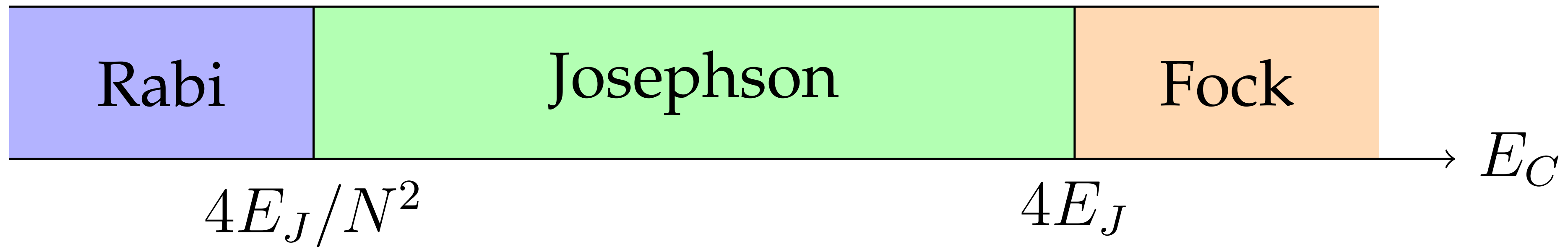
$$E(\zeta) = \langle \Psi(\zeta) | \hat{H} | \Psi(\zeta) \rangle \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \hat{H} = -\frac{E_J}{N} (\hat{a}\hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{b}) + \frac{E_C}{4} (\hat{N}_a^2 + \hat{N}_b^2) \\ |\Psi(\zeta)\rangle \propto \sum_n e^{-\zeta n^2/N} |n\rangle \end{cases}$$

$$\text{Structure du résultat : } E(\zeta) = -E_J f(\zeta) + E_C g(\zeta) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f(\zeta) = \left(1 + \frac{1}{N} - \frac{1}{2\zeta N}\right) e^{-\zeta/2N} \\ g(\zeta) = \frac{N^2}{8} \left(1 + \frac{1}{N\zeta}\right) \end{cases}$$

à minimiser sur ζ pour trouver une approximation de l'état fondamental et de son énergie...

Les trois régimes possibles

terminologie due à A. Leggett



- Le régime de Rabi (petites valeurs de E_C): $\zeta_{\min} \approx 1$

L'état minimiseur est l'état cohérent de spin $|J, M_x = J\rangle$ qui s'écrit aussi $|\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0\rangle$

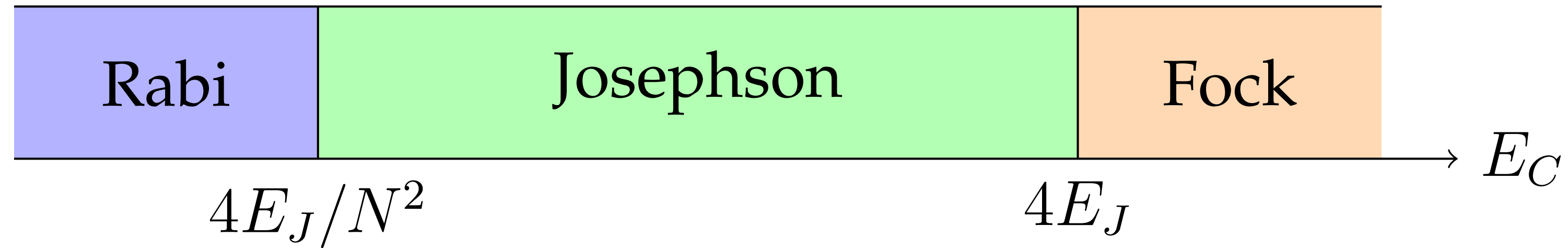
- Le régime Josephson (valeurs intermédiaires de E_C): $1 \ll \zeta_{\min} \ll N$

L'état minimiseur est un état comprimé

- Le régime de Fock (très grandes valeurs de E_C): $N \ll \zeta_{\min}$

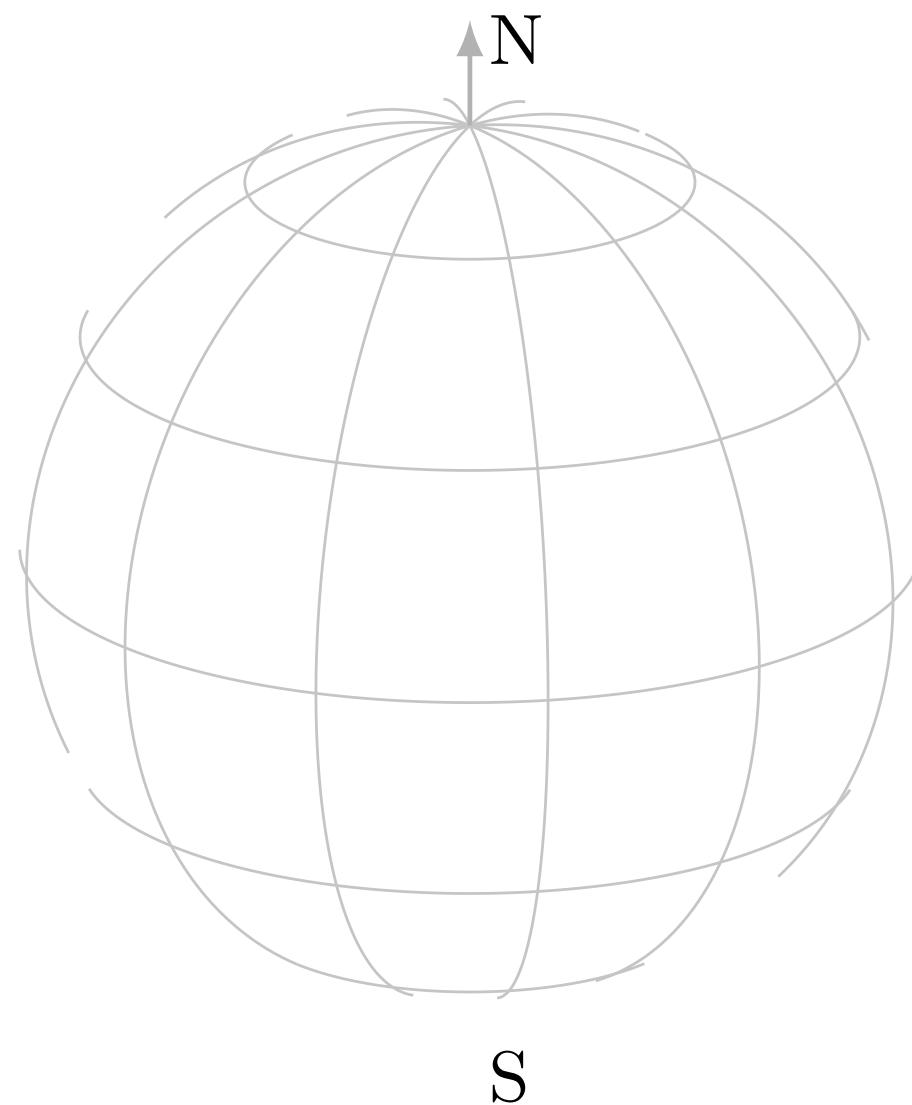
L'état minimiseur est l'état nombre $|n = 0\rangle \leftrightarrow |N_a = \frac{N}{2}, N_b = \frac{N}{2}\rangle$: condensat fragmenté

Le régime de Rabi : état fondamental cohérent



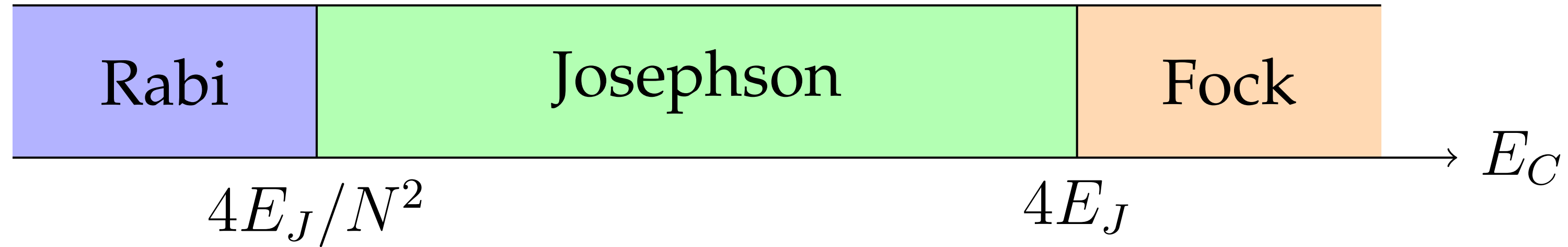
L'état minimiseur est l'état cohérent de spin $|J, M_x = J\rangle$ qui s'écrit aussi $|\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0\rangle$

chaque atome est préparé dans l'état habillé de plus basse énergie

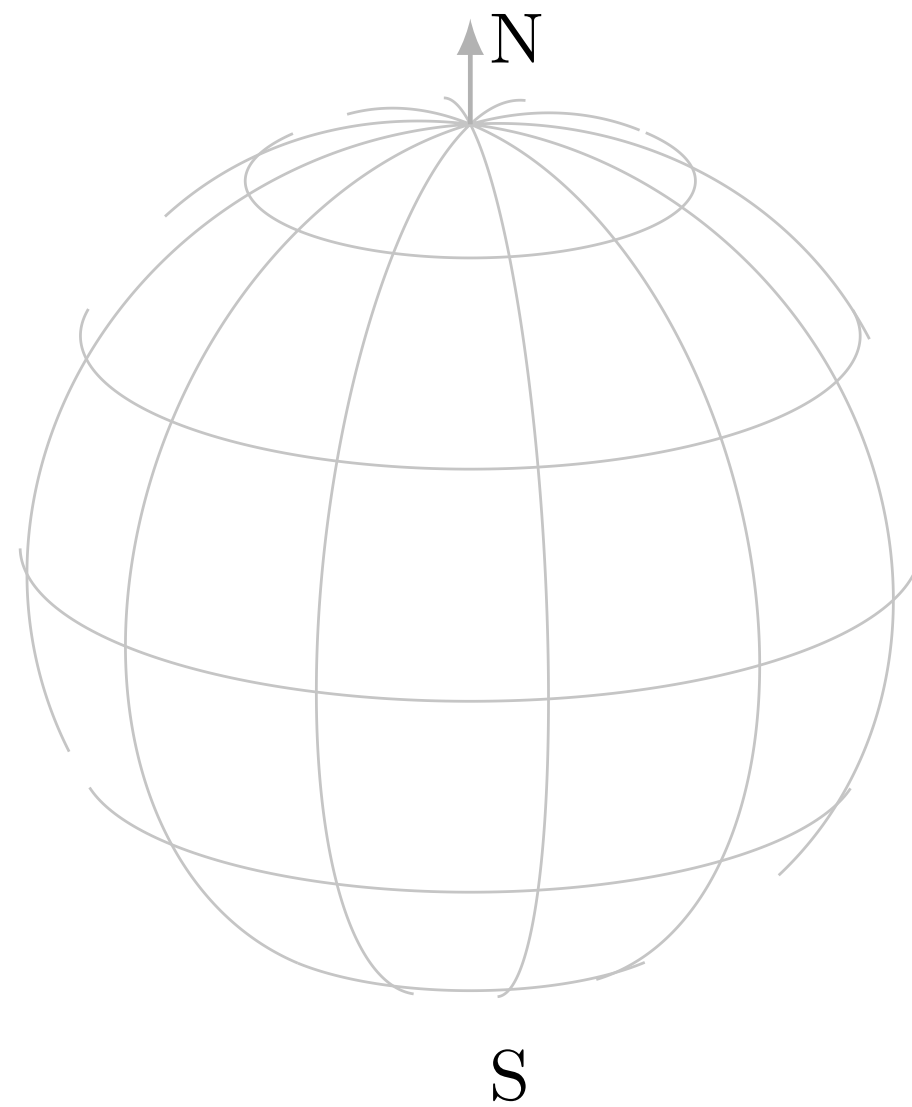


$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Largeur de la distribution en } n : \sim \sqrt{N} \\ \text{Largeur de la distribution en } \varphi : \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \end{array} \right.$$

Le régime Josephson : état fondamental comprimé (en nombre)



L'état fondamental (approché) est obtenu pour $1 \ll \zeta_{\min} \ll N$ $\zeta_{\min} \approx \frac{1}{2} \sqrt{N^2 E_C / E_J}$



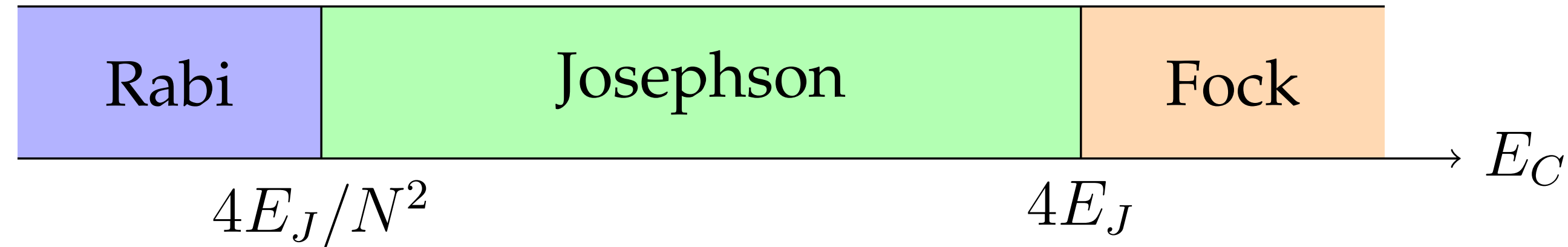
Distribution en n réduite par rapport à un état cohérent :
 $1 \ll \Delta n \ll \sqrt{N}$

Distribution en φ augmentée : $\frac{1}{\sqrt{N}} \ll \Delta\varphi \ll 1$

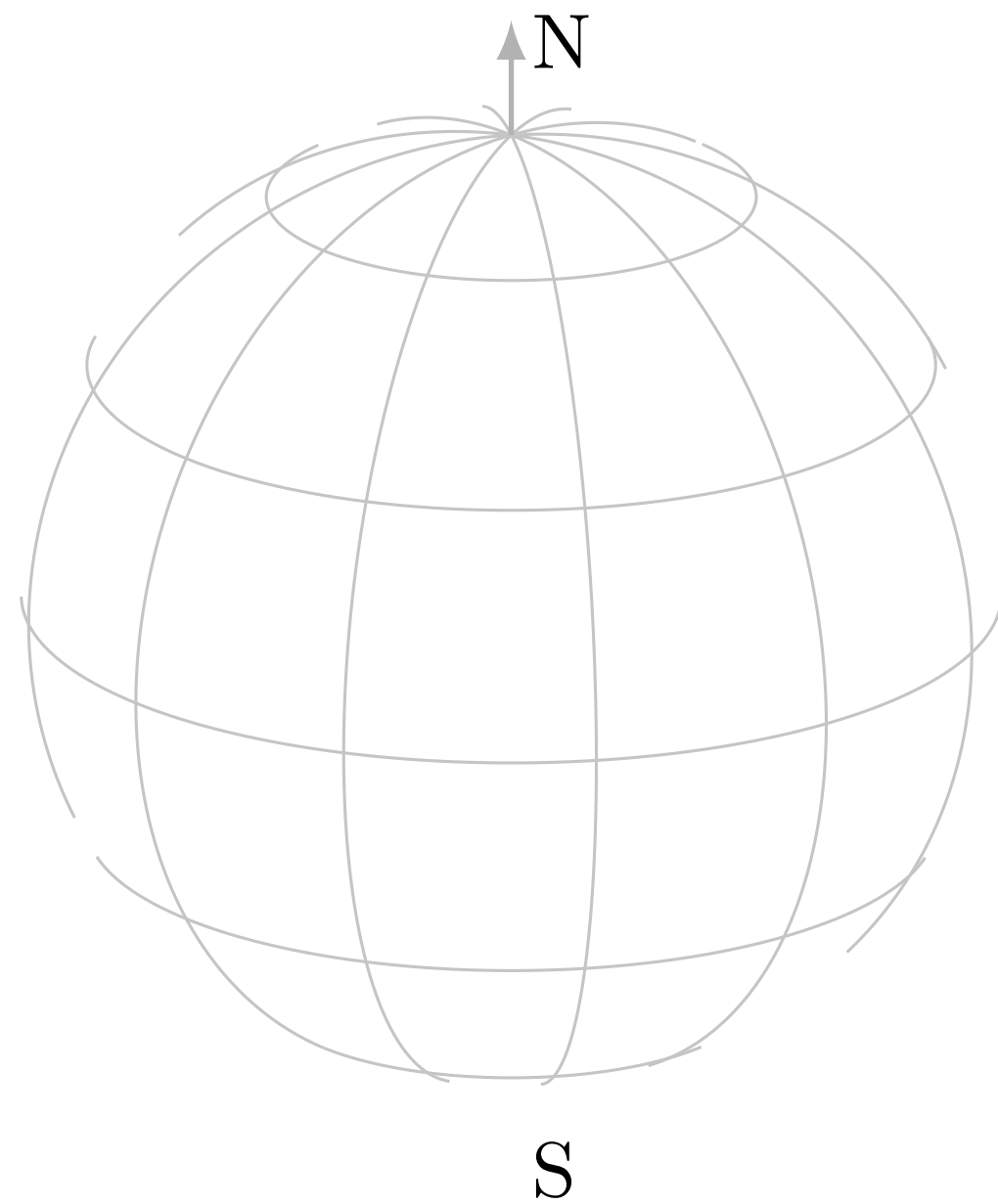
on a toujours $\Delta n \Delta\varphi \sim 1/2$

Le régime de Fock : état nombre

$$\hat{H} = -\frac{E_J}{N} (\hat{a}\hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{b}) + \frac{E_C}{4} (\hat{N}_a^2 + \hat{N}_b^2)$$



L'état minimiseur est l'état nombre $|n = 0\rangle$ qui s'écrit aussi $|N_a = \frac{N}{2}, N_b = \frac{N}{2}\rangle$



- { Pas de fluctuations de n : $\Delta n = 0$
- { Phase non définie

Si on néglige le terme en E_J :

$$\overline{\left| \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} - 1 \right\rangle} \quad \begin{array}{c} \updownarrow \\ E_C/2 \end{array} \quad \overline{\left| \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} + 1 \right\rangle} \\
 \left| \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \right\rangle$$

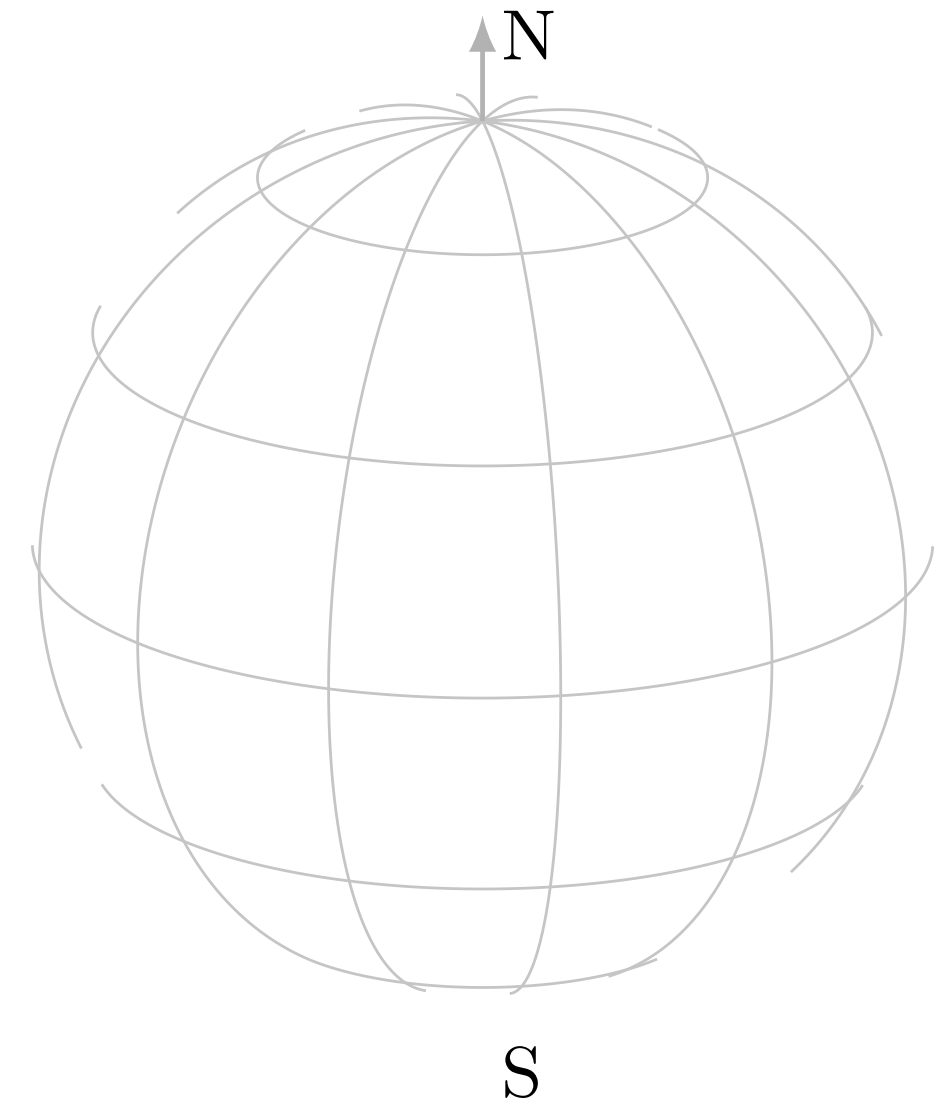
Condensat fragmenté !

Applications métrologiques

Les états $|\Psi(\zeta)\rangle$ avec $\zeta \gg 1$ ont un intérêt métrologique considérable

Supposons que l'on cherche à détecter un processus physique provoquant $|a\rangle \Leftrightarrow |b\rangle$

- Pour un état cohérent de spin (particules indépendantes), avec $\langle N_a \rangle = \langle N_b \rangle = N/2$, une mesure individuelle se fera avec une précision $\sim \sqrt{N}$.
- Pour un état comprimé de spin, une mesure individuelle se fera avec une précision $\sqrt{N/\zeta}$.
- État comprimé "ultime" $|N_a = \frac{N}{2}, N_b = \frac{N}{2}\rangle$: on peut détecter la transition d'un seul atome, c.a.d. le passage vers $|N_a = \frac{N}{2} \pm 1, N_b = \frac{N}{2} \mp 1\rangle$



3.

La relation de commutation nombre-phase

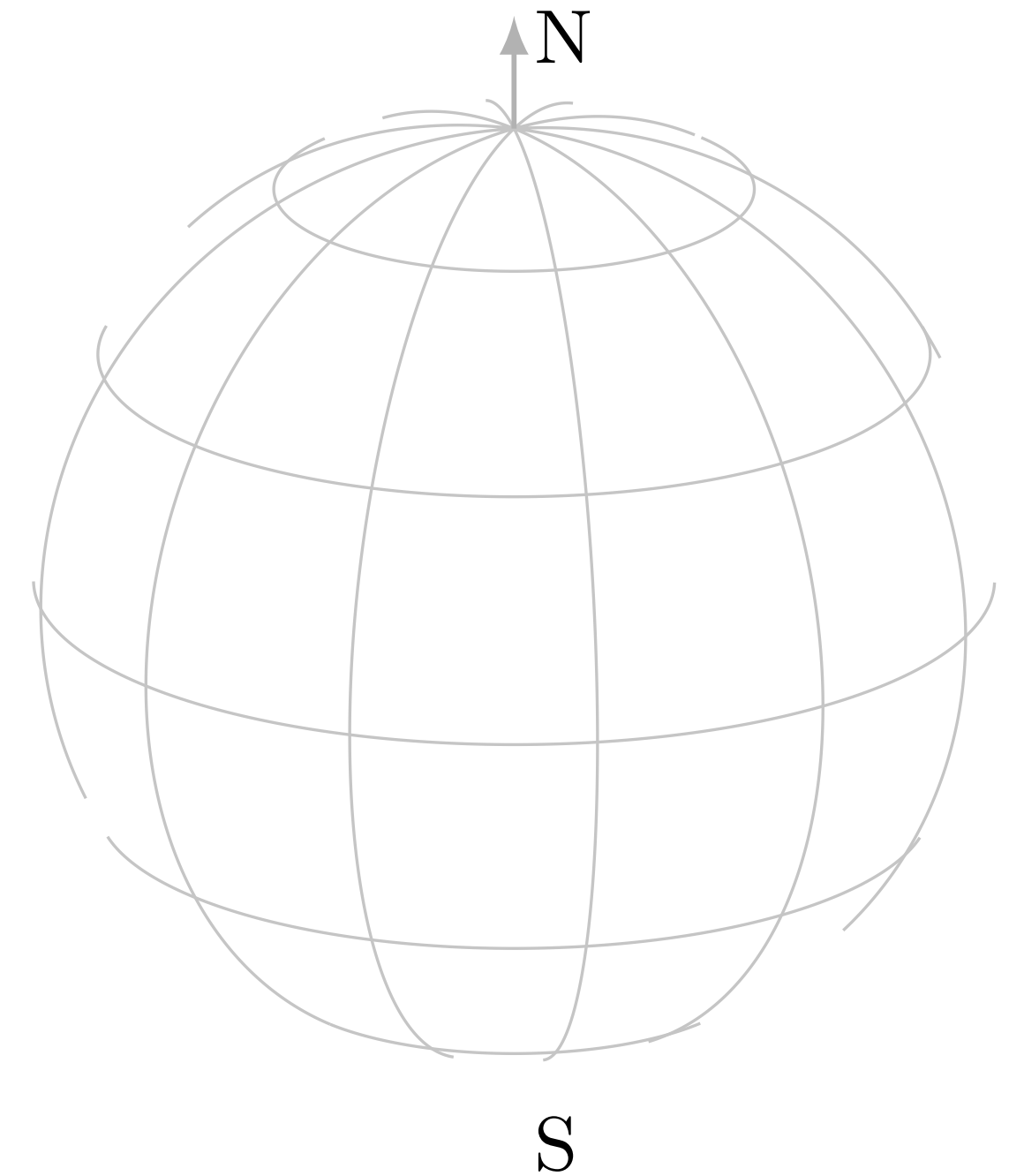
Une question difficile, à la fois pour des photons et des particules matérielles

Opérateur nombre et opérateur phase (?)

La relation $\Delta n \Delta \varphi \sim 1/2$ obtenue pour nos fonctions d'essai suggère l'existence d'opérateurs \hat{n} et $\hat{\varphi}$ vérifiant

$$[\hat{n}, \hat{\varphi}] = i$$

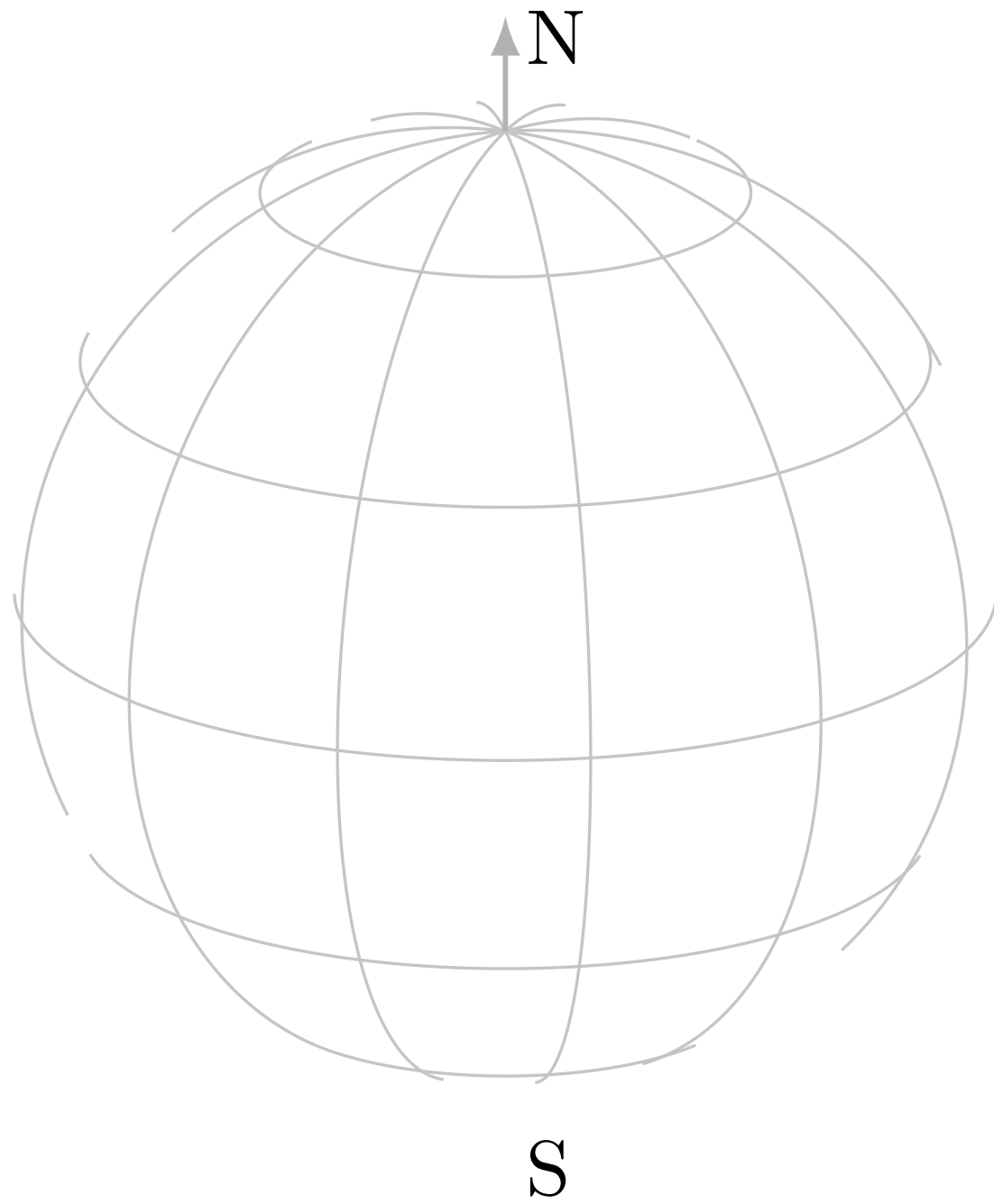
- Pour l'opérateur \hat{n} , pas de problème : $\hat{n} = \frac{1}{2}(\hat{N}_a - \hat{N}_b) = \hat{J}_z$
- Pour l'opérateur $\hat{\varphi}$, plus problématique !



La relation de commutation $[\hat{n}, \hat{\varphi}] = i$ ne peut pas être correcte dans tout notre espace de dimension finie $(N + 1)$

La trace d'un commutateur est toujours nulle, la trace du membre de droite est égale à $i(N + 1)$

Définition approchée d'un opérateur phase



On se limite à des états proches de $|J, M_x = J\rangle$ pour lesquels $\langle \hat{J}_x \rangle \approx J$

- Pour ces états, on définit $\hat{J}_y = -J \hat{\varphi}$ (approximation de $J_y = -J \sin \varphi$)
- On a par ailleurs $\hat{J}_z = \hat{n}$ (toujours vrai)

La relation de commutation exacte $[\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hat{J}_x$ s'écrit alors dans ce cas particulier $[\hat{n}, \hat{\varphi}] \approx i$

Peut-on la généraliser pour en faire une relation plus "robuste" ?

Définition de l'opérateur \hat{E} (pour $e^{i\hat{\varphi}}$)

$$e^{i\hat{\varphi}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i)^k}{k!} \hat{\varphi}^k$$

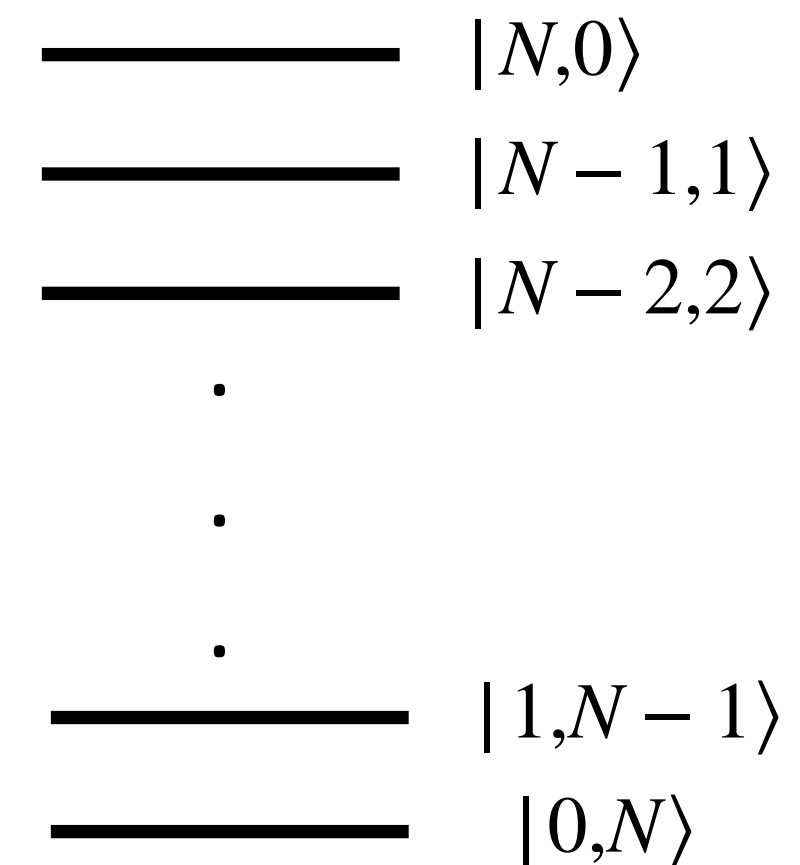
La relation formelle $[\hat{n}, \hat{\varphi}] = i$ se généralise en $[\hat{n}, \hat{\varphi}^k] = ik \hat{\varphi}^{k-1}$ et conduit à $[\hat{n}, e^{i\hat{\varphi}}] = -e^{i\hat{\varphi}}$

Même si $\hat{\varphi}$ n'existe pas, peut-on construire un opérateur \hat{E} qui vérifie $[\hat{n}, \hat{E}] = -\hat{E}$ et dont l'action fournit (par exemple) la phase des états cohérents ?

Oui ! On pose

$$\begin{cases} \hat{E}|n\rangle = |n-1\rangle & \text{si } n \neq -N/2 \\ \hat{E}| -N/2\rangle = 0 \end{cases}$$

$$i.e. \begin{cases} \hat{E}|N_a, N_b\rangle = |N_a-1, N_b+1\rangle \\ \hat{E}|0, N\rangle = 0 \end{cases}$$



Attention ! L'opérateur \hat{E} n'est pas unitaire et la notation $\hat{E} = e^{i\hat{\varphi}}$ peut être trompeuse...

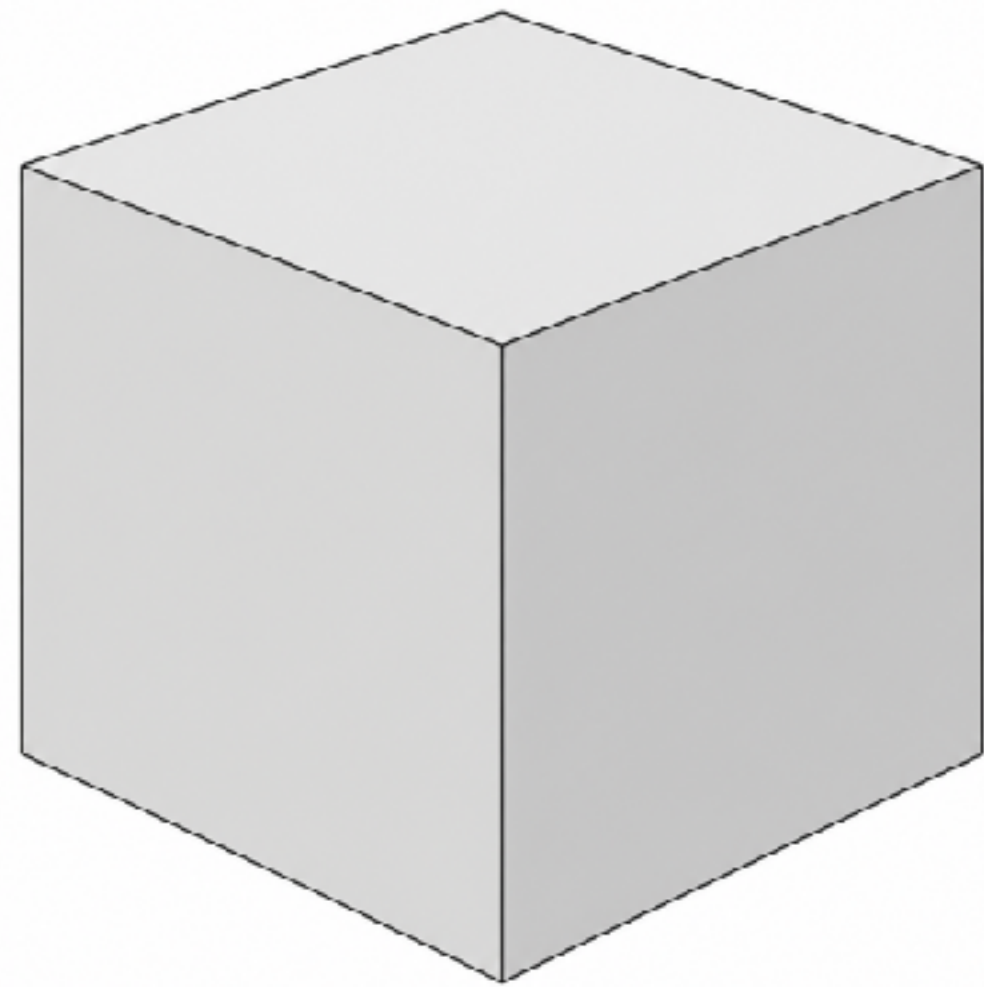
$$\text{On vérifie que } \hat{E}|\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi\rangle \approx e^{i\varphi}|\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi\rangle$$

4.

Un condensat fragmenté

La condensation du gaz parfait

Einstein (1924-25) considère un gaz de N particules obéissant à la statistique introduite par Bose



À température suffisamment basse, une fraction macroscopique des particules s'accumule dans l'état fondamental de la boîte :

États à une particule : $\psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}}$ $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{L^3}}$

- La population Π_0 de l'état ψ_0 est d'ordre N
- Les populations $\Pi_{\vec{k}}$ des autres états $\psi_{\vec{k}}$ sont non macroscopiques :

$$\frac{\Pi_{\vec{k}}}{N} \rightarrow 0 \quad \text{à la limite thermodynamique}$$

On se place à température nulle pour simplifier : le système à N corps est décrit par l'état $\Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$

Parmi tous les états à une particule, quel est celui qui est macroscopiquement peuplé ?

- On calcule la matrice densité à un corps $\hat{\rho}_1$

trace partielle de l'état $|\Phi\rangle$ sur $N - 1$ particules

- On diagonalise $\hat{\rho}_1$: série de valeurs propres positives ou nulles Π_0, Π_1, \dots

Les vecteurs propres associés ψ_j sont des états à une particule, de population Π_j

- Y a-t-il une (ou plusieurs) Π_j macroscopique, i.e. d'ordre N à la limite thermodynamique ?

En général, il y a 0 ou 1 valeur propre macroscopique pour la matrice densité à un corps $\hat{\rho}_1$

1 valeur propre : condensat "traditionnel"

Mais il existe des situations particulières pour lesquelles on prédit plusieurs v.p. macroscopiques

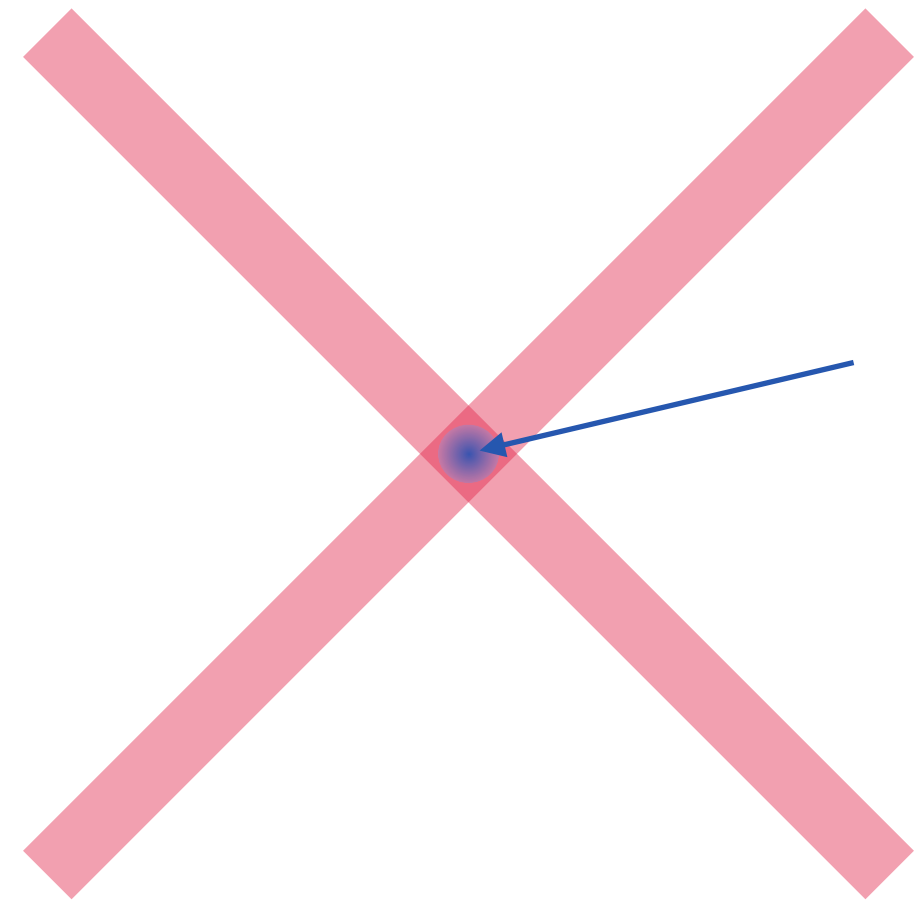
Exemple : l'état fondamental d'une jonction dans le régime de Fock $|\Phi\rangle = \left| \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \right\rangle$

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \hat{b} \rangle \\ \langle \hat{b}^\dagger \hat{a} \rangle & \langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} : \text{les deux états } |a\rangle \text{ et } |b\rangle \text{ sont également peuplés}$$

L'état à un corps est "dépolarisé" alors que le système à N corps est dans l'état pur $|\Phi\rangle$

Mais l'état $|\Phi\rangle$ est très difficile à préparer de façon fiable : autres états très proches en énergie

Un autre type de jonction interne



fonction d'onde $\Phi(\vec{r})$

$$\int |\Phi(\vec{r})|^2 d^3r = 1$$

Gaz d'atomes de sodium (spin 1) dans l'approximation du mode spatial unique : 3 états internes

$$\overline{m = -1}$$

$$\overline{m = 0}$$

$$\overline{m = +1}$$

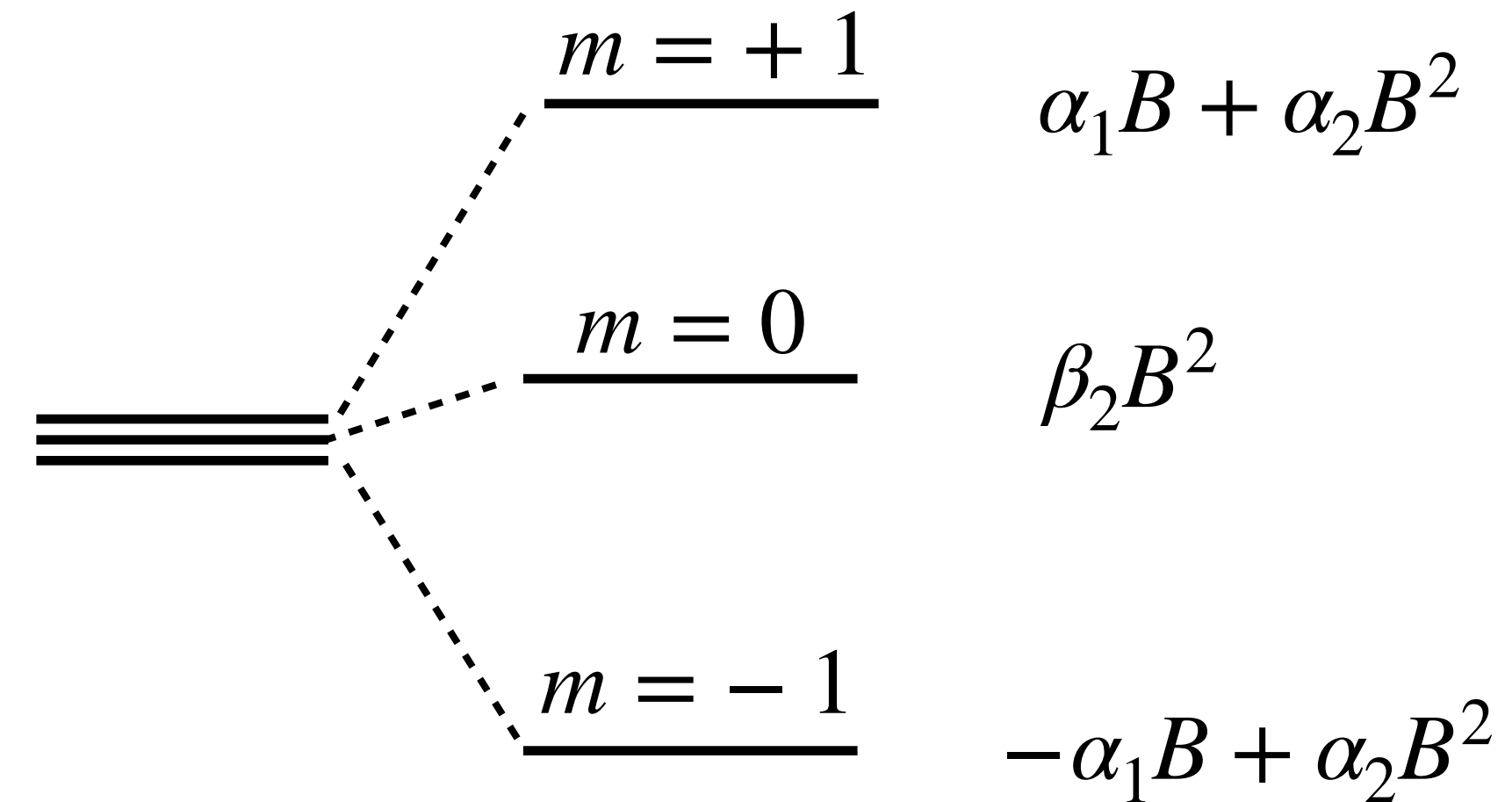
Interactions entre atomes : plusieurs effets possibles parmi lesquels $|0\rangle + |0\rangle \rightleftharpoons |+1\rangle + |-1\rangle$

processus décrit par le terme : $\hat{a}_{+1}^\dagger \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{+1} \hat{a}_{-1}$

qui vient remplacer l'effet tunnel ou le couplage cohérent : $\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}$

L'effet du champ magnétique extérieur

Effet du champ magnétique pris en compte au 2ème ordre inclus :



Pour le processus, $\underbrace{|0\rangle + |0\rangle}_{2\beta_2 B^2} \rightleftharpoons \underbrace{|+1\rangle + |-1\rangle}_{2\alpha_2 B^2}$, les énergies pertinentes sont :

Effet pris en compte par le terme $-q\hat{N}_0$ avec $q = (\alpha_2 - \beta_2)B^2$

L'hamiltonien de cette "jonction"

À l'approximation du mode spatial unique, jonction caractérisée par les deux paramètres p et q :

$$\begin{aligned} \hat{H} = & p \left(\hat{a}_{+1}^\dagger \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{+1} \hat{a}_{-1} \right) && \longleftrightarrow \text{effet tunnel, couplage cohérent : } E_J \\ & - \frac{p}{2} \left(\hat{N}_0^2 + (\hat{N}_{+1} + \hat{N}_{-1})^2 \right) && \longleftrightarrow \text{énergie de charge due aux interactions : } E_C \\ & - q \hat{N}_0 && \longleftrightarrow \overline{\Delta\mu}, \text{ désaccord du couplage cohérent} \end{aligned}$$

Observation de résonances de Shapiro par modulation du champ magnétique extérieur (donc du paramètre q)

L'état fondamental de la jonction en champ magnétique nul ($q = 0$)

Autre écriture de l'hamiltonien $\hat{H} = \underbrace{\frac{p}{2} \hat{S}^2}_{\text{regroupe l'énergie tunnel et l'énergie de charge}} - \underbrace{q \hat{N}_0}_{\text{désaccord}}$

$\hat{\vec{S}} = \sum_{i=1}^N \hat{\vec{S}}_i$: spin total

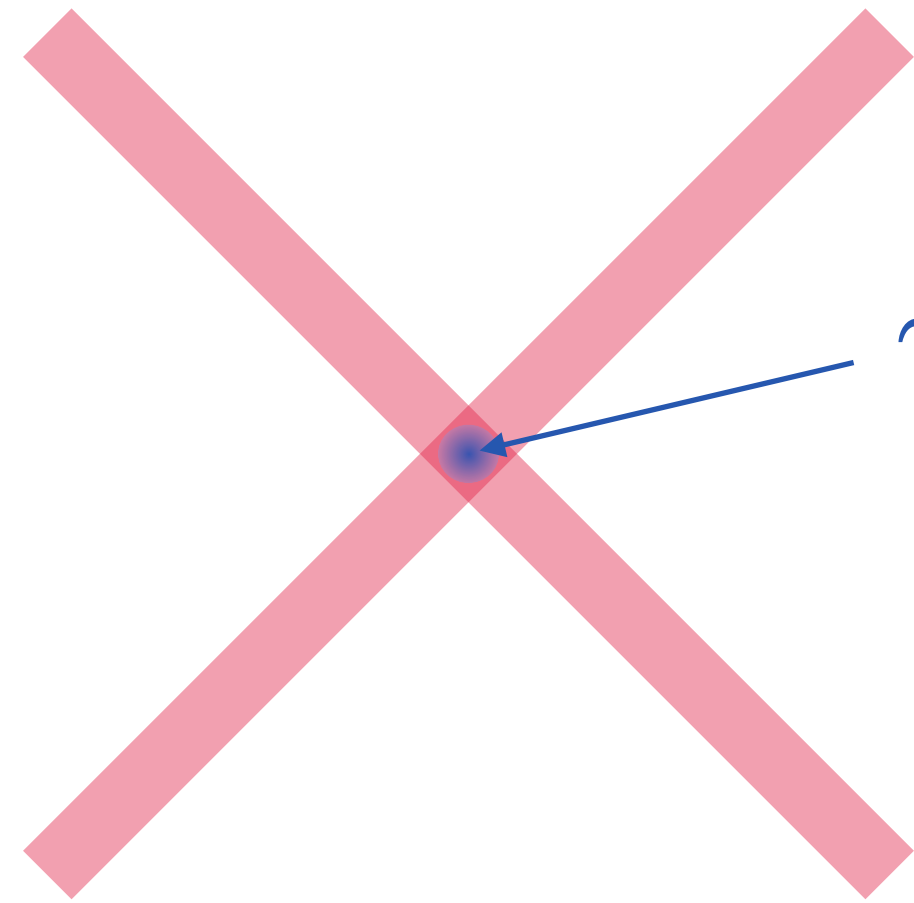
Atomes de sodium : $p > 0$

Pour $q = 0$, l'état fondamental correspond à $S = 0$ si N est pair ($S = 1$ si N est impair)

→ *transposition de l'état* $|\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle$ trouvé pour la jonction $\{|a\rangle, |b\rangle\}$

- État à N corps pur et fortement corrélé

- Matrice densité à 1 corps : $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ **complètement dépolarisé** \Rightarrow **condensat à 3 fragments**
base $\{|m = -1\rangle, |m = 0\rangle, |m = +1\rangle\}$



~ 100 atomes de sodium,
état interne de spin 1

$$\hat{H} = \frac{p}{2} \hat{S}^2 - q \hat{N}_0$$

$$\overline{m = -1} \quad \overline{m = 0} \quad \overline{m = +1}$$

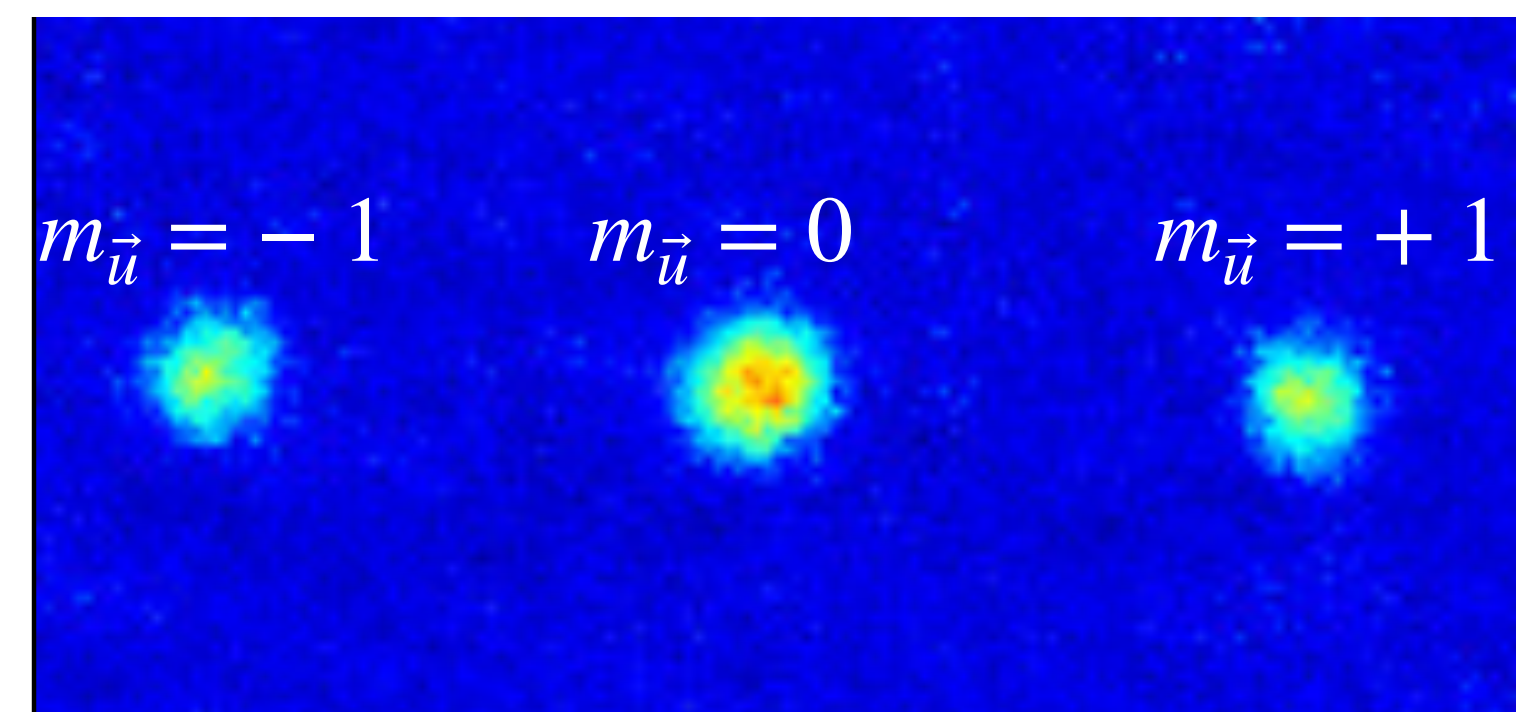
État initial : champ magnétique important, $\hat{H} \approx -q \hat{N}_0$: tous les atomes occupent l'état $|m = 0\rangle$

Rampe lente du champ magnétique jusqu'à $B = 0$: suivi (presque) adiabatique de l'état fondamental

Diagnostic par une expérience de Stern & Gerlach

Mesure des occupations de trois états

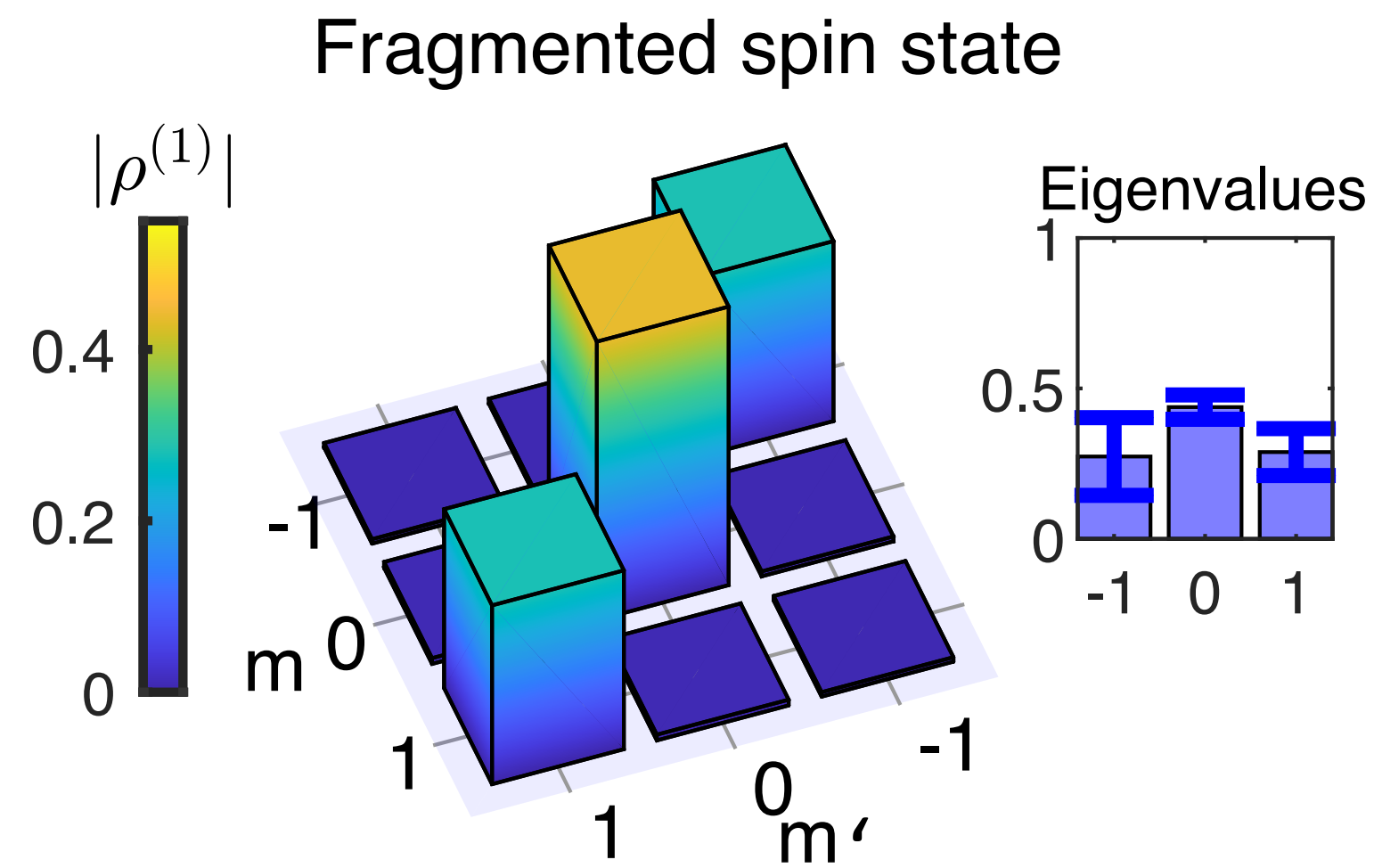
*$m_{\vec{u}} = 0, \pm 1$ selon un axe \vec{u} ajustable
(précision à un atome près !)*



Matrice densité à un corps

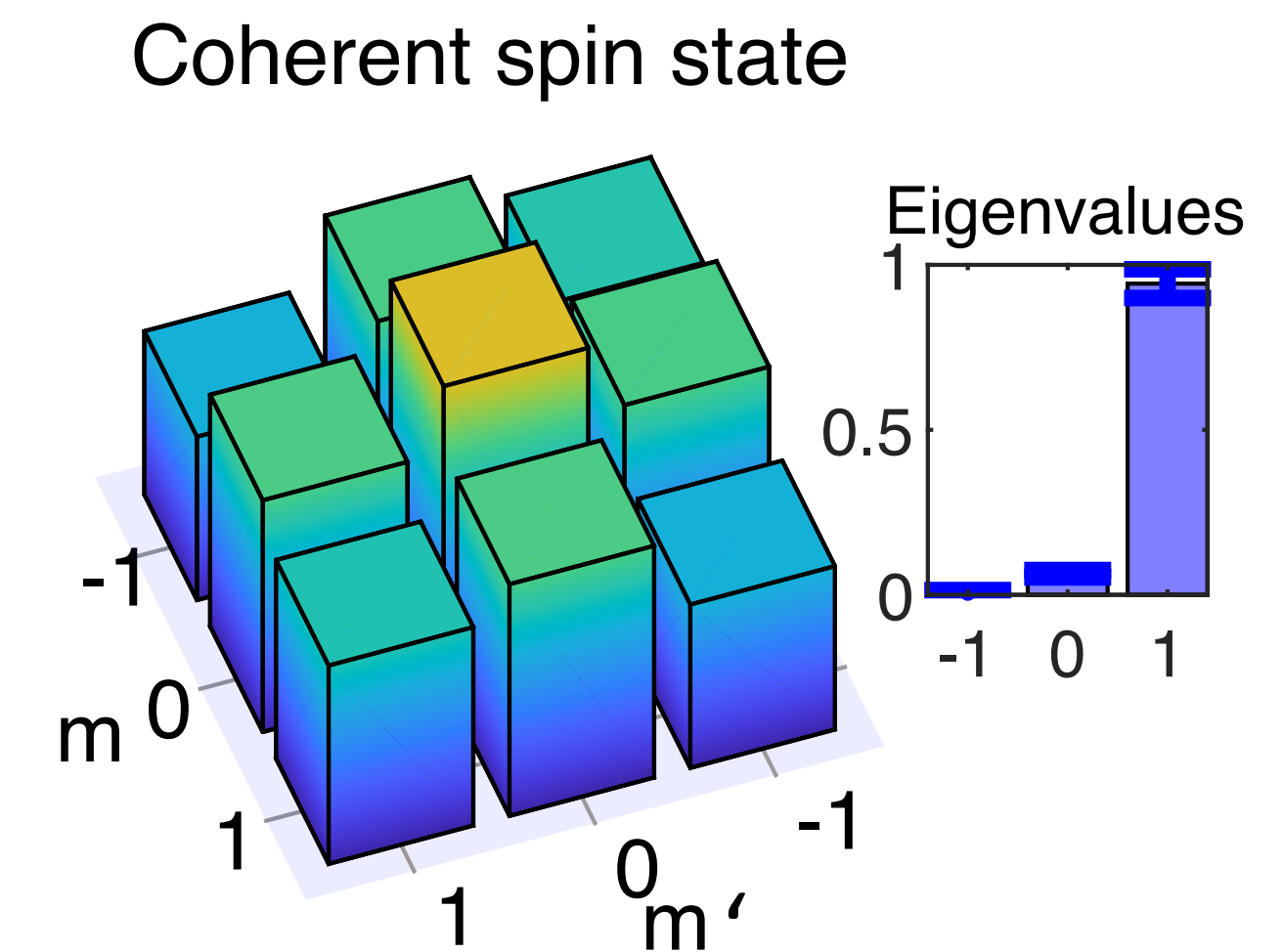
Moyenne de plusieurs milliers de réalisations avec des axes de mesure Stern & Gerlach différents

→ donne accès aux valeurs moyennes $\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_{m'} \rangle$ dans la base $m_z = 0, \pm 1$



\approx matrice d'un spin
complètement dépolarisé

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$



Pour contrôle : résultat obtenu
pour l'état cohérent de spin $|J, m_x = J\rangle$

L'état à N corps est-il bien un état (presque) pur ?

Tomographie complète irréalisable pour 100 particules :
on reconstruit les populations par une méthode de maximum de vraisemblance

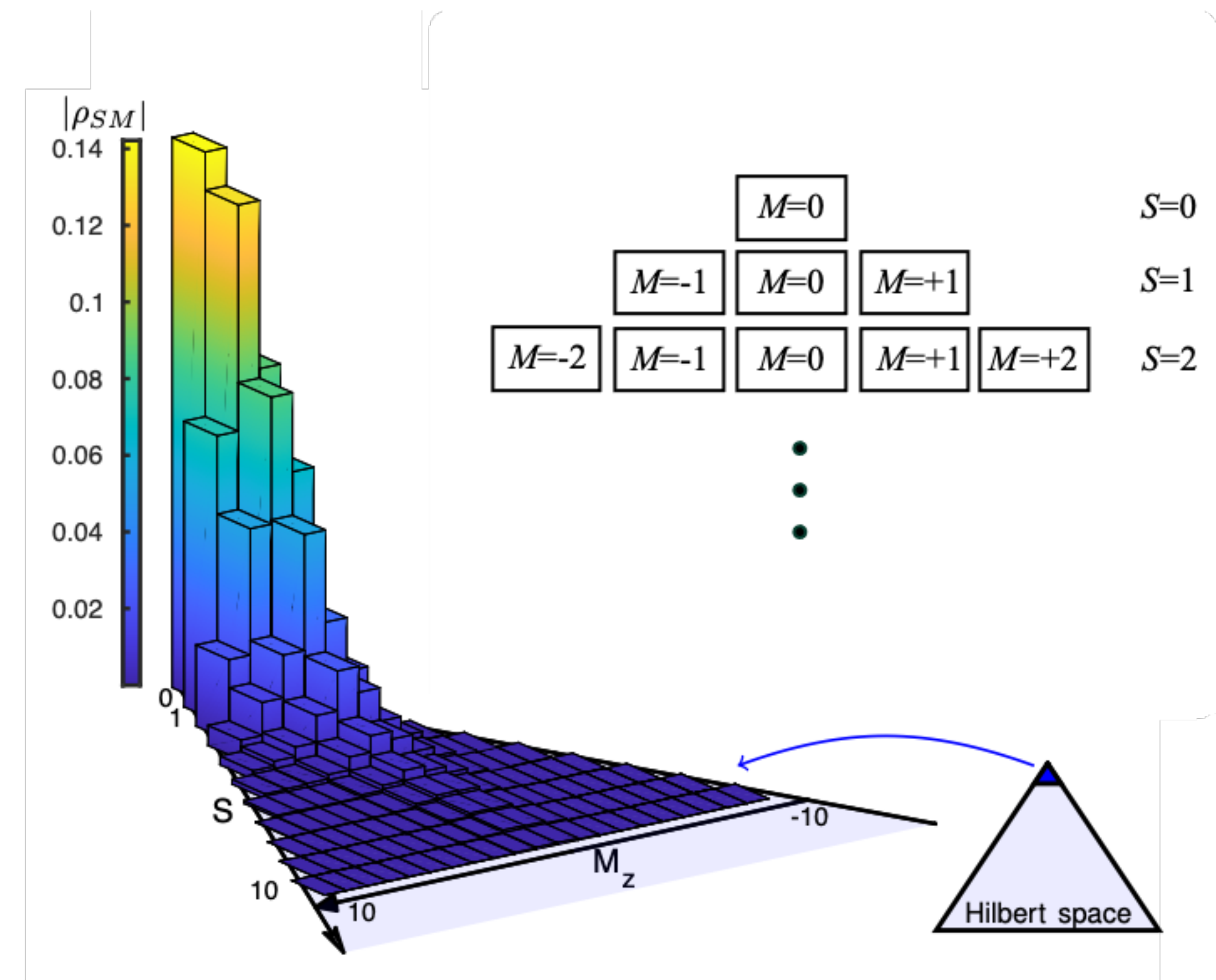
Dimension de l'espace de Hilbert $\sim 10\,000$
états $|S, M\rangle$ avec $S = 0, \dots, 100$ et $M = -S, \dots, S$

Population concentrée sur les très faibles valeurs de S

Pour un état sans corrélation entre spins, on attend

$$\langle \hat{S}^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \langle \hat{s}_i^2 \rangle = 200$$

On trouve ici $\langle \hat{S}^2 \rangle \approx 9$



Conclusions

Caractérisation de l'état quantique fondamental de la jonction sur l'ensemble du domaine de variation de E_C/E_J

- On retrouve les régimes de Rabi et Josephson : état fondamental cohérent ou comprimé
- Identification d'un régime spécifiquement quantique (Fock) pour $E_C > E_J$

condensat fragmenté, mis en évidence pour une jonction interne formée de spins 1

Émergence d'un opérateur phase avec la relation de commutation $[e^{i\hat{\varphi}}, \hat{n}] = e^{i\hat{\varphi}}$

à manier avec précaution car l'opérateur $e^{i\hat{\varphi}}$ n'est pas unitaire

