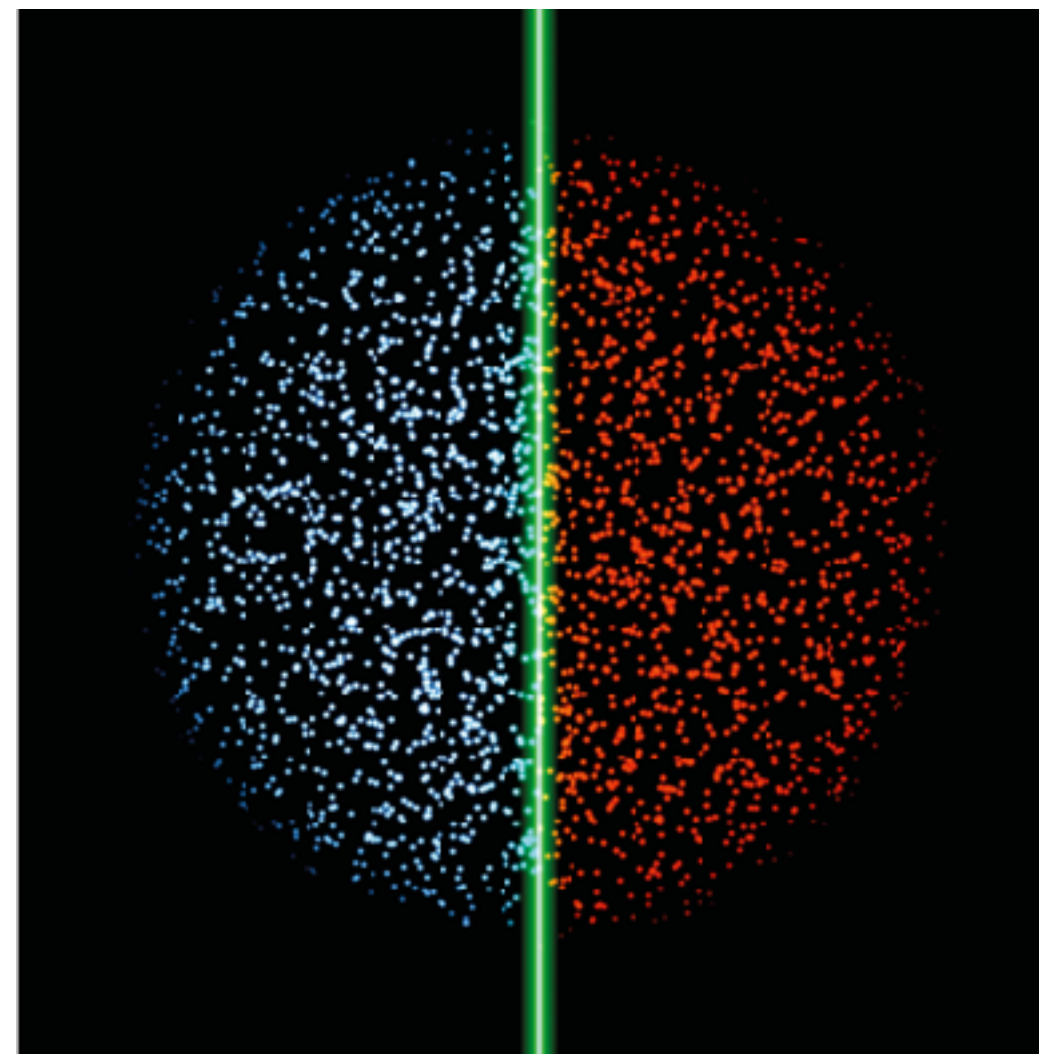


Chaire *Atomes et rayonnement*, cours 2025-26

Fluides quantiques couplés et jonctions Josephson

## Cours 6 : du SQUID supraconducteur au SQUID atomique



diapositives

notes de cours

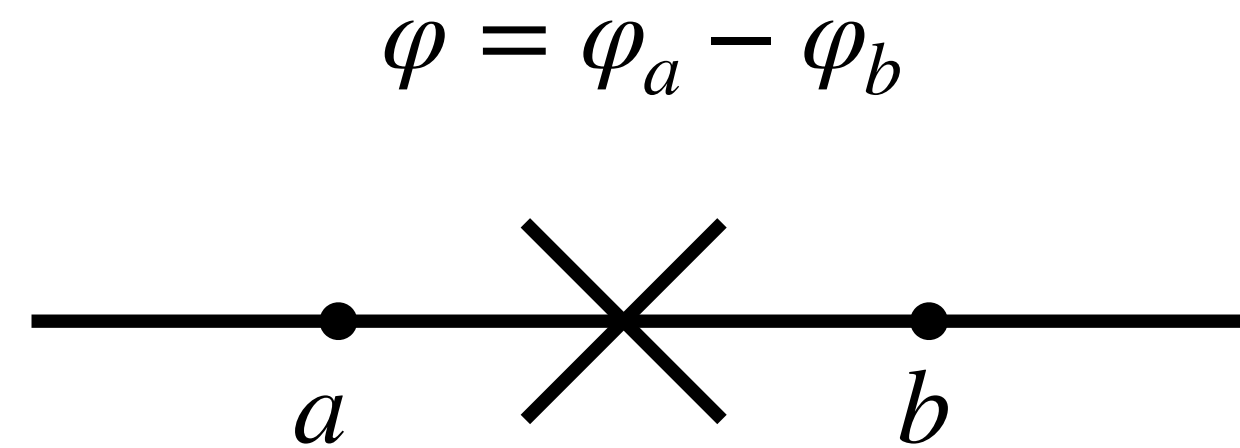
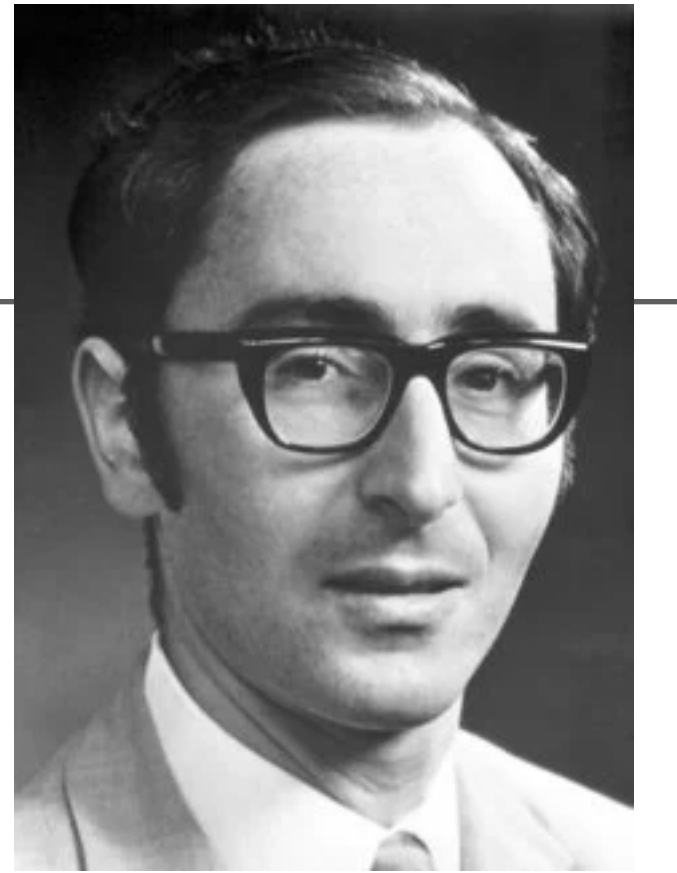
<http://pro.college-de-france.fr/jean.dalibard/index.html>



COLLÈGE  
DE FRANCE  
— 1530 —

Eleni Diamanti, LIP6 Sorbonne Université  
*Ressources et applications des réseaux quantiques*

# Effet Josephson et phase quantique

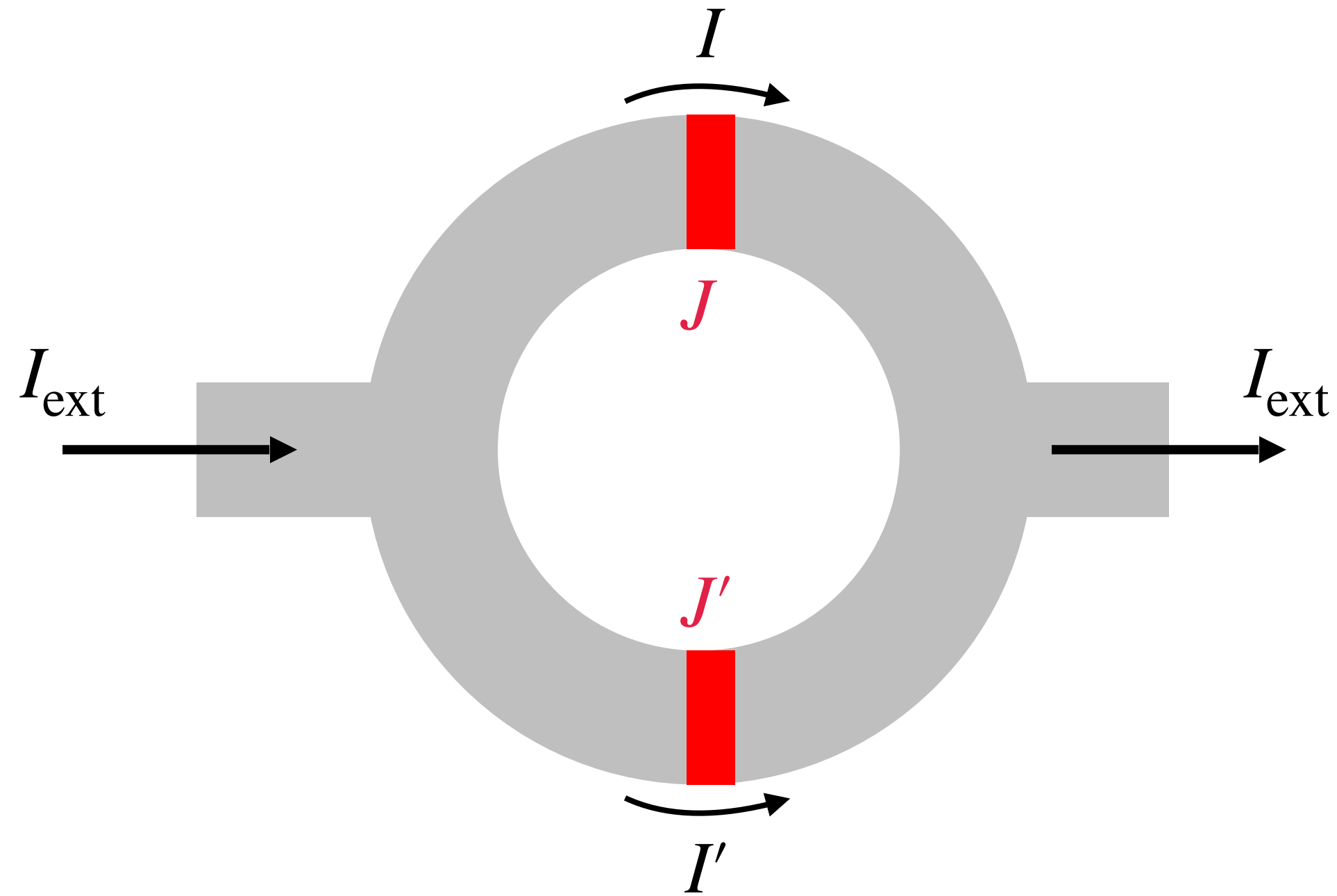


$I = I_c \sin \varphi$  : un courant électrique peut circuler en l'absence de différence de potentiel électrique

P.W. Anderson (1970) :

*In 1962 we had already postulated that superconductivity consisted of coherence of the de Broglie waves representing pairs of electrons inside the superconductor. Prior to Josephson, the phase  $\varphi$  of these macroscopic waves was thought to be unmeasurable in principle ...*

***Comment exploiter cette phase ? Utiliser un phénomène d'interférence !***



Régime non dissipatif :

$$I_{\text{ext}} = I_c \sin \varphi + I'_c \sin \varphi'$$

**Comment faire varier la phase  $\varphi - \varphi'$  ?**    **Que peut-on détecter avec ce dispositif ?**

Réponses : Pour une jonction supraconductrice, sensibilité aux effets magnétiques

Pour une jonction atomique, sensibilité aux effets rotationnels

# Plan de ce cours

---

## 1. le SQUID supraconducteur

*Rôle central de l'invariance de jauge*

## 2. Exemples de qubits supraconducteurs

*Boîte à paires de Cooper, transmon*

## 3. Modélisation d'un SQUID atomique

*L'équivalence "champ magnétique  $\longleftrightarrow$  rotation"*

## 4. Expériences avec des SQUIDS atomiques

## Champ magnétique et invariance de jauge

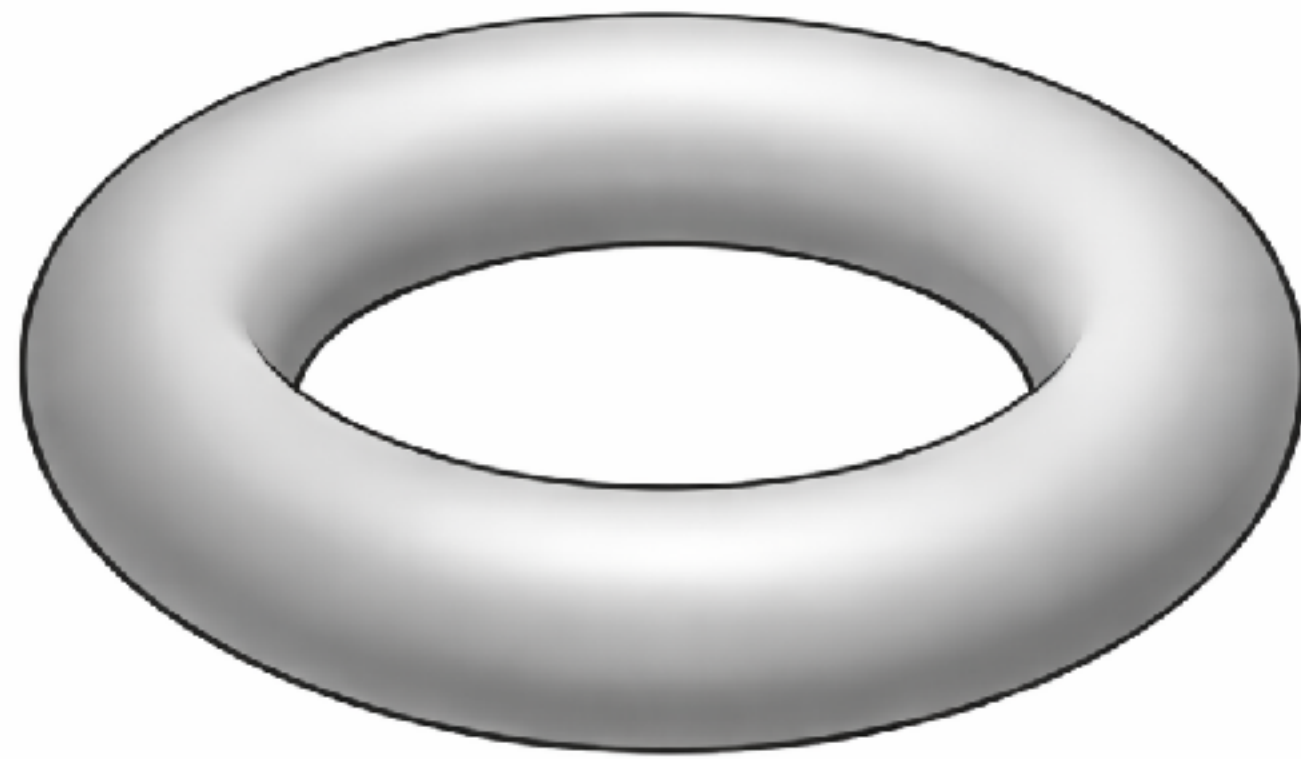
Champ magnétique  $\vec{B}$  et potentiel vecteur  $\vec{A}$

Hamiltonien pour une particule de masse  $m$  et de charge  $q$

Changement de jauge magnétique - changement de jauge quantique

Invariant de jauge le long d'un circuit  $\mathcal{C}$

# Effet Meissner et longueur de pénétration



Courant local à l'intérieur de l'anneau :  $\vec{j}(\vec{r}) = q\rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})$

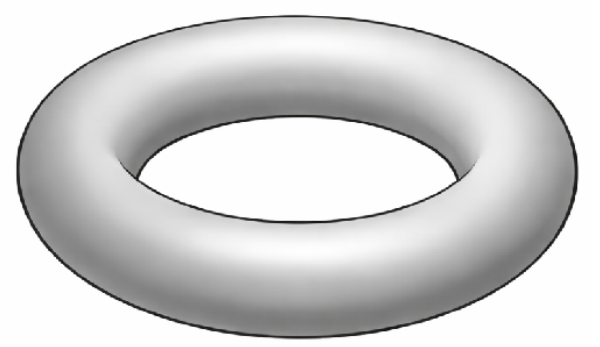
On suppose ici  $\rho(\vec{r}) = \rho_s$  uniforme :

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{q\rho_s}{m} \left[ \hbar \vec{\nabla} \theta - q\vec{A}(\vec{r}) \right]$$

On prend en compte l'équation d'Ampère :  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

*On va pouvoir éliminer  $\vec{j}$  au profit de  $\vec{B}$*

# Effet Meissner et longueur de pénétration (2)



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{j}(\vec{r}) = \frac{q\rho_s}{m} \left[ \hbar \vec{\nabla} \theta - q \vec{A}(\vec{r}) \right] \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array} \right.$$

On prend le rotationnel de la première équation :  $\vec{\nabla} \times \vec{j} = -\frac{q^2 \rho_s}{m} \vec{B}$

On prend le rotationnel de la seconde équation :  $-\nabla^2 \vec{B} = -\frac{\mu_0 q^2 \rho_s}{m} \vec{B}$

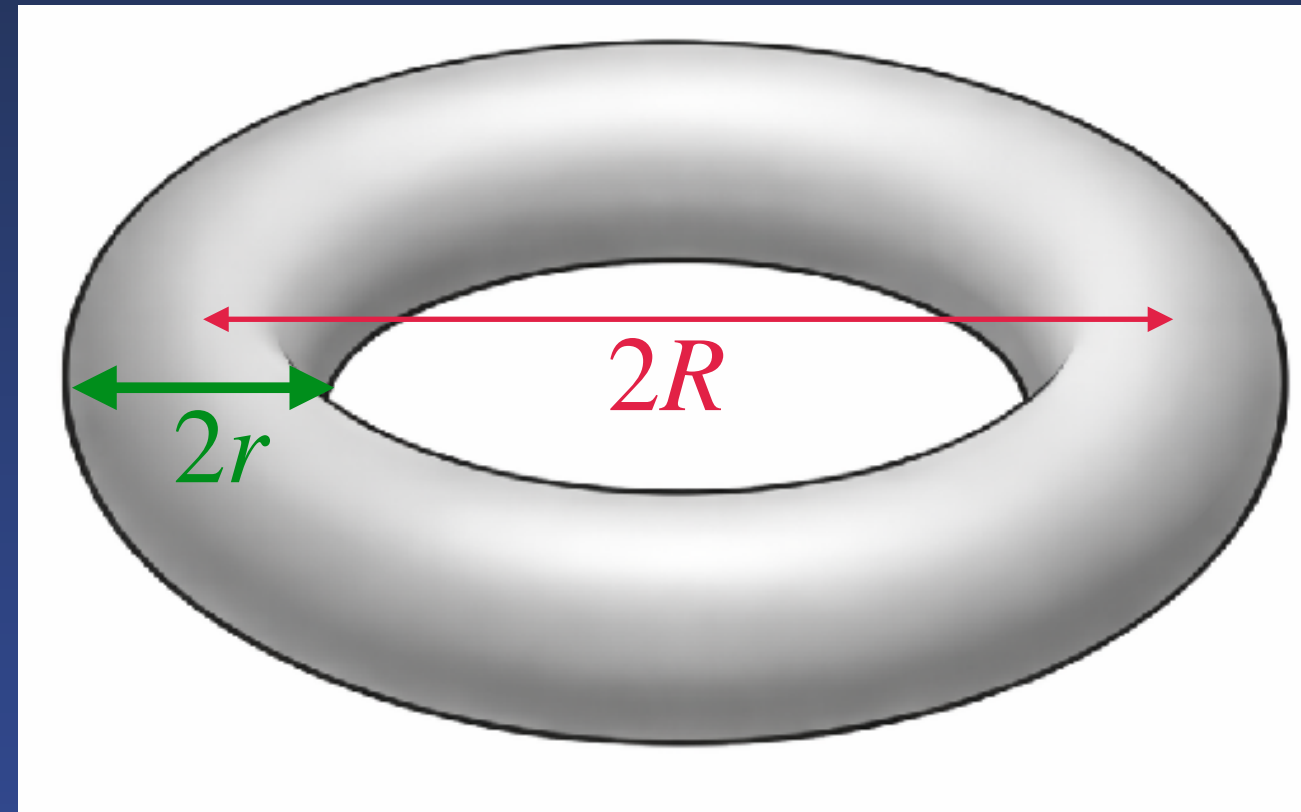
$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B} \quad \text{avec} \quad \lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 q^2 \rho_s}} : \text{longueur de pénétration de London}$$

Pour avoir une intuition, géométrie planaire :  $\frac{d^2 B}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_L^2} B \quad \Rightarrow \quad B(x) = B_0 \exp(-x/\lambda_L)$

*Le champ magnétique  $\vec{B}$  et le courant  $\vec{j}$  tendent exponentiellement vite vers 0 à l'intérieur du supraconducteur : le courant circule en surface et "expulse" le champ du coeur du matériau*

***Pour des supraconducteurs "usuels",  $\lambda_L$  est de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres***

## Anneau supraconducteur et champ magnétique



$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{q\rho_s}{m} \left[ \hbar \vec{\nabla} \theta - q \vec{A}(\vec{r}) \right]$$

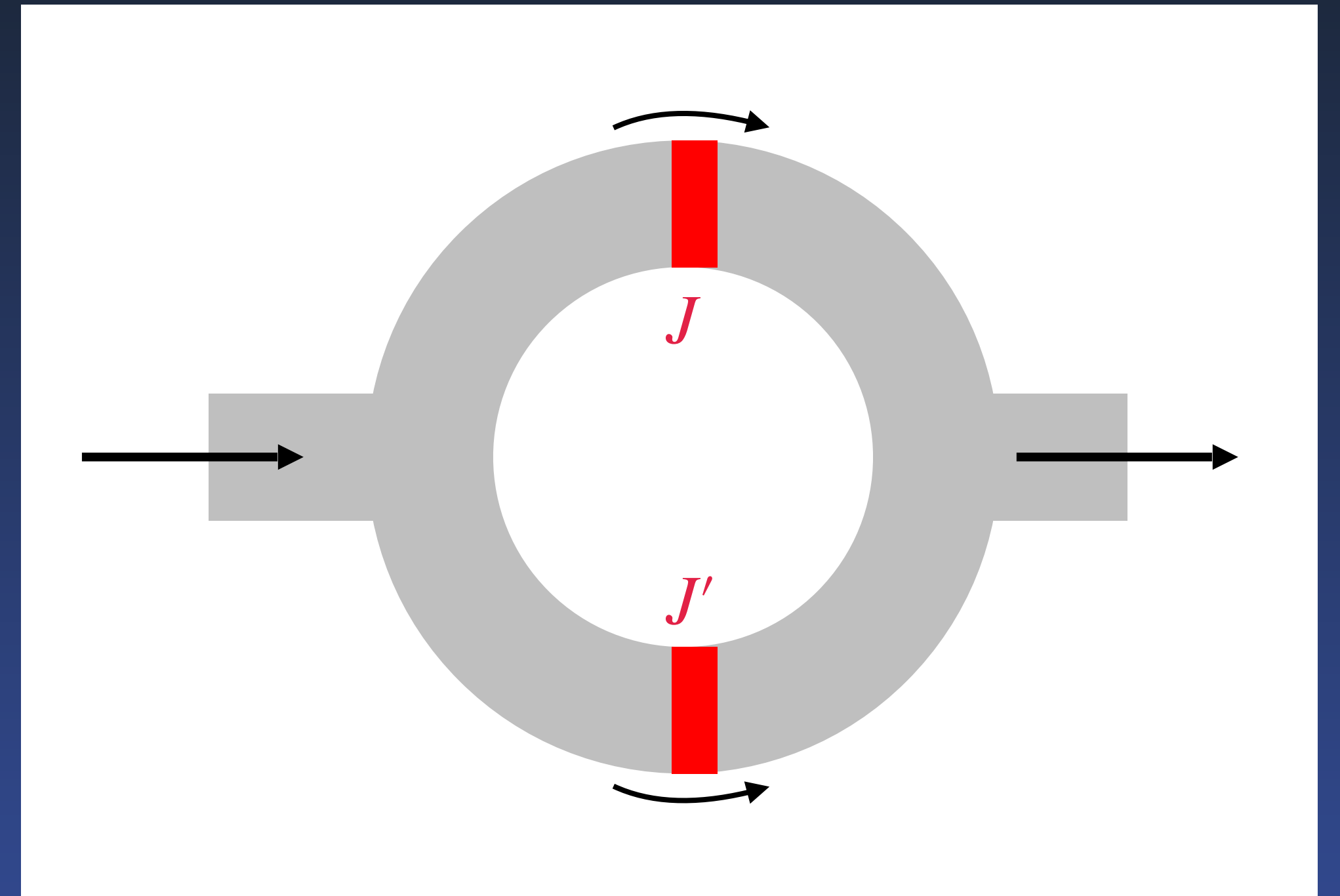
nul au coeur du matériau si  $r \gg \lambda_L$

Quantification du flux total à travers l'anneau :  $\Phi = n\Phi_0$      $\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{|q|}$

*Si on n'a pas  $r \gg \lambda_L$  : quantification du fluxoïde*

## Le SQUID

Définition invariante de jauge des phases  $\varphi$  et  $\varphi'$

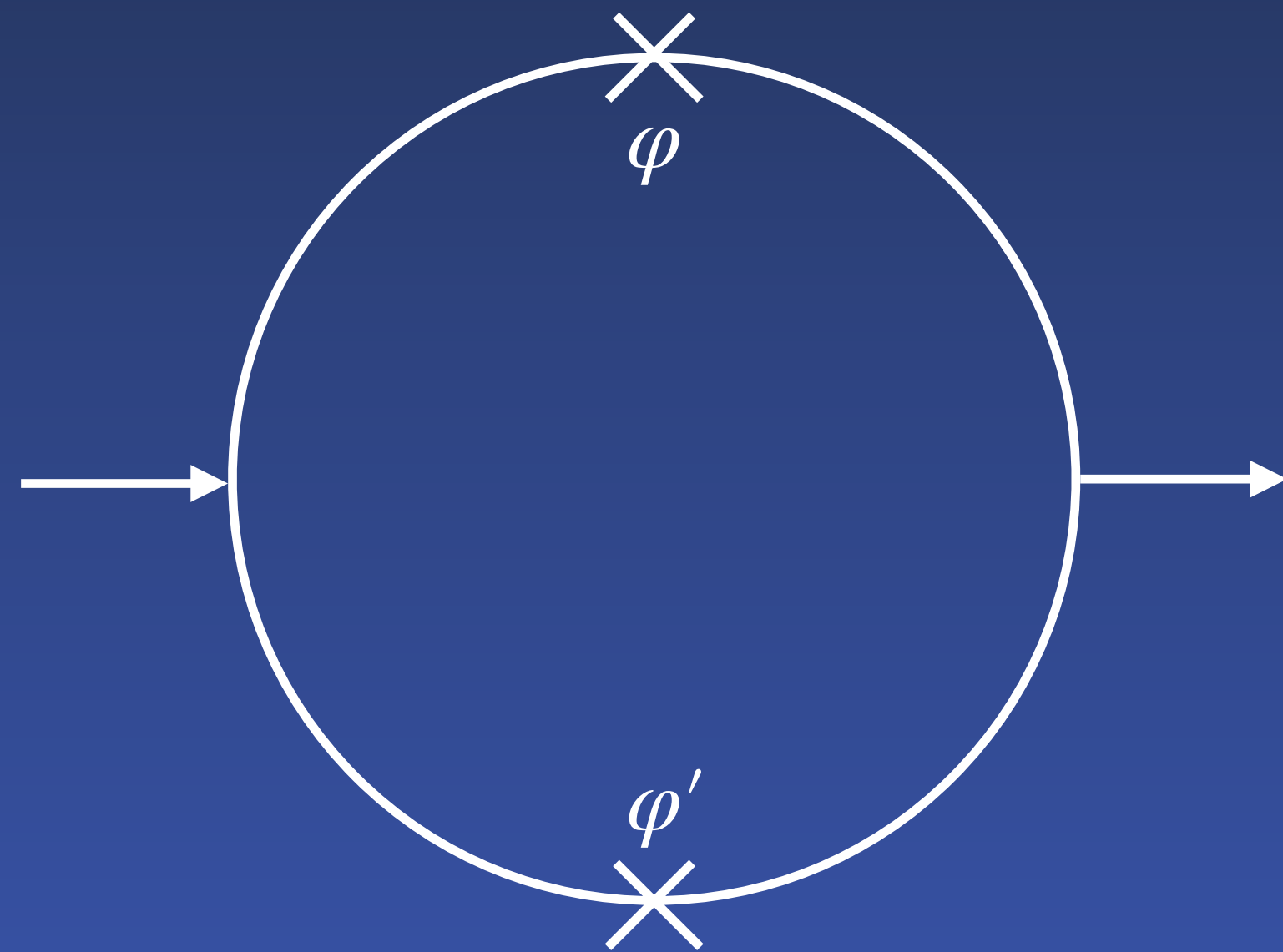


Relation fondamentale du SQUID :

$$\varphi - \varphi' = 2\pi \left( n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi : \text{flux magnétique total à travers l'anneau} \\ \Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{|q|} \end{array} \right.$$

## Le courant total dans un SQUID



Pour simplifier, jonctions identiques :

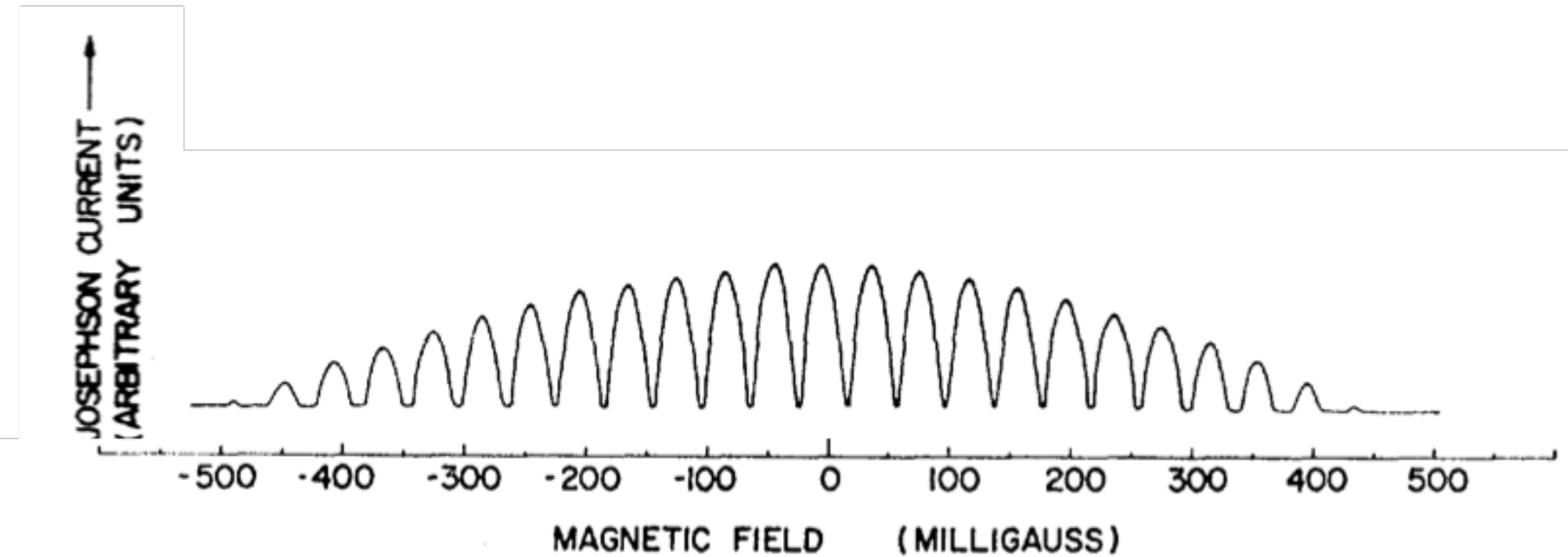
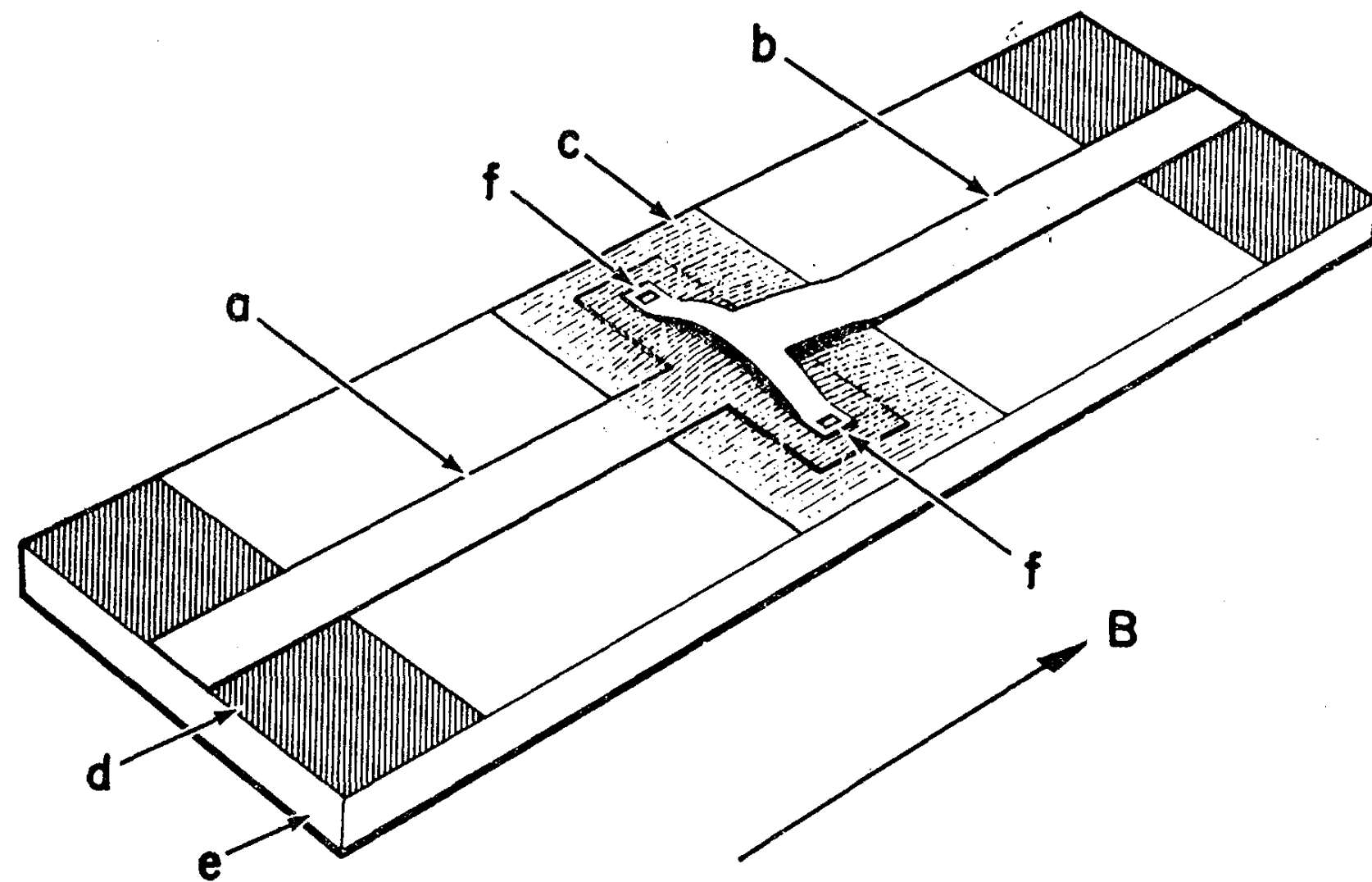
$$I = I_c \sin \varphi$$

$$I' = I_c \sin \varphi'$$

Courant total :  $I_{\text{ext}} = I + I'$  (régime non dissipatif)

# Premières mises en évidence

Jaklevic et al. (1965) [groupe de J.E. Mercerau, Ford Motor Company, Michigan]



courant critique de l'ordre du milliampère, séparation entre les jonctions  $\approx 3$  mm

périodicité 40 mGauss (4 microTeslas)

# Fonctionnement pratique

$$\bar{I}_c(\Phi) = 2I_c \cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)$$

$\Phi$  désigne le flux total :  $\Phi = \Phi_{\text{ext}} + LI$

*On travaille dans le régime  $LI \ll \Phi_{\text{ext}}$*

Surface de 1 mm<sup>2</sup> : un changement de  $B$  de 10<sup>-9</sup> T induit un changement de  $\pi/2$



Sensori SQUID

Bande passante élevée : 100 MHz

Sensibilité ultime : 3 10<sup>-16</sup> Tesla en 1 seconde de mesure

*Principaux concurrents : magnétomètres mesurant la précession de Larmor (pas d'environnement cryogénique)*

# Plan

---

## 1. le SQUID supraconducteur

*Rôle central de l'invariance de jauge*

## 2. Exemples de qubits supraconducteurs

*Boîte à paires de Cooper, transmon*

## 3. Modélisation d'un SQUID atomique

*L'équivalence "champ magnétique  $\longleftrightarrow$  rotation"*

## 4. Expériences avec des SQUIDS atomiques

- Espace des états qui peut être réduit à un espace de Hilbert de dimension 2 :  $\{ |0\rangle, |1\rangle \}$
- Long temps de cohérence
- Initialisation dans un état donné, par exemple  $|0\rangle$
- Transformations unitaires dans l'espace de dimension 2
- Lecture de l'état du qubit dans une base,  $\{ |0\rangle, |1\rangle \}$  par exemple
- Couplage des qubits par paires pour réaliser des portes logiques

# Les qubits supraconducteurs

On va décrire brièvement ici :

- La boîte à paires de Cooper
- Le transmon (IBM, Google, Intel,...)

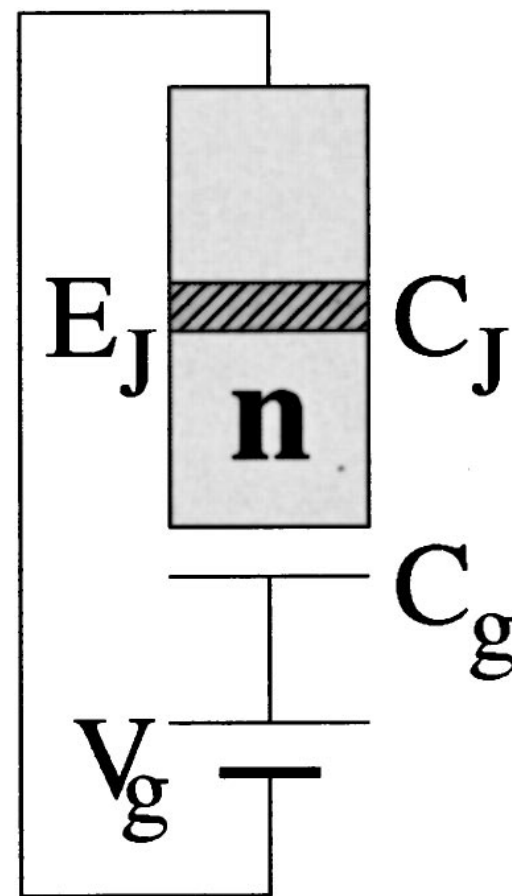
Autres types de qubits utilisés :

- Qubits de chat (Alice & Bob, Amazon)
- Fluxonium (Atlantic Quantum)
- Qubits de phase
- Qubits de flux
- ...



Google AI Quantum

Boîte : îlot central supraconducteur contenant  $n$  paires de Cooper



Makhlin et al.,  
Rev. Mod. Phys. (2001)

$$\hat{H} = \frac{E_C}{2} \hat{n}^2 - E_J \cos \hat{\varphi}$$

Régime de Fock :  $E_C \gg E_J$

*Traitement quantique nécessaire car  $E_C \gg k_B T$*

Cours 5 : 
$$\cos \hat{\varphi} = \frac{1}{2} (e^{i\hat{\varphi}} + e^{-i\hat{\varphi}}) = \frac{1}{2} \sum_n (|n+1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle n+1|)$$

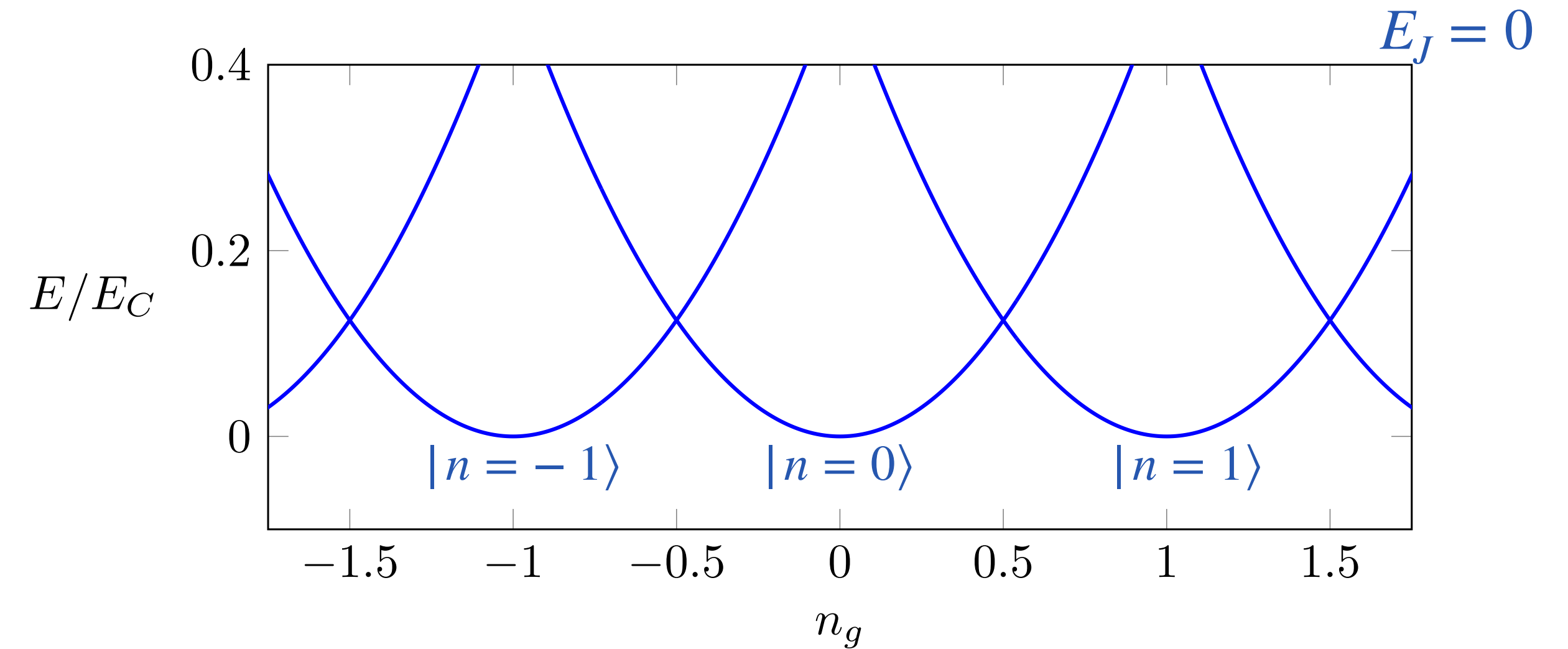
Paramètre de contrôle : la tension de contrôle  $V_g$  ou, de manière équivalente,  $n_g = \frac{C_g V_g}{2e}$

$$\hat{H}(n_g) = \frac{E_C}{2} (\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\varphi}$$

# Niveaux d'énergie de l'hamiltonien $\hat{H}(n_g)$

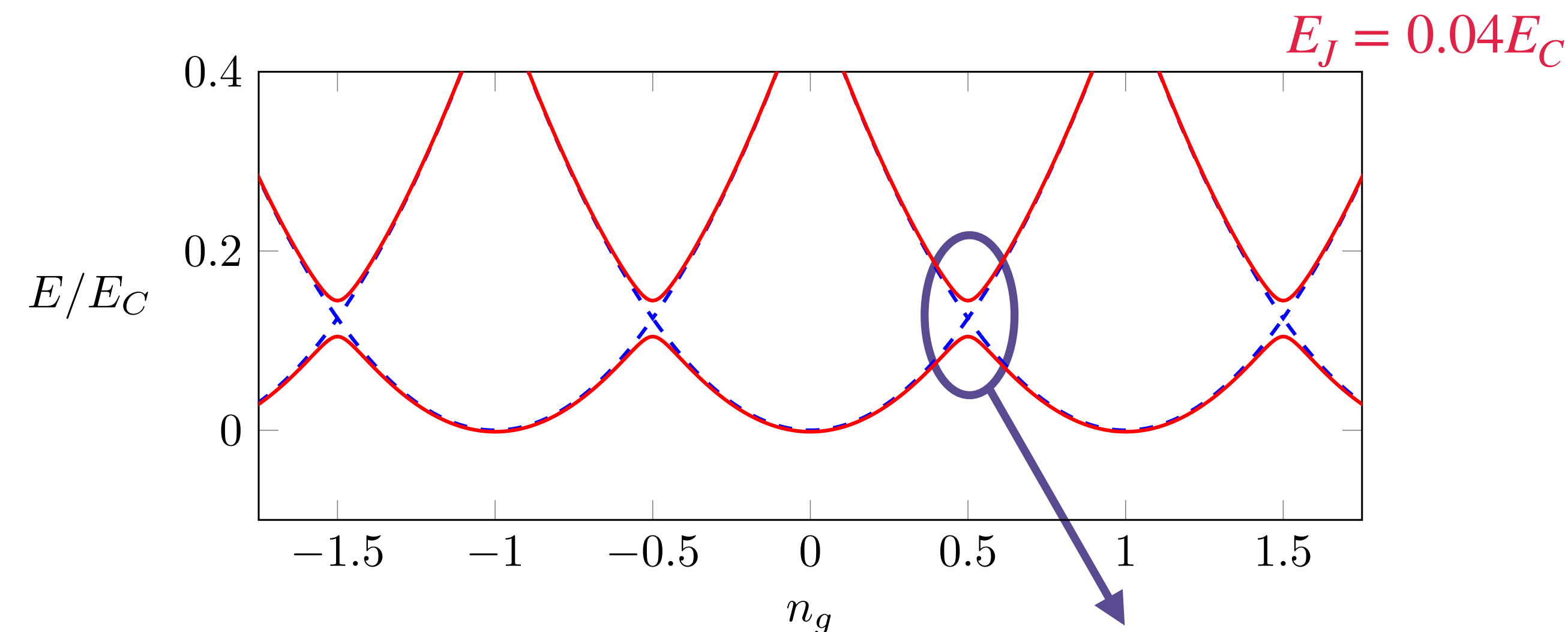
$$\hat{H}(n_g) = \frac{E_C}{2}(\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\varphi}$$

Limite  $E_J = 0$  : les états propres sont les états nombre  $|n\rangle$ ,  $n$  entier positif ou négatif



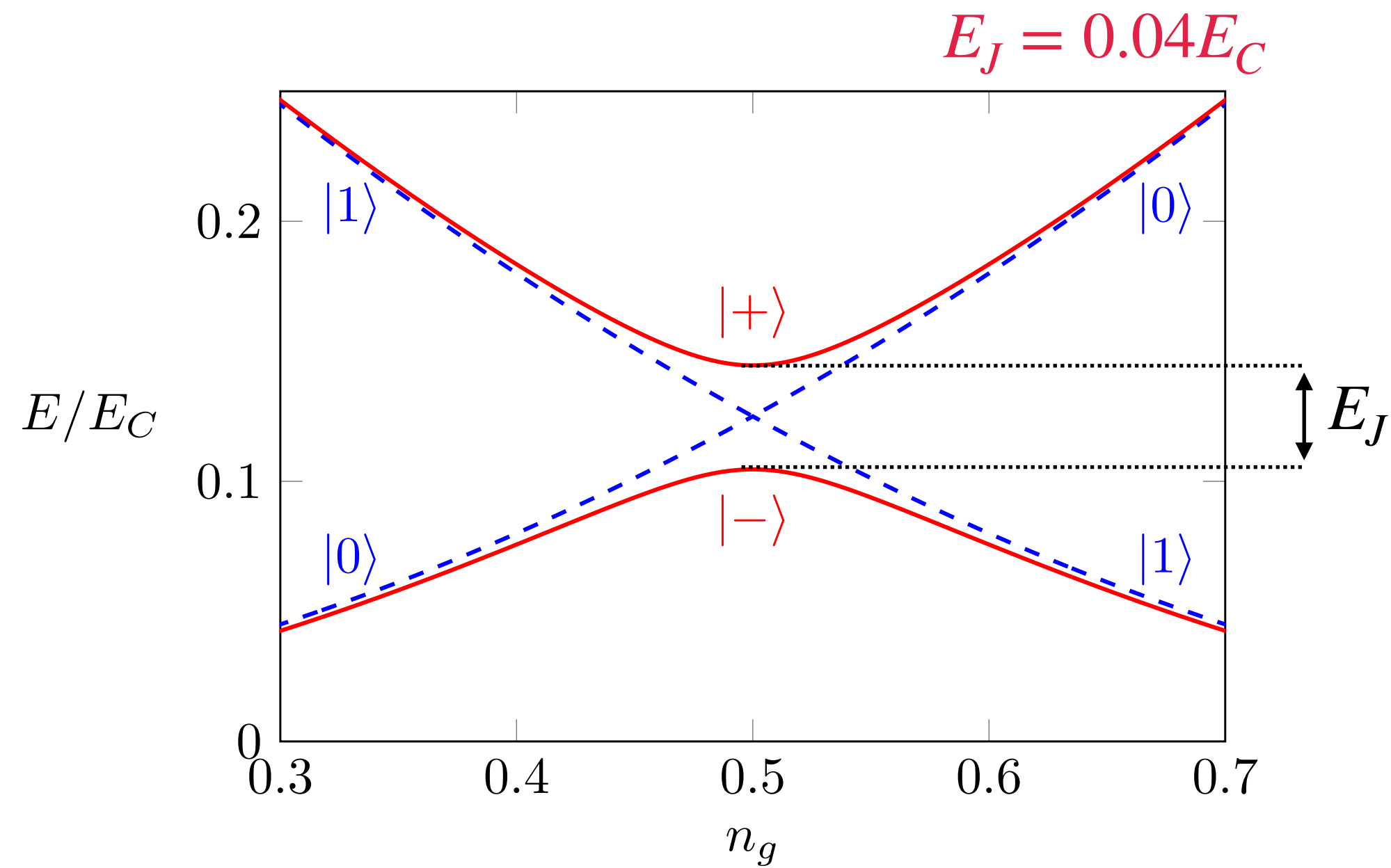
$E_J$  non nul, mais petit devant  $E_C$

$$\cos \hat{\varphi} = \frac{1}{2} \sum_n (|n+1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle n+1|)$$



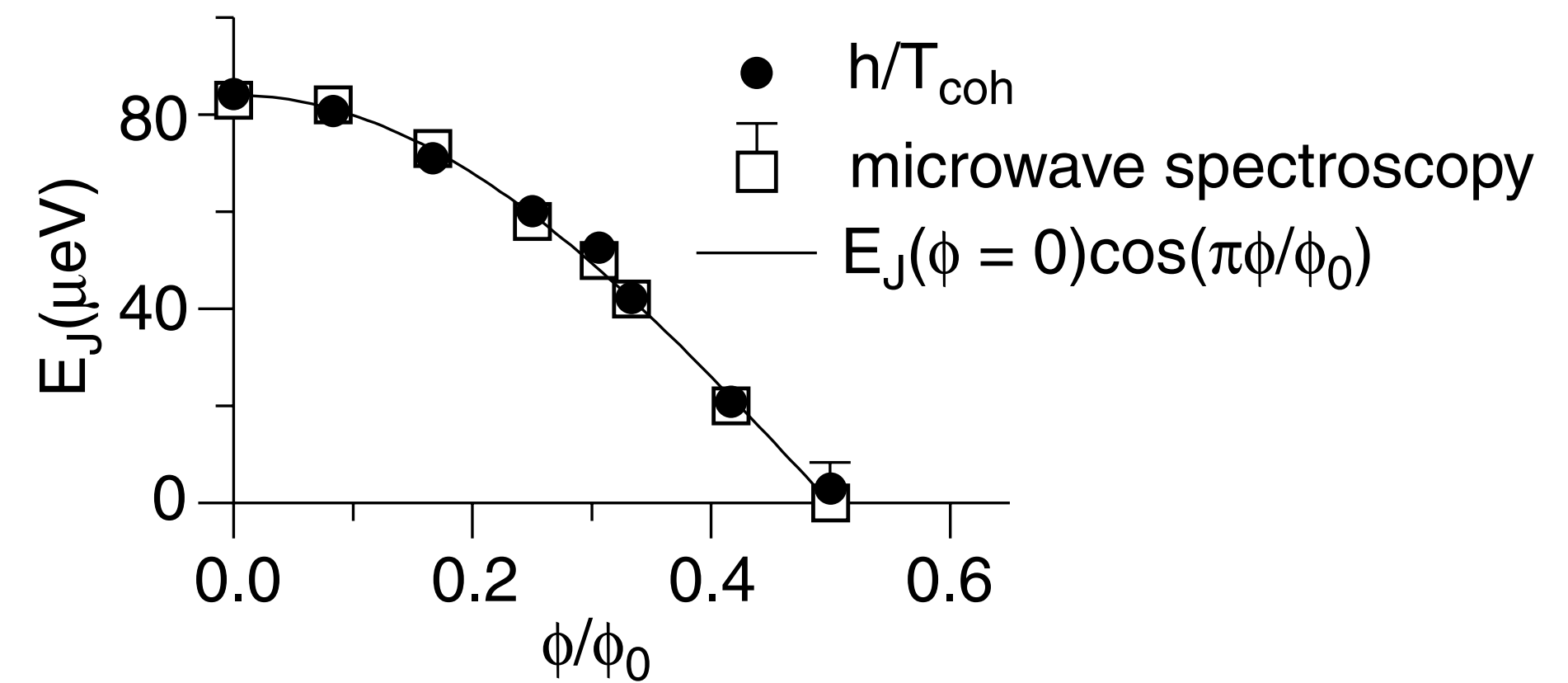
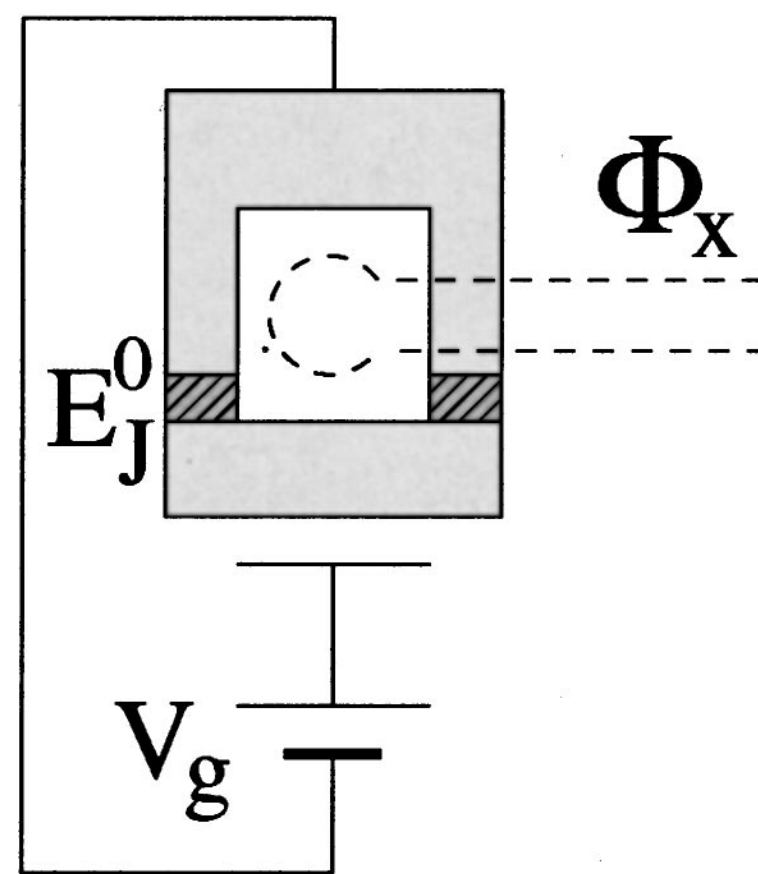
Un qubit possible

# Le qubit formé autour de $n_g = 1/2$



Comment peut-on contrôler  $E_J$ , par exemple pour mettre 2 qubits voisins en résonance l'un avec l'autre ?

Réponse : remplacer la boîte unique par un SQUID !



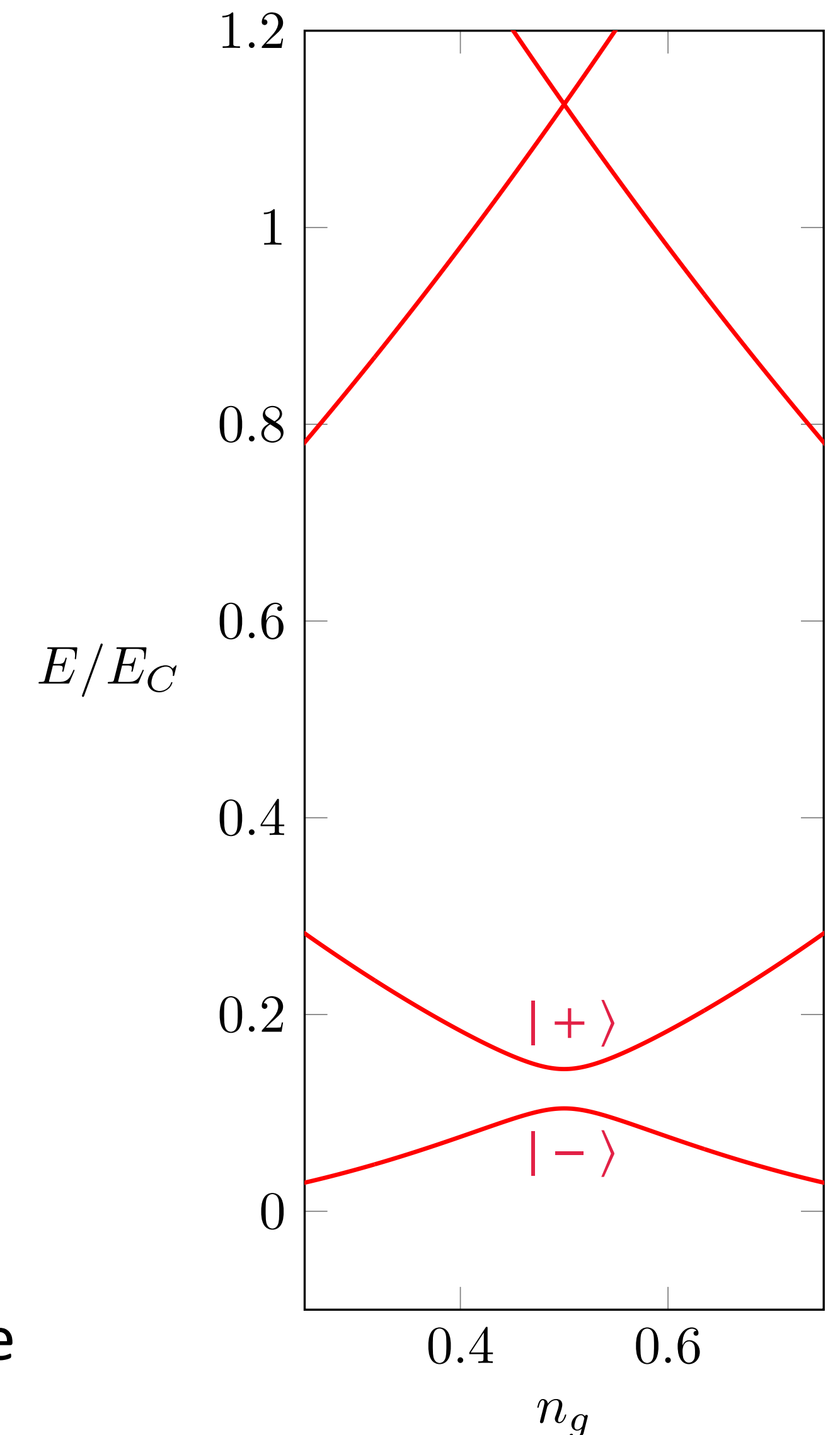
Avantage de la boîte à paire de Cooper : le qubit est très bien isolé des autres états quantiques

Inconvénient : grande sensibilité au bruit de charge

*Si  $n_g$  dévie de la valeur  $n_g = 1/2$ , l'énergie des deux états  $|\pm\rangle$  varie notablement*

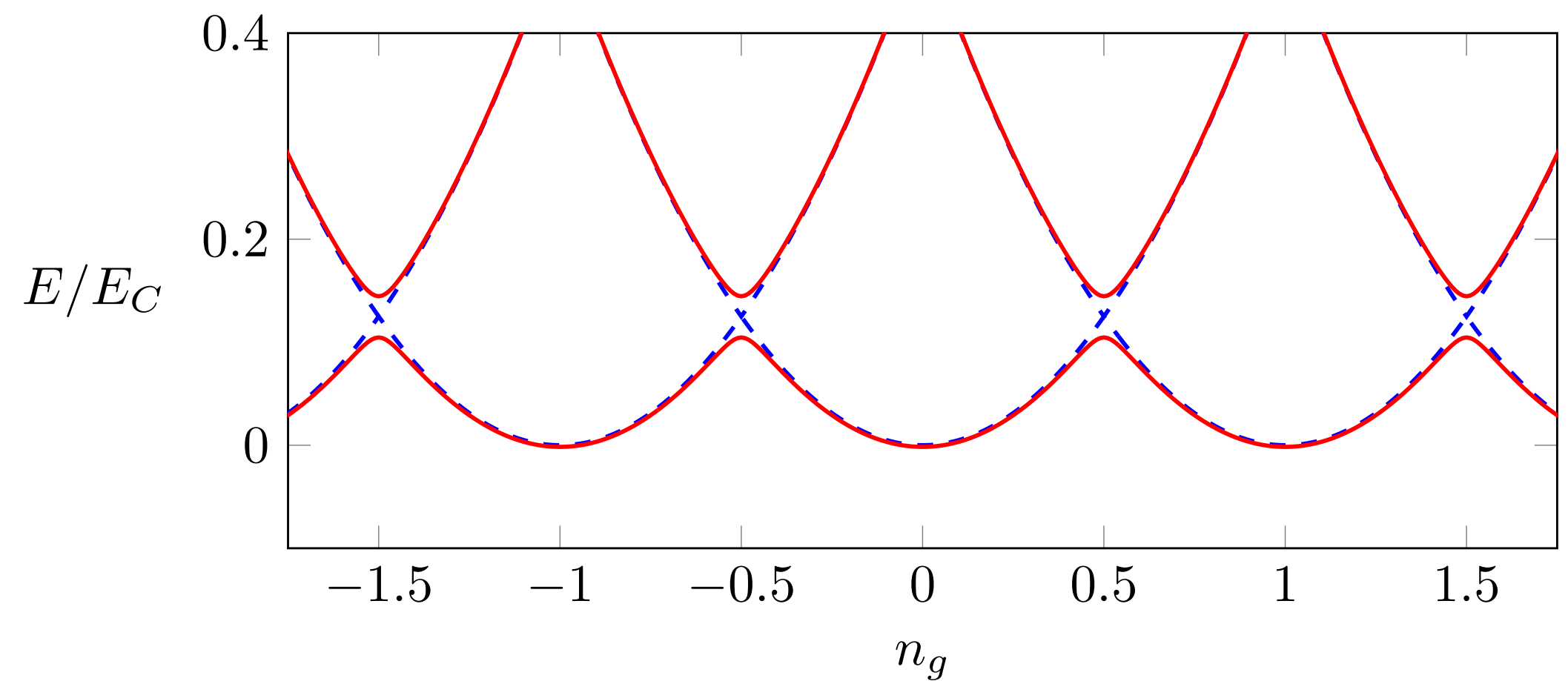
Remède : rendre les bandes plus plates en augmentant  $E_J/E_C$

On place une grande capacité en parallèle :  $C$  augmente,  $E_C = \frac{(2e)^2}{C}$  diminue



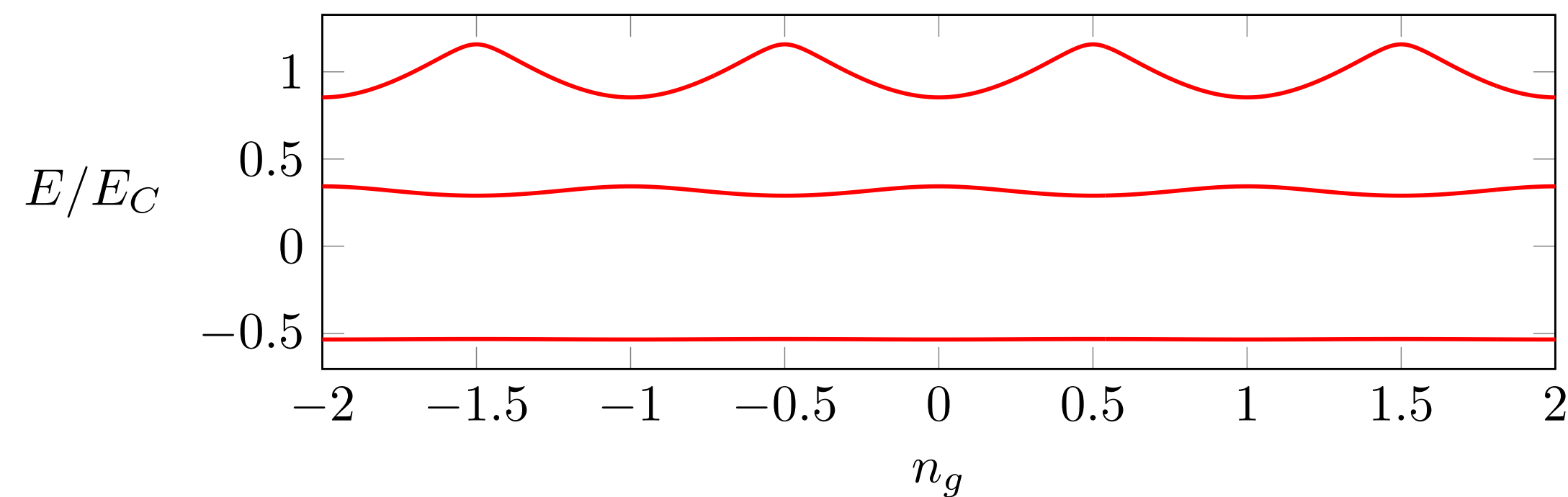
# De la boîte au transmon

$$\hat{H}(n_g) = \frac{E_C}{2}(\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\phi}$$

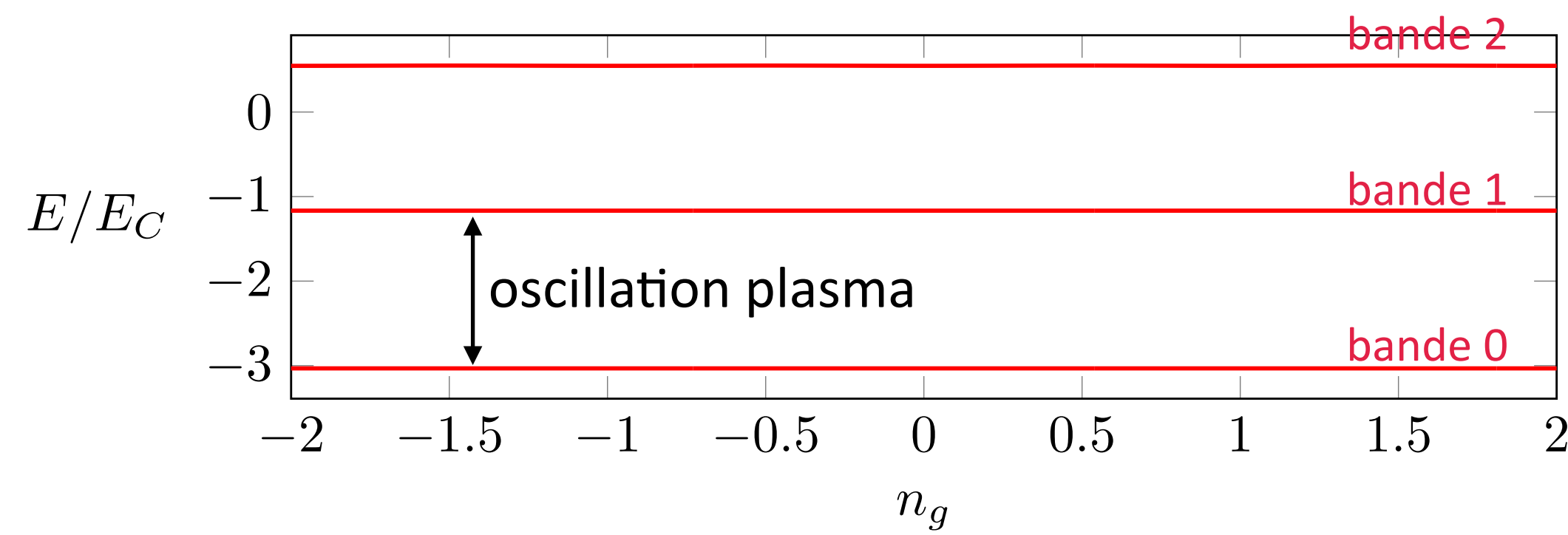


$$\frac{E_J}{E_C} = 0.04$$

Régime de Fock



$$\frac{E_J}{E_C} = 1$$



$$\frac{E_J}{E_C} = 4$$

Régime Josephson

puce Sycamore (Google)

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_{1 \rightarrow 2} \sim 5.8 \text{ GHz} \\ \nu_{0 \rightarrow 1} \sim 6.0 \text{ GHz} \end{array} \right.$$

# Plan

---

## 1. le SQUID supraconducteur

*Rôle central de l'invariance de jauge*

## 2. Exemples de qubits supraconducteurs

*Boîte à paires de Cooper, transmon*

## 3. Modélisation d'un SQUID atomique

*L'équivalence "champ magnétique  $\longleftrightarrow$  rotation"*

## 4. Expériences avec des SQUIDS atomiques

# L'équivalence “champ magnétique $\longleftrightarrow$ rotation”

Particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Particule neutre dans un référentiel en rotation

Force de Lorentz  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

Force de Coriolis  $\vec{F} = 2m\vec{v} \times \vec{\Omega}$   
+ force centrifuge

Hamiltonien  $\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[ \hat{\vec{p}} - q\vec{A}(\hat{\vec{r}}) \right]^2$

Hamiltonien  $\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[ \hat{\vec{p}} - \vec{A}(\hat{\vec{r}}) \right]^2 - \frac{1}{2}m\Omega^2 r^2$

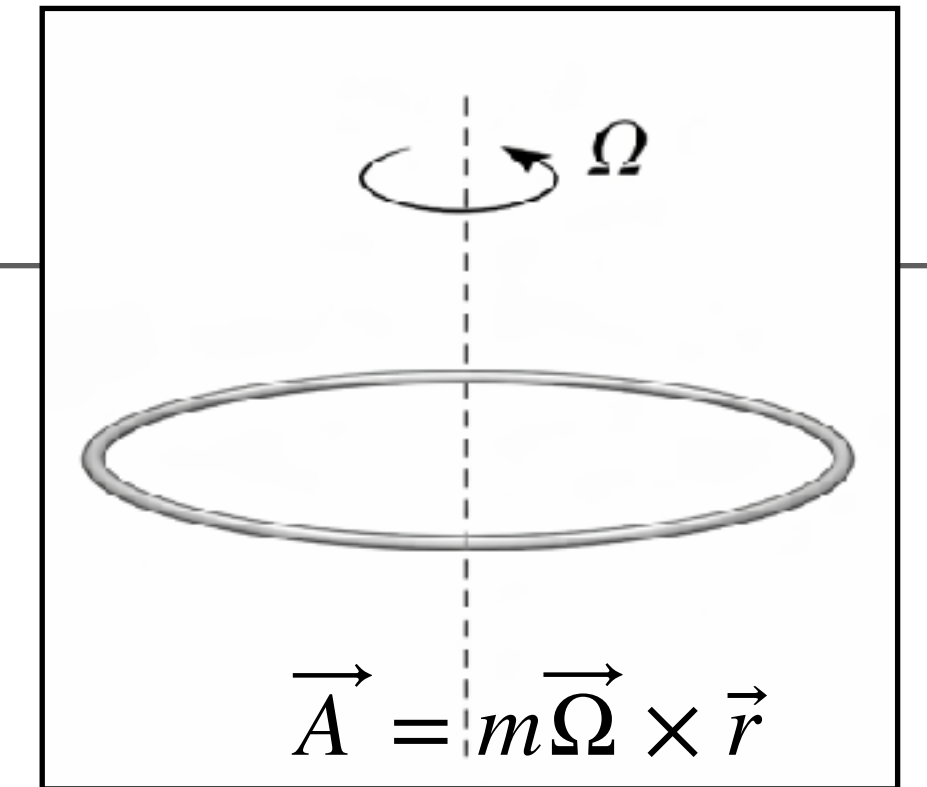
jauge symétrique pour  $\vec{B}$  uniforme :  $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$

$\vec{A} = m\vec{\Omega} \times \vec{r} \quad q = 1$

***Equivalence entre les deux problèmes, aussi bien au niveau classique que quantique***

***$\Rightarrow$  un SQUID atomique va constituer un détecteur de rotation***

# Le principe du SQUID atomique



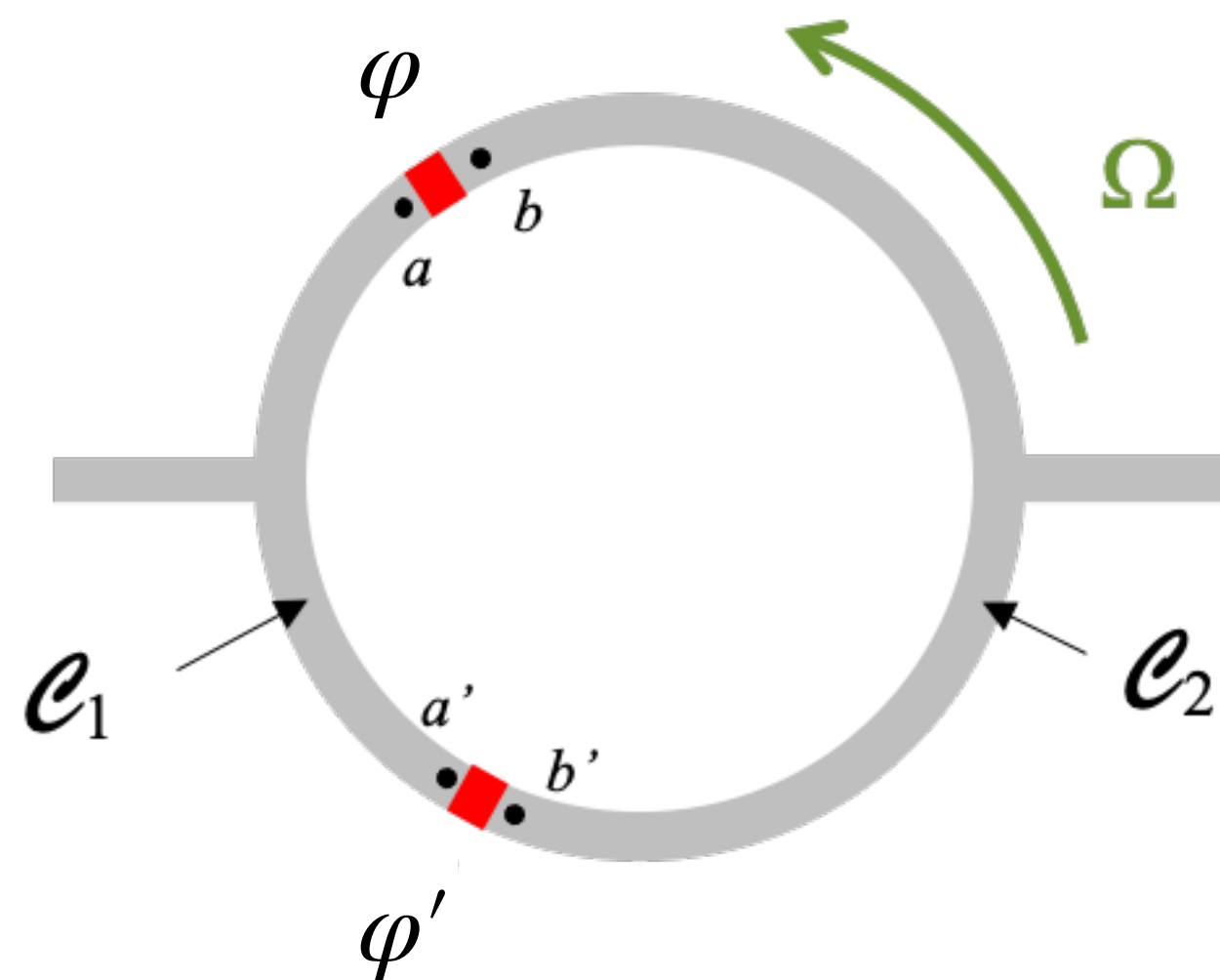
Le rôle du flux magnétique  $\Phi$  est joué par  $\Omega S$  ( $S$ : surface de l'anneau)

Différence notable pour le problème à N corps :

$$\Phi = \Phi_{\text{ext}} + LI$$

$$\Omega = \Omega_{\text{ext}}$$

*contrepartie : il n'y a pas d'effet Meissner pour un anneau en rotation*



On intègre la relation :  $m\vec{v} = \hbar \vec{\nabla} \theta - \vec{A}$

sur les arcs de cercle  $\mathcal{C}_1 = [a \rightarrow a']$  et  $\mathcal{C}_2 = [b' \rightarrow b]$

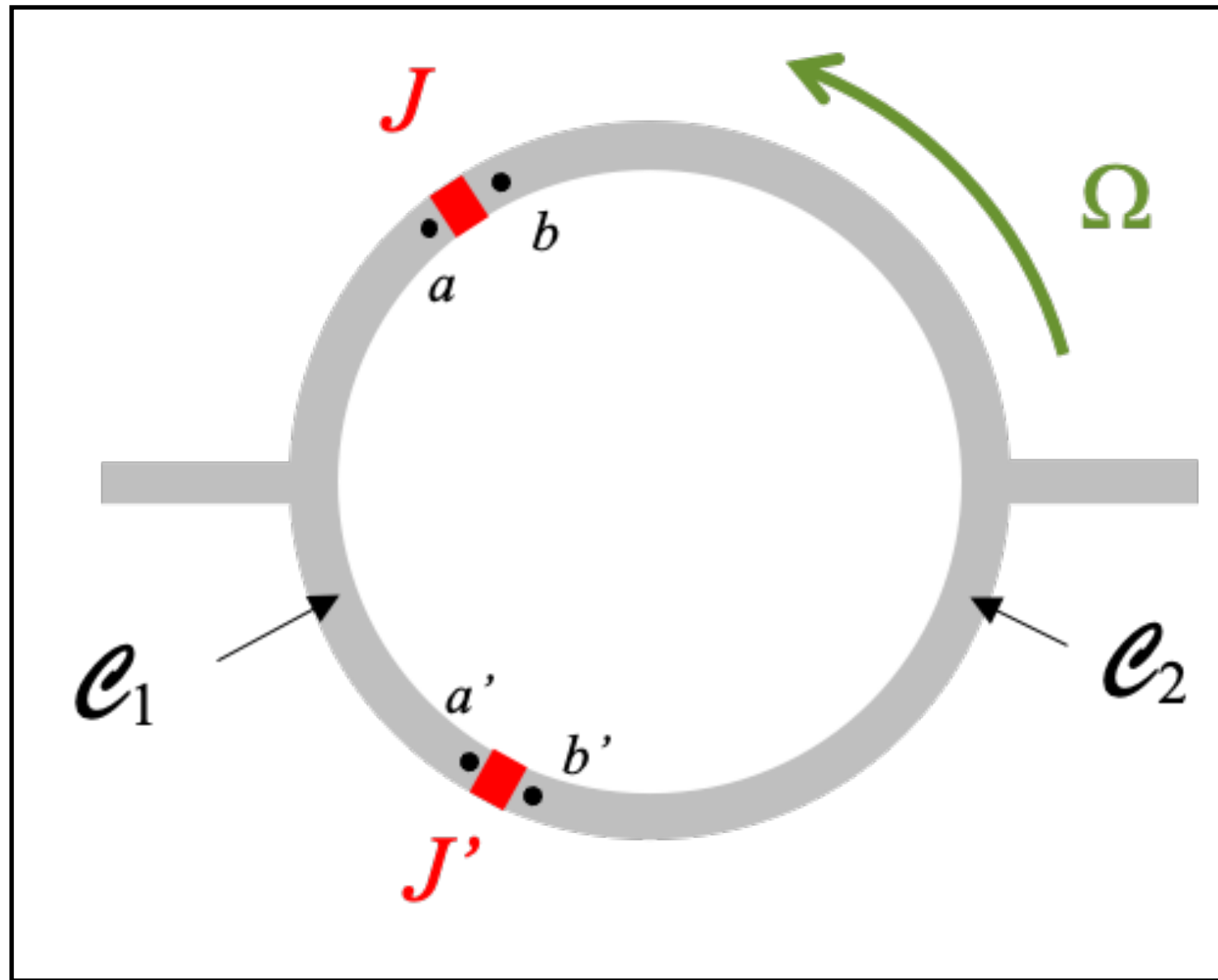
$$\varphi - \varphi' = 2\pi \left( n - \frac{\Omega}{\Omega_0} \right) - \left( \varphi_{\mathcal{C}_1} + \varphi_{\mathcal{C}_2} \right)$$

$$\Omega_0 = \frac{\hbar}{mR^2} = \frac{\pi\hbar}{mS}$$

contribution de la vitesse  $\vec{v}(\vec{r})$  :  
"inductance cinétique"

# Inductance cinétique négligeable ?

$$\Omega_0 = \frac{\hbar}{mR^2}$$



$$\varphi - \varphi' = 2\pi \left( n - \frac{\Omega}{\Omega_0} \right) - (\varphi_{\mathcal{C}_1} + \varphi_{\mathcal{C}_2})$$

phases  $\varphi_{\mathcal{C}_j}$  : intégrale de la vitesse sur les contours  $\mathcal{C}_j$

Lien entre intensité et vitesse :  $I = \rho_s v$      $\rho_s$  : densité superfluide

On travaille avec  $I \lesssim I_c$  : régime non dissipatif pour les jonctions

On aura  $\varphi_{\mathcal{C}_j} \ll \pi$  (donc négligeable) si  $I_c \ll \frac{\hbar}{mR} \rho_s$

quantum d'intensité dans l'anneau  
en l'absence de barrière

# Plan

---

## 1. le SQUID supraconducteur

*Rôle central de l'invariance de jauge*

## 2. Exemples de qubits supraconducteurs

*Boîte à paires de Cooper, transmon*

## 3. Modélisation d'un SQUID atomique

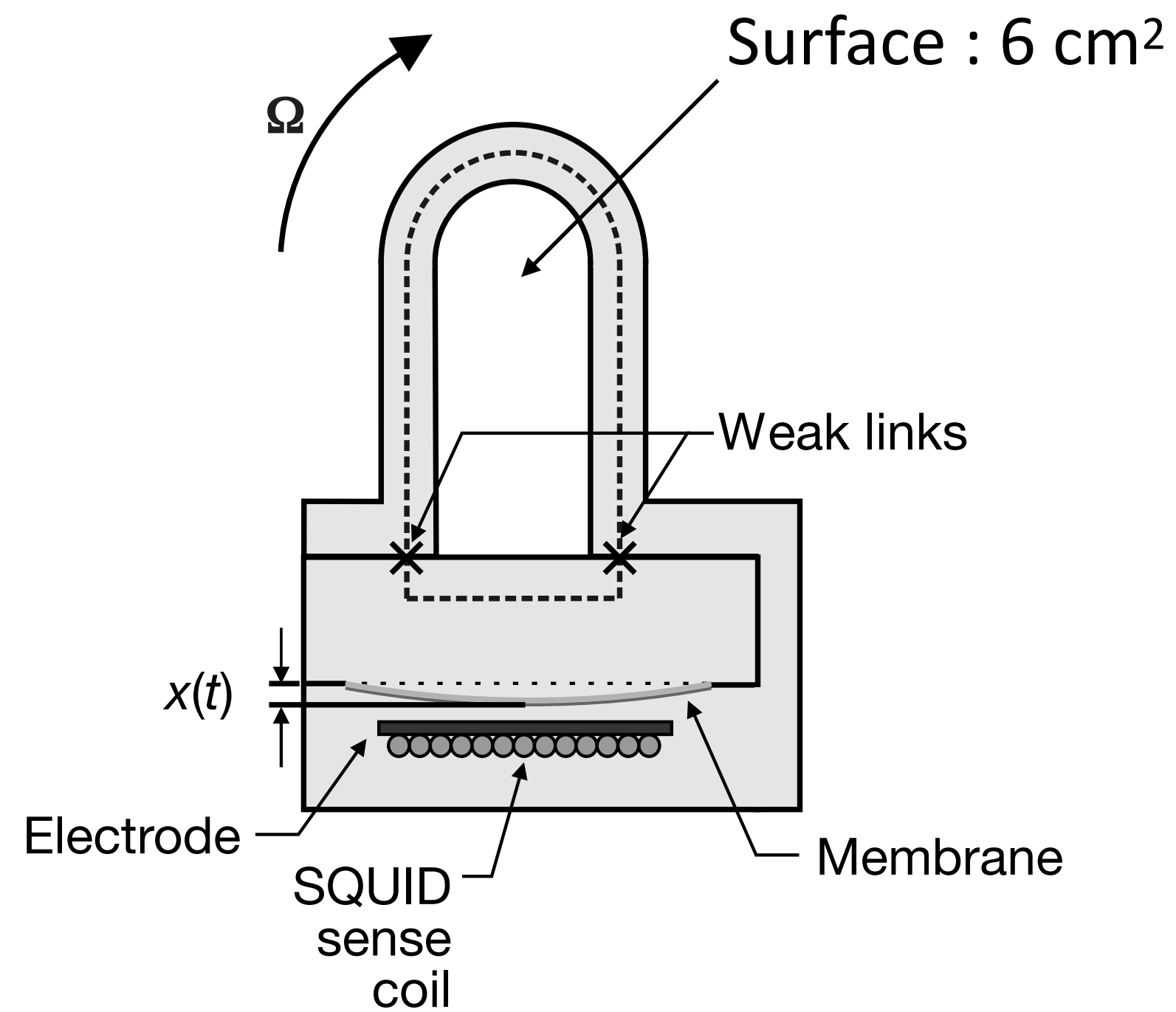
*L'équivalence "champ magnétique  $\longleftrightarrow$  rotation"*

## 4. Expériences avec des SQUIDS atomiques

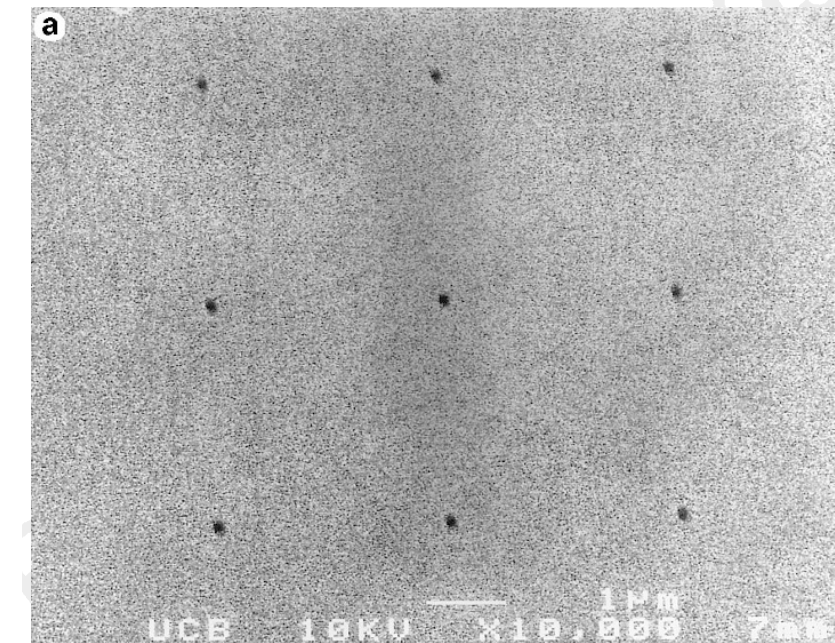
*La terre tourne-t-elle bien sur elle-même ?*

# Expériences avec l'hélium liquide superfluide

Avenel *et al.*,  $^4\text{He}$  (1997) [Saclay] ; Simmonds *et al.*,  $^3\text{He}$  (2001) [Berkeley]



65 × 65 trous, diamètre 100 nm



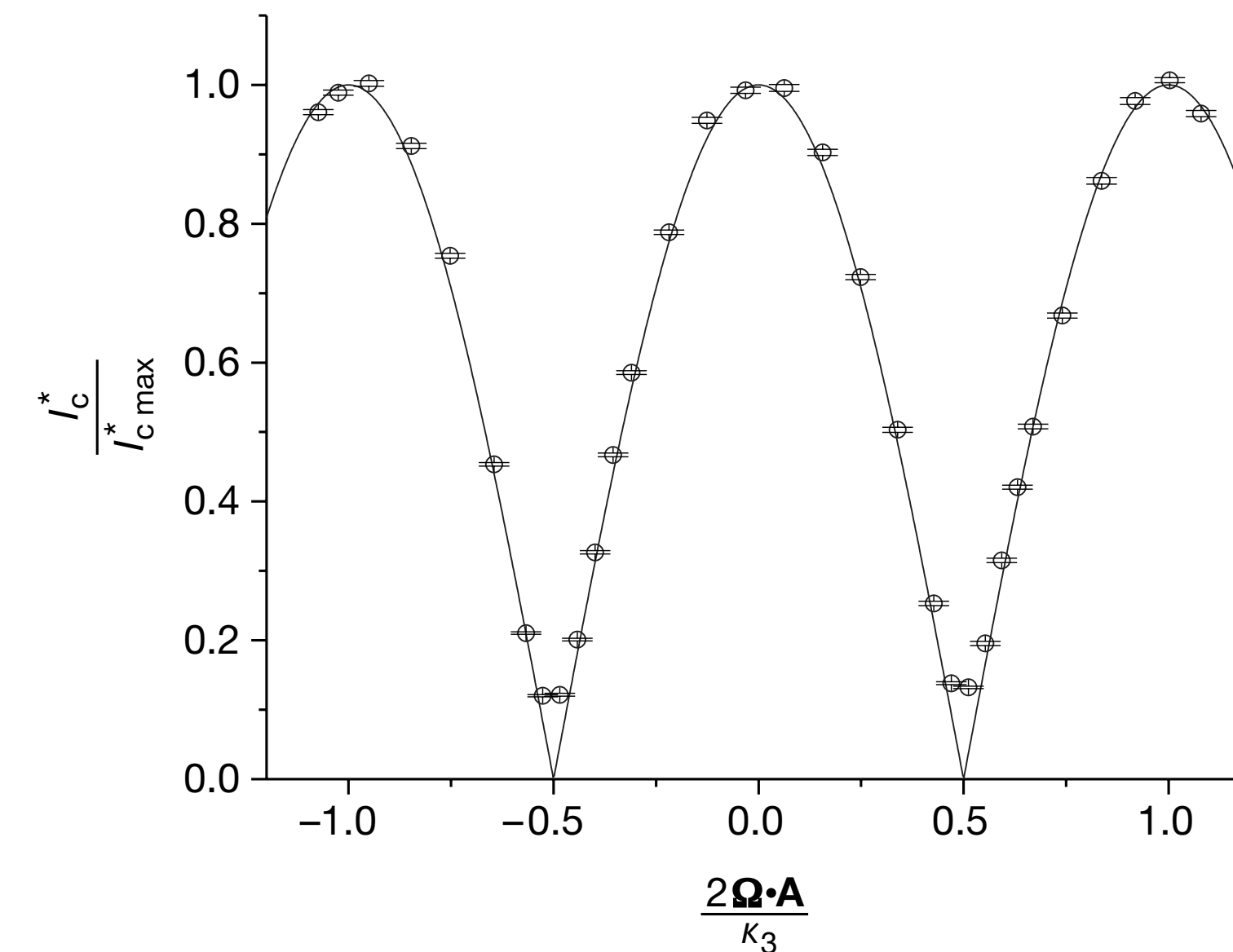
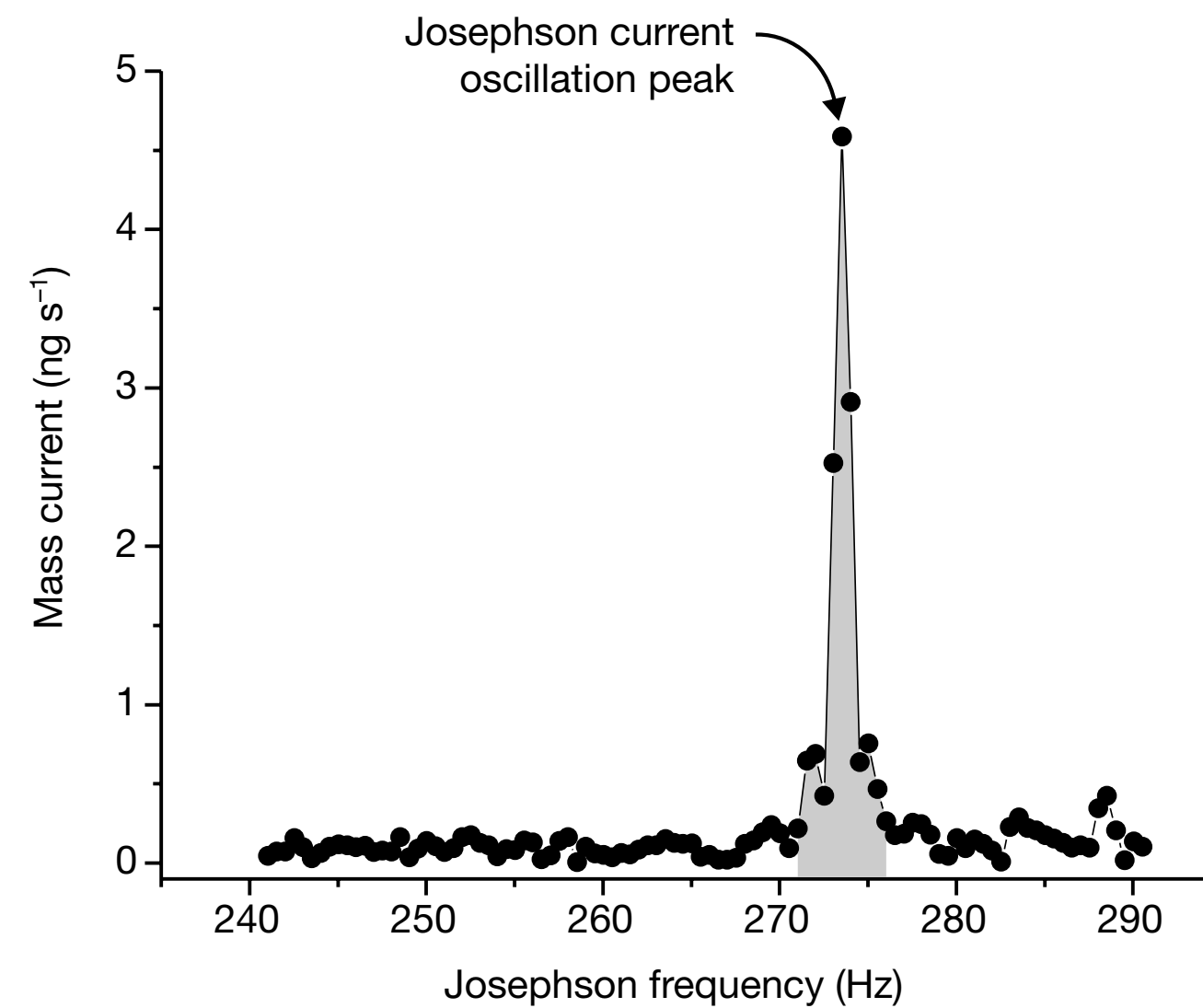
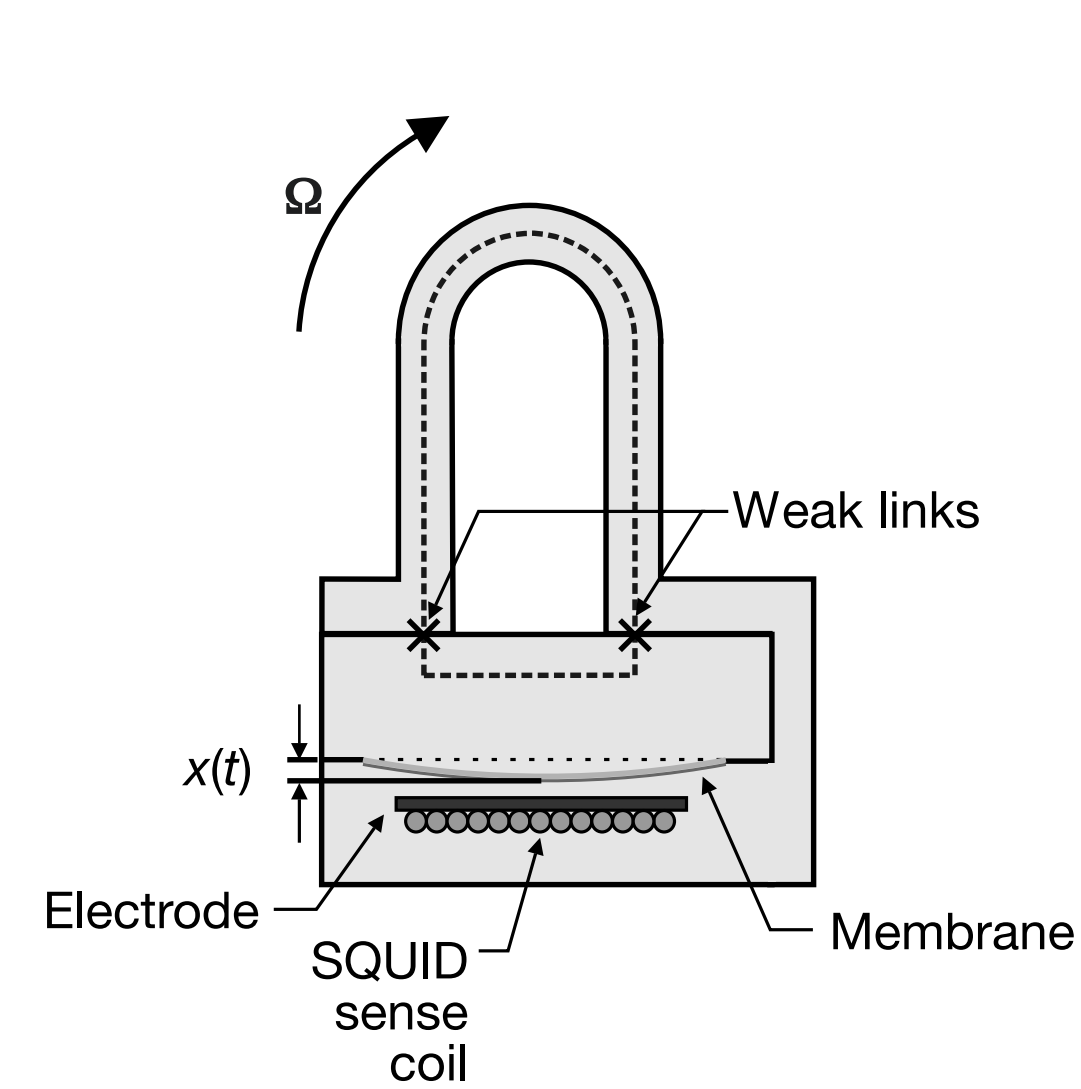
$$\varphi - \varphi' \approx 2\pi \left( n - \frac{\Omega}{\Omega_0} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \sim \Omega_{\text{terre}} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \\ \Omega_0 = \frac{\pi \hbar}{(2m)S} \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \end{array} \right.$$

# Expériences avec l'hélium liquide superfluide (2)

Simmonds *et al.*  
<sup>3</sup>He (2001)

On mesure la fréquence d'oscillation plasma :  $\hbar\omega_p = \sqrt{\bar{E}_J E_C}$  avec ici  $\bar{E}_J = \hbar\bar{I}_c = 2\hbar I_c \cos(\pi\Omega/\Omega_0)$



$$\Omega = \vec{\Omega}_{\text{terre}} \cdot \vec{u}$$

$\vec{u}$  : vecteur unitaire normal  
 au plan de la boucle superfluide

# Et les gaz d'atomes froids ?

---

Pour l'instant, sensibilité trop basse des dispositifs "atomtroniques" pour détecter la rotation terrestre

$$\Omega_0 = \frac{\pi\hbar}{mS}$$

$S$  ne dépasse pas  $10^{-3} \text{ mm}^2$ ; il faudrait  $10 \text{ mm}^2$  pour un atome lourd (Yb)

*En revanche, les interféromètres à atomes libres atteignent des sensibilités record ( $10^{-9}$  radian/s)*

Les SQUIDs à atomes froids ont été pour l'instant limités à des expériences de démonstration

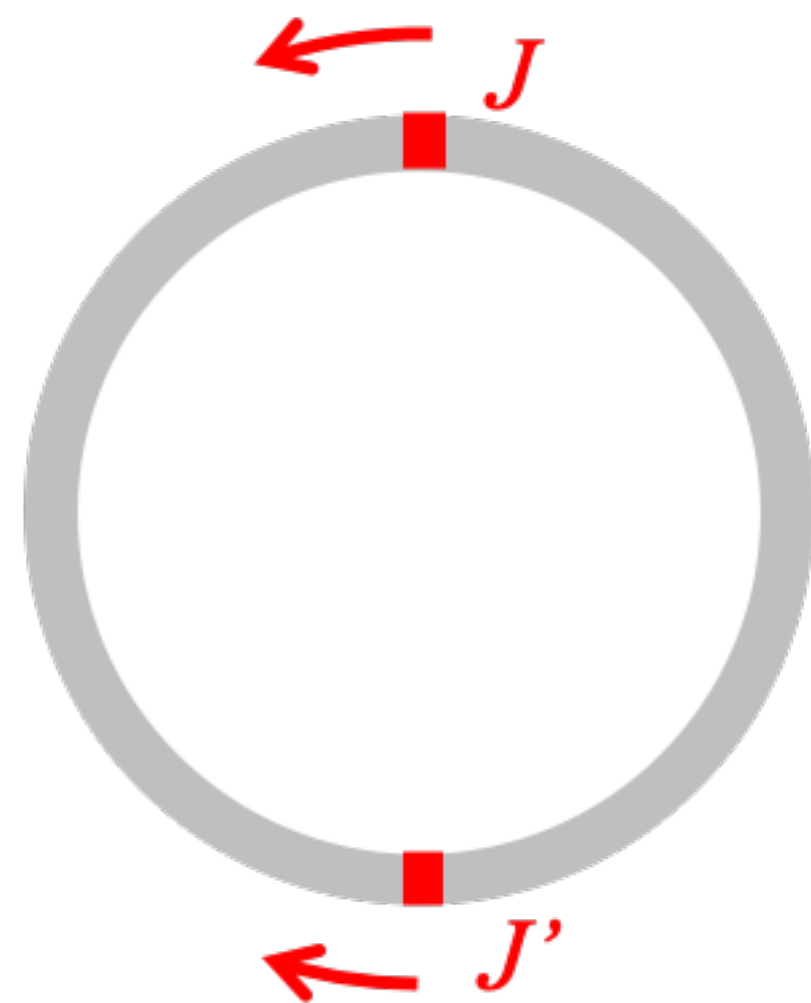
- Groupe de Gretchen Campbell à l'Université du Maryland / NIST
  - Groupe de Malcom Boshier à Los Alamos
- + nombreux groupes travaillant sur des géométries annulaires

# Un exemple de résultat

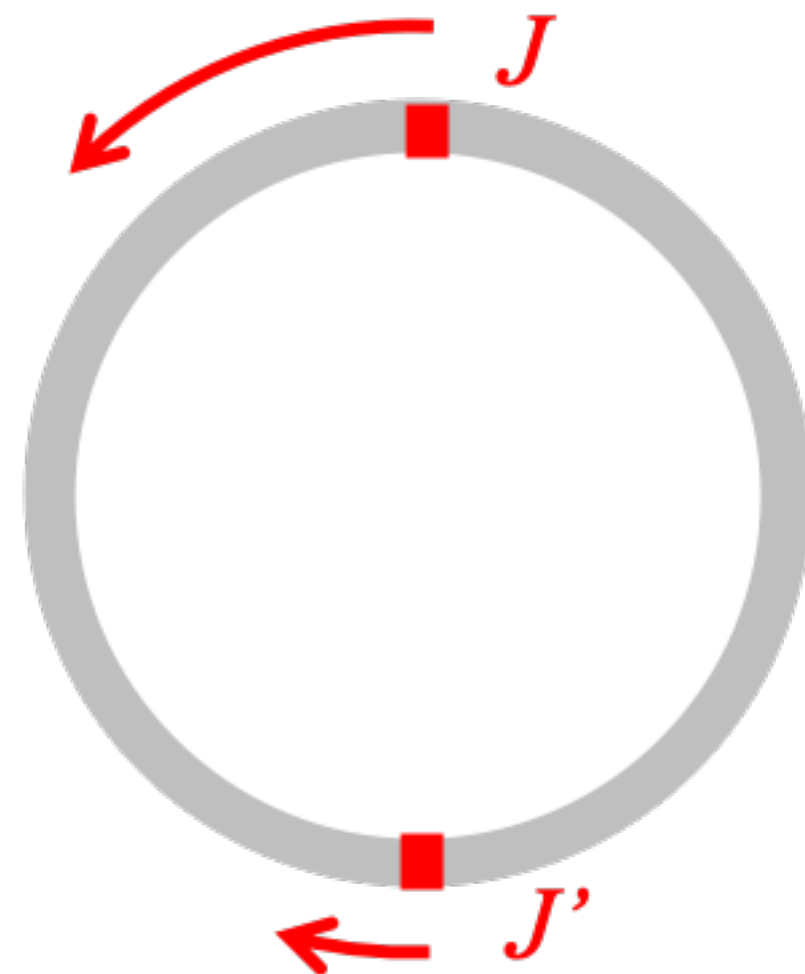
Ryu *et al.*, Nat. Commun. (2020)  
[Los Alamos]

Utilisation de barrières mobiles pour simuler :

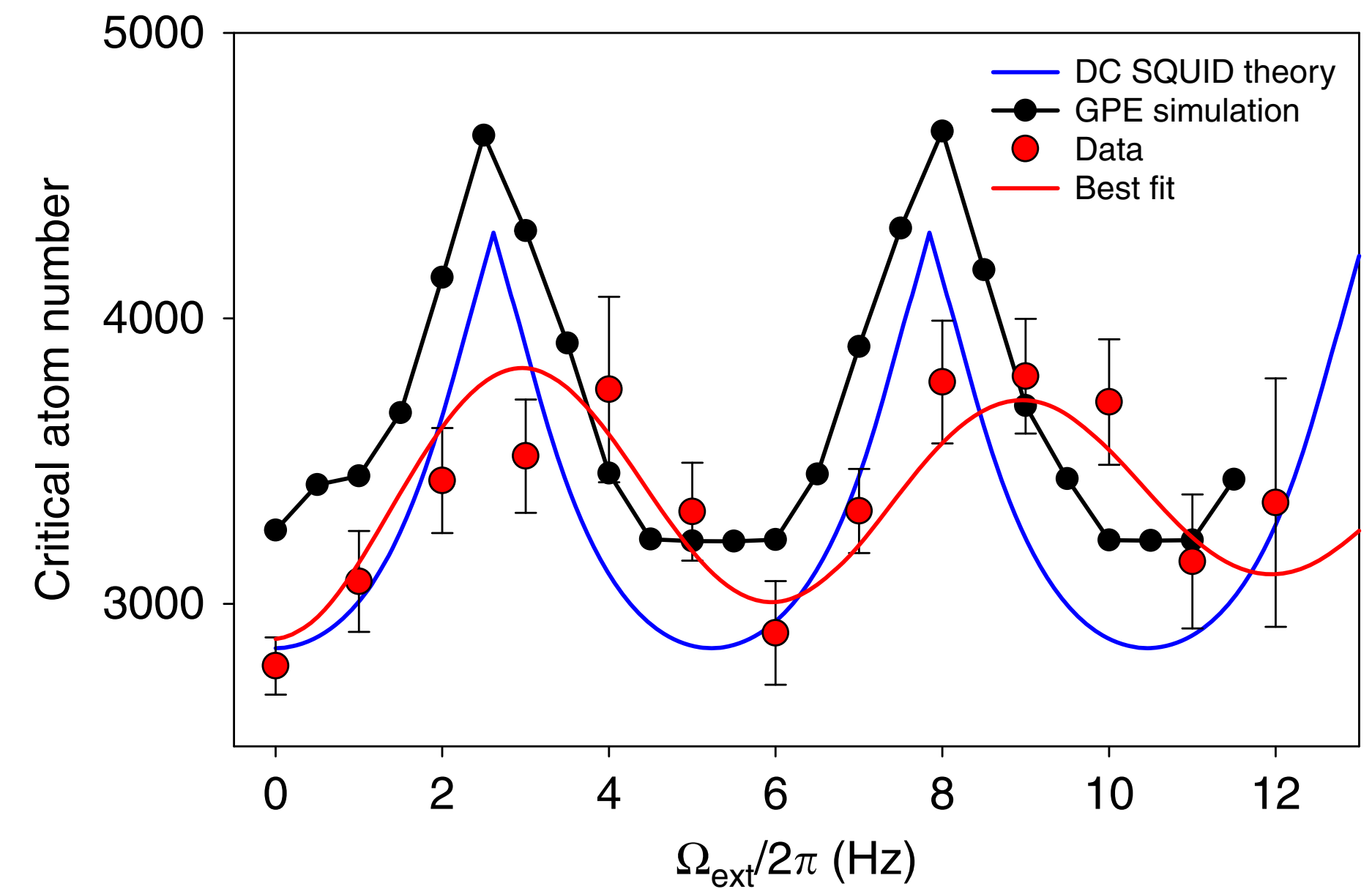
- un courant extérieur alimentant l'anneau
- la rotation de l'anneau



$$\Omega = 0$$



$$\Omega \neq 0$$



# Conclusions (1)

Aspect visionnaire de l'article de Josephson (1962)

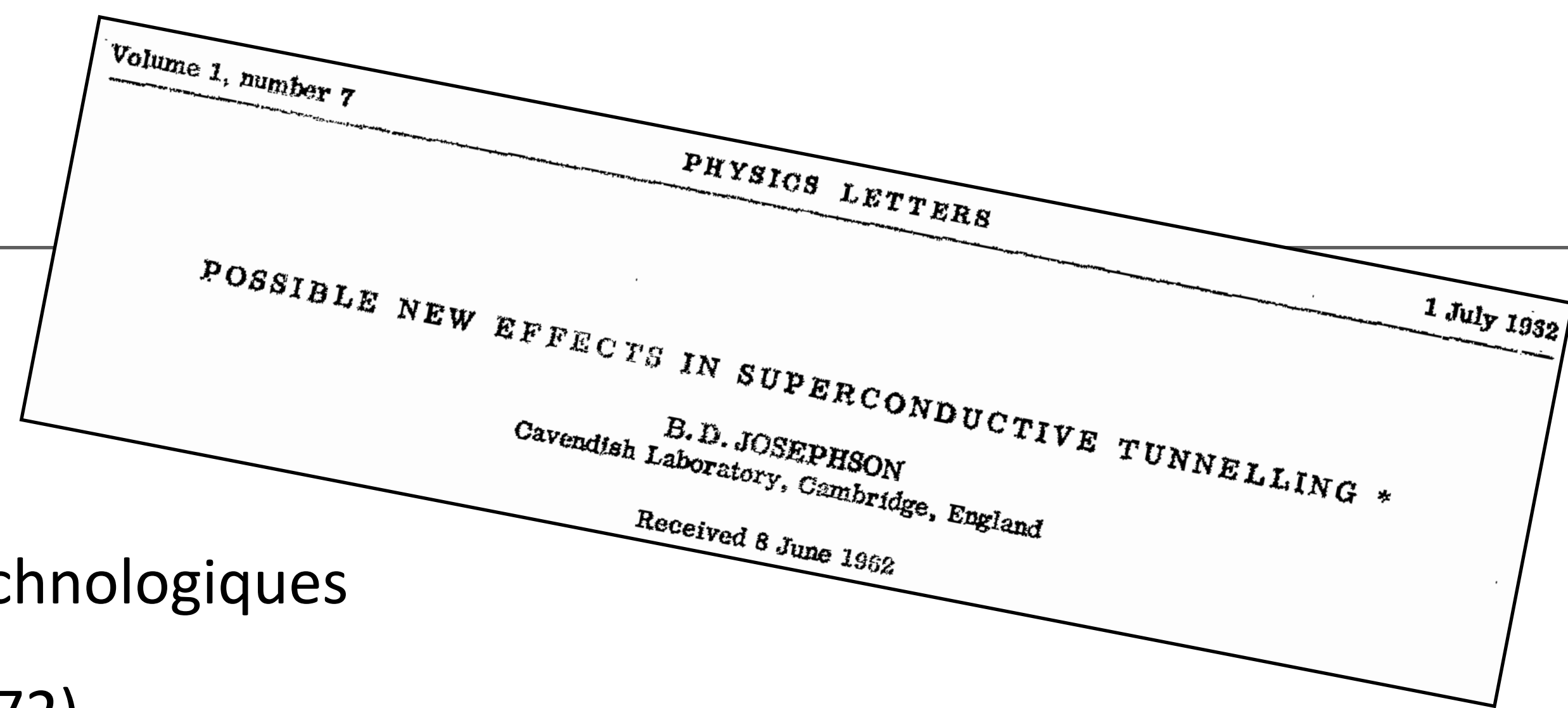
Rapidité de la mise en œuvre des développements technologiques

- Résonances de Shapiro (1963), volt étalon (1972)
- SQUID (1965)

Impact également considérable en physique fondamentale

- Leggett (1980) : plateforme pour des tests macroscopiques de la linéarité de la physique quantique
- Effet tunnel macroscopique observé par Clarke, Devoret & Martinis (1983)

À partir de 2000, rôle central dans la conception de qubits supraconducteurs

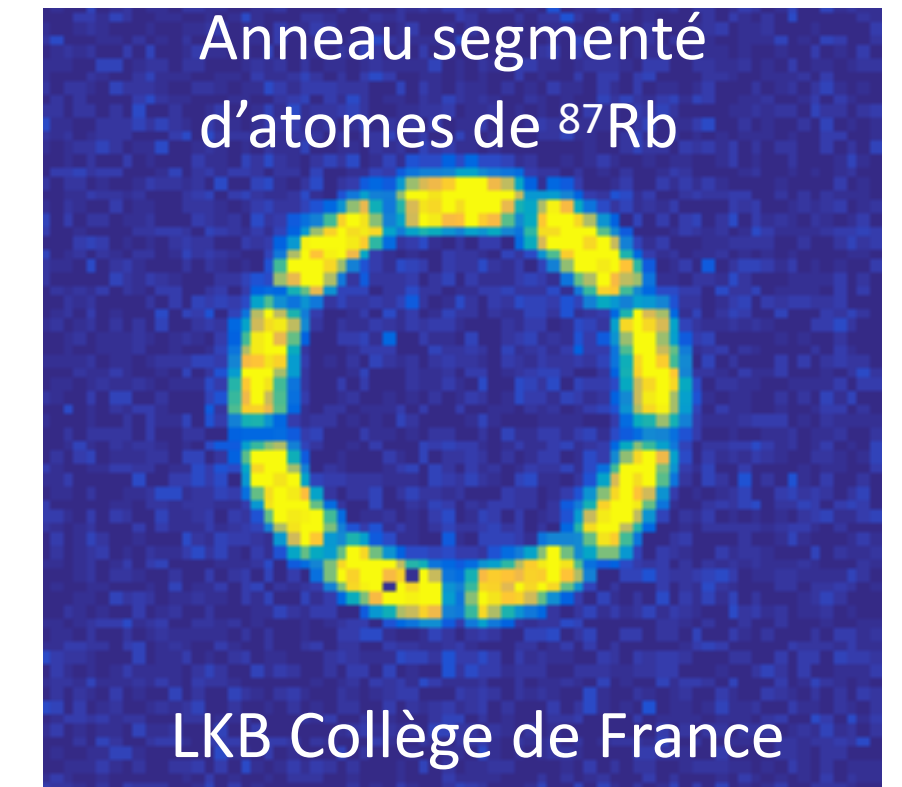


# Conclusions (2)

Impact au delà de la physique des supraconducteurs

*Effet qui existe pour tout fluide quantique décrit par un paramètre d'ordre  $\sqrt{\rho} e^{i\theta(\vec{r})}$*

Expériences sur les liquides  $^3\text{He}$  et  $^4\text{He}$  dans leur état superfluide



Expériences avec des gaz d'atomes froids

*Démonstration des effets déjà connus (effet Josephson d.c. et a.c., Shapiro, SQUID), mais moins quantitatifs*

*Lien avec la métrologie quantique via les états comprimés*

*Exploration de nouveaux régimes comme par exemple*

- régime d'auto-piégeage
- bifurcations et transitions de phase

