

Fluides quantiques couplés et jonctions Josephson

Jean Dalibard
Collège de France, chaire *Atomes et rayonnement*

Cours 2025-26



COLLÈGE
DE FRANCE
— 1530 —

Table des matières

Introduction	7		
I La jonction Josephson et le double puits de potentiel	11		
1 Les dipôles électriques usuels	11		
1-1 Les composants élémentaires R, L, C	11		
1-2 Formulation lagrangienne du circuit LC	13		
1-3 Quantification du circuit LC	14		
2 La jonction Josephson	15		
2-1 Géométrie de la jonction	15		
2-2 La première relation de Josephson	16		
2-3 La seconde relation de Josephson	17		
2-4 Le modèle RCSJ	17		
3 Lagrangien et hamiltonien pour une jonction	18		
3-1 Formulation lagrangienne du modèle CSJ	19		
3-2 Formulation hamiltonienne du modèle CSJ	20		
3-3 Limite $\varphi \ll 1$ et oscillations plasma	20		
4 La jonction Josephson pour un gaz d'atomes	21		
4-1 Barrière statique et double puits	21		
		4-2 Le modèle à deux modes	22
		4-3 L'énergie du double puits	24
		4-4 Equations d'évolution dans le double puits	26
		4-5 Les oscillations plasma d'une jonction atomique	28
		II Dynamique d'une jonction Josephson	35
		1 Caractéristique d'une jonction supraconductrice	36
		1-1 Rappel sur le modèle RCSJ	36
		1-2 Étude analytique pour $C \rightarrow 0$	37
		1-3 La "planche à laver" inclinée	38
		1-4 Résultats numériques dans le cas général	39
		2 Caractéristique d'une jonction atomique	41
		2-1 Rappel sur les jonctions atomiques	41
		2-2 La barrière mobile	42
		2-3 Observation de la relation courant-phase	43
		3 Les paramètres des jonctions atomiques	45
		3-1 Le courant critique	45
		3-2 Le modèle RCSJ pour une jonction atomique	46

3-3	Origines physiques de la dissipation	47	4-4	Les processus dissipatifs en jeu	73
4	L'effet tunnel macroscopique	51	IV Les jonctions atomiques internes		77
4-1	États quantiques macroscopiques	51	1	Préliminaire : l'atome habillé	78
4-2	Jonction au voisinage du courant critique	52	1-1	Système à deux niveaux et couplage cohérent	78
4-3	Activation thermique de la barrière	53	1-2	Approximation du champ tournant	79
4-4	Niveaux quantifiés dans le potentiel $U(\varphi)$	54	1-3	États habillés et sphère de Bloch	79
4-5	Observation de l'effet tunnel macroscopique	55	1-4	Préparation d'un état habillé	81
III L'effet Josephson alternatif et les résonances de Shapiro		57	2	L'approximation du mode spatial unique	81
1	L'effet Josephson alternatif	58	2-1	Hamiltonien en seconde quantification	82
1-1	Le principe de l'effet	58	2-2	Représentation de Schwinger	83
1-2	Expériences sur l'hélium	58	2-3	Le terme d'interaction	84
1-3	Gaz dilué et auto-piégeage	60	3	La jonction Josephson retrouvée	85
2	Les résonances de Shapiro	62	3-1	L'approximation classique	85
2-1	L'expérience de Shapiro	62	3-2	Équations du mouvement	86
2-2	Utilisation du modèle RCSJ	64	3-3	Comparaison entre jonctions internes et externes	88
2-3	Quelques résultats du modèle RCSJ	65	4	États stationnaires et bifurcation	89
2-4	Modulation en tension sinusoidale	67	4-1	L'état quantique fondamental	89
3	Un standard électrique	68	4-2	Stationnarité des équations classiques	90
3-1	Mise en série de jonctions	68	4-3	La transition para-ferromagnétique ($E_C < 0$)	91
3-2	Plateaux de tension à courant nul	68	4-4	Le cas $E_C > 0$	93
3-3	Le verrouillage sur un plateau V_n donné	70	4-5	Première mise en évidence expérimentale	95
4	Effet Shapiro pour des jonctions atomiques	70	5	Appendice : interaction entre états habillés	95
4-1	Effet Shapiro dans ^3He superfluide	70	V Les condensats fragmentés		101
4-2	Barrière mobile dans un gaz quantique	71	1	Fraction condensée d'un fluide quantique	102
4-3	Observation expérimentale des plateaux	73			

1-1	Le gaz parfait homogène	102
1-2	Gaz homogène avec interactions	102
1-3	Définition générale de la fraction condensée	104
1-4	Fragmentation vs. énergie d'échange	105
2	L'état fondamental d'une jonction atomique	106
2-1	États cohérents de spin et distribution de Husimi	106
2-2	État fondamental de la jonction	108
2-3	Fragmentation de l'état fondamental	111
3	Spectre énergétique de la jonction	112
3-1	Rappel : représentation de Schwinger	112
3-2	L'oscillateur harmonique sous-jacent	113
3-3	La relation de commutation phase-nombre	114
4	Spins 1 et jonction Josephson	115
4-1	Les interactions entre atomes de spin 1	115
4-2	Le rôle de l'effet Zeeman	117
4-3	État fondamental en champ moyen	117
4-4	Fragmentation dans le cas antiferromagnétique	118
4-5	Observation d'un état fragmenté	119

VI Du SQUID supraconducteur au SQUID atomique		123
1	Le SQUID supraconducteur	123
1-1	Champ magnétique et invariance de jauge	124
1-2	Effet Meissner et longueur de pénétration	125
1-3	Anneau supraconducteur et champ magnétique	126
1-4	Le SQUID	126
2	Qubits supraconducteurs	129
2-1	Critères pour obtenir des qubits utilisables	129
2-2	La boîte à paires de Cooper	129
2-3	Le transmon	131
3	Modélisation d'un SQUID atomique	133
3-1	Référentiel en rotation	133
3-2	Anneau dans un référentiel tournant	135
3-3	Principe du SQUID atomique	136
3-4	L'inductance cinétique	137
4	Expériences avec des SQUID atomiques	138
4-1	Hélium superfluide	138
4-2	SQUID et barrières mobiles	139
4-3	Collier de jonctions Josephson	140
Références		143

Introduction

En 1962, Brian Josephson, alors étudiant en thèse à l'Université de Cambridge publie un article de deux pages qui va avoir un impact considérable sur toute la physique de la matière condensée (JOSEPHSON 1962). Josephson suivait les cours donnés par P.W. Anderson, alors en année sabbatique au laboratoire Cavendish (JOSEPHSON 1974). Inspiré par ces cours, en particulier par ceux concernant la brisure spontanée de symétrie, Josephson considère une jonction formée de deux supraconducteurs séparés l'un de l'autre par une fine barrière isolante (figure 1); il montre que même en absence de différence de potentiel entre les deux supraconducteurs, un courant peut circuler de l'un vers l'autre avec une intensité fonction de la différence de phase quantique entre ces deux supraconducteurs.

Comme l'écrit ANDERSON (1970), les physiciens pensaient à l'époque que la phase d'un supraconducteur n'était pas mesurable :

In 1962 we had already postulated that superconductivity consisted of coherence of the de Broglie waves representing pairs of electrons inside the superconductor. Prior to Josephson, the phase φ of these macroscopic waves was thought to be unmeasurable in principle ...

La phase absolue d'un supraconducteur n'est certes pas mesurable, mais la phase relative entre deux supraconducteurs l'est, et c'est précisément ce que Josephson a mis en avant dans son article. Il s'appuyait pour cela sur la découverte toute récente de GIAEVER (1960), qui avait observé l'effet tunnel d'électrons à travers une barrière isolante, séparant deux métaux supraconducteurs¹.

1. Josephson et Giaever ont reçu le prix Nobel de physique 1973, avec Leo Esaki qui avait quant à lui découvert l'effet tunnel d'électrons dans des semi-conducteurs.

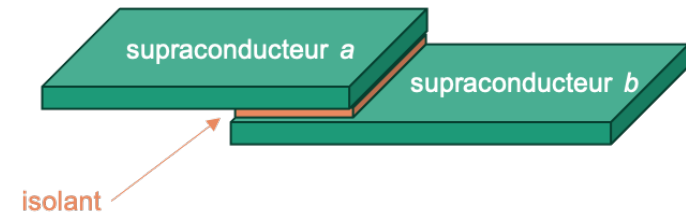


FIGURE 1. *Jonction Josephson. Un courant peut circuler entre les deux supraconducteurs en l'absence de toute différence de potentiel électrique entre eux. Ce courant est une fonction de la phase relative $\varphi \equiv \varphi_a - \varphi_b$ entre ces deux supraconducteurs.*

Même si Josephson s'est heurté initialement au scepticisme d'une partie des théoriciens de l'époque (MCDONALD 2001 ; FOSSHEIM et al. 2013), les expérimentateurs sont venus rapidement confirmer ses prédictions, en premier lieu Anderson lui-même (ANDERSON & ROWELL 1963). D'autres confirmations des prédictions de Josephson ont suivi (figure 2), avec l'observation de l'effet Josephson alternatif et des résonances de Shapiro (SHAPIRO 1963), désormais à la base des standards électriques. Citons également la réalisation de dispositifs interférométriques, les SQUIDS (*superconducting quantum interference devices*), qui font partie des dispositifs les plus sensibles pour la mesure de faibles champs magnétiques.

Josephson a rédigé son article en s'intéressant aux matériaux supraconducteurs, mais les concepts qu'il a mis en avant s'appliquent à d'autres fluides quantiques, comme l'hélium liquide ou les gaz d'atomes ultrafroids, pourvu qu'ils présentent une cohérence macroscopique. Quand c'est le cas, un couplage entre deux composantes du fluide (notées dans

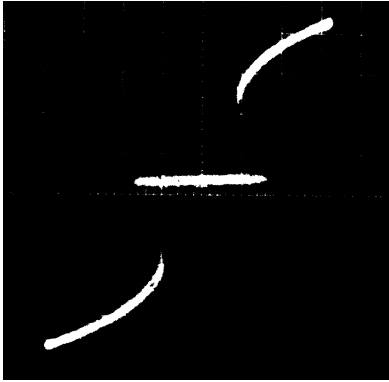


FIGURE 2. Caractéristique d'une jonction Josephson, avec I en abscisse et V en ordonnée. On voit qu'un courant I non nul peut circuler dans la jonction même si la différence de potentiel V est nulle, comme prédit par Josephson. Largeur totale $\sim 1 \mu A$, hauteur totale $\sim 0.5 mV$. Figure extraite de SHAPIRO (1963).

la suite a et b) permet de réaliser le système modèle étudié par Josephson. Ces deux composantes peuvent être séparées spatialement, a à gauche, b à droite, avec une barrière physique comme la couche isolante de la jonction supraconductrice. Le couplage correspond alors à l'effet tunnel à travers la barrière (figure 3, gauche). Ce couplage peut également être induit par une onde électromagnétique, les états a et b étant alors deux états internes des particules, par exemple deux états de spin. Dans ce dernier cas, les particules occupent la même région de l'espace (figure 3, droite).

La démarche que nous allons suivre dans cette série de cours est double :

D'une part, nous allons présenter quelques facettes de l'effet Josephson pour des supraconducteurs, en nous limitant à un petit nombre d'expériences emblématiques. Nous rencontrerons ainsi les expériences de Clarke, Devoret et Martinis qui leur ont valu le prix Nobel de Physique 2025; nous verrons comment les résonances de Shapiro permettent de relier un voltage à une fréquence et de faire ainsi des mesures électriques de très grande précision; nous nous intéresserons également au "régime quantique" de la jonction Josephson, qui conduit à la réalisation de qubits supraconducteurs.

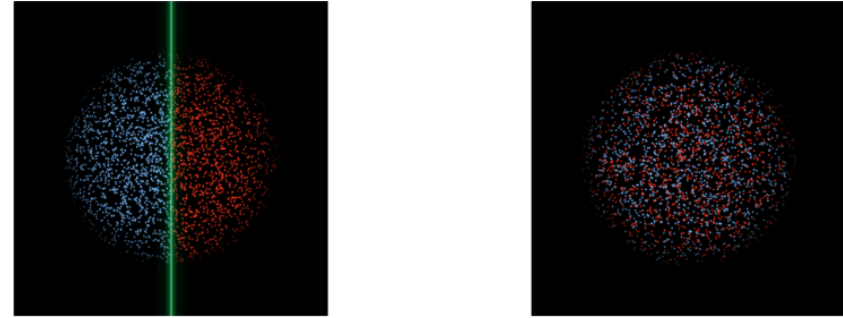


FIGURE 3. Les deux types de jonctions Josephson étudiées dans ce cours. Gauche : un ensemble de particules est séparé en deux par une barrière, que les particules peuvent franchir par effet tunnel. Les particules à gauche de la barrière (bleues) seront notées a et celles à droite (rouges) seront notées b . Droite : les particules peuvent être préparées dans deux états internes possibles et une onde électromagnétique peut induire des transitions $a \leftrightarrow b$.

D'autre part, nous aborderons la transposition de ces effets à des fluides d'atomes, dans un liquide ou dans un gaz. Nous montrerons que certains aspects de la jonction supraconductrice ont été transposés avec succès, comme l'observation des oscillations plasma, l'utilisation de SQUIDs pour des mesures de précision – en l'occurrence la rotation –, ou encore les résonances de Shapiro. D'autres dispositifs liés aux jonctions Josephson, comme la réalisation de qubits performants, n'ont pas encore vu le jour. Ce cours aura pleinement atteint son but s'il stimule des recherches dans ces directions encore peu explorées, au moins sur le plan expérimental.

Nous suivrons le plan suivant :

- Le premier chapitre sera consacré à l'établissement des relations Josephson et à leur transposition à un double puits confinant un condensat de Bose-Einstein atomique ou un gaz de Fermi superfluide. Nous y discuterons les similarités et les différences entre les équations du mouvement des deux systèmes, et nous décrirons une première manifestation de la physique Josephson, l'oscillation plasma.
- Dans le chapitre 2, nous aborderons la dynamique d'une jonction Josephson avec la détermination de sa caractéristique, c'est-à-dire la variation de la tension électrique moyenne aux bornes de la jonction en

fonction du courant qui la traverse (cf. figure 2). Nous exploiterons le modèle RCSJ (*resistively and capacitively-shunted junction*) qui permet de décrire de multiples aspects de cette dynamique, et nous verrons comment transposer ce modèle à un fluide d'atomes.

- Le chapitre 3 sera centré sur les effets dépendant du temps, en particulier l'effet Josephson alternatif et les résonances de Shapiro. Nous expliquerons leur rôle crucial en métrologie et nous décrirons leur transposition à l'hélium superfluide ainsi que, très récemment, à des gaz d'atomes froids.
- Nous aborderons au chapitre 4 les jonctions Josephson internes, où le couplage entre les deux états a et b de la jonction n'est pas dû à un effet tunnel, mais est induit par une onde électromagnétique. Même si les équations du mouvement sont formellement identiques à celles d'une jonction interne, les régimes qui peuvent être réalisés expérimentalement sont notablement différents; de nouveaux phénomènes peuvent apparaître, comme une transition de phase d'un régime para- vers un régime ferromagnétique.
- Le chapitre 5 sera consacré aux "condensats fragmentés", un régime que l'on atteint quand le couplage entre les états a et b devient très faible. La description de la jonction que nous aurons utilisée jusqu'ici, fondée sur un traitement en termes de champs classiques, cesse alors d'être valable et il faut se tourner vers un traitement quantique. Nous illustrerons cette possible fragmentation sur l'exemple d'un condensat de particules de spin 1, où le rôle de la barrière Josephson est joué par les interactions entre atomes.
- Au dernier chapitre, nous nous intéresserons aux SQUIDs. Nous expliquerons comment ces dispositifs permettent, à partir de jonctions supraconductrices, de réaliser des capteurs extrêmement sensibles du champ magnétique. Nous discuterons brièvement la réalisation de qubits à partir des ces dispositifs. Nous étudierons ensuite la transposition de la notion de SQUID à des jonctions atomiques, en tirant parti du lien entre le magnétisme orbital de particules chargées et la rotation de particules neutres.

Pour terminer cette introduction, insistons sur le fait que les notes qui suivent n'ont pas la prétention d'être un cours exhaustif sur les jonctions Josephson supraconductrices. D'excellents livres couvrent ce vaste domaine, comme par exemple BARONE & PATERNO (1982), LIKHAREV (1984),

TINKHAM (2004), CLARKE & BRAGINSKI (2004), BUCKEL & KLEINER (2008), et nous y renvoyons les lectrices et lecteurs désireux d'approfondir certains aspects abordés ici.

Remerciements. Je suis très reconnaissant à Jérôme Beugnon, Raphael Lopes et Sylvain Nascimbene pour leur relecture d'une première version de ces notes de cours. Je remercie également Michel Cotte et Amaury Mouchet pour plusieurs discussions au cours de cet enseignement.

Chapitre I

La jonction Josephson et le double puits de potentiel

Ce premier chapitre est consacré à la présentation de l'effet Josephson, qui se produit quand deux supraconducteurs sont mis au contact l'un de l'autre à travers une fine barrière. Nous commencerons par donner les deux relations fondamentales reliant le courant supraconducteur I , la différence de phase φ aux bornes de la jonction et le potentiel électrique V .

Nous décrivons ensuite le modèle RCSJ (*Resistively and Capacitively-Shunted Junction*), qui rend compte des différents aspects de la dynamique d'une jonction supraconductrice, en le comparant au cas des dipôles électriques usuels, résistance, capacité et inductance.

Dans les chapitres qui suivront, nous aborderons la description quantique de la jonction, dans laquelle la phase φ et le courant I deviennent des opérateurs. Pour préparer ce passage au quantique, nous proposons ici une formulation lagrangienne et une formulation hamiltonienne de la jonction, en montrant notamment que la phase et le nombre de paires de Cooper sur la capacité formée par les deux parois de la jonction sont des quantités conjuguées.

Nous passons ensuite au cas des jonctions atomiques. Ces dernières sont réalisées en plaçant un gaz d'atomes ultra-froids dans un double puits de potentiel, avec une barrière centrale pouvant être franchie par effet tunnel. Nous montrons que l'on retrouve pour ce double puits des équations d'évolution similaires à celles de la jonction. Nous soulignons néanmoins une complication dans le cas atomique, liée au fait que les densités de part et d'autre de la barrière tunnel ne sont pas constantes, contrairement au

cas supraconducteur où des générateurs extérieurs permettent de maintenir un courant donné, sans modification de la densité de paires de Cooper. Nous montrons comment ce terme additionnel peut se manifester sur un phénomène simple, l'oscillation plasma de la jonction.

Nous avons résumé dans trois appendices en fin de chapitre les principaux éléments permettant de décrire un gaz ultra-froid par une approche de champ moyen, basée sur la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevskii.

1 Les dipôles électriques usuels

1-1 Les composants élémentaires R, L, C

Nous commençons par rappeler les équations de base de l'électrocinétique pour les trois types de composants passifs habituels, résistances, condensateurs et inductances. Ceci nous permettra de préciser les conventions de signe qui seront ensuite utilisées pour le sens des courants et la valeur des tensions (RASMUSSEN, CHRISTENSEN et al. 2021).

On considère un dipôle électrique placé entre deux points a (à gauche) et b à droite (figure I.1). On note $V = V_a - V_b$ la différence de potentiel électrique entre ces deux points et I l'intensité du courant électrique circulant de a vers b . On trouve pour les trois types de dipôles mentionnés plus haut :

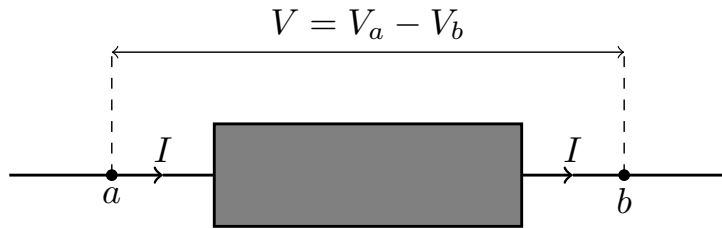


FIGURE I.1. Convention de signe adoptée dans ce cours concernant la tension et le courant pour un dipôle électrique.

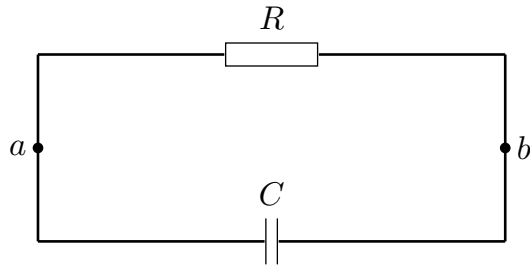


FIGURE I.2. Circuit RC isolé, décrit par l'équation (I.4).

— Pour une résistance R :

$$V = RI_{\text{res}} . \tag{I.1}$$

— Pour un condensateur de capacité C :

$$I_{\text{cap}} = \dot{Q} = C\dot{V} , \tag{I.2}$$

où Q est la charge portée par le condensateur (plus précisément la charge déposée sur l'armature située du côté de a).

— Pour une inductance L :

$$V = L\dot{I}_{\text{ind}} \tag{I.3}$$

On déduit de ces équations le comportement d'un circuit composé. Par exemple, pour le circuit RC représenté sur la figure I.2, la somme des cou-

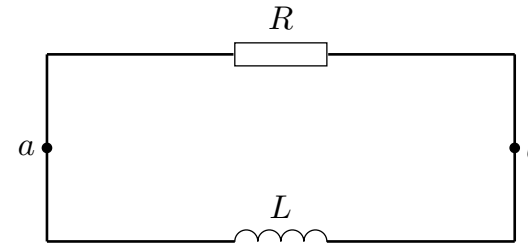


FIGURE I.3. Circuit RL isolé, décrit par l'équation (I.5).

rants traversant R et C doit s'annuler, dont on déduit l'équation d'évolution de la tension $V = V_a - V_b$

$$I_{\text{cap}} + I_{\text{res}} = C\dot{V} + \frac{V}{R} = 0 \Rightarrow \dot{V} + \frac{V}{\tau} = 0 \quad \text{avec } \tau = RC , \tag{I.4}$$

soit un amortissement exponentiel avec la constante de temps τ .

De même, pour le circuit RL de la figure I.3, on trouve en prenant la dérivée de la somme des courants traversant les deux éléments :

$$\frac{d}{dt}(I_{\text{res}} + I_{\text{ind}}) = \dot{V} + \frac{V}{L} = 0 \Rightarrow \dot{V} + \frac{V}{\tau} = 0 \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R} , \tag{I.5}$$

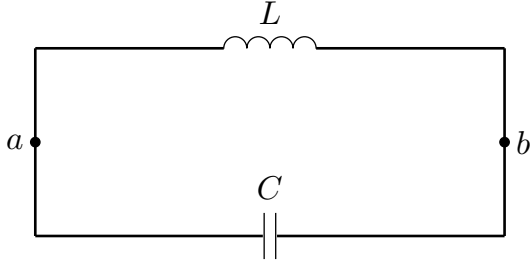
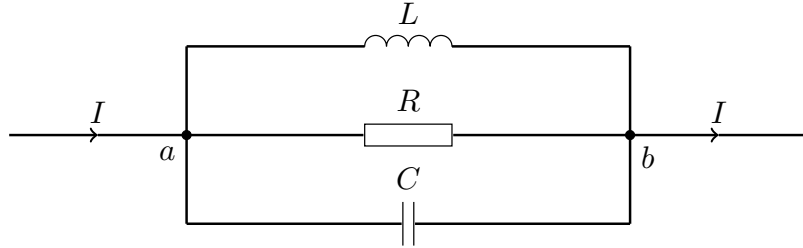
là aussi un amortissement exponentiel. Nous retrouverons ce type de dissipation dans la description d'une jonction Josephson.

Le circuit LC représenté sur la figure I.4 est également intéressant car il va nous permettre de mettre en place, sur un modèle très simple, le formalisme lagrangien et hamiltonien que nous utiliserons fréquemment dans la suite. L'équation d'évolution de l'intensité dans le circuit conduit à :

$$\frac{d}{dt}(I_{\text{cap}} + I_{\text{ind}}) = C\ddot{V} + \frac{V}{L} = 0 \Rightarrow \ddot{V} + \omega^2 V = 0 \quad \text{avec } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} , \tag{I.6}$$

soit une évolution périodique pour V à la fréquence $\omega/2\pi$.

Finalement, pour préparer le traitement quantitatif d'une jonction Josephson, il est intéressant de considérer la situation où les trois éléments


 FIGURE I.4. Circuit LC isolé, décrit par l'équation (I.6).

 FIGURE I.5. Circuit RLC alimenté par le courant extérieur I . L'évolution du flux magnétique Φ dans l'inductance L est décrite par l'équation (I.8).

L , R et C sont placés en parallèle et alimentés par un générateur de courant I dépendant éventuellement du temps (figure I.5). Introduisons le flux magnétique dans l'inductance

$$\Phi(t) = LI_{\text{ind}}(t), \quad (\text{I.7})$$

où $I_{\text{ind}}(t)$ est l'intensité traversant l'inductance L . La tension $V(t)$ est donnée par $V = L\dot{I}_{\text{ind}} = \dot{\Phi}$ et les courants traversant la capacité C et la résistance R sont respectivement $I_{\text{cap}} = C\dot{V} = C\ddot{\Phi}$ et $I_{\text{res}} = V/R = \dot{\Phi}/R$, de sorte que l'équation donnant l'évolution de Φ s'écrit

$$C\ddot{\Phi} + \frac{\dot{\Phi}}{R} + \frac{\Phi}{L} = I \quad (\text{I.8})$$

qui peut encore s'écrire

$$\ddot{\Phi} + \frac{\omega}{Q_{\text{qual}}}\dot{\Phi} + \omega^2\Phi = \frac{I}{C}. \quad (\text{I.9})$$

L'équation sans second membre ($I = 0$) correspond à un mouvement d'oscillateur harmonique amorti, avec le facteur de qualité

$$Q_{\text{qual}} = \omega RC = R\sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (\text{I.10})$$

1-2 Formulation lagrangienne du circuit LC

Reprenons le circuit isolé LC de la figure I.4. Pour passer au formalisme lagrangien, rappelons que pour un élément d'un circuit électrique traversé par une intensité I et soumis à une différence de potentiel V , la puissance électrique instantanée est VI . L'énergie stockée (ici sous forme inductive ou capacitive) est obtenue en calculant l'intégrale $\int V(t)I(t) dt$, partant de l'état $U = 0, I = 0$ pour aller vers le couple (V, I) désiré.

On a donc pour une inductance L

$$U_L(I) = \int L \frac{dI}{dt} I(t) dt = \frac{1}{2}LI^2, \quad (\text{I.11})$$

et pour un condensateur C

$$U_C(Q) = \int V(t) C \frac{dV}{dt} dt = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C}, \quad (\text{I.12})$$

d'où l'énergie totale du circuit LC :

$$E = U_L + U_C = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{Q^2}{2C}. \quad (\text{I.13})$$

Il existe plusieurs lagrangiens simples permettant de décrire l'évolution du circuit LC isolé. Pour faciliter le lien avec ce que nous verrons un peu plus loin pour la jonction Josephson, utilisons comme en (I.9) le flux magnétique $\Phi(t) = LI_{\text{ind}}(t)$, c'est-à-dire :

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t V(t') dt', \quad (\text{I.14})$$

le choix de la borne inférieure de l'intégrale étant sans importance pratique. Considérons le lagrangien

$$\mathcal{L}(\Phi, \dot{\Phi}) = \frac{1}{2}C\dot{\Phi}^2 - U_L(\Phi) \quad \text{avec} \quad U_L(\Phi) = \frac{\Phi^2}{2L} \quad (\text{I.15})$$

Il conduit à l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \right) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \right) \Rightarrow C\ddot{\Phi} = -\frac{\Phi}{L} \quad (\text{I.16})$$

ce qui redonne bien l'oscillation à la fréquence $\omega/2\pi$. Le moment conjugué de Φ est

$$p_\Phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = C\dot{\Phi} \quad (\text{I.17})$$

c'est-à-dire $p_\Phi = CV = Q$ et l'hamiltonien $H(\Phi, p_\Phi)$ vaut

$$H(\Phi, p_\Phi) = p_\Phi \dot{\Phi} - \mathcal{L}(\Phi, \dot{\Phi}) = \frac{p_\Phi^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} \quad (\text{I.18})$$

On retrouve l'énergie totale du circuit LC donnée en (I.13) avec, pour le formalisme lagrangien adopté ici, l'énergie capacitive qui joue le rôle d'énergie cinétique et l'énergie inductive qui joue le rôle d'énergie potentielle. Plus précisément, les deux équations de Hamilton sont

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\Phi} \Rightarrow \dot{\Phi} = \frac{p_\Phi}{C} \quad (\text{I.19})$$

et

$$\dot{p}_\Phi = -\frac{\partial H}{\partial \Phi} \Rightarrow C\ddot{\Phi} = -\frac{\Phi}{L}, \quad (\text{I.20})$$

ce qui permet de retrouver l'équation d'évolution (I.6).

1-3 Quantification du circuit LC

Partant du formalisme lagrangien classique, il est possible de quantifier le problème en traitant les deux quantités conjuguées, le flux magnétique Φ et la charge $p_\Phi = Q$, comme des opérateurs vérifiant la relation de commutation $[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar$ (RASMUSSEN, CHRISTENSEN et al. 2021). Pour travailler

avec des variables sans dimensions, on suppose la charge quantifiée en unité de q_0 et on introduit le quantum de flux associé

$$\Phi_0 \equiv \frac{2\pi\hbar}{q_0}. \quad (\text{I.21})$$

En pratique, pour un supraconducteur, le quantum de charge q_0 est égal à la charge d'une paire de Cooper, $2e$. On peut alors travailler avec les variables sans dimension

$$\hat{\varphi} \equiv 2\pi \frac{\hat{\Phi}}{\Phi_0} \quad \hat{n} \equiv \frac{\hat{p}_\Phi}{q_0} = \frac{\hat{Q}}{q_0} \quad (\text{I.22})$$

de sorte que la relation de commutation devient

$$[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar \quad \Leftrightarrow \quad [\hat{\varphi}, \hat{n}] = i \quad (\text{I.23})$$

et l'hamiltonien peut s'écrire

$$\hat{H} = \frac{1}{2}E_C\hat{n}^2 + \frac{1}{2}E_L\hat{\varphi}^2 \quad (\text{I.24})$$

avec les énergies

$$E_C = \frac{q_0^2}{C} \quad E_L = \frac{(\Phi_0/2\pi)^2}{L} = \frac{\hbar^2}{q_0^2 L}. \quad (\text{I.25})$$

C'est l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique de fréquence ω telle que

$$\hbar\omega = \sqrt{E_C E_L} \quad (\text{I.26})$$

avec, dans l'état fondamental, la dispersion des deux quantités conjuguées

$$\frac{1}{2}E_C\Delta n^2 = \frac{1}{2}E_L\Delta\varphi^2 = \frac{1}{4}\hbar\omega. \quad (\text{I.27})$$

Pour $E_C = E_L$, on trouve $\Delta n = \Delta\varphi = 1/\sqrt{2}$. Quand on s'écarte de ce rapport $E_C/E_L = 1$, on obtient un état fondamental avec des fluctuations de charge plus ou moins grandes.

Ces considérations, qui deviendront véritablement pertinentes pour une jonction Josephson plutôt que pour une inductance linéaire, n'ont d'intérêt que si la température est suffisamment basse pour qu'il soit possible de préparer l'oscillateur avec une population faible des états excités ($k_B T \ll \hbar\omega$). Pour les circuits Josephson, l'équivalent de la fréquence

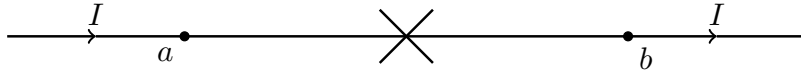


FIGURE I.6. Représentation schématique d'une jonction Josephson idéale.

$\omega/2\pi$ est la fréquence plasma, qui se situe dans la gamme de la dizaine de GHz. Le traitement quantique qui précède devient donc nécessaire pour des températures notablement inférieures au kelvin.

2 La jonction Josephson

2-1 Géométrie de la jonction

Une jonction Josephson est un élément non linéaire d'un circuit électrique formé par deux électrodes supraconductrices, notées ici a et b , séparées par une barrière qui peut être un matériau isolant, semi-conducteur ou encore un conducteur normal. Cette non-linéarité associée à l'absence potentielle de dissipation puisqu'on utilise des matériaux supraconducteurs, font de la jonction Josephson un composant essentiel pour la fabrication de circuits pour le traitement quantique de l'information. Sa représentation schématique est indiquée en figure I.6.

Dans tout ce qui va suivre, nous décrirons chaque électrode comme une assemblée de paires de Cooper, chaque paire étant formée par l'appariement de deux électrons de vecteurs d'onde et de spins opposés. Ces paires, de nature bosonique effective, se condensent dans un même état quantique macroscopique décrit par un paramètre d'ordre complexe, qui brise spontanément la symétrie de phase $U(1)$ du système. La phase de ce paramètre d'ordre va jouer un rôle central dans tout ce qui suit.

La barrière séparant les deux supraconducteurs doit être suffisamment fine pour que les paires de Cooper puissent passer par effet tunnel d'une électrode à l'autre. En pratique, cette épaisseur est de l'ordre de la dizaine de nanomètres, soit une dizaine de couches atomiques. Notons qu'à la place de la barrière tunnel, il peut y avoir simplement une forte constric-

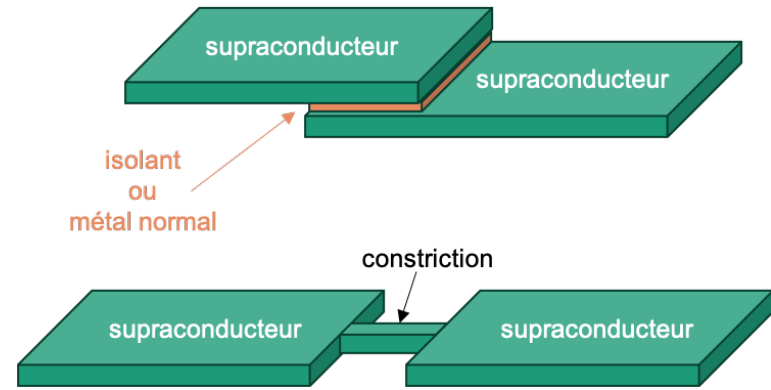


FIGURE I.7. Exemples de jonctions Josephson réalisées à partir de barrière tunnel ou de lien faible.

tion spatiale, auquel cas on parle de "lien faible" (*weak link*) entre les deux supraconducteurs. Nous avons représenté en figure I.7 deux géométries utilisées pour réaliser ces jonctions.

On note I le courant électrique traversant la jonction et V la tension électrique entre ses bornes (figure I.8). Pour décrire la jonction, on introduit comme indiqué plus haut les deux paramètres d'ordre $\psi_{a,b}$ associés aux deux électrodes, et caractérisés par les densités de paires de Cooper $n_{a,b}$ et les phases $\varphi_{a,b}$:

$$\psi_j = \sqrt{\rho_j} e^{i\varphi_j} \quad j = a, b. \quad (I.28)$$

Une quantité importante vient s'ajouter aux paramètres habituellement utilisés pour décrire les éléments habituels d'un circuit électrique ; il s'agit de la différence de phase entre les deux côtés de la jonction :

$$\varphi \equiv \varphi_a - \varphi_b. \quad (I.29)$$

Nous verrons un peu plus loin que cette phase φ joue dans certaines conditions un rôle similaire au flux Φ de l'inductance considérée en §1, mais son effet peut aller bien au delà.

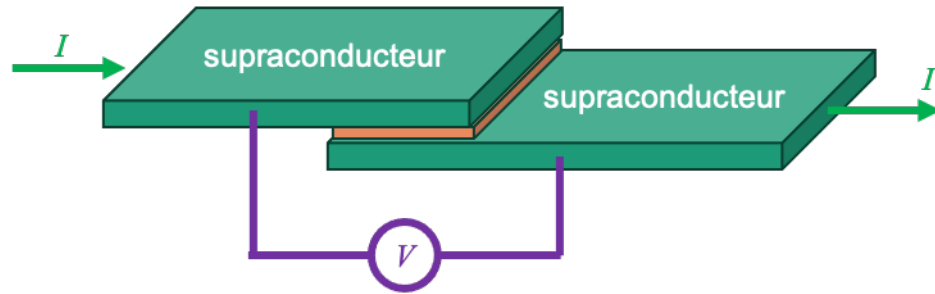


FIGURE I.8. Un générateur de courant délivre l'intensité I à travers la jonction. On mesure la tension V à ses bornes.

2-2 La première relation de Josephson

La dynamique de la jonction est décrite par deux équations fondamentales. La première relation de Josephson indique que la jonction peut être traversée par un courant I même en l'absence de toute différence de potentiel V . Ce courant s'écrit¹ :

$$\boxed{\text{Jonction "idéale" : } I = I_c \sin \varphi} \quad (\text{I.30})$$

où l'intensité I_c est une caractéristique de la jonction. Elle varie beaucoup selon le type de jonction considérée, depuis le microampère jusqu'à la dizaine de milliampères.

Précisons là encore le sens du courant : I désigne par convention l'intensité électrique allant de a vers b . Un courant I positif signifie donc que les paires de Cooper, chargées négativement, vont de b vers a sur la figure I.6. Vérifions que la relation (I.30) est conforme à ce qu'on attend pour la vitesse d'une particule quantique de masse m quand sa fonction d'onde présente un gradient de phase : $v = \frac{\hbar}{m} \frac{d\varphi}{dx}$; si la phase φ_a est choisie légèrement plus grande que φ_b (la différence φ étant petite devant π), cette relation s'écrit $I \approx I_c \varphi = I_c(\varphi_a - \varphi_b) > 0$: la phase augmente quand on va de b vers a et la vitesse des paires de Cooper est donc bien dirigée de

1. La dépendance en $\sin \varphi$ du courant peut être enrichie en ajoutant des harmoniques, tout en conservant la périodicité vis-à-vis de la variable φ , puisque φ et $\varphi + 2\pi$ correspondent à la même situation physique. Cette complication n'interviendra quasiment pas dans les jonctions que nous considérerons dans la suite.

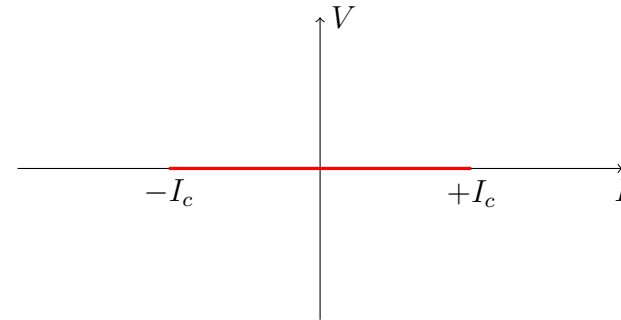


FIGURE I.9. Fraction de la caractéristique d'une jonction Josephson déduite de la relation (I.30).

b vers a [voir également le traitement ci-dessous conduisant de façon plus quantitative à (I.31-I.33)].

Nous aurons l'occasion de décrire en détail les caractéristiques *courant-tension* des jonctions Josephson. À ce stade, nous pouvons d'ores et déjà en proposer une composante : un segment compris entre $-I_c$ et $+I_c$ sur l'axe $V = 0$ (figure I.9).

Dans une expérience de pensée où l'on prépare les deux supraconducteurs séparés et isolés, puis que l'on branche un couplage tunnel entre les deux, la phase φ est aléatoire puisqu'elle résulte d'une brisure spontanée de symétrie. Le courant I peut donc prendre n'importe quelle valeur entre $-I_c$ et $+I_c$. Ce courant permanent peut circuler indéfiniment si l'on suppose que les deux supraconducteurs a et b sont connectés à des sources de courant qui permettent de maintenir constantes les densités de paires de Cooper $n_{a,b}$ et les phases φ_{ab} : c'est l'*effet Josephson continu*.

JOSEPHSON (1962) a établi cette relation à partir de l'approche de Bogoliubov pour un supraconducteur. Deux ans plus tard, Feynman en a donné une démonstration simple dans son célèbre cours de physique, en écrivant l'évolution des deux paramètres d'ordre $\psi_{a,b}$, assimilés à des amplitudes de probabilité obéissant à l'équation de Schrödinger. Nous reprendrons une approche voisine en §4 pour un double puits contenant des atomes piégés. Notons toutefois une différence entre notre approche et celle de

Feynman : nous nous intéresserons à un système fermé, pour lequel le nombre d'atomes total $N_a + N_b$ est constant. L'approche de Feynman est plus subtile : elle consiste à évaluer le courant (non nul) de paires de Cooper traversant la barrière $\frac{d\rho_a}{dt} = -\frac{d\rho_b}{dt}$, tout en maintenant les densités de paires ρ_a et ρ_b constantes. Cela est possible car on a affaire dans le cas d'une jonction supraconductrice à un système ouvert. Il faut toutefois un certain "doigté" pour prendre en compte correctement ce point tout en conservant un système hamiltonien.

Nous pouvons donner ici une justification semi-quantitative de la première relation de Josephson en utilisant une version discrète du courant de probabilité associé à une fonction d'onde $\psi(x, t)$:

$$J = i \frac{\hbar}{m} \left(\psi \frac{d\psi^*}{dx} - \psi^* \frac{d\psi}{dx} \right) \quad (\text{I.31})$$

où nous nous limitons à une dimension d'espace pour simplifier les notations. Nous nous plaçons au centre de la barrière pour évaluer J et nous faisons la substitution

$$\psi \rightarrow \frac{\alpha}{2} (\psi_a + \psi_b) \quad \frac{d\psi}{dx} \rightarrow \frac{\beta}{\ell} (\psi_b - \psi_a) \quad (\text{I.32})$$

où les coefficients α et β sont mis ici de façon heuristique pour prendre en compte l'atténuation exponentielle de l'amplitude de probabilité à l'intérieur de la barrière et où ℓ représente l'épaisseur de cette barrière. On trouve alors

$$J \propto i (\psi_a \psi_b^* - \psi_a^* \psi_b) \propto -\sin \varphi \quad (\text{I.33})$$

ce qui correspond bien au courant prédit par Josephson. Le signe $-$ résulte du fait déjà mentionné que le courant de probabilité des paires de Cooper (chargées négativement) est de signe opposé à celui du courant électrique.

2-3 La seconde relation de Josephson

La seconde relation de Josephson donne l'évolution de la phase relative φ en présence d'une différence de potentiel V (qui peut dépendre du temps) :

$$\boxed{\hbar \dot{\varphi} = 2eV} \quad (\text{I.34})$$

Le facteur $2e$ (avec $2e > 0$) représente la charge absolue d'une paire de Cooper et $2eV$ représente donc la différence d'énergie de cette paire entre les deux côtés de la barrière. Cette équation fait écho à celle bien connue pour l'évolution de la fonction d'onde d'une particule unique d'énergie E , faisant intervenir le facteur de phase $e^{-iEt/\hbar}$, donc $\hbar \dot{\varphi} = -E$, nous y reviendrons en détail dans notre étude des jonctions atomiques en §4.

Considérons le cas d'une tension V constante, de sorte que la phase évolue linéairement dans le temps : $\varphi(t) = \varphi(0) + 2eVt/\hbar$. Ce résultat injecté dans l'équation (I.30) indique qu'un courant oscillant, d'amplitude I_c et de fréquence $2eV/\hbar$, va traverser la jonction : c'est l'effet Josephson alternatif.

Il n'est pas immédiat à ce stade de savoir comment combiner les deux équations (I.30-I.34) pour décrire une situation générale dans laquelle une jonction est alimentée par un générateur de courant (continu ou variable), avec des intensités pouvant dépasser I_c . Il faut pour cela introduire d'autres paramètres pour caractériser cette jonction, notamment sa capacité C et sa résistance effective R . Nous verrons au paragraphe suivant comment obtenir une description intégrant ces éléments dans le cadre du modèle RCSJ (*Resistively and Capacitively Shunted Junction*), c'est-à-dire une jonction avec un biais résistif et un biais capacitif.

2-4 Le modèle RCSJ

Les deux équations de Josephson (I.30-I.34) ne suffisent pas à elles seules à décrire l'ensemble des phénomènes susceptibles d'être observés avec une jonction Josephson. Par exemple, elles ne permettent pas de répondre à la question : que se passe-t-il si on alimente la jonction avec un courant d'intensité I supérieure à I_c ? L'expérience prouve que l'on rentre alors dans un régime dissipatif, avec l'apparition d'une différence de potentiel V non nulle aux bornes de la jonction. Par ailleurs, quand on alimente la jonction avec un courant alternatif, il apparaît des effets dont on ne peut rendre compte qu'en supposant que la jonction comporte une partie capacitive, formée par les deux parois disposées face à face.

Le modèle RCJS, proposé initialement par STEWART (1968) et MCCUMBER (1968), permet de rendre compte d'une grande variété de phénomènes. Il consiste à décrire une jonction Josephson comme trois éléments

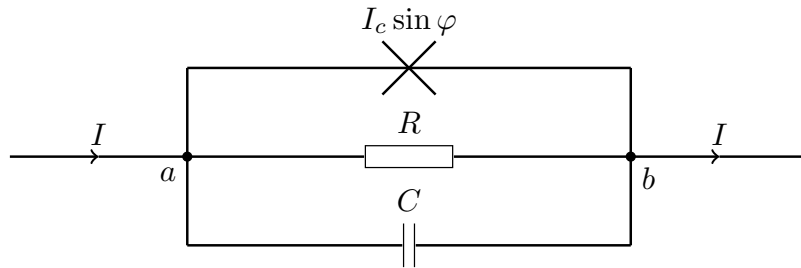


FIGURE I.10. Représentation d'une jonction Josephson dans le modèle RCSJ. Le courant total I circulant dans cet élément de circuit est donné en (I.35), où $V = V_a - V_b$.

mis en parallèle :

- la jonction idéale, traversée par le courant $I_c \sin \varphi$;
- une résistance R , traversée par le courant V/R ;
- une capacité C , traversée par le courant $C dV/dt$.

Le courant total I , imposé de l'extérieur par un générateur de courant, est alors relié à la différence de potentiel V aux bornes de cet ensemble par

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{V}{R} + C \frac{dV}{dt} \quad (\text{I.35})$$

avec toujours $\hbar \dot{\varphi} = 2eV$. Notons que la dissipation liée à la présence de la résistance R est essentielle pour le fonctionnement de nombreux dispositifs utilisant des jonctions Josephson, en métrologie par exemple, puisqu'elle permet d'atteindre des régimes stationnaires stables quand la jonction est pilotée par des courants alternatifs (KAUTZ 1996). La description de cette dissipation par une simple résistance est valable à relativement basse fréquence, et sera suffisante pour la suite de ce cours. La limite non dissipative de ce modèle est obtenue en prenant $R \rightarrow \infty$.

Les origines physiques de la dissipation sont multiples ; on trouve en premier lieu le courant de quasi-particules, qui devient important quand eV dépasse 2Δ , où Δ est le gap du supraconducteur ; la dissipation peut également être due à des inhomogénéités de la barrière ou des micro-ponts métalliques qui créent des chemins résistifs ; d'autres processus physiques,

liés aux états liés d'Andreev ou aux fluctuations de phase, peuvent jouer un rôle dissipatif important. Nous ne discuterons pas ici ces différents mécanismes pour les matériaux supraconducteurs, mais nous les étudierons plus en détail dans les chapitres suivants pour les jonctions atomiques.

On constate sur (I.35) que si l'on impose un courant continu d'intensité I inférieur à I_c sur ce système, la solution non dissipative des équations initiales (I.30)-(I.34) reste valable : $V = 0$, φ constante (avec $\sin \varphi = I/I_c$). On retrouve donc bien l'effet Josephson continu. En ce qui concerne l'effet Josephson alternatif, il est également contenu dans ces équations : on le retrouve en imposant une tension constante V de sorte que le terme capacitif ne contribue pas, le courant I étant alors modulé dans le temps à la fréquence $2eV/\hbar$.

Les valeurs de C et de R diffèrent bien sûr fortement selon le type de jonction. Pour les transmons, un élément très utilisé en information quantique, C se situe dans la plage 1 – 100 femtoFarad. La jonction utilisée par Devoret, Matrinis et Clarke pour les expériences qui leur ont valu le prix Nobel 2025 avait une capacité de 5 pF, pour une aire de $10 \mu\text{m}^2$. Les résistances R sont en général dans le domaine de quelques ohms à quelques dizaines d'ohms.

L'équation d'évolution (I.35), couplée à $\hbar \dot{\varphi} = 2eV$, peut s'écrire comme une équation différentielle du deuxième ordre pour la fonction $\varphi(t)$:

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\varphi} + \frac{\hbar C}{2e} \ddot{\varphi} \quad (\text{I.36})$$

Nous aurons l'occasion de revenir à de multiples reprises sur cette équation et ses nombreuses conséquences physiques.

3 Lagrangien et hamiltonien pour une jonction

Dans cette partie, nous allons utiliser (partiellement) le modèle RCSJ que nous venons d'introduire. Nous allons nous intéresser à un problème sans dissipation, c'est-à-dire $R = \infty$, pour établir le formalisme lagrangien et le formalisme hamiltonien qui permettent de retrouver les relations de Josephson.

3-1 Formulation lagrangienne du modèle CSJ

Prenons $R = \infty$ dans le modèle de la figure I.10, de sorte qu'il y a donc deux termes énergétiques associés à la jonction :

— celui lié à la présence de la capacité et déjà discuté en § 1-2 :

$$U_C(Q) = \frac{Q^2}{2C} ; \quad (\text{I.37})$$

— celui lié à la jonction idéale. Pour déterminer ce dernier, revenons à la forme générique $\int^t V(t')I(t') dt'$ et appliquons-là en utilisant les deux relations de Josephson :

$$\begin{aligned} U_J(\varphi) &= \int^t V(t')I(t') dt' = \frac{\hbar I_c}{2e} \int^t \dot{\varphi}(t') \sin[\varphi(t')] dt' \\ &= -\frac{\hbar I_c}{2e} \cos[\varphi(t)] + \text{cte.} \end{aligned} \quad (\text{I.38})$$

Introduisons maintenant les deux énergies caractéristiques

$$E_J = \frac{\hbar I_c}{2e} \quad E_C = \frac{(2e)^2}{C} \quad (\text{I.39})$$

où l'on a pris la charge $2e$ pour calibrer l'énergie capacitive, c'est-à-dire la charge d'une paire de Cooper (en valeur absolue). On a donc

$$U_C(n) = \frac{1}{2} E_C n^2 \quad U_J(\varphi) = -E_J \cos \varphi \quad (\text{I.40})$$

où

$$n = \frac{Q}{2e} \quad (\text{I.41})$$

est le nombre de paires de Cooper sur la partie capacitive.

Il est utile pour la suite d'établir la fonction de Lagrange qui permet de retrouver l'équation du mouvement (I.36). Pour un courant extérieur imposé I , un lagrangien possible est

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{\hbar^2}{2E_C} \dot{\varphi}^2 - E(\varphi) \quad \text{avec} \quad E(\varphi) = U_J(\varphi) - \frac{\hbar I}{2e} \varphi \quad (\text{I.42})$$

L'équation de Lagrange s'écrit en effet

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\hbar^2}{E_C} \ddot{\varphi} = -E_J \sin \varphi + \frac{\hbar I}{2e} \quad (\text{I.43})$$

c'est-à-dire l'équation donnée en (I.36) quand on omet la partie résistive ($R \rightarrow \infty$).

On notera que pour ce choix du lagrangien, le moment conjugué de la phase φ est

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\hbar^2}{E_C} \dot{\varphi} = \frac{\hbar}{E_C} 2eV \quad (\text{I.44})$$

c'est-à-dire

$$\boxed{p_\varphi = \hbar n} \quad (\text{I.45})$$

où a utilisé le lien entre la différence de potentiel V aux bornes de la jonction et n : $V = Q/C = 2en/C$.

Quantification de la dynamique de la jonction. On déduit de ce qui précède que les variables φ et n sont conjuguées l'une de l'autre, ce qui joue un rôle essentiel si l'on veut quantifier la dynamique de la jonction. Esquisons très brièvement la démarche à suivre, sur laquelle nous reviendrons en détail dans les chapitres 5 et 6. Pour cette quantification, il est tentant de poser $[\hat{\varphi}, \hat{p}_\varphi] = i\hbar$, ou encore $[\hat{\varphi}, \hat{n}] = i$, qui est formellement identique à la relation (I.23) trouvée pour un circuit LC . Notons néanmoins la différence importante suivante : φ est ici une variable cyclique, définie modulo 2π . Nous verrons au chapitre 5 comment formaliser correctement ce passage classique-quantique.

Par ailleurs, on déduit de cette relation de commutation une condition nécessaire pour que le traitement classique adopté ici soit valable : il faut que les effets physiques étudiés ne dépendent pas des incertitudes Δn et $\Delta \varphi$, sachant que celles-ci sont contraintes par l'inégalité de Heisenberg $\Delta n \Delta \varphi > 1/2$.

3-2 Formulation hamiltonienne du modèle CSJ

Connaissant le lagrangien du problème et le moment conjugué à φ , on obtient l'hamiltonien

$$H = \dot{\varphi} p_{\varphi} - \mathcal{L} \quad (\text{I.46})$$

qui est simplement égal à la somme des deux énergies $U_C(n)$ et $U_J(\varphi)$ introduites plus haut, la première jouant le rôle d'une énergie cinétique et la seconde une énergie potentielle, auxquelles on ajoute l'éventuel potentiel linéaire $-\hbar I \varphi / 2e$ si on impose un courant extérieur I non nul :

$$H(\varphi, p_{\varphi}) = \frac{E_C}{2\hbar^2} p_{\varphi}^2 - E_J \cos \varphi - \frac{\hbar I}{2e} \varphi \quad (\text{I.47})$$

Les deux relations de Josephson correspondent alors aux deux équations de Hamilton :

$$\dot{p}_{\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\hbar I}{2e} = E_J \sin \varphi + \hbar \dot{n} \quad (\text{I.48})$$

et

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} \quad \Rightarrow \quad \hbar \dot{\varphi} = E_C n = 2eV \quad (\text{I.49})$$

Notons que la première relation de Josephson a été complétée par rapport à (I.30) car on a ajouté le courant $\hbar \dot{n}$ correspondant à la charge/décharge du condensateur de la figure I.10.

Pour un courant extérieur nul ($I = 0$), l'hamiltonien (I.47) est formellement identique à celui d'un pendule pesant de longueur ℓ et de masse m :

$$H_{\text{pen}}(\varphi, p_{\varphi}) = \frac{p_{\varphi}^2}{2m} - mg\ell \cos \varphi \quad (\text{I.50})$$

où φ désigne l'angle par rapport à la verticale (figure I.11). Cette analogie nous sera utile dans les chapitres suivants. Notons que la présence explicite de \hbar dans les équations qui précèdent ne doit pas faire illusion : notre traitement des variables φ et p_{φ} est classique (voir la discussion à la fin de §3-1).

Nous avons tracé en figure I.12 le portrait de phase de ce pendule pesant, c'est-à-dire les courbes iso-énergies dans le plan $(\varphi, \dot{\varphi})$ pour $E =$

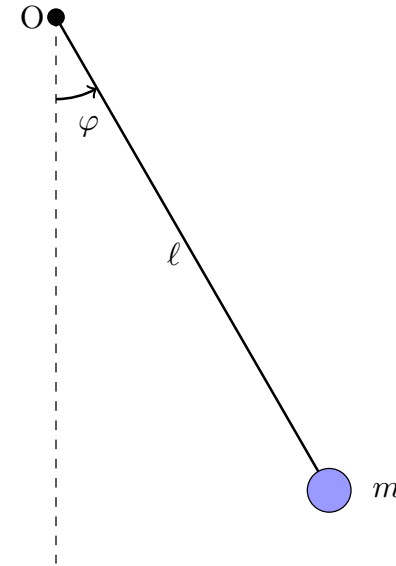


FIGURE I.11. Pendule pesant de longueur ℓ et de masse m , décrit par l'hamiltonien (I.50), formellement identique à (I.47) pour $I = 0$.

$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \cos \varphi$. On y reconnaît les deux types de trajectoires possibles : (i) les trajectoires oscillantes pour $E < 1$, avec le pendule qui ne monte pas jusqu'au point $\varphi = \pm\pi$, et les trajectoires tournantes, pour $E > 1$. Notons que la topologie de ce portrait de phase est celle d'un cylindre, puisque les lignes verticales $\varphi = \pm\pi$ correspondent à la même situation physique.

3-3 Limite $\varphi \ll 1$ et oscillations plasma

Dans la limite des faibles phases, on peut faire dans le modèle RCSJ l'approximation $\sin \varphi \approx \varphi$, ce qui conduit à l'équation d'évolution

$$\frac{2e}{\hbar} I = \frac{2eI_c}{\hbar} \varphi + \frac{\dot{\varphi}}{R} + C\ddot{\varphi}. \quad (\text{I.51})$$

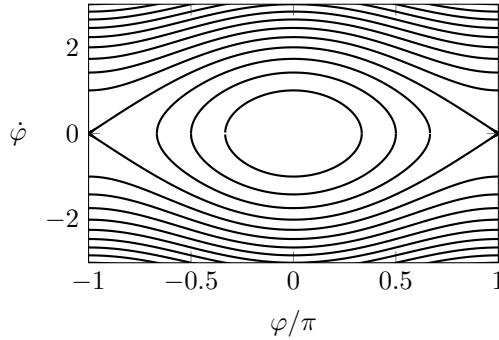


FIGURE I.12. Portrait de phase d'un pendule pesant d'énergie $E = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \cos \varphi$. Les courbes correspondent à $E = -0.5, 0, 0.5, 1, \dots$.

Cette équation est identique à celle trouvée en (I.8) pour un circuit RLC , si on définit l'inductance L par

$$L = \frac{\hbar}{2eI_c}. \quad (\text{I.52})$$

Dans cette limite de faibles phases, la jonction Josephson idéale se comporte donc comme une inductance. Sa valeur est en pratique très faible (nanoHenry), mais on peut mettre un grand nombre de jonctions en série pour l'augmenter pour certaines applications.

Considérons le cas particulier d'une intensité extérieure I nulle, toujours dans cette limite $\varphi \ll 1$, et négligeons la contribution du terme dissipatif (i.e. $R \rightarrow \infty$), ce qui donne l'équation du mouvement :

$$0 = \frac{2eI_c}{\hbar} \varphi + C \ddot{\varphi}. \quad (\text{I.53})$$

La phase φ va donc présenter un mouvement sinusoïdal appelé "oscillation plasma" à la fréquence :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{2eI_c}{\hbar C}}. \quad (\text{I.54})$$

Cette fréquence plasma ω_p peut réécrire en termes des énergies E_J et E_C introduites plus haut :

$$\hbar\omega = \sqrt{E_J E_C}, \quad (\text{I.55})$$

comme on le constate immédiatement à partir de l'expression de l'hamiltonien (I.47) dans le cas $I = 0$ et $\varphi \ll 1$:

$$H(\varphi, p_\varphi) = \frac{E_C}{2\hbar^2} p_\varphi^2 + \frac{E_J}{2} \varphi^2. \quad (\text{I.56})$$

Ces oscillations plasma, qu'il ne faut pas confondre avec l'effet Josephson alternatif, correspondent au mouvement de faible amplitude du pendule de la figure I.11 autour de sa position d'équilibre, et elles résultent d'un échange périodique d'énergie entre la partie inductive de la jonction et sa partie capacitive.

4 La jonction Josephson pour un gaz d'atomes

4-1 Barrière statique et double puits

Nous nous intéressons maintenant à la transposition de la jonction Josephson à un gaz d'atomes refroidis et piégés, ce gaz pouvant être décrit par une fonction d'onde macroscopique. Les gaz quantiques étant généralement confinés dans des pièges harmoniques ou dans des pièges à fond plat, une méthode simple pour réaliser une barrière tunnel ou une constriction consiste à éclairer ce gaz avec un faisceau lumineux focalisé au centre du piège. La fréquence de ce faisceau est choisie supérieure à la fréquence de résonance des atomes, de sorte que la lumière crée un potentiel répulsif sur les atomes, donc une barrière dont la hauteur est proportionnelle à l'intensité lumineuse.

Les puissances laser disponibles en pratique sont largement suffisantes pour que cette barrière ait une hauteur comparable au potentiel chimique et à la température des atomes, ce qui permet de se placer dans les conditions requises pour obtenir un effet Josephson. La largeur de la barrière est de l'ordre du micromètre (ou quelques micromètres), ce qui reste suffisamment petit pour que l'effet tunnel soit significatif.

La première expérience avec une jonction unique réalisée de cette manière a été faite par ALBIEZ, GATI et al. (2005), dont nous avons extrait la figure I.13. Nous reviendrons sur les résultats de cette expérience en §4-5. Auparavant, plusieurs expériences, interprétables en termes de jonctions multiples, avaient été réalisées avec des gaz d'atomes placés dans

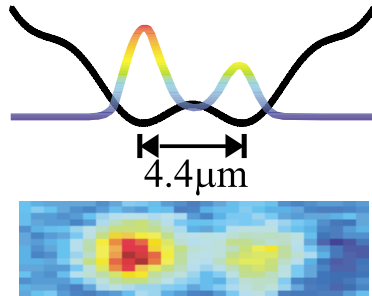


FIGURE I.13. Superposition d'un puits de potentiel harmonique et d'une barrière centrale pour un condensat d'atomes ^{87}Rb . Figure extraite de ALBIEZ, GATI et al. (2005).

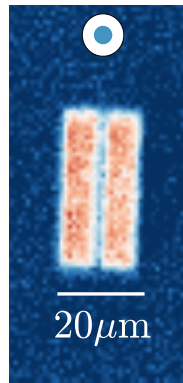


FIGURE I.14. Barrière Josephson dans un gaz 2D uniforme d'atomes ^6Li (fermions). Figure extraite de LUICK, SOBIREY et al. (2020).

le potentiel périodique créé par un réseau optique, comme par exemple ANDERSON & KASEVICH (1998) et CATALIOTTI, BURGER et al. (2001), mais il est plus délicat de connecter de manière quantitative leurs résultats à la physique Josephson.

Ce type d'expérience peut également être mené avec des fermions, comme représenté en figure I.14 pour un gaz d'atomes fermioniques en interaction forte (^6Li). Ce gaz est placé en géométrie bidimensionnelle grâce à un fort confinement le long de la direction verticale (perpendiculaire au plan de la figure). La taille du col (*waist*) de la barrière est de 0.8 micromètre.

4-2 Le modèle à deux modes

Pour transposer le principe de la jonction Josephson à notre gaz d'atomes, nous allons adopter la description la plus simple possible en nous limitant à un modèle à deux modes spatiaux $\Phi_a(\mathbf{r})$ et $\Phi_b(\mathbf{r})$, associés aux parties gauche et droite de la jonction. Nous allons supposer que les N atomes du gaz partagent la même fonction d'onde. L'état de chaque atome sera limité aux combinaisons linéaires de Φ_a et Φ_b :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \alpha_a(t)\Phi_a(\mathbf{r}) + \alpha_b(t)\Phi_b(\mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad |\alpha_a(t)|^2 + |\alpha_b(t)|^2 = 1. \quad (\text{I.57})$$

L'état à N corps correspond à un condensat de Bose-Einstein :

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \psi(\mathbf{r}_1, t) \psi(\mathbf{r}_2, t) \dots \psi(\mathbf{r}_N, t) \quad (\text{I.58})$$

et nous introduisons les amplitudes "macroscopiques"

$$c_a(t) = \sqrt{N} \alpha_a(t) \quad c_b(t) = \sqrt{N} \alpha_b(t) \quad \text{avec} \quad |c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = N. \quad (\text{I.59})$$

Pour l'état Ψ , le nombre moyen d'atomes sur le mode $j = a, b$ est $N_j = |c_j|^2$. Cette réduction de la dynamique à seulement deux modes constitue bien sûr une contrainte très forte, car elle revient à négliger toutes les autres excitations possibles du système, comme par exemple les ondes sonores pouvant se propager de part et d'autre de la barrière.

Pour préciser la procédure suivie pour choisir Φ_a et Φ_b , nous allons considérer le cas d'un double puits symétrique uni-dimensionnel $V(x)$ qui permet de décrire les étapes essentielles avec un formalisme réduit.

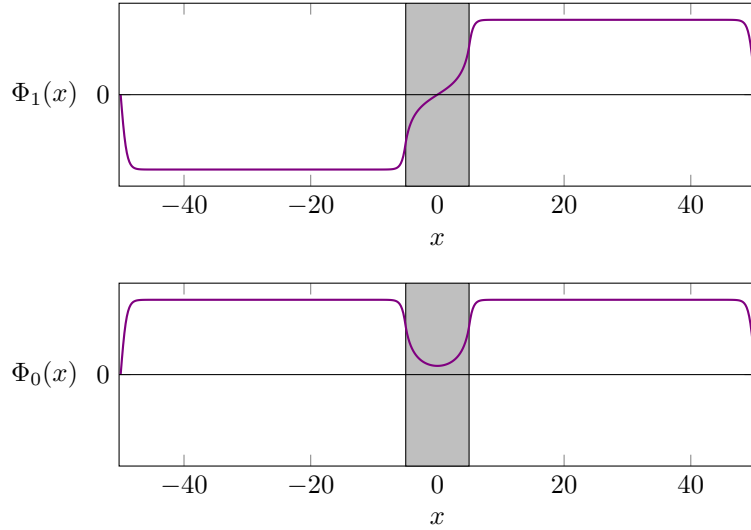


FIGURE I.15. États minimisant l'énergie de Gross-Pitaevskii, respectivement symétrique (bas) et antisymétrique (haut), dans une boîte de longueur $L = 100$ avec une barrière centrale carrée de largeur $\ell = 10$ (zone grisée). La hauteur de la barrière est 1.2μ , où μ est le potentiel chimique du gaz en absence de barrière (longueur de cicatrisation $\xi = 1/\sqrt{2}$). L'écart en énergie entre les deux états est $\sim 10^{-4}$ de leur énergie totale.

Les modes Φ_a et Φ_b doivent être choisis pour que leurs combinaisons linéaires représentent le mieux possible les différents états que la jonction Josephson atomique peut atteindre au cours de son évolution. Il est naturel d'imposer que l'état fondamental $\Phi_0(x)$ du gaz dans le potentiel $V(x)$ puisse être obtenu par cette combinaison linéaire pour bien décrire la dynamique proche de l'équilibre. Cet état est celui qui minimise l'énergie de Gross-Pitaevskii, dont la définition et les propriétés sont rappelées dans l'appendice 1. On choisira Φ_0 réelle et positive sur tout l'espace, ce qui est toujours possible puisqu'il s'agit de l'état fondamental. Puisqu'on a supposé que V est symétrique par rapport à la barrière, il en va de même pour Φ_0 : $\Phi_0(x) = \Phi_0(-x)$. Cette fonction sera choisie normalisée à l'unité et son énergie notée E_0 . Un exemple de profil pour Φ_0 est représenté en figure

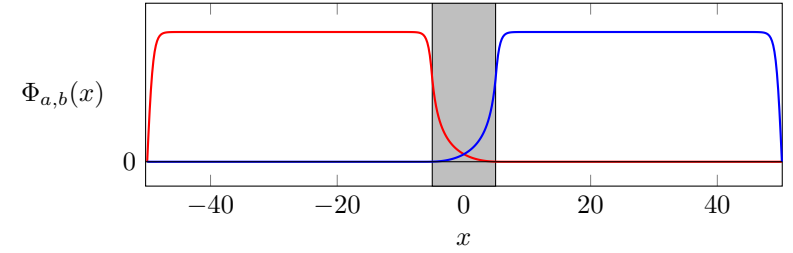


FIGURE I.16. États localisés à gauche ($\Phi_a(x)$ en rouge) et à droite ($\Phi_b(x)$ en bleu) de la barrière, obtenus par combinaison linéaire des états stationnaires montrés en figure I.15.

I.15 pour une barrière centrale carrée.

Par ailleurs, par analogie avec la jonction Josephson supraconductrice, on s'attend à pouvoir atteindre également un état stationnaire avec une différence de π de part et d'autre de la barrière. Nous allons pour cela considérer un autre état stationnaire de l'équation de Gross-Pitaevskii, noté $\Phi_1(x)$, obtenu en imposant que cette fonction s'annule en $x = 0$. La fonction $\Phi_1(x)$, également normalisée à l'unité, peut être choisie réelle et elle est impaire : $\Phi_1(x) = -\Phi_1(-x)$, ce qui correspond à la différence de phase π recherchée. On choisira $\Phi_1(x) > 0$ pour $x > 0$ et $\Phi_1(x) < 0$ pour $x < 0$. Si la barrière n'était pas présente, l'état Φ_1 correspondrait à un soliton noir placé au point $x = 0$. Un exemple de profil pour $\Phi_1(x)$ est également tracé en figure I.15. Notons que la différence d'énergie $E_1 - E_0$ entre $\Phi_1(x)$ et $\Phi_0(x)$ devient exponentiellement petite quand on augmente la hauteur de la barrière notablement au dessus du potentiel chimique du gaz.

Pour une barrière de hauteur supérieure à μ_0 et μ_1 , les densités spatiales $\rho_0(x) = |\Phi_0(x)|^2$ et $\rho_1(x) = |\Phi_1(x)|^2$ ont des profils très voisins. Elles diffèrent essentiellement à l'intérieur de la barrière, donc dans une zone où elles sont toutes les deux très faibles. On peut alors fabriquer les états $\Phi_{a,b}$ localisés de part et d'autre de la barrière, en prenant

$$\Phi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_0(x) - \Phi_1(x)) \quad \Phi_b(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_0(x) + \Phi_1(x)) \quad (\text{I.60})$$

Le couple de fonctions $\{\Phi_0, \Phi_1\}$ est orthonormé puisque l'une est paire

et l'autre impaire. Le couple de fonctions $\{\Phi_a, \Phi_b\}$ ainsi défini est alors lui aussi orthonormé. Nous montrons en figure I.16 les fonctions $\Phi_{a,b}(x)$ obtenues par combinaison linéaire des deux états stationnaires de la figure I.15.

Cette méthode de construction des états $\Phi_{a,b}$ à partir des états stationnaires de la fonctionnelle d'énergie Gross-Pitaevski se généralise à un double puits quelconque (RAGHAVAN, SMERZI et al. 1999), au prix d'expressions mathématiques plus compliquées du fait de l'absence de la symétrie de parité.

Remarque : domaine de validité du modèle. Nous avons construit notre modèle à deux modes à partir des deux états $\Phi_{0,1}(x)$ qui correspondent tous les deux à des poids égaux sur Φ_a et Φ_b puisque la relation (I.60) s'inverse pour donner

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_a(x) + \Phi_b(x)) \quad \Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_b(x) - \Phi_a(x)) . \quad (\text{I.61})$$

Ce modèle est bien adapté pour décrire les combinaisons linéaires de Φ_a et Φ_b [cf. (I.57)] pour lesquelles $|c_a|^2 \approx N/2$ et $|c_b|^2 \approx N/2$, car ce sont des états dont l'énergie moyenne reste proche de E_0 et E_1 . En revanche, il serait illusoire de chercher à décrire avec ce modèle à deux modes une situation initiale telle que $c_a = N$, $c_b = 0$ par exemple. L'énergie de cet état est en effet (sauf pour des interactions très faibles), beaucoup plus grande que E_0 et E_1 , le potentiel chimique correspondant peut être plus haut que la barrière centrale, et la dynamique du gaz devient beaucoup plus complexe que celle d'une simple jonction Josephson. On pourra consulter l'analyse détaillée de LEGGETT (2001) sur ce sujet.

4-3 L'énergie du double puits

Nous allons proposer dans ce paragraphe des arguments semi-quantitatifs pour écrire la forme de l'énergie $E(c_a, c_b)$ qui permettra d'obtenir les équations du mouvement des coefficients $c_{a,b}$ intervenant dans la combinaison linéaire (I.57). Nous donnons dans l'appendice 2 de ce chapitre un calcul complet validant ces arguments pour un double puits symétrique décrit par l'approche Gross-Pitaevskii. Nous renvoyons par

ailleurs les lecteurs désirant approfondir cette dérivation vers les articles de la période 1997-2001, durant laquelle le formalisme des jonctions Josephson supraconductrices a été adapté au cas atomique : SMERZI, FANTONI et al. (1997), MILBURN, CORNEY et al. (1997), ZAPATA, SOLS et al. (1998), RAGHAVAN, SMERZI et al. (1999), MARINO, RAGHAVAN et al. (1999), SPEKKENS & SIPE (1999), GIOVANAZZI, SMERZI et al. (2000), OSTROVSKAYA, KIVSHAR et al. (2000), MEIER & ZWERGER (2001) and LEGGETT (2001).

L'énergie du système comporte *a priori* trois termes :

$$E(c_a, c_b) = E_a(N_a) + E_b(N_b) + E_{\text{tun}}(c_a, c_b) , \quad (\text{I.62})$$

c'est-à-dire :

- l'énergie $E_a(N_a)$ des N_a atomes dans le puits de gauche ;
- l'énergie $E_b(N_b)$ des N_b atomes dans le puits de droite ;
- l'énergie $E_{\text{tun}}(c_a, c_b)$ résultant du couplage tunnel entre les deux puits.

Nous nous intéressons à des situations où chacun des puits (gauche et droite) pris individuellement est au voisinage de l'équilibre. Cet équilibre correspond à des nombres d'atomes \bar{N}_a et \bar{N}_b , et aux potentiels chimiques $\bar{\mu}_a$ et $\bar{\mu}_b$ définis par

$$\bar{\mu}_j \equiv \mu_j(\bar{N}_j) = \left. \frac{\partial E_j}{\partial N_j} \right|_{N_j=\bar{N}_j} \quad (\text{I.63})$$

Notons que, même si nous considérons essentiellement des situations proches de l'équilibre, nous ne prenons pas ici l'égalité stricte entre $\bar{\mu}_a$ et $\bar{\mu}_b$ car la différence de potentiel chimique

$$\overline{\Delta\mu} \equiv \bar{\mu}_a - \bar{\mu}_b \quad (\text{I.64})$$

va jouer le rôle de la différence de potentiel électrique de la jonction supraconductrice.

On peut alors faire un développement de Taylor des énergies $E_a(N_a)$ et $E_b(N_b)$:

$$E_j(N_j) \approx E_j(\bar{N}_j) + \bar{\mu}_j(N_j - \bar{N}_j) + \frac{U_j}{2}(N_j - \bar{N}_j)^2 \quad (\text{I.65})$$

avec

$$U_j = \left. \frac{\partial \mu_j}{\partial N_j} \right|_{N_j = \bar{N}_j}, \quad (\text{I.66})$$

qui est relié au module d'élasticité (*bulk modulus*) et à la compressibilité du fluide². Notons que ce développement est très général, pourvu que $N_j - \bar{N}_j$ soit suffisamment faible; il n'est pas restreint à un fluide décrit par la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevski.

En utilisant la variable n définie par

$$N_a = \bar{N}_a + n \quad N_b = \bar{N}_b - n, \quad (\text{I.67})$$

on obtient pour la somme des énergies "sur site" :

$$E_a(N_a) + E_b(N_b) = \bar{\Delta\mu} n + \frac{E_C}{2} n^2 + \text{cte} \quad (\text{I.68})$$

avec

$$E_C \equiv U_a + U_b = \left. \frac{\partial \mu_a}{\partial N_a} \right|_{N_a = \bar{N}_a} + \left. \frac{\partial \mu_b}{\partial N_b} \right|_{N_b = \bar{N}_b}. \quad (\text{I.69})$$

Intéressons-nous maintenant au terme tunnel $E_{\text{tun}}(c_a, c_b)$. Nous supposons que la densité de particules est très basse à l'intérieur de la barrière de sorte que nous pouvons négliger l'influence des interactions sur le coefficient tunnel. En seconde quantification, ce terme correspond donc simplement à un couplage tunnel³ $\hat{H}_{\text{tun}} \propto -(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a})$, où \hat{a} (\hat{a}^\dagger) détruit (créé) une particule dans le gaz a , et idem pour b :

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger |N_a, N_b\rangle &= \sqrt{N_a + 1} |N_a + 1, N_b\rangle \\ \hat{a} |N_a, N_b\rangle &= \sqrt{N_a} |N_a - 1, N_b\rangle \quad \text{si } N_a \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{I.70})$$

2. Plus précisément, pour un fluide homogène, on définit le module d'élasticité par $K = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T, N}$. Pour des interactions à suffisamment courte portée, le fluide est extensif avec l'énergie libre de Landau $\Omega(T, \mu, V) = -VP(T, \mu)$; la pression P la densité $\rho = N/V$ sont des fonctions des deux variables thermodynamiques μ et T (cf. cours 2016-17, chapitre VI). La différentielle totale de Ω s'écrit : $d\Omega = -SdT - Nd\mu - PdV$ et on en déduit $\left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_{V, T} = \left(\frac{\partial N}{\partial V} \right)_{T, \mu} = \rho$. Par ailleurs, comme μ peut s'écrire comme une fonction des quantités intensives T et de ρ , on a : $N \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_{T, V} = -V \left(\frac{\partial \mu}{\partial V} \right)_{T, N}$, ce qui donne la relation recherchée pour le module d'élasticité $K = -V \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T \left(\frac{\partial \mu}{\partial V} \right)_{T, N} = N\rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_{T, V}$. La compressibilité isotherme est égale à $1/K$.

3. Le signe $-$ permet d'assurer que l'état fondamental est l'état symétrique $(\Phi_a + \Phi_b)/\sqrt{2}$, c'est-à-dire l'état sans nœud Φ_0 [cf. (I.61)].

Dans l'approche champ moyen qui nous intéresse ici, nous allons donc faire la substitution

$$\hat{a}, \hat{a}^\dagger \rightarrow c_a, c_a^* \quad \hat{b}, \hat{b}^\dagger \rightarrow c_b, c_b^*, \quad (\text{I.71})$$

ce qui donne un terme énergétique $E_{\text{tun}}(c_a, c_b) \propto -(c_a^* c_b + c_a c_b^*)$, avec un préfacteur que nous mettrons sous la forme :

$$E_{\text{tun}}(c_a, c_b) = -\frac{E_J}{2\sqrt{\bar{N}_a \bar{N}_b}} (c_a^* c_b + c_a c_b^*) \quad (\text{I.72})$$

où le coefficient E_J est à ce stade phénoménologique. Nous reviendrons dans un instant sur sa détermination dans le cas du double puits symétrique $\bar{N}_a = \bar{N}_b = \frac{N}{2}$, pour lequel ce terme énergétique se simplifie pour donner :

$$\text{Double puits symétrique : } E_{\text{tun}}(c_a, c_b) = -\frac{E_J}{N} (c_a^* c_b + c_a c_b^*) \quad (\text{I.73})$$

(voir également l'appendice 2 de ce chapitre).

Les dénominations E_J et E_C sont bien sûr choisies pour faciliter la comparaison avec la modélisation des jonctions Josephson supraconductrices. Pour rendre ce lien plus explicite, il est intéressant de travailler avec des variables nombre-phase plutôt qu'avec les amplitudes complexes c_a, c_b . Nous posons donc pour $j = a, b$:

$$c_j = \sqrt{N_j} e^{i\varphi_j} \quad \text{et} \quad \varphi \equiv \varphi_a - \varphi_b. \quad (\text{I.74})$$

Le terme tunnel devient

$$E_{\text{tun}}(\varphi, n) = -E_J \gamma(n) \cos \varphi \quad (\text{I.75})$$

avec le coefficient $\gamma(n)$ défini par

$$\gamma(n) \equiv \sqrt{\left(1 + \frac{n}{\bar{N}_a}\right) \left(1 - \frac{n}{\bar{N}_b}\right)}. \quad (\text{I.76})$$

L'expression de l'énergie du double puits que nous retenons à partir de maintenant est donc, à une constante additive près :

$$E(\varphi, n) = \bar{\Delta\mu} n + \frac{E_C}{2} n^2 - E_J \gamma(n) \cos \varphi \quad (\text{I.77})$$

Coefficients E_J et E_C dans le cas équilibré. Pour un condensat de Bose-Einstein placé dans un double puits symétrique, nous avons expliqué en §4-2 comment déterminer les deux états stationnaires de plus basse énergie Φ_0 et Φ_1 , respectivement pair et impair et d'énergie E_0 et E_1 . Ces deux états correspondent au cas équilibré $\bar{\mu}_a = \bar{\mu}_b \equiv \mu$, $\bar{N}_a = \bar{N}_b = N/2$ et $n = 0$, et ils ont pour phase respectivement $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$. Leur énergie calculée à partir de (I.77) vaut $\mp E_J$ et on a donc :

$$E_J = \frac{1}{2} (E_1 - E_0) \quad (I.78)$$

Notons que cette quantité E_J est une quantité intrinsèque de la barrière, au moins pour le type de piège à fond plat représenté en figure I.15 : si on varie la longueur totale L du piège en gardant la densité et l'épaisseur de la barrière ℓ constantes (avec $\ell \ll L$), la valeur de E_J n'est pratiquement pas modifiée.

Pour un condensat dans cette configuration, on peut également déterminer le paramètre E_C à partir de (I.69). L'énergie de N particules confinées dans une boîte de volume V est dominée par l'énergie d'interaction $E_{\text{int}} = \frac{gN^2}{2V}$, où g est une constante proportionnelle à la longueur de diffusion (voir appendice 1). On en déduit que $\mu_a = gN_a/V_a$ et $\mu_b = gN_b/V_b$ (avec $V_a = V_b = V/2$). Ceci indique que μ varie linéairement avec le nombre de particules à volume fixé, d'où :

$$E_C = \frac{\mu_a}{N_a} + \frac{\mu_b}{N_b} = \frac{4\mu}{N} \quad (I.79)$$

Les deux paramètres caractérisant la jonction sont donc entièrement connus dans ce cas.

4-4 Equations d'évolution dans le double puits

Une fois connue l'énergie en fonction des coefficients $c_{a,b}$, ou de manière équivalente en fonction de n et φ , il nous reste à déterminer les équations d'évolution de ces coefficients. Pour cela, on peut écrire directement l'équation de Gross-Pitaevskii pour $\Psi(\mathbf{r}, t)$ donnée en (I.57) et la projeter sur les deux modes Φ_{ab} . Une autre méthode consiste à considérer ce

problème comme une approche variationnelle dépendant du temps, pour laquelle les fonctions d'essai sont les combinaisons linéaires de Φ_a et Φ_b . Cette approche variationnelle est détaillée dans l'appendice 3.

Ces deux approches donnent des équations du mouvement identiques :

$$\hbar \dot{n} = \frac{\partial E}{\partial \varphi} \quad \hbar \dot{\varphi} = -\frac{\partial E}{\partial n} \quad (I.80)$$

qui s'écrivent explicitement :

$$\begin{cases} \hbar \dot{n} = E_J \gamma(n) \sin \varphi \\ \hbar \dot{\varphi} = -\bar{\Delta\mu} - nE_C + E_J \gamma'(n) \cos \varphi \end{cases} \quad (I.81)$$

où on a posé $\gamma'(n) \equiv \frac{d\gamma}{dn}$.

Ces deux équations du mouvement permettent de préciser le lien entre cette jonction réalisée avec des atomes piégés et une jonction Josephson traditionnelle, décrite par les équations du mouvement (I.48-I.49) en supposant ici un courant extérieur $I = 0$ (voir aussi le tableau I.1). Les deux problèmes sont clairement similaires, avec la différence de potentiel chimique $\Delta\mu$ qui remplace (au signe près) la différence de potentiel électrique V :

$$\begin{aligned} \Delta\mu &\equiv \mu_a(N_a) - \mu_b(N_b) \\ &\approx \left(\mu_a(\bar{N}_a) + n \frac{\partial \mu_a}{\partial N_a} \right) - \left(\mu_b(\bar{N}_b) - n \frac{\partial \mu_b}{\partial N_b} \right) \\ &= \bar{\Delta\mu} + nE_C \end{aligned} \quad (I.82)$$

de sorte que la seconde équation de (I.81) peut aussi s'écrire :

$$\hbar \dot{\varphi} = -\bar{\Delta\mu} + E_J \gamma'(n) \cos \varphi \quad (I.83)$$

Origine physique du terme $\gamma(n)$. Il est clair que les équations du mouvement de la jonction atomique ne sont identiques à celles d'une jonction supraconductrice que si on pose $\gamma(n) = 1$. Ce terme $\gamma(n)$ traduit le fait que, pour une jonction atomique, l'énergie due au couplage tunnel (I.75) ne dépend pas seulement de $E_J \cos \varphi$, mais aussi des nombres d'atomes de part

	Jonction supraconductrice (RCSJ)	Double puits atomique	Jonction interne (Schwinger)
Paramètres	I_c $E_J = \hbar I_c / (2e)$	$E_J = \frac{1}{2} (E[\Phi_1] - E[\Phi_0])$	$E_J = \frac{1}{2} N \hbar \Omega$
	C $E_C = (2e)^2 / C$	$E_C = g (\int \Phi_a ^4 + \Phi_b ^4)$	$E_C = 2g_s \int \Phi ^4$ avec $g_s = \frac{1}{2}(g_{aa} + g_{bb}) - g_{ab}$
	R	-	-
Contrôle	I_{ext} (ou V)	déplacement de la jonction (ou $\overline{\Delta\mu}$)	Ω (ou $\tilde{\Delta}$)
Variables	φ et $Q = CV$	φ et $n = \frac{1}{2}(N_a - N_b)$	$\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ avec $J = \frac{N}{2}$ et $\hat{J}_z = \frac{1}{2}(\hat{N}_a - \hat{N}_b)$
Énergie	$\frac{E_C}{2} \left(\frac{Q}{2e}\right)^2 - E_J \cos \varphi - \frac{\hbar I_{\text{ext}}}{2e} \varphi$	$\frac{E_C}{2} n^2 - E_J \gamma(n) \cos \varphi + \overline{\Delta\mu} n$	$\frac{E_C}{2} \hat{J}_z^2 - \hbar \Omega \hat{J}_x - \hbar \tilde{\Delta} \hat{J}_z$
Dynamique	$I_{\text{ext}} = I_c \sin \varphi + \frac{V}{R} + \dot{Q}$ $\hbar \dot{\varphi} = 2eV$	$\hbar \dot{n} = E_J \gamma(n) \sin \varphi$ $\hbar \dot{\varphi} = -\overline{\Delta\mu} - n E_C + E_J \gamma'(n) \cos \varphi$	$\dot{\hat{J}}_z = -\Omega \hat{J}_y$ $i \dot{\hat{J}}_+ = \tilde{\Delta} \hat{J}_+ - \frac{E_C}{2\hbar} (\hat{J}_+ \hat{J}_z + \hat{J}_z \hat{J}_+) - \Omega \hat{J}_z$
Régime Josephson	toujours	$E_J / N^2 \ll E_C$ $\gamma(n) = 1$ $\gamma'(n) = 0$	$\hbar \Omega \ll \mu_s$ avec $\mu_s = N E_C$

TABLE I.1. Description des principales jonctions rencontrées dans ce cours (la colonne "Jonction interne" sera traitée à partir du chapitre 4). Les jonctions supraconductrices sont principalement contrôlées par le courant extérieur I_{ext} . Pour le double puits atomique symétrique, traité ici classiquement, on a posé $\gamma(n) = \left(1 - \frac{4n^2}{N^2}\right)^{1/2}$ et $\gamma'(n)$ désigne la dérivée de $\gamma(n)$. Le cas de la jonction interne est traité ici quantiquement et présentée dans l'approximation du mode spatial unique. La ligne "Énergie" correspond au cas sans dissipation ($R = \infty$ pour la jonction supraconductrice). Le passage à la limite classique pour la jonction interne, avec $J_+ = J\gamma(n)e^{-i\varphi}$ et $J_z = n$, est possible si $E_C \ll E_J$ et permet de retrouver les résultats du double puits.

et d'autre de la barrière. Or ce nombre d'atomes varie dans le temps du fait même de l'évolution due à l'effet Josephson.

Dans le cas d'une jonction supraconductrice, ce terme est absent car la jonction supraconductrice est un système ouvert : même si un courant de paires de Cooper circule, les densités de part et d'autre de la barrière restent constantes car la jonction est connectée à un "réservoir" capable de fournir en permanence de nouvelles charges. Le coefficient décrivant l'effet tunnel est donc indépendant du nombre de paires de Cooper ayant précédemment traversé la jonction.

Selon le type de jonction atomique, ce terme $\gamma(n)$ peut avoir une influence négligeable – on prend alors $\gamma(n) = 1, \gamma'(n) = 0$ – ou alors être à l'origine de phénomènes nouveaux, comme l'auto-piégeage que nous rencontrerons au chapitre 3. Pour reprendre l'analogie entre une jonction Josephson et un pendule pesant (figure I.11), ce terme $\gamma(n)$ introduit une déformation du pendule en fonction de la différence entre les nombres N_a et N_b , ce qui peut enrichir notablement sa dynamique.

Remarque sur les signes dans les équations d'évolution (I.81-I.83). Dans la littérature scientifique sur le sujet, on retrouve ces équations d'évolution avec des signes variés selon les conventions prises par les auteurs. Discutons brièvement ces signes pour la convention adoptée ici en faisant la simplification $\gamma(n) \approx 1$ pour simplifier :

$$\gamma(n) = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hbar \dot{n} = E_J \sin \varphi \\ \hbar \dot{\varphi} = -\Delta\mu \end{cases} \quad (\text{I.84})$$

Dans la première équation, la quantité \dot{n} désigne le courant de particules de b vers a et la phase $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$. Si on prend φ_a légèrement supérieur à φ_b , cela signifie qu'il a un gradient de phase de b vers a au sein de la jonction, et donc une vitesse $\frac{\hbar}{m} \frac{d\varphi}{dx}$ également dirigée de b vers a pour les particules. Cela correspond donc bien à $\dot{n} > 0$ (N_a augmente, N_b diminue) et explique le signe + dans la première équation de (I.84). En ce qui concerne la seconde équation, rappelons que nous avons défini $\Delta\mu = \mu_a - \mu_b$. La loi d'évolution d'une fonction d'onde en $e^{-i\Delta\mu t/\hbar}$, associée à $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$, vient donc imposer le signe – dans $\hbar \dot{\varphi} = -\Delta\mu$.

Formalismes lagrangien et hamiltonien pour une jonction atomique. Ce formalisme est développé dans l'appendice 3 de ce chapitre. Le lagrangien est *a priori* fonction des variables (φ, n) et de leurs dérivées. Il s'écrit ici :

$$\mathcal{L}(\varphi, n, \dot{\varphi}, \dot{n}) = -\hbar n \dot{\varphi} - E(\varphi, n) \quad (\text{I.85})$$

où l'énergie $E(\varphi, n)$ est donnée en (I.77). Les équations de Lagrange permettent alors de déduire (I.80). Le moment conjugué à n est nul puisque \dot{n} n'intervient pas dans le lagrangien (n est qualifiée de *variable non dynamique* ou *auxiliaire*). Le moment conjugué à φ est

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = -\hbar n \quad (\text{I.86})$$

dont on notera l'inversion de signe par rapport au résultat (I.45) pour une jonction supraconductrice. L'hamiltonien s'écrit quant à lui :

$$H(\varphi, p_\varphi) = E(\varphi, n) \quad \text{avec} \quad p_\varphi = -\hbar n, \quad (\text{I.87})$$

et les équations de Hamilton-Jacobi permettent également de retrouver (I.80).

4-5 Les oscillations plasma d'une jonction atomique

Une des premières expériences réalisées sur une jonction atomique a porté sur l'observation des oscillations plasmas. Ces oscillations sont obtenues en absence de courant extérieur et elles consistent simplement à observer les petites oscillations de la charge portée par la jonction, ici n , en fonction du temps. Pour simplifier notre analyse, nous prendrons un double puits symétrique, $\bar{N}_a = \bar{N}_b = N/2$ et $\Delta\mu = \bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2 = 0$, de sorte que $\gamma(n)$ et sa dérivée $\gamma'(n)$ s'écrivent :

$$\gamma(n) = \sqrt{1 - 4 \frac{n^2}{N^2}} \approx 1 - 2 \frac{n^2}{N^2} \quad \gamma'(n) = -\frac{4n}{N^2}, \quad (\text{I.88})$$

où nous avons utilisé $n \ll N$.

Les oscillations plasma sont obtenues au voisinage du minimum d'énergie en prenant $\varphi \ll 1$. En nous limitant aux termes d'ordre 1 en φ

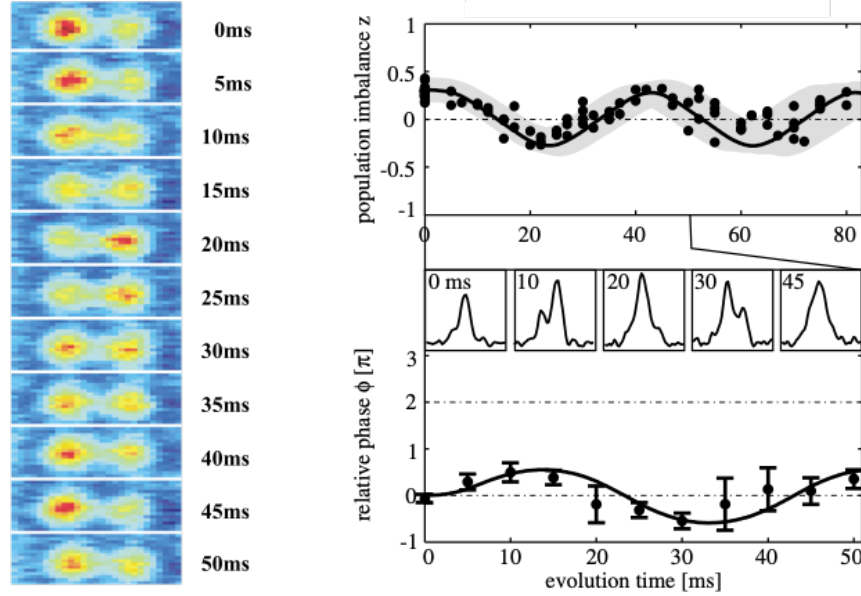


FIGURE I.17. Oscillation plasma dans un double puits contenant ~ 1150 atomes de ^{87}Rb . Les atomes sont confinés dans un piège dipolaire de fréquences (78,66,90) Hz. On sépare le nuage en deux parties selon la direction x par l'ajout d'une barrière de potentiel créée par un faisceau lumineux additionnel (cf. figure I.13). Le démarrage de l'oscillation est causé par un déplacement soudain de la position de la barrière centrale. La fréquence plasma mesurée $\approx \sqrt{E_J E_C}/\hbar$ est de 25 Hz, bien supérieure attendue à la fréquence tunnel attendue en absence d'interaction $E_J/N\hbar \approx 2$ Hz. On est donc bien dans le "régime Josephson" $E_C \gg E_J/N^2$. Figure adaptée de ALBIEZ, GATI *et al.* (2005).

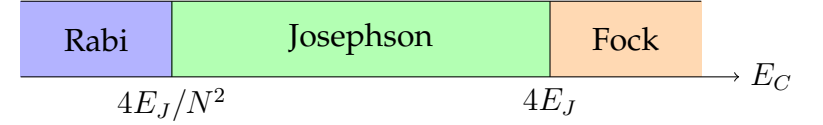


FIGURE I.18. Les différents régimes de l'oscillation plasma. Seuls les régimes de Josephson et de Rabi peuvent être décrits par l'approche utilisée ici, consistant à faire l'approximation $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Le régime de Fock sera étudié au chapitre 5 (voir aussi LEGGETT (2001)).

et n/N , les équations du mouvement (I.81) s'écrivent :

$$\begin{cases} \hbar \dot{n} = E_J \varphi \\ \hbar \dot{\varphi} = - \left(E_C + \frac{4E_J}{N^2} \right) n \end{cases} \quad (\text{I.89})$$

Ces deux équations couplées correspondent à un mouvement sinusoïdal dont la fréquence ω_p vérifie

$$(\hbar\omega_p)^2 = E_J \left(E_C + \frac{4E_J}{N^2} \right). \quad (\text{I.90})$$

Nous retrouvons le résultat (I.55) des jonctions Josephson supraconductrices dans la "limite Josephson" :

$$E_C \gg \frac{4E_J}{N^2} : \quad \hbar\omega_p \approx \sqrt{E_J E_C} \quad (\text{I.91})$$

Cette limite consiste à prendre $\gamma(n) = 1$, $\gamma'(n) = 0$ dans (I.81) ou (I.83), donc à négliger la variation du coefficient tunnel au cours de l'oscillation, ou de manière équivalente, la modification de la longueur du pendule de la figure I.11.

La limite opposée $E_C \ll 4E_J/N^2$ est appelée "régime de Rabi" (figure I.18). La physique est alors simplement celle d'un système à deux niveaux couplés conduisant à une oscillation à la fréquence $\hbar\omega = 2E_J/N$. Ce régime sera surtout pertinent pour les jonctions atomiques internes, que nous étudierons au chapitre 4.

L'oscillation plasma a été la première manifestation de la physique Josephson observée directement sur des gaz d'atomes froids. Nous montrons en figure I.17 le résultat obtenu par ALBIEZ, GATI et al. (2005) sur le double puits déjà montré en figure I.13. On y voit à la fois l'oscillation de la différence de population entre les côtés gauche et droit, mesurée par le paramètre z défini par

$$z \equiv \frac{N_a - N_b}{N_a + N_b} = 2 \frac{n}{N} \quad (\text{I.92})$$

et l'évolution de la phase relative φ , mesurée à partir de la figure d'interférence entre ces deux nuages, elle-même obtenue après une expansion balistique de 5 ms. On constate que les évolutions de n et de φ sont déphasées de $\pi/2$ l'une par rapport à l'autre, comme attendu à partir de (I.89). Cette expérience a été menée dans le régime Josephson.

Le régime de Fock. Signalons par ailleurs l'existence d'un troisième régime, $E_C \gtrsim 4E_J$, où le traitement qui précède n'est plus approprié (figure I.18). En effet, ce traitement repose sur l'approximation $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$, ce qui permet de mettre l'énergie de la jonction sous la forme $\frac{E_C}{2} n^2 + \frac{E_J}{2} \varphi^2$. Quand on passe à un traitement quantique et qu'on utilise la relation d'incertitude déjà mentionnée $\Delta n \Delta \varphi > 1/2$, on peut chercher l'état fondamental en faisant les substitutions $\varphi^2 \rightarrow \Delta \varphi^2$ et $n^2 \rightarrow \Delta n^2 = \frac{1}{4\Delta \varphi^2}$. Le minimum de la quantité

$$E(\Delta \varphi) = \frac{E_C}{8\Delta \varphi^2} + \frac{E_J}{2} \Delta \varphi^2 \quad (\text{I.93})$$

est atteint pour $\Delta \varphi \sim (E_C/4E_J)^{1/4}$ et il vaut $\hbar\omega_p/2$, comme attendu pour un oscillateur harmonique. Mais on constate alors immédiatement que si $E_C \gtrsim 4E_J$, l'extension en phase de cet état fondamental devient d'ordre 1 et on ne peut plus se limiter à l'approximation initiale $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Nous reviendrons en détail sur ce régime dans les chapitres 5 et 6.

Appendice 1 : L'approche Gross–Pitaevskii

On considère une assemblée de N atomes confinés dans un piège décrit par le potentiel extérieur $V(\mathbf{r})$. Nous supposons que ces atomes sont des bosons de spin nul, ou des bosons polarisés dans un état de spin fixé.

À température très basse et si les interactions sont suffisamment faibles, on peut décrire cette assemblée par une fonction d'onde macroscopique $\Psi(\mathbf{r})$, ce qui signifie que la fonction d'onde à N corps s'écrit sous la forme factorisée :

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \propto \Psi(\mathbf{r}_1) \cdots \Psi(\mathbf{r}_N) \quad \text{avec} \quad \int |\Psi(\mathbf{r})|^2 d^3r = 1. \quad (\text{I.94})$$

Nous supposons que les interactions entre atomes sont de courte portée et caractérisées par la longueur de diffusion a_s . La fonction ψ obéit alors à l'équation de Gross–Pitaevskii (ou équation de Schrödinger non-linéaire) :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + Ng |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.95})$$

où $\rho(\mathbf{r}, t) \equiv N |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ représente la densité spatiale du condensat et où le coefficient de couplage non-linéaire g est relié à a_s par

$$g = \frac{4\pi \hbar^2 a_s}{m}. \quad (\text{I.96})$$

Cette description correspond à une approximation de champ moyen : chaque particule évolue dans la somme du potentiel extérieur $V(\mathbf{r})$ et du potentiel $g\rho(\mathbf{r})$ créé par les autres atomes. Cette approximation est valable si on a en tout point $\rho a_s^3 \ll 1$. On pourra se reporter au cours 2021 pour le calcul de la longueur de diffusion et au cours 2022 la discussion de l'approximation de champ moyen et ses termes correctifs.

Nous nous intéresserons essentiellement au cas où les interactions entre particules sont répulsives, c'est-à-dire $g > 0$. Supposons que le potentiel $V(\mathbf{r})$ est celui d'une boîte de grande taille L (figure I.19). L'état fondamental du système correspond à une distribution de densité uniforme $\rho_0 = N/L^d$ (où d est la dimensionnalité du système), excepté au voisinage des parois de la boîte où la densité tombe à zéro sur une distance donnée par la *longueur de cicatrisation* (*healing length*) :

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2mg\rho_0}}. \quad (\text{I.97})$$

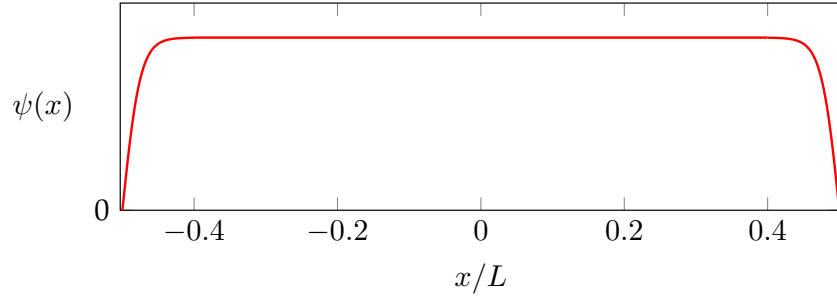


FIGURE I.19. Exemple d'un gaz 1D dans une boîte de longueur L avec des interactions répulsives. Dans l'état fondamental du système, la densité est quasi-uniforme excepté au voisinage immédiat des parois (situées en $x = \pm L/2$) où elle descend à zéro sur une distance $\sim \xi$.

Cette équation de Gross–Pitaevskii peut être obtenue à partir d'une approche lagrangienne en théorie des champs classique. Elle se déduit de la minimisation de l'action

$$S = \int \mathcal{L}[\Psi, \dot{\Psi}] dt \quad (\text{I.98})$$

avec le lagrangien⁴ :

$$\mathcal{L}[\Psi, \dot{\Psi}] = \int [i\hbar \dot{\Psi}\Psi^* - \mathcal{E}_{\text{GP}}[\Psi]] d^3r \quad (\text{I.100})$$

et la densité d'énergie par particule $\mathcal{E}_{\text{GP}}[\Psi]$:

$$\mathcal{E}_{\text{GP}}[\Psi] = \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\Psi|^2 + V|\Psi|^2 + \frac{Ng}{2} |\Psi|^4. \quad (\text{I.101})$$

On retrouve l'équation de Gross–Pitaevskii (I.95) en écrivant que la fonction $\Psi(\mathbf{r}, t)$ doit rendre la fonctionnelle d'action (I.98) extrémale.

4. La composante temporelle du lagrangien peut être remplacée par $-\int d^3r i\hbar\Psi\dot{\Psi}^*$ ou encore $\int d^3r \frac{i\hbar}{2} (\Psi^*\dot{\Psi} - \Psi\dot{\Psi}^*)$ puisque la norme de Ψ est conservée au cours du temps

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\int d^3r \Psi^*\Psi \right) = \int d^3r (\Psi\dot{\Psi}^* + \Psi^*\dot{\Psi}). \quad (\text{I.99})$$

L'énergie totale associée à une fonction d'onde Ψ est donnée par la fonctionnelle de Gross–Pitaevskii :

$$E_{\text{GP}}[\Psi] = N \int \mathcal{E}_{\text{GP}}[\Psi] d^3r \quad (\text{I.102})$$

ou encore

$$E_{\text{GP}}[\Psi] = \frac{N\hbar^2}{2m} \int |\nabla\Psi(\mathbf{r})|^2 d^3r + N \int V(\mathbf{r}) |\Psi(\mathbf{r})|^2 d^3r + \frac{N^2g}{2} \int |\Psi(\mathbf{r})|^4 d^3r \quad (\text{I.103})$$

somme de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie d'interaction.

Gaz confiné dans une boîte. Pour un condensat de N atomes, confiné dans une boîte de taille L comme celui représenté en figure I.19, la fonction d'onde Ψ associée à l'état fondamental est uniforme (excepté au voisinage des parois) et égale à $L^{-d/2}$, la densité vaut $\rho_0 \equiv N/L^d$, et l'énergie dominante est le terme d'interaction :

$$E_{\text{GP}} \approx \frac{1}{2} g \rho_0^2 L^d = \frac{N^2 g}{2L^d}. \quad (\text{I.104})$$

Le potentiel chimique du système, c'est-à-dire le coût énergétique pour ajouter une particule, vaut alors :

$$\mu = \frac{\partial E_{\text{GP}}}{\partial N} = \frac{Ng}{L^d} = g\rho_0 \quad (\text{I.105})$$

et il est relié à la longueur de cicatrisation par

$$\mu = \frac{\hbar^2}{2m\xi^2}. \quad (\text{I.106})$$

Par ailleurs, la vitesse du son c dans ce gaz est donnée par $mc^2 = \mu$ (cf. cours 2023–24, chap.III, § 1.4).

Appendice 2 : le double puits symétrique

Dans cet appendice, nous calculons explicitement l'énergie du gaz confiné dans un double puits symétrique et nous montrons que le résultat se met bien sous la forme annoncée dans ce chapitre.

Commençons par déterminer les états stationnaires Φ_n ($n = 0, 1$) de l'équation de Gross-Pitaevskii, comme expliqué en §4-2. Les potentiels chimiques μ_n sont reliés aux énergies de Gross-Pitaevskii

$$E_{\text{GP}}[\Phi_n] = N \int \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d\Phi_n}{dx} \right)^2 + V\Phi_n^2 + \frac{Ng}{2}\Phi_n^4 \right] dx \quad (\text{I.107})$$

par :

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{1}{N} E_{\text{GP}}[\Phi_n] + \frac{Ng}{2} \int \Phi_n^4(x) dx \\ &= \int \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d\Phi_n}{dx} \right)^2 + V\Phi_n^2 + Ng\Phi_n^4 \right] dx \end{aligned} \quad (\text{I.108})$$

cette dernière équation s'obtenant en multipliant

$$\mu_n \Phi_n(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) + Ng|\Phi_n(x)|^2 \right) \Phi_n(x) \quad (\text{I.109})$$

par Φ_0 ou Φ_1 et en intégrant sur l'espace.

Évaluons maintenant l'énergie $E(c_a, c_b)$. Le calcul est relativement long, mais sans difficulté de principe. On utilise notamment le fait que des intégrales du type

$$\int \Phi_0^\alpha(x) \Phi_1^\beta(x) dx \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N} \quad (\text{I.110})$$

sont nulles si la puissance β de Φ_1 est impaire, car la fonction à intégrer est antisymétrique. Le résultat, à une constante additive près, s'écrit

$$E(c_a, c_b) = -\frac{E_J}{N} (c_a^* c_b + c_a c_b^*) + \frac{E_C}{4} (|c_a|^4 + |c_b|^4) + \Delta E \quad (\text{I.111})$$

avec

$$E_J = \frac{1}{2} (E_{\text{GP}}[\Phi_1] - E_{\text{GP}}[\Phi_0]) \quad (\text{I.112})$$

qui est par construction une quantité positive et

$$E_C = 4g \int \Phi_0^2(x) \Phi_1^2(x) dx \quad (\text{I.113})$$

qui est également positif. Le terme ΔE a pour expression

$$\Delta E = J' (c_a^* c_b + c_a c_b^*)^2 \quad \text{avec} \quad J' = \int [\Phi_0^2(x) - \Phi_1^2(x)]^2 dx \quad (\text{I.114})$$

et il joue un rôle très faible car le coefficient J' , qui fait intervenir le carré de la différence des densités entre les états stationnaires Φ_0 et Φ_1 , est très petit. Ce terme ΔE sera négligé dans la suite.

On obtient donc, à une constante additive près :

$$E(c_a, c_b) = -\frac{E_J}{N} (c_a^* c_b + c_a c_b^*) + \frac{E_C}{4} (|c_a|^4 + |c_b|^4) \quad (\text{I.115})$$

avec la condition de normalisation $|c_a|^2 + |c_b|^2 = N$. L'état d'énergie minimale est atteint pour $c_a = c_b = \sqrt{N/2}$, c'est-à-dire l'état Φ_0 .

Expressions de E_J et E_C . Nous avons donné en (I.112) et (I.113) les expressions des coefficients E_J et E_C en termes des premiers états stationnaires $\Phi_{0,1}$ de l'équation de Gross-Pitaevskii. On peut également exprimer ces mêmes coefficients en fonction des états $\Phi_{a,b}$ localisés de part et d'autre de la jonction (GIOVANAZZI, SMERZI et al. 2000). Pour obtenir ces expressions, on remplace Φ_0 et Φ_1 par leur valeur

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_a + \Phi_b) \quad \Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_b - \Phi_a) \quad (\text{I.116})$$

ce qui conduit à

$$E_J = -N \int \Phi_b \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Phi_a}{dx^2} + V\Phi_a + Ng\Phi_a^3 \right) dx \quad (\text{I.117})$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$E_J = -N \langle \Phi_b | \hat{H} | \Phi_a \rangle \quad \text{avec} \quad \hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + Ng\Phi_a^2(x) \quad (\text{I.118})$$

et

$$E_C \approx 2g \int \Phi_a^4 dx. \quad (\text{I.119})$$

Dans ces équations, on peut échanger les indices a et b puisqu'on a considéré un double puits symétrique. Par ailleurs, on a négligé dans l'expression de E_C un terme faisant intervenir $\int \Phi_a^2 \Phi_b^2 dx$, c'est-à-dire le recouvrement entre les profils de densités entre les puits de gauche et de droite.

Remarque. Nous avons vu apparaître en (I.65) la dérivée du potentiel chimique par rapport au nombre de particules, quantité reliée au module d'élasticité du fluide. Quand on calcule cette dérivée à partir de (I.108), on retrouve le terme (I.119), mais on voit également apparaître un terme correspondant au changement des fonctions d'onde Φ_j avec le nombre de particules. Ces termes sont absents dans l'approche variationnelle conduisant à (I.119) puisque nous avons restreint l'espace des fonctions d'essai aux seules combinaisons de Φ_0 et Φ_1 , mais ils doivent en principe être pris en compte pour un calcul précis.

Appendice 3 : Approche variationnelle à deux modes

Le modèle à deux modes développé dans ce chapitre peut être considéré comme une méthode variationnelle dépendant du temps, en prenant des fonctions d'essai du type

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = c_a(t)\Phi_a(\mathbf{r}) + c_b(t)\Phi_b(\mathbf{r}). \quad (\text{I.120})$$

Cela revient à faire évoluer la fonction $\Psi(\mathbf{r}, t)$ dans un espace de dimension 2 seulement, décrit par la paire de nombres complexes $c_{a,b}(t)$, au lieu de prendre l'espace de dimension infinie exploré par la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevskii.

L'action devient donc simplement une fonction des deux variables c_a, c_b , de leurs complexes conjugués et de leurs dérivées temporelles :

$$S = \int \mathcal{L}[c_a, c_b, \dot{c}_a, \dot{c}_b] dt \quad (\text{I.121})$$

avec le lagrangien

$$\mathcal{L}[c_a, c_b, \dot{c}_a, \dot{c}_b] = i\hbar(\dot{c}_a c_a^* + \dot{c}_b c_b^*) - E[c_a, c_b] \quad (\text{I.122})$$

où l'énergie $E[c_a, c_b]$ se calcule en substituant l'expression choisie pour Ψ dans la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitevskii (I.103). Cette énergie est *a priori* une fonction quartique de c_a, c_b et leurs complexes conjugués. Elle fait par ailleurs intervenir les intégrales sur l'espace de puissances de Φ_a et Φ_b et de leurs gradients.

Les équations d'évolution des coefficients $c_{a,b}$ se déduisent finalement du fait que S doit être extrémale, ce qui donne les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{c}_a^*} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_a^*} \quad (\text{I.123})$$

et idem pour la composante b (rappelons que les variables c_a et c_b étant complexes, on doit traiter c_j et c_j^* comme deux variables indépendantes). On obtient donc :

$$i\hbar \dot{c}_a = \left(\frac{\partial E}{\partial c_a^*} \right)_{c_a, c_b, c_b^*} \quad i\hbar \dot{c}_b = \left(\frac{\partial E}{\partial c_b^*} \right)_{c_a, c_a^*, c_b} \quad (\text{I.124})$$

Plutôt que (c_a, c_b) , on peut utiliser le couple de variables (n, φ) , pour lesquelles la partie dynamique du lagrangien s'écrit⁵ :

$$i\hbar(\dot{c}_a c_a^* + \dot{c}_b c_b^*) = -\hbar n \dot{\varphi} + \dots \quad (\text{I.125})$$

de sorte que le lagrangien total vaut :

$$\mathcal{L}(\varphi, n, \dot{\varphi}, \dot{n}) = -\hbar n \dot{\varphi} - E(\varphi, n) \quad (\text{I.126})$$

où l'énergie $E(\varphi, n)$ est donnée en (I.77). Les équations de Lagrange s'écrivent donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \Rightarrow \hbar \dot{n} = \frac{\partial E}{\partial \varphi} \quad (\text{I.127})$$

et

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{n}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n} \Rightarrow \hbar \dot{\varphi} = -\frac{\partial E}{\partial n} \quad (\text{I.128})$$

ce qui correspond aux équations d'évolution (I.81).

Formulation hamiltonienne. Le lagrangien est fonction des deux variables (φ, n) et de leurs dérivées. Il y a donc deux moments conjugués :

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = -\hbar n \quad p_n \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{n}} = 0. \quad (\text{I.129})$$

5. Le symbole "... " représente une dérivée totale par rapport au temps, sans importance ici.

L'hamiltonien correspondant s'écrit

$$H(\varphi, n, p_\varphi, p_n) = p_\varphi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = E(\varphi, n) \quad \text{avec} \quad \hbar n = -p_\varphi \quad (\text{I.130})$$

et les équations de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \\ \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi} = -\frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial n} \\ -\hbar \dot{n} = -\frac{\partial E}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (\text{I.131})$$

sont (heureusement) identiques aux équation de Lagrange (I.127-I.128).

Chapitre II

Dynamique d'une jonction Josephson

Le chapitre précédent a été consacré à la présentation des jonctions Josephson supraconductrices et à leur transposition à des fluides d'atomes, avec des faisceaux laser focalisés qui jouent le rôle de la barrière isolante des jonctions solides.

Pour une jonction supraconductrice, nous avons donné les deux relations fondamentales proposées par Josephson :

$$\begin{cases} I = I_c \sin \varphi \\ \hbar \dot{\varphi} = 2eV \end{cases}, \quad (\text{II.1})$$

où φ désigne la différence de phase entre les supraconducteurs placés de part et d'autre de la jonction, I représente l'intensité électrique traversant la jonction, V la tension électrique à ses bornes, et $2e > 0$ la valeur absolue de la charge d'une paire de Cooper. L'intensité critique I_c est un paramètre qui caractérise la jonction.

Toujours à propos des jonctions supraconductrices, nous avons introduit un modèle plus complet permettant de décrire les principaux phénomènes accompagnant l'effet Josephson. Ce modèle RCSJ, pour *resistively capacitance shunted junction*, est représenté sur la figure II.1. Nous allons l'utiliser dans ce chapitre pour établir la caractéristique de la jonction, c'est-à-dire la tension moyenne \bar{V} qui apparaît à ses bornes quand on l'alimente par un générateur de courant délivrant une intensité I constante. Cette étude sera basée sur un modèle célèbre dans la physique des jonctions, celui de la "planche à laver inclinée".

Nous passerons ensuite à la transposition de ces notions à une jonction atomique. Nous présenterons un schéma ingénieux proposé par GIOVANAZZI, SMERZI et al. (2000) pour simuler la présence d'un générateur de courant. Ce schéma consiste à placer une barrière mobile dans le fluide, l'intensité traversant la barrière étant directement proportionnelle à sa vitesse, au moins dans le régime $I < I_c$. On peut alors retrouver pour ces fluides atomiques l'équivalent des paramètres du modèle RCSJ.

Une question importante concernant la transposition de l'idée de Josephson à des gaz d'atomes porte sur les mécanismes physiques de la dissipation (le "R" du modèle "RCSJ"). Nous décrirons des analyses numériques récentes ainsi que des expériences qui ont mis en évidence le rôle essentiel des solitons et des vortex dans le régime dissipatif.

Pour terminer ce chapitre, nous reviendrons aux jonctions supraconductrices pour décrire brièvement les recherches de Clarke, Devoret et Martinis, fondées sur la version quantique du modèle de la planche à laver inclinée, recherches qui ont été récompensées par le prix Nobel de Physique 2025.

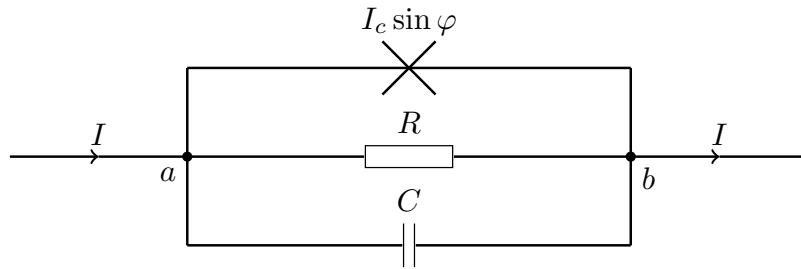


FIGURE II.1. Le modèle RCSJ, avec une résistance R et une capacité C en parallèle avec la jonction idéale décrite par (II.1). L'ensemble est alimenté par un générateur de courant délivrant l'intensité I .

1 Caractéristique d'une JJ supraconductrice

1-1 Rappel sur le modèle RCSJ

Nous avons introduit au chapitre précédent le modèle RCSJ (*resistively capacitance shunted junction*) qui permet de décrire de manière semi-quantitative la dynamique d'une jonction Josephson, possiblement alimentée par un générateur de courant ou un générateur de tension.

Rappelons brièvement les principaux ingrédients de ce modèle. Nous notons $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$ la différence de phase entre les deux côtés de la jonction, $V = V_a - V_b$ la différence de potentiel électrique, et I l'intensité électrique totale circulant de a vers b . La structure électrique envisagée dans le modèle RCSJ est représentée sur la figure II.1 et elle comporte trois éléments :

- un élément Josephson idéal traversé par le courant $I_c \sin \varphi$;
- une résistance traversée par le courant V/R ;
- un condensateur de capacité C , portant la charge $Q = CV$ et traversé par le courant $\dot{Q} = C\dot{V}$.

On a donc le lien suivant entre l'intensité totale $I(t)$, la phase $\varphi(t)$ et la tension $V(t)$:

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{V}{R} + C \frac{dV}{dt}, \quad (\text{II.2})$$

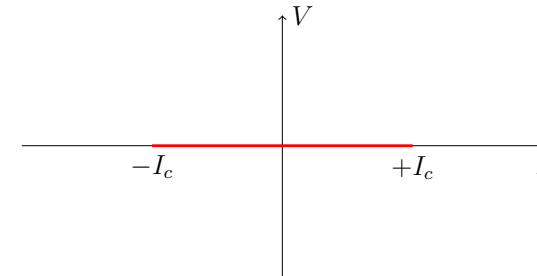


FIGURE II.2. Solution possible pour l'équation du mouvement (II.3) : un courant I compris entre $-I_c$ et $+I_c$, et une différence de potentiel électrique V nulle.

ainsi que le lien $\hbar\dot{\varphi} = 2eV$ entre la phase $\varphi(t)$ et la tension $V(t)$ (seconde relation de Josephson dans (II.1)).

Si l'on élimine V au profit de la phase φ , on aboutit à l'équation différentielle non linéaire du deuxième ordre en φ :

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\varphi} + \frac{\hbar C}{2e} \ddot{\varphi}. \quad (\text{II.3})$$

Nous envisagerons dans la suite de ce cours différentes configurations : I peut être maintenue constante par un générateur de courant, et il s'agit alors de déterminer $\varphi(t)$ et donc $V(t)$, en particulier sa moyenne temporelle \bar{V} . Nous considérerons également au chapitre suivant la situation où I peut comporter une composante continue et une composante modulée [$I(t) = I_0 + I_1 \cos(\omega t)$] et nous montrerons que la tension moyenne \bar{V} peut présenter un comportement résonnant (résonances de Shapiro). Nous verrons que cette équation non linéaire donnant l'évolution de la phase φ présente une grande variété de solutions, selon l'importance de l'amortissement résistif, et qu'elle peut révéler différents phénomènes typiques de la physique non linéaire, de l'hystérésis par exemple.

Dans ce chapitre, nous allons considérer le cas où le dispositif représenté en figure II.1 est alimenté par un générateur de courant d'intensité constante I . Nous allons chercher à résoudre analytiquement ou numériquement l'équation (II.3) pour en déduire $\varphi(t)$ et $V(t)$.

Notons tout de suite une solution particulière qui sera toujours pré-

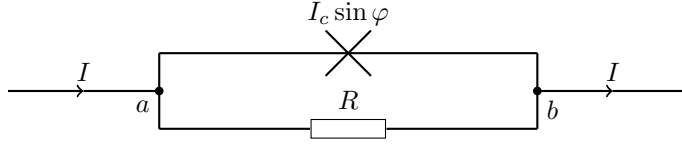


FIGURE II.3. La simplification du modèle RCSJ quand les effets capacitifs sont négligeables.

sente :

$$|I| \leq I_c \quad V = 0 \quad (\text{II.4})$$

correspondant à la phase constante $\varphi = \arcsin(I/I_c)$. Il s'agit du segment horizontal dans le plan (I, V) déjà montré au chapitre 1 et reporté sur la figure II.2.

1-2 Étude analytique pour $C \rightarrow 0$

Nous allons nous concentrer d'abord sur le cas simple, sans hystérésis, où les effets capacitifs peuvent être négligés devant les effets résistifs (figure II.3). On peut alors simplifier l'équation (II.3) pour ne garder que

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\varphi}. \quad (\text{II.5})$$

On peut distinguer deux régimes :

- Si l'intensité I est inférieure à I_c , on trouve uniquement la solution constante $\varphi = \arcsin(I/I_c)$ (modulo 2π) et donc

$$\boxed{|I| \leq I_c : \quad V = 0} \quad (\text{II.6})$$

C'est le segment horizontal tracé en figure II.2 et apparaissant également en figure II.4.

- Si $I > I_c$, on transforme cette équation en :

$$\int_0^{\varphi(t)} \frac{d\varphi'}{I - I_c \sin \varphi'} = \frac{2eR}{\hbar} t \quad (\text{II.7})$$

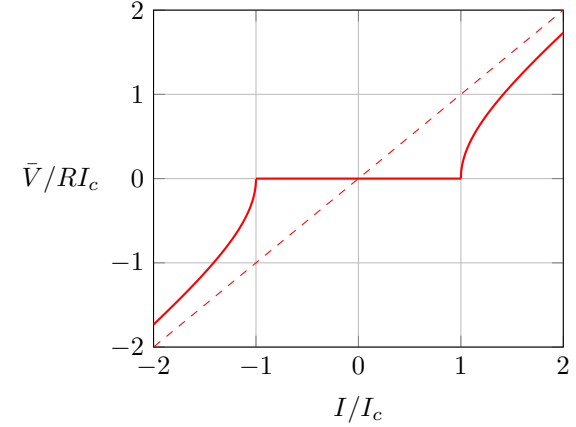


FIGURE II.4. Caractéristique courant-tension dans le cas où le couplage capacitif est négligeable. La ligne tireté représente le résultat purement résistif $\bar{V} = RI$.

où nous avons pris par convention une phase nulle à l'instant $t = 0$. L'intégration de cette équation conduit à (GRADSHTEYN & RYZHIK 2014) :

$$\frac{2}{\sqrt{I^2 - I_c^2}} \arctan \left[\frac{I \tan(\varphi/2) - I_c}{\sqrt{I^2 - I_c^2}} \right] = \frac{2eR}{\hbar} t \quad (\text{II.8})$$

dont on déduit

$$I \tan \frac{\varphi}{2} = I_c + \sqrt{I^2 - I_c^2} \tan \left(\frac{\pi t}{T} \right) \quad \text{avec} \quad T = \frac{\pi \hbar}{eR \sqrt{I^2 - I_c^2}}. \quad (\text{II.9})$$

La fonction φ est une fonction croissante du temps et elle augmente de 2π quand t augmente de T . La fonction $\dot{\varphi}$ est périodique dans le temps de période T et il en va de même pour $V(t)$. La moyenne \bar{V} de $V(t)$ sur une période T se calcule simplement :

$$\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt = \frac{\hbar}{2eT} \int_0^T \dot{\varphi}(t) dt = \frac{\hbar}{2eT} [\varphi(T) - \varphi(0)] = \frac{\hbar}{2eT} 2\pi \quad (\text{II.10})$$

ou encore, en utilisant l'expression (II.9) de T :

$$\boxed{|I| > I_c : \quad \bar{V} = R\sqrt{I^2 - I_c^2}} \quad (\text{II.11})$$

On obtient ainsi la caractéristique tracée en figure II.4. Pour un courant I très grand devant I_c , on retrouve le résultat purement résistif $\bar{V} = RI$, tracé en tireté sur cette figure.

Cette caractéristique courant-tension correspond en pratique au cas de jonctions Josephson réalisées à partir de contacts ponctuels (*point contact*), pour lesquelles la capacité C est effectivement très petite (BARONE & PATERNO 1982).

1-3 La "planche à laver" inclinée

Nous prenons maintenant en compte les effets capacitifs ($C \neq 0$). Pour obtenir une intuition des solutions dans ce cas général, commençons par omettre cette fois-ci la contribution résistive dans (II.3) qui s'écrit donc :

$$\frac{\hbar C}{2e} \ddot{\varphi} = -I_c \sin \varphi + I. \quad (\text{II.12})$$

Cette équation décrit le mouvement d'une particule de "masse" $\hbar C/2e$ soumise à la force $F(\varphi) = -I_c \sin \varphi + I$. Cette force dérive du potentiel

$$\boxed{U(\varphi) = -I_c \cos \varphi - I\varphi} \quad (\text{II.13})$$

La superposition du potentiel sinusoïdal $-I_c \cos \varphi$ et du potentiel linéaire $-I\varphi$ est tracée en figure II.5 pour différentes valeurs du rapport I/I_c . Elle est souvent appelée de manière imagée "potentiel en planche à laver inclinée" (*tilted washboard potential*), comme celle montrée sur la figure II.6.

Pour ce problème sans dissipation, on identifie deux possibilités, conduisant à des régimes différents :

- $|I| < I_c$ (première ligne de la figure II.5) : le potentiel $U(\varphi)$ présente des minima locaux, séparés de 2π . Pour une énergie donnée, on a donc (i) un régime piégé, où la variable φ reste confinée autour d'un minimum local et (ii) un régime accéléré où la particule dévale la pente

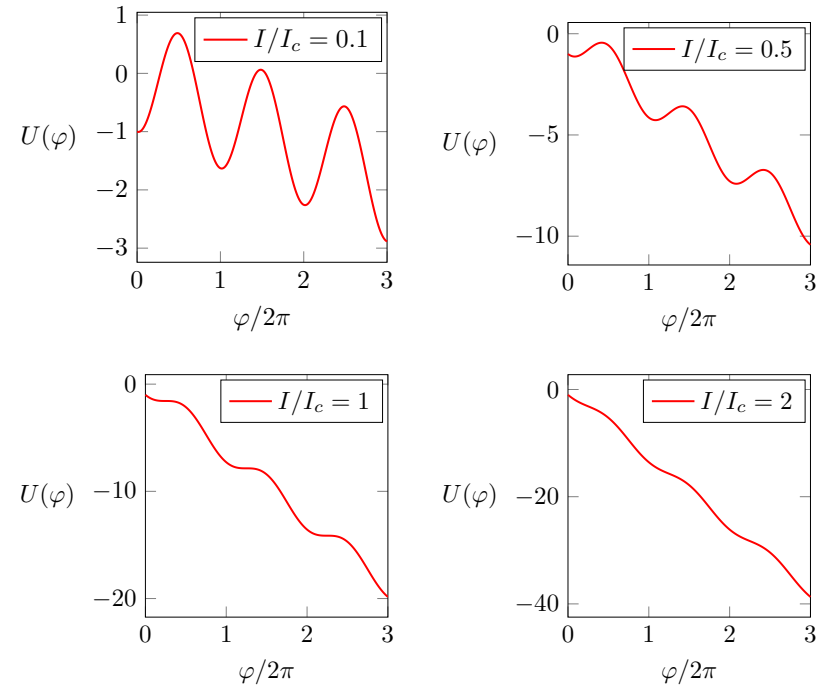


FIGURE II.5. Forme du potentiel $U(\varphi)$ pour différentes valeurs du rapport I/I_c . Des minima locaux, espacés de 2π , existent seulement si $I < I_c$.

correspondant au potentiel linéaire $-I\varphi$. Le terme dissipatif (non pris en compte pour l'instant) sera alors essentiel pour assurer que la "vitesse" $\dot{\varphi}$ ne diverge pas.

- $|I| \geq I_c$ (deuxième ligne de la figure II.5) : le potentiel $U(\varphi)$ ne présente pas de minimum local, seul le régime accéléré est possible.

Les phénomènes d'hystérésis mentionnés plus haut peuvent se manifester dans le premier cas, pour lequel deux scénarios sont en compétition.



FIGURE II.6. Une planche à laver en pierre. Photo Wikipedia.

1-4 Résultats numériques dans le cas général

Nous avons abordé dans ce qui précède deux régimes limite : celui où les effets capacitifs décrits par C sont négligeables et qui conduit à une solution analytique, et celui où les effets résistifs décrits par R sont négligeables, qui conduit au mouvement dans le potentiel de type "planche à laver inclinée". Nous passons maintenant à l'étude de la jonction quand tous les termes de l'équation du mouvement (II.3) sont significatifs. Dans ce cas, il n'est pas possible d'obtenir une solution analytique simple et on doit se tourner vers une résolution numérique.

Avant de présenter ces résultats, il est important d'identifier le ou les paramètres sans dimension qui caractérisent le problème. Pour cela, on divise l'équation (II.3) par I_c :

$$\frac{I}{I_c} = \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eRI_c} \dot{\varphi} + \frac{\hbar C}{2eI_c} \ddot{\varphi} \quad (\text{II.14})$$

et on introduit l'échelle de temps

$$t_0 = \frac{\hbar}{2eRI_c}. \quad (\text{II.15})$$

En exprimant le temps en unité de t_0 , on arrive à l'équation

$$\frac{I}{I_c} = \sin \varphi + \dot{\varphi} + \beta_c \ddot{\varphi} \quad (\text{II.16})$$

où l'on a introduit le paramètre sans dimension (paramètre de Stewart-McCumber).

$$\beta_c = \frac{2eI_c R^2 C}{\hbar} \quad (\text{II.17})$$

La détermination de la caractéristique d'une jonction Josephson décrite par le modèle RCSJ ne dépend donc que de ce seul paramètre¹. Le cas dominé par la dissipation étudié en § 1-2 correspond au choix $\beta_c = 0$. Le cas opposé $\beta_c \gg 1$ correspond au contraire à une situation où les effets résistifs sont faibles (i.e. $R \rightarrow \infty$).

On a tracé en figures II.7 et II.8 les caractéristiques courant-tension pour différentes valeurs de β_c . On voit apparaître un phénomène d'hystérésis marqué pour $\beta_c > 1$. En pratique, ces courbes sont calculées en recherchant le régime forcé de (II.16). La fonction $\varphi(t)$ est périodique en temps et on en déduit \bar{V} par la relation (II.10).

Pour déterminer chaque caractéristique, on commence au point $I = 0$ et $V = 0$ et on suit le régime forcé en augmentant I par incréments dI petits devant I_c . Pour chaque incrément dI , on attend que le régime forcé soit atteint pour déterminer la valeur de $\bar{V}(I)$ correspondante. Les calculs sont faits jusqu'à $I = 2I_c$ pour cette figure. Ensuite, partant de la solution en ce point (qui est proche du régime purement résistif), on revient vers le point $I = 0$ en diminuant I par petits incréments.

On obtient ainsi la caractéristique dans le demi-plan $I > 0$, en particulier les deux branches d'hystérésis pour un courant compris entre I_r et I_c (figure II.7). La partie $I < 0$ s'en déduit par symétrie. Dans la limite $\beta_c \gg 1$, BUCKEL & KLEINER (2008) donnent la valeur approchée $I_r/I_c = 4/(\pi\sqrt{\beta_c})$.

Cette hystérésis correspond aux deux types de mouvement mentionnés plus haut pour le cas $|I| < I_c$:

- un mouvement piégé en un minimum local du potentiel $U(\varphi)$, donc à tout instant $\dot{\varphi} = 0$ et $\bar{V} = 0$;
- un mouvement à vitesse moyenne $\bar{\varphi}$ non nulle, donc $\bar{V} \neq 0$, résultant de la compétition entre l'accélération due au potentiel linéaire $-I\varphi$ et la force de friction.

1. Je remercie Thierry Giamarchi pour une discussion sur la nature de certaines solutions de cette équation.

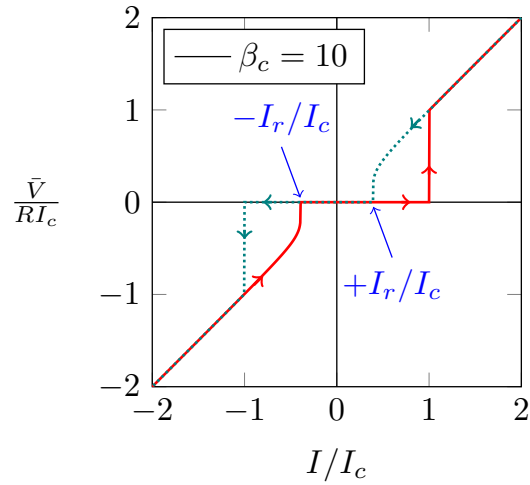


FIGURE II.7. Caractéristique courant-tension déduite de (II.3) pour $\beta_c = 10$. Cette équation est intégrée numériquement pour chaque valeur de I/I_c . On calcule la moyenne temporelle \bar{V} de la tension $V(t)$ une fois le régime stationnaire atteint. La courbe en trait continu rouge est obtenue en balayant I dans le sens positif, depuis $-2I_c$ à $+2I_c$. La courbe en pointillé vert est obtenue en balayant I depuis $+2I_c$ à $-2I_c$. Un phénomène d'hystérésis apparaît sur cette caractéristique : dans la plage $[-I_c, -I_r]$ et $[+I_r, +I_c]$, une même valeur du courant peut conduire à deux valeurs de la tension \bar{V} selon les conditions initiales choisies.

Autre paramétrisation rencontrée fréquemment. Le choix de l'unité de temps t_0 dans (II.14) n'est pas le seul possible. Certains auteurs préfèrent introduire le temps t_1 tel que

$$t_1^2 = \frac{\hbar C}{2eI_c} \quad (\text{II.18})$$

qui est égal à $2\pi/\omega_p$, où ω_p est la fréquence plasma introduite au chapitre précédent. En prenant t_1 comme unité de temps, on aboutit à l'équation du mouvement

$$\frac{I}{I_c} = \sin \varphi + \frac{\dot{\varphi}}{Q_{\text{qual}}} + \ddot{\varphi}, \quad (\text{II.19})$$

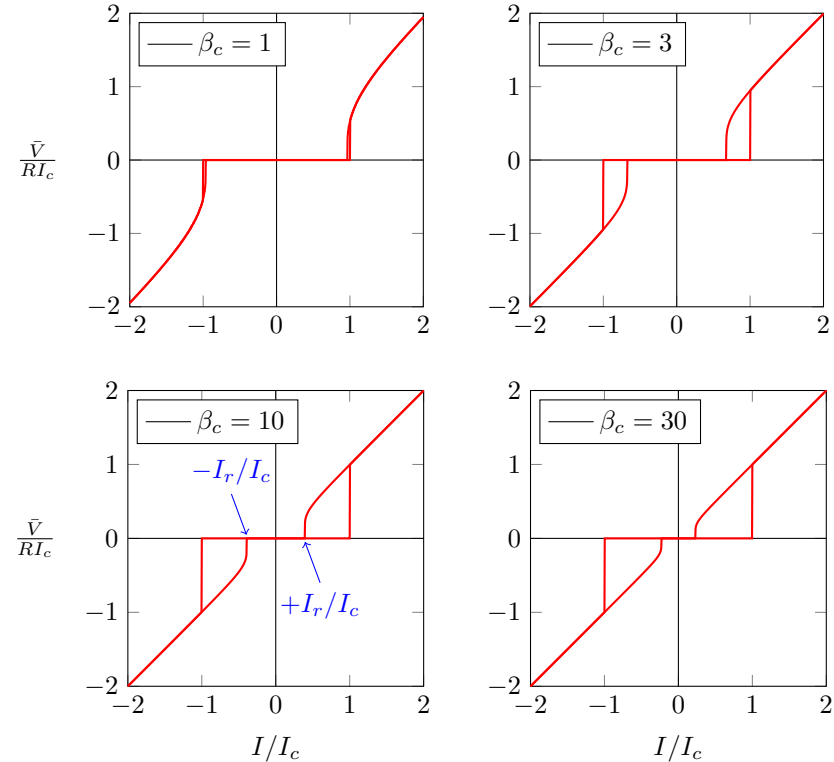


FIGURE II.8. Caractéristique courant-tension déduite de (II.3) pour différentes valeurs de β_c .

où le facteur de qualité Q_{qual} est directement relié au paramètre β_c par

$$Q_{\text{qual}} = \sqrt{\beta_c}. \quad (\text{II.20})$$

2 Caractéristique d'une jonction atomique

L'étude des caractéristiques courant-tension pour des jonctions Josephson supraconductrices a été faite dans les années qui ont suivi la proposition de Josephson. Il n'est pas question de faire une revue de ces études ici et nous renvoyons les personnes intéressées vers les ouvrages classiques du domaine comme BARONE & PATERNO (1982) et TINKHAM (2004). Nous allons nous intéresser ici aux réalisations plus récentes faites à partir de gaz d'atomes ou de molécules froides.

2-1 Rappel sur les jonctions atomiques

Rappelons les résultats obtenus au premier chapitre concernant une jonction Josephson atomique formée par un double puits, avec les nombres d'atomes à gauche et à droite :

$$N_a = \bar{N}_a + n, \quad N_b = \bar{N}_b - n, \quad (\text{II.21})$$

et la différence de phase $\varphi \equiv \varphi_a - \varphi_b$. Le fonctionnement non dissipatif de la jonction est caractérisé par les deux énergies E_J et E_C . Son énergie s'écrit

$$E(\varphi, n) = \overline{\Delta\mu} n + \frac{E_C}{2} n^2 - E_J \gamma(n) \cos \varphi, \quad (\text{II.22})$$

où la quantité $\overline{\Delta\mu} = \bar{\mu}_b - \bar{\mu}_a$ représente la différence de potentiel chimique pour les nombres moyens de particules \bar{N}_a et \bar{N}_b , et où on a posé :

$$\gamma(n) \equiv \sqrt{\left(1 + \frac{n}{\bar{N}_a}\right) \left(1 - \frac{n}{\bar{N}_b}\right)}. \quad (\text{II.23})$$

Dans ce chapitre, nous nous limiterons à des régimes où l'on peut prendre en bonne approximation $\gamma(n) \approx 1$. Cette hypothèse correspond à ce que

nous avons appelé le "régime Josephson" dans le chapitre 1. Dans ce cas, les équations d'évolution des paramètres n et φ décrivant la jonction sont

$$\begin{cases} \hbar \dot{n} = E_J \sin \varphi \\ \hbar \dot{\varphi} = -\overline{\Delta\mu} - n E_C \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

La quantité \dot{n} représente un courant de particules, donc l'équivalent du courant électrique I pour une jonction supraconductrice. La première équation de (II.24) peut donc s'écrire

$$\dot{n} = I_c \sin \varphi \quad \text{avec} \quad I_c = E_J / \hbar \quad (\text{II.25})$$

Rappelons par ailleurs que l'énergie de charge E_C est définie par

$$E_C \equiv \left. \frac{\partial \mu_a}{\partial N_a} \right|_{N_a=\bar{N}_a} + \left. \frac{\partial \mu_b}{\partial N_b} \right|_{N_b=\bar{N}_b} \quad (\text{II.26})$$

de sorte que la quantité intervenant dans la seconde équation de (II.24) peut se simplifier en

$$\begin{aligned} \overline{\Delta\mu} + n E_C &= \left(\bar{\mu}_a + n \frac{\partial \mu_a}{\partial N_a} \right) - \left(\bar{\mu}_b - n \frac{\partial \mu_b}{\partial N_b} \right) \\ &= \mu_a - \mu_b = \Delta\mu. \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

La seconde équation de (II.24) peut donc également s'écrire

$$\hbar \dot{\varphi} = -\Delta\mu \quad (\text{II.28})$$

où $\Delta\mu \equiv \mu_a - \mu_b$ est calculé pour les nombres de particules instantanés N_a et N_b .

En pratique, nous considérerons fréquemment des jonctions à l'équilibre pour les nombres moyens d'atomes (\bar{N}_a, \bar{N}_b) , de sorte que $\bar{\mu}_a = \bar{\mu}_b$. Dans ces conditions, on a la relation simple entre n et la différence instantanée de potentiel chimique : $\Delta\mu = n E_C$, qui peut également se mettre sous la forme

$$n = C \Delta\mu \quad \text{avec} \quad C = \frac{1}{E_C}. \quad (\text{II.29})$$

La capacité C relie donc la "charge" n de la jonction à $\Delta\mu$.

2-2 La barrière mobile

Comment explorer directement la partie de la caractéristique composée du segment $I \in [-I_c, +I_c]$ pour une différence de potentiel nulle entre les deux côtés de la jonction? Dans une jonction supraconductrice, on a affaire à un système ouvert puisque la jonction est branchée à un générateur de courant. De nouvelles charges (paires de Cooper) peuvent être donc injectées ou retirées d'un côté ou de l'autre de la barrière, ce qui permet d'imposer un courant $I \neq 0$ tout en conservant $V = 0$.

Dans une jonction atomique, composée d'un double puits de potentiel, le rôle de V est joué par la différence de potentiel chimique $\Delta\mu = \mu_a - \mu_b$ entre les deux côtés de la barrière (cf. chapitre 1). Il est alors moins évident de travailler à $\Delta\mu = 0$ car le système est isolé : avec une barrière fixe située au centre du puits de potentiel, le passage de particules d'un côté à l'autre de la barrière va modifier le potentiel chimique de chacune des deux composantes : du fait des interactions entre atomes, l'un des potentiels chimiques va augmenter, l'autre diminuer, et on quitte le régime $\Delta\mu = 0$.

Pour contourner ce problème, GIOVANAZZI, SMERZI et al. (2000) ont proposé d'utiliser une barrière mobile. Idéalement, cette barrière est placée dans un gaz de densité uniforme. Quand on met cette barrière en mouvement pour atteindre une vitesse v , on peut observer deux types de comportement selon la valeur de v :

- Si la vitesse $|v|$ reste inférieure à un certain seuil v_c , les densités de part et d'autre de la barrière restent égales. Cela signifie que le flux de particules I qui traverse la barrière est égal à ρv , où ρ désigne la densité linéique du milieu.
- Si la vitesse $|v|$ dépasse la valeur critique v_c , alors le flux de particules à travers la barrière n'est pas suffisant pour maintenir l'égalité des densités. Un bourrelet de densité se produit en amont de la barrière, et une dépression se produit en aval. Les deux potentiels chimiques μ_a et μ_b sont alors différents.

Ces deux scénarios sont montrés sur la figure II.9, obtenue par KWON, DEL PACE et al. (2020) sur un gaz de molécules (bosoniques) de ${}^6\text{Li}_2$. Nous reviendrons un peu plus loin sur les détails de cette expérience.

Le premier type de comportement est une manifestation directe de la superfluidité du milieu et il rappelle le critère de Landau pour tester cette

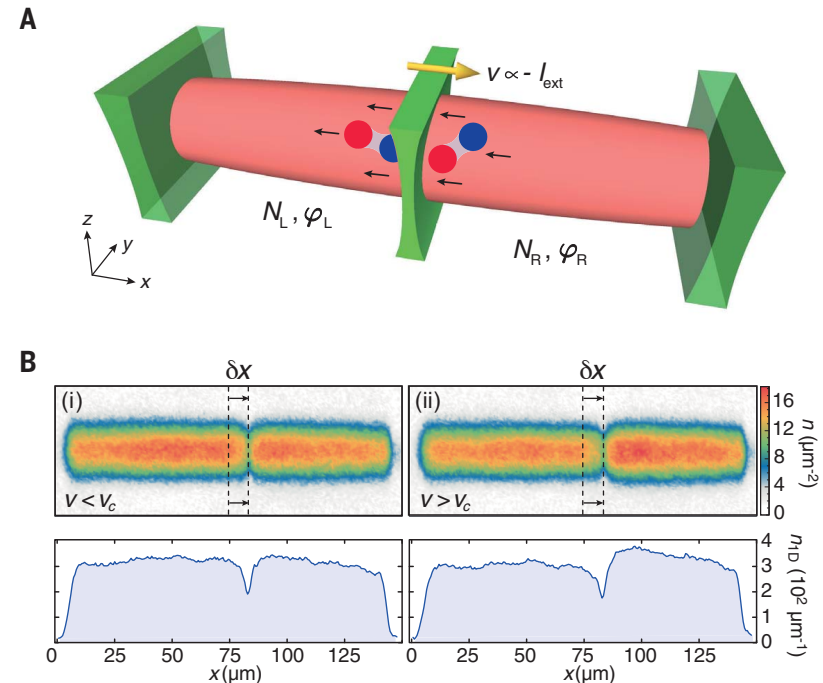


FIGURE II.9. Haut : Jonction Josephson atomique pour un gaz de molécule ${}^6\text{Li}_2$ en forme de cylindre. La barrière centrale est mobile et permet de contrôler le flux d'atomes traversant la barrière. Bas : deux exemples de profils de densité pour $I < I_c$ (gauche) et $I > I_c$ (droite). Hauteur de la barrière : $0.6 \times$ énergie de Fermi, paramètre d'interaction : $1/k_F a_s = 4.2$. Figure extraite de KWON, DEL PACE et al. (2020).

superfluidité. Selon ce critère, on déplace une impureté microscopique dans le milieu et on étudie si cette impureté crée ou non des excitations, en l'occurrence des phonons, lors de son mouvement. Le résultat dépend du rapport v/c , où v est la vitesse de l'impureté et v la vitesse du son. Pour $v < v_c$, aucune excitation n'est créée si le milieu est à température nulle, donc totalement superfluide.

Dans le cas présent, l'impureté microscopique est remplacée par une barrière macroscopique, de sorte que la vitesse critique v_c est notablement inférieure à la vitesse du son. Par ailleurs, en accord avec la première relation de Josephson, on s'attend à ce qu'une différence de phase $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$ apparaisse entre les deux côtés de la barrière. La différence de phase φ est reliée à l'intensité $I = \rho v$ par la relation de Josephson $I = I_c \sin \varphi$, et l'intensité critique I_c se déduit de la vitesse critique v_c par

$$\boxed{I_c = \rho v_c} \quad (\text{II.30})$$

Le second type de comportement est un régime dissipatif. Le mouvement de la barrière crée des excitations dans le fluide. Ces excitations dépendent des détails du milieu, en particulier de sa dimensionalité : pour un milieu strictement unidimensionnel, ces excitations sont de type phonons et solitons noirs ou gris ; pour un milieu bi- ou tri-dimensionnel, ce peut être (en plus des phonons) des vortex.

Nous allons modéliser le comportement de la barrière dans ce régime par une approche de type RCSJ, en écrivant l'intensité $I_{\text{ext}} = -\rho v$ imposée de l'extérieur² comme la somme des trois termes :

$$I_{\text{ext}} = -I_c \sin \varphi + \frac{\Delta\mu}{R} + C \dot{\Delta\mu}. \quad (\text{II.31})$$

En utilisant la seconde relation de Josephson (II.28), cette équation peut s'écrire comme une équation différentielle d'ordre 2 en φ , analogue de l'équation (II.3) pour les jonctions supraconductrices :

$$\rho v = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{R} \dot{\varphi} + \hbar C \ddot{\varphi}. \quad (\text{II.32})$$

2. Le signe $-$ rend simplement compte du fait que pour une barrière de vitesse positive (allant vers la droite, donc de a vers b), le courant de particules qui la traverse va de b vers a . Par ailleurs, pour $v > 0$, on s'attend dans le régime dissipatif à une augmentation de la densité dans la partie droite et une diminution dans la partie gauche, donc $\mu_b > \mu_a$.

Dans ce modèle, R/\hbar est sans unité et $\hbar C$ a la dimension d'un temps. L'intensité I et l'intensité critique I_c se mesurent en nombre de particules/seconde, leur dimension est donc l'inverse d'un temps.

2-3 Observation de la relation courant-phase

La suggestion de GIOVANAZZI, SMERZI et al. (2000) d'utiliser une barrière mobile pour explorer la relation courant-phase d'une jonction atomique a été implémentée par plusieurs groupes expérimentaux, tout d'abord LEVY, LAHOUD et al. (2007), puis RYU, BLACKBURN et al. (2013) et JENDRZEJEWSKI, ECKEL et al. (2014). Nous reviendrons sur certaines de ces expériences au chapitre 5 quand nous discuterons la physique des SQUIDS.

Nous allons nous concentrer dans ce qui suit sur l'expérience de KWON, DEL PACE et al. (2020), dont nous avons montré les premiers résultats en figure II.9. Cette expérience est réalisée avec un gaz de fermions (^6Li) au voisinage d'une résonance de Feshbach. On se place du côté des longueurs de diffusion positives, de sorte que le gaz est essentiellement composé de molécules bosoniques $^6\text{Li}_2$.

Le gaz est confiné dans un potentiel harmonique de forte raideur selon y et z , et de raideur beaucoup plus faible selon x . Grâce à deux nappes de lumière additionnelles, on sélectionne la partie centrale du nuage, qui a donc la forme d'un cylindre allongé de longueur $140 \mu\text{m}$ avec une densité linéique quasi-homogène $\rho = 300$ molécules/ μm (figure II.9). Au voisinage du centre, on place une troisième nappe de lumière, de plus faible intensité et d'épaisseur $\sim 1 \mu\text{m}$, qui joue le rôle d'une barrière tunnel. Deux types de mesure sont possibles :

- Une image directe comme celles montrées en figure II.9 fournit le nombre d'atomes de part et d'autre de la barrière tunnel.
- Une expansion balistique durant laquelle les deux parties du nuage se recouvrent et interfèrent, ce qui donne accès à la phase relative entre les nuages (figure II.10).

Pour obtenir l'équivalent de la caractéristique courant-tension pour cette jonction atomique, KWON, DEL PACE et al. (2020) sont partis de la situation symétrique où les deux côtés de la jonction ont la même longueur $L_a = L_b = L/2$ et ils ont déplacé la jonction pendant une durée τ de

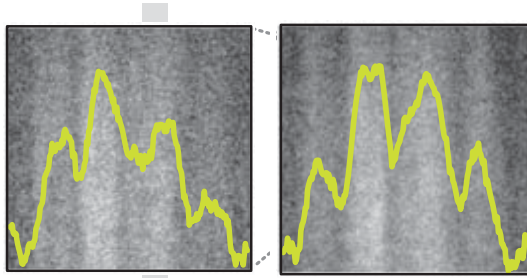


FIGURE II.10. Figure d'interférence entre les deux parties de la jonction de la figure II.9, dont on déduit la phase relative $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$. Gauche : $\varphi \approx 0$, droite : $\varphi \approx 0.4\pi$. Figure extraite de KWON, DEL PACE et al. (2020).

sorte qu'à l'issue de ce déplacement, on a $L_a = L/2 + \ell$ (partie gauche) et $L_b = L/2 - \ell$ (partie droite) avec $\ell = v\tau$: une vitesse positive de la jonction correspond à une augmentation de L_a et une diminution de L_b . On fixe $\ell = \pm 10 \mu\text{m}$, ce qui est petit devant la longueur totale $L = 150 \mu\text{m}$.

L'état de la jonction à l'issue du déplacement (figure II.9) est caractérisé par les nombres N_a et N_b , dont on déduit la différence de potentiel chimique entre les deux côtés de la jonction. Le résultat de cette mesure est montré en figure II.11. On retrouve la caractéristique typique d'une jonction :

- Pour $|v| < 0.4 \text{ mm/s}$, la jonction se comporte de manière idéale : $\Delta\mu$ reste nul à l'issue du déplacement de la jonction (figure II.9, en bas à gauche).
- Pour v supérieure à cette valeur, le courant traversant la jonction est plus faible que I et on observe une augmentation de la densité du côté dont la longueur a été réduite (figure II.9, en bas à droite).

La méthode interférométrique mentionnée plus haut permet également d'étudier le lien entre l'intensité et la phase dans le régime $|v| < v_c$. Le résultat est montré en figure II.12. L'ajustement de $I(\varphi)$ par une fonction périodique de φ montre qu'une harmonique supplémentaire vient légèrement modifier la relation $I = I_c \sin \varphi$.

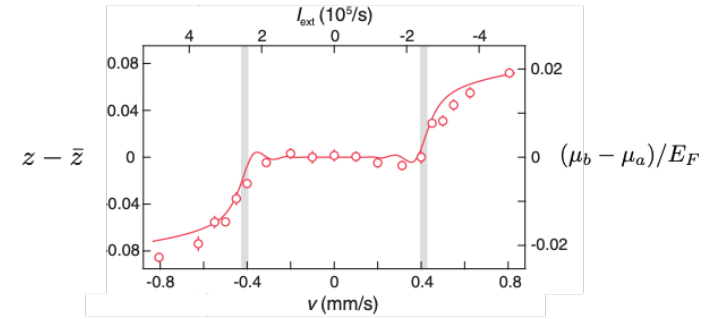


FIGURE II.11. Caractéristique courant-tension pour une jonction atomique avec $E_F/h = 6 \text{ kHz}$. Le paramètre z est défini par $z = (N_b - N_a)/(N_a + N_b)$. Le paramètre \bar{z} désigne la valeur de z pour une jonction idéale. La convention de signe pour le courant est $I_{\text{ext}} \equiv I_{a \rightarrow b}$. La ligne continue représente un ajustement par le modèle RCSJ. La légère oscillation visible juste en dessous de I_c est due à des oscillations plasma de faible amplitude, excitées par le caractère non-adiabatique du branchement du courant. Figure extraite de KWON, DEL PACE et al. (2020).

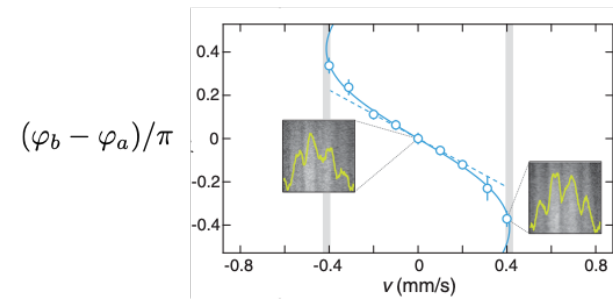


FIGURE II.12. Relation entre phase et vitesse de la barrière pour une jonction atomique. On notera que la vitesse est de signe opposé à l'intensité, de sorte qu'on retrouve bien (approximativement) la première relation de Josephson $I_{a \rightarrow b} = I_c \sin(\varphi_b - \varphi_a)$ avec $I_c > 0$. Figure extraite de KWON, DEL PACE et al. (2020).

3 Les paramètres des jonctions atomiques

3-1 Le courant critique

La valeur de l'intensité critique d'une jonction supraconductrice a été calculée à partir d'une approche microscopique basée sur la théorie BCS par AMBEGAOKAR & BARATOFF (1963). Pour un gaz d'atomes bosoniques dans un piège avec une barrière centrale, la détermination de I_c a été faite par MEIER & ZWARGER (2001) par une approche basée sur l'approche de Bogoliubov, puis reprise par PIAZZA, COLLINS et al. (2010) qui ont utilisé une résolution analytique approchée de l'équation de Gross-Pitaevskii. Les résultats des deux approches sont similaires et nous donnons ci-dessous un ordre de grandeur du résultat, que nous utiliserons à plusieurs reprises dans la suite de cours.

Considérons une barrière carrée de hauteur V_0 et de largeur d avec un condensat uniforme de densité asymptotique ρ_0 de part et d'autre de la barrière (figure II.13). L'interaction est caractérisée par le paramètre g et le potentiel chimique des condensats s'écrit donc $\mu = g\rho_0$. La vitesse du son dans ces condensats est $c_0 = \sqrt{g\rho_0/m}$. La hauteur de la barrière V_0 est supposée supérieure à μ de sorte que la densité décroît exponentiellement vite à l'intérieur de la barrière. Il est utile de définir le facteur de transmission

$$\mathcal{T} \equiv e^{-\kappa d} \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - \mu)}}{\hbar} \quad (\text{II.33})$$

qui est supposé ici petit devant 1. Le courant critique I_c peut alors s'écrire

$$I_c \approx \alpha \rho_0 c_0 \mathcal{T} \quad (\text{II.34})$$

où le nombre sans dimension α est d'ordre 1 si la hauteur V_0 de la barrière reste comparable au potentiel chimique, ce qui est le cas en pratique. Les valeurs explicites de α proposées par MEIER & ZWARGER (2001) et PIAZZA, COLLINS et al. (2010) ne coïncident pas exactement, mais sont toutes deux compatibles³ avec $\alpha \sim 1$ pour $V_0 \gtrsim \mu$.

On peut retrouver l'expression proposée pour I_c par l'argument heuristique suivant. Le courant I_c est atteint pour une différence de phase

3. Par exemple, PIAZZA, COLLINS et al. (2010) donnent $\alpha = g(\mu/V_0)$ avec $g(x) = \sqrt{2x(1-x)}$, soit $\alpha = 1/\sqrt{2}$ pour $V_0 = 2\mu$.

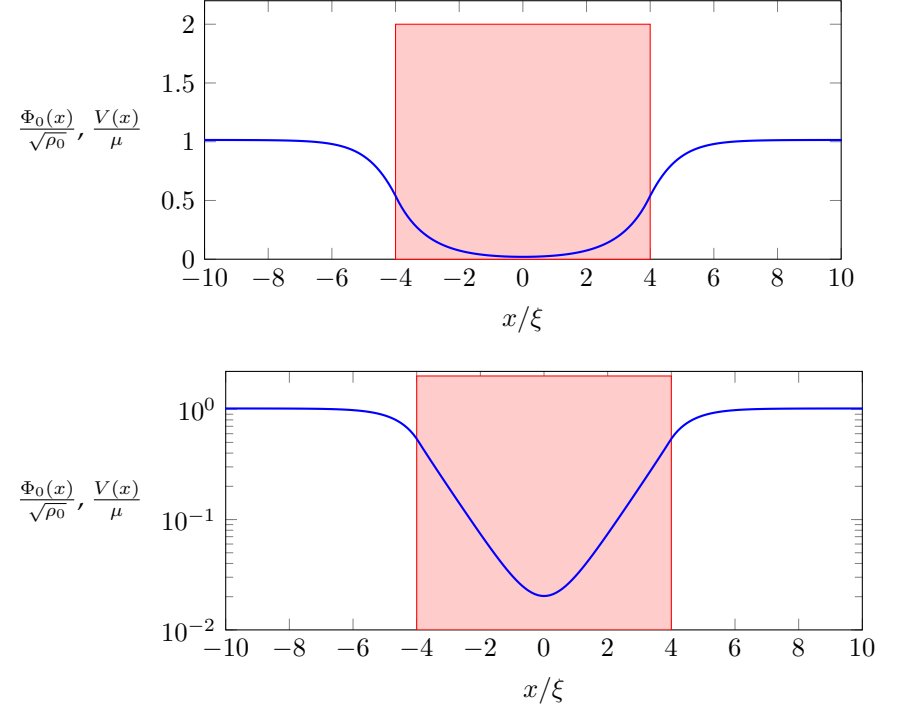


FIGURE II.13. Coordonnées linéaires (haut) et semi-logarithmiques (bas) pour l'état fondamental $\Phi_0(x)$ d'énergie E_0 de l'équation de Gross-Pitaevskii dans une boîte de longueur $L = 400\xi$ avec une barrière centrale carrée de largeur 8ξ et de hauteur 2μ (ξ et μ désignent respectivement la longueur de cicatrisation et le potentiel chimique du gaz). La valeur de l'énergie tunnel déduite de $E_J = \frac{1}{2}(E_1 - E_0)$, où E_1 est l'énergie de l'état antisymétrique $\Phi_1(x)$ d'énergie la plus basse, est $E_J = \hbar I_c = 2.9 \cdot 10^{-4} \hbar \rho_0 c_0$. Cette valeur correspond à $\alpha \approx 0.9$ dans (II.34). Calcul fait avec $N = 4096$ points.

de $\pi/2$ entre les deux côtés de la barrière. Cette différence de phase est en fait concentrée dans la zone où la densité prend sa valeur minimale $\rho_{\min} \sim \rho_0 \mathcal{T}$; cette zone de densité minimale est centrée sur la barrière et sa largeur est $\ell \sim \kappa^{-1}$, soit un gradient de phase $\frac{\pi/2}{\ell} \sim \kappa$. La vitesse des particules dans cette zone est donc $v \sim \frac{\hbar \kappa}{m}$ et le flux correspondant s'écrit $\rho_{\min} v \approx \rho_0 \frac{\hbar \kappa}{m} \mathcal{T}$, ce qui est du même ordre que (II.34) pour $V_0 \gtrsim \mu$. En pratique, pour des hauteurs de barrière entre 1.2μ et 2μ , et des largeurs entre 3ξ et 7ξ (où ξ est la longueur de cicatrisation), la valeur ainsi obtenue pour I_c diffère de moins d'un facteur 2 du résultat $I_c = E_J/\hbar$ calculé à partir de $E_J = \frac{1}{2}(E_1 - E_0)$ (cf. chapitre 1), alors que la valeur de I_c varie elle-même par plus d'un facteur 100 sur cette plage de paramètres.

Plus récemment ZACCANTI & ZWERGER (2019) ont repris et généralisé l'approche de MEIER & ZWERGER (2001) pour traiter de manière approchée le cas d'un gaz de Fermi sur toute l'étendue de la transition entre le régime BCS et le régime d'un condensat moléculaire, en passant par le cas du gaz de Fermi unitaire⁴. Ils prévoient notamment que le courant critique passe par un maximum au voisinage du régime unitaire. L'accord entre les prévisions de cette théorie approchée et les résultats expérimentaux est satisfaisant (KWON, DEL PACE et al. 2020).

3-2 Le modèle RCSJ pour une jonction atomique

Dans le cadre du modèle RCSJ, il faut déterminer les trois paramètres I_c, R, C pour préciser complètement le fonctionnement de la jonction. Nous avons décrit ci-dessus comment accéder à I_c . Pour mesurer la résistance R et la capacité C , une méthode relativement simple consiste à revenir à l'oscillation plasma déjà présentée au chapitre précédent. Rappelons que cette oscillation correspond, pour une barrière fixe, au mouvement de faible amplitude de la jonction autour d'une position d'équilibre.

Positionnons la barrière fixe au centre du gaz, de sorte que la position d'équilibre corresponde à $\bar{N}_a = \bar{N}_b = N/2$ et $\bar{\mu}_a = \bar{\mu}_b$. Pour une petite différence de phase $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$, la dynamique de la jonction est donnée

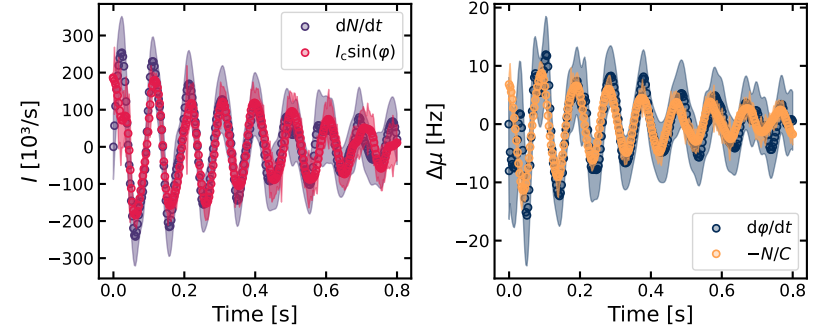


FIGURE II.14. Gauche : utilisation de la première relation de (II.35) pour extraire la valeur $I_c = 192(7) \text{ ms}^{-1}$. Droite : utilisation de la seconde relation de (II.35) pour extraire la valeur $\hbar C = 65.0(4) \text{ s}$. Figure extraite de BERNHART, RÖHRLE et al. (2025).

par les deux équations (cf. §2-1) :

$$\begin{cases} \dot{n} = I_c \varphi \\ \dot{\varphi} = -\frac{1}{\hbar C} n \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

où on a négligé dans un premier temps les effets résistifs.

Nous avons vu qu'il était possible de mesurer pour une jonction à la fois la différence de population n , à partir d'une image in-situ, et la différence de phase φ , à partir d'une image d'interférence obtenue après temps de vol. On peut donc

- vérifier que n et φ évoluent bien en quadrature l'une par rapport à l'autre, comme prévu par (II.35);
- utiliser la première relation de (II.35) pour vérifier la valeur de I_c ;
- utiliser la seconde relation de (II.35) pour obtenir la valeur de C .

On montre en figure II.14 le résultat obtenu par BERNHART, RÖHRLE et al. (2025) mettant en place cette procédure pour un gaz de ^{87}Rb confiné dans un tube cylindrique. À l'équilibre, le potentiel chimique du gaz est $\bar{\mu}_a = \bar{\mu}_b = \hbar \times 1.9 \text{ kHz}$ et la barrière centrale a une hauteur de $0.45 \bar{\mu}_{a,b}$ et une largeur de l'ordre du micromètre. Les valeurs déduites de la figure II.14 sont $I_c = 192$ particules/ms et $\hbar C = 65 \text{ s}$.

4. Je remercie Willi Zwerger pour une discussion sur le sujet.

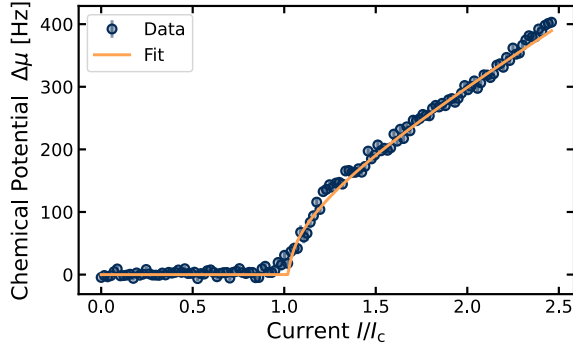


FIGURE II.15. Utilisation de la partie haute intensité de la caractéristique pour extraire la valeur de la résistance R , avec ici $R/h = 0.907(4) \cdot 10^{-3}$. Figure extraite de BERNHART, RÖHRLE et al. (2025).

Pour déterminer le paramètre manquant R , on peut analyser l'amortissement visible sur l'oscillation plasma ou alors étudier la caractéristique courant-tension pour des valeurs de I nettement supérieures à I_c , de sorte qu'on a alors $|\mu| \approx RI$, c'est-à-dire l'équivalent de la loi d'Ohm. BERNHART, RÖHRLE et al. (2025) utilisent cette seconde technique pour déterminer $R/h = 0.9 \cdot 10^{-3}$ (figure II.15). Notons que chaque point de cette caractéristique est obtenu en moyennant les résultats de 25 réalisations indépendantes de l'expérience, ce qui correspond *de facto* à la moyenne temporelle conduisant à \bar{V} pour une jonction supraconductrice.

Une fois connu ces trois paramètres, on peut calculer le paramètre de Stewart-McCumber pour une jonction atomique (équivalent du paramètre β_c défini en (II.17) pour une jonction supraconductrice)

$$\beta_c = \frac{I_c R^2 C}{\hbar} \quad (\text{II.36})$$

qui donne $\beta_c \approx 60$ pour les paramètres de BERNHART, RÖHRLE et al. (2025). En fait, pour cette valeur relativement élevée de β_c , on s'attend à une caractéristique présentant de l'hystérésis (cf. figure II.8). Cette hystérésis ne semble pas avoir été observée par les auteurs⁵, probablement

5. La caractérisation de l'hystérésis pour une jonction atomique pose par ailleurs un pro-

parce que toutes leurs expériences ont été réalisées dans le sens des I croissants, c'est-à-dire une barrière initialement immobile, puis accélérée pour atteindre sa vitesse finale.

Une caractérisation similaire a récemment été menée pour un gaz de Fermi de ${}^6\text{Li}$ dans le régime unitaire par DEL PACE, HERNÁNDEZ-RAJKOV et al. (2025) sur le même montage que celui de KWON, DEL PACE et al. (2020) décrit plus haut. Ils obtiennent une intensité critique $I_c = 180$ paires de Cooper/ms (voisine de celle montrée en figure II.11), une capacité $hC = 1.8(2)$ s et une résistance $R/h = 2.9 \cdot 10^{-3}$, ce qui conduit à $\beta_c \approx 13$ (Giacomo Roati, communication privée). Le fait que C soit notablement réduite lorsqu'on passe du gaz de Bose de ${}^{87}\text{Rb}$ (interaction faible) au gaz de Fermi de ${}^6\text{Li}$ (interaction forte) est lié à la différence de compressibilité entre les deux milieux : $\frac{\partial \mu}{\partial N}$ est beaucoup plus grand dans le cas du gaz de Fermi unitaire.

Nous montrons finalement en figure II.16 la variation des paramètres du modèle RCSJ avec la hauteur de la barrière mobile V_0 pour le gaz de Fermi unitaire étudié par KWON, DEL PACE et al. (2020). On voit que lorsqu'on augmente la hauteur de la barrière, la valeur de l'intensité critique I_c diminue et la résistance R augmente. Pour I_c , l'accord avec les prédictions de ZACCANTI & ZWERGER (2019) est très satisfaisant. Le paramètre β_c est lui aussi une fonction croissante de la hauteur de la barrière, et il atteint une valeur proche de 1000 pour la plus haute valeur de barrière utilisée.

3-3 Origines physiques de la dissipation

Les processus dissipatifs dans une jonction Josephson atomique ont fait l'objet de nombreuses études théoriques, et ils sont décrits en détail dans l'article de revue de AMICO, BOSCHER et al. (2021). La nature de ces processus dépend de la dimension d'espace de la jonction. Pour une jonction couplant deux gaz unidimensionnels, POLO, AHUFINGER et al. (2018) ont fait une analyse quantique complète du problème dans le cas d'interactions

blème de principe, dû au fait que ces jonctions sont des systèmes isolés. Si on augmente progressivement I de 0 à $2I_c$ (par exemple), que l'on reste à $2I_c$ pendant une durée τ , puis qu'on ramène I à une valeur finale $I_f < I_c$, l'énergie déposée dans le fluide sera une fonction croissante de τ , et l'état final du système sera donc une fonction à la fois de I_f et de τ . Ce problème ne se pose pas pour les jonctions supraconductrices, qui sont des systèmes ouverts avec une température maintenue constante grâce aux échanges d'énergie avec un réservoir.

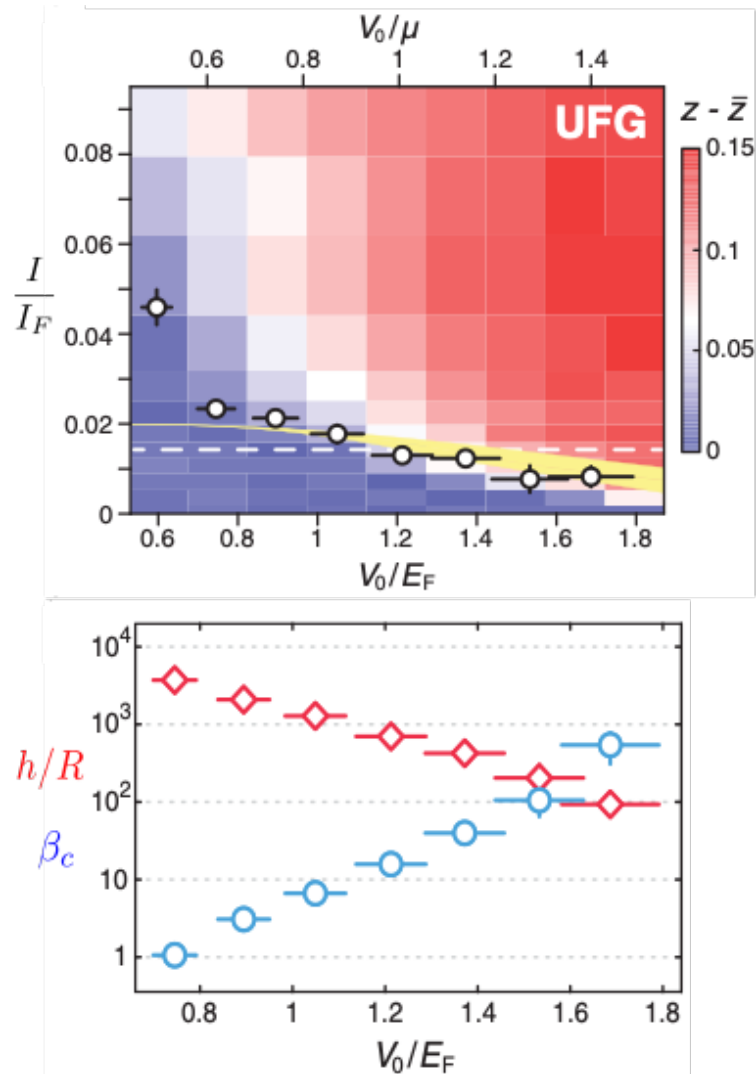


FIGURE II.16. Détermination de I_c (haut), puis de R et β_c (bas) pour un gaz de Fermi unitaire. Les unités E_F et I_F désignent les échelles obtenues pour le gaz de Fermi idéal. Figures extraites de KWON, DEL PACE *et al.* (2020).

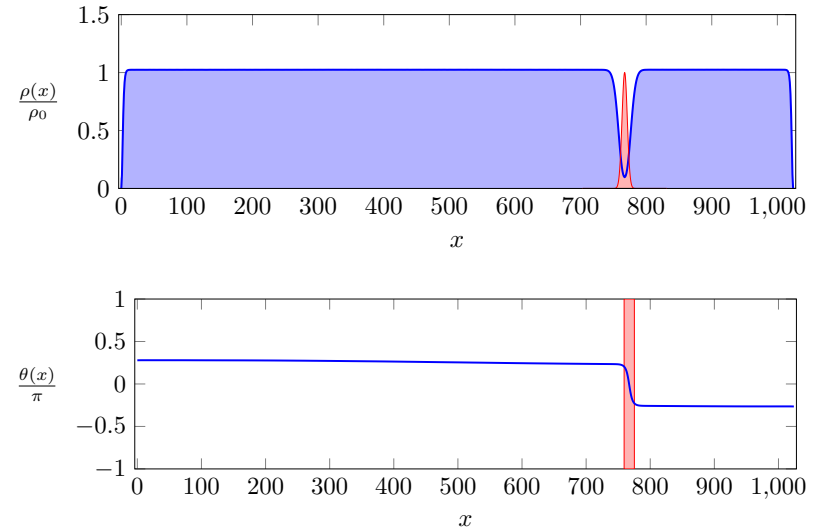


FIGURE II.17. Etat d'un gaz 1D (densité en haut, phase en bas) après le mouvement d'une barrière mobile de $L/4$ à $3L/4$, avec ici $L = 1024$. La vitesse finale de la barrière est $0.045 c_s$, où c_s est la vitesse du son. La vitesse critique pour la barrière choisie est $0.0475 c_s$.

fortes (gaz de Tonks-Girardeau). Ils ont montré que l'amortissement était causé par les fluctuations thermiques ou quantiques présentes dans le gaz sous forme de phonons de basse énergie, ainsi que par la génération de trains de solitons.

Le rôle important des solitons apparaît clairement sur les figures II.17 et II.18, obtenues en résolvant numériquement l'équation de Gross-Pitaevskii pour un gaz 1D. Les calculs sont fait sur une grille de $N = 1024$ pixels et la longueur de cicatrisation est égale à 2 pixels. Une barrière mobile parcourt le gaz de $N/4$ à $3N/4$. Sa vitesse initiale est nulle. La barrière subit d'abord un mouvement uniformément accéléré, puis se déplace à vitesse uniforme. Les durées des deux parties du mouvement sont choisies ici égales (ce paramètre n'a que peu d'influence sur le résultat final). La barrière a une hauteur égale au potentiel chimique du gaz, elle a un profil gaussien et sa demi-largeur à $1/e^2$ (waist) est 8 fois plus grande que la longueur de cicat-

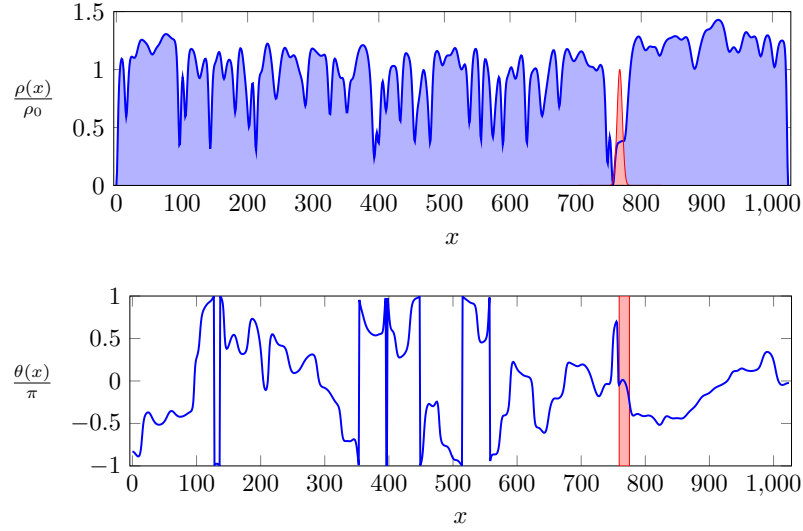


FIGURE II.18. Etat d'un gaz 1D (densité en haut, phase en bas) après le mouvement d'une barrière mobile de $L/4$ à $3L/4$, avec ici $L = 1024$. La vitesse finale de la barrière est $0.050 c_s$, où c_s est la vitesse du son. La vitesse critique pour la barrière choisie est $0.0475 c_s$.

trisation ξ . La vitesse critique dans ces conditions est $v_c \approx 0.0475 c_s$, où c_s est la vitesse du son.

Pour une vitesse $v = 0.045 c_s$, donc légèrement inférieure à v_c (figure II.17), les densités de part et d'autre de la barrière sont égales, la variation de phase au niveau de la barrière est légèrement inférieure à $\pi/2$, et la phase $\theta(x)$ de la fonction d'onde est uniforme sur chacun des domaines. Cette uniformité est assurée par le fait que comme $v \ll c_s$, les phonons générés par le mouvement de la barrière ont eu le temps de faire de nombreux allers-et-retours dans le gaz et donc d'équilibrer la distribution de phase.

Pour une vitesse $v = 0.050 c_s$, donc légèrement supérieure à v_c (figure II.18), la situation est radicalement différente. On note que la phase varie très vite dans la partie aval de la jonction, qui présente également des trous

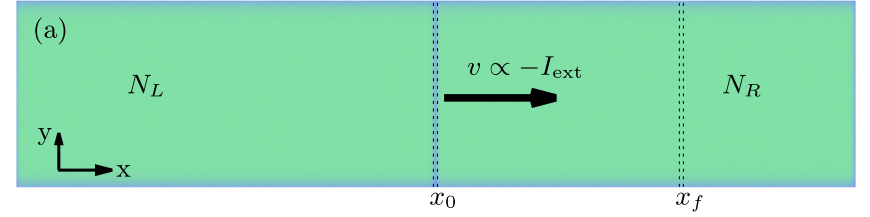


FIGURE II.19. Géométrie rectangulaire avec barrière mobile étudiée par SINGH, POLO *et al.* (2024).

de densité importants correspondant à des solitons sombres.

Quand on passe à des systèmes à deux ou trois dimensions, les mécanismes microscopiques à l'origine de la dissipation mis en évidence par les simulations numériques sont liés aux vortex, des points où la densité s'annule et autour desquels la phase a un enroulement de $\pm 2\pi$. Nous allons décrire ici quelques résultats obtenus par SINGH, POLO *et al.* (2024) dans leur étude d'un gaz de Bose à deux dimensions, piégé dans une boîte rectangulaire avec une barrière tunnel mobile (figure II.19). Des résultats comparables ont été obtenus par XHANI, NERI *et al.* (2020) et XHANI, GALANTUCCI *et al.* (2020) pour un gaz 3D cylindrique. Des signatures expérimentales liées à ces vortex ont été observées par DEL PACE, HERNÁNDEZ-RAJKOV *et al.* (2025) dans le contexte des résonance de Shapiro, que nous étudierons au chapitre 3.

La figure II.20, tiré du supplément de l'article de SINGH, POLO *et al.* (2024), présente deux résultats pour une barrière mobile : la ligne du haut correspond à une vitesse inférieure à v_c , donc la branche horizontale $\mu = 0$ de la caractéristique; la ligne inférieure est obtenue pour $v > v_c$, donc dans le régime dissipatif. Dans chaque cas, les auteurs ont tracé la densité linéique $\rho(x) = \int \rho^{(2D)}(x, y) dy$ (colonne de gauche) et la phase le long de la ligne $y = 0$ (colonne de droite).

Pour une vitesse inférieure à v_c , on voit que la densité reste la même de part et d'autre de la barrière mobile, alors qu'une différence de phase φ approximativement constante émerge après un temps de 50 ms. Pour une vitesse supérieure à v_c , une différence de densité notable apparaît, avec un surplus de densité en amont de la barrière mobile, et un déficit en aval.

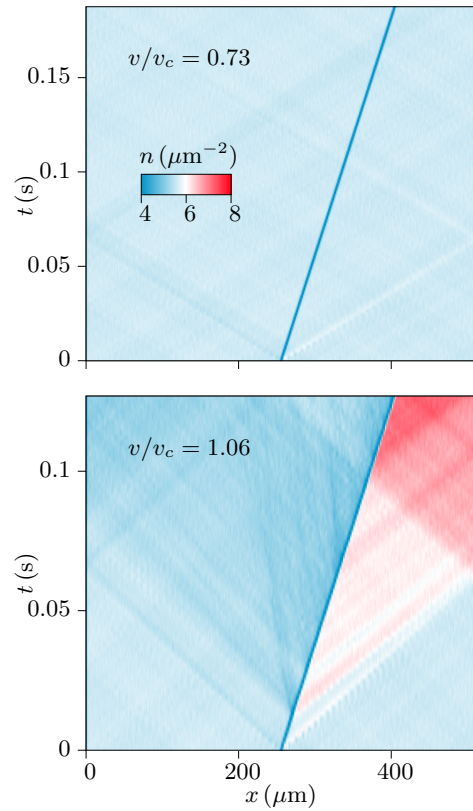


FIGURE II.20. Résolution numérique de l'équation de Gross-Pitaevskii pour le gaz 2D de la figure II.19. Ligne du haut, $v < v_c$, densité linéique $\rho(x)$ dans le régime non dissipatif. Ligne du bas, idem pour le régime dissipatif $v > v_c$. Figure extraite de SINGH, POLO et al. (2024) (supplément).

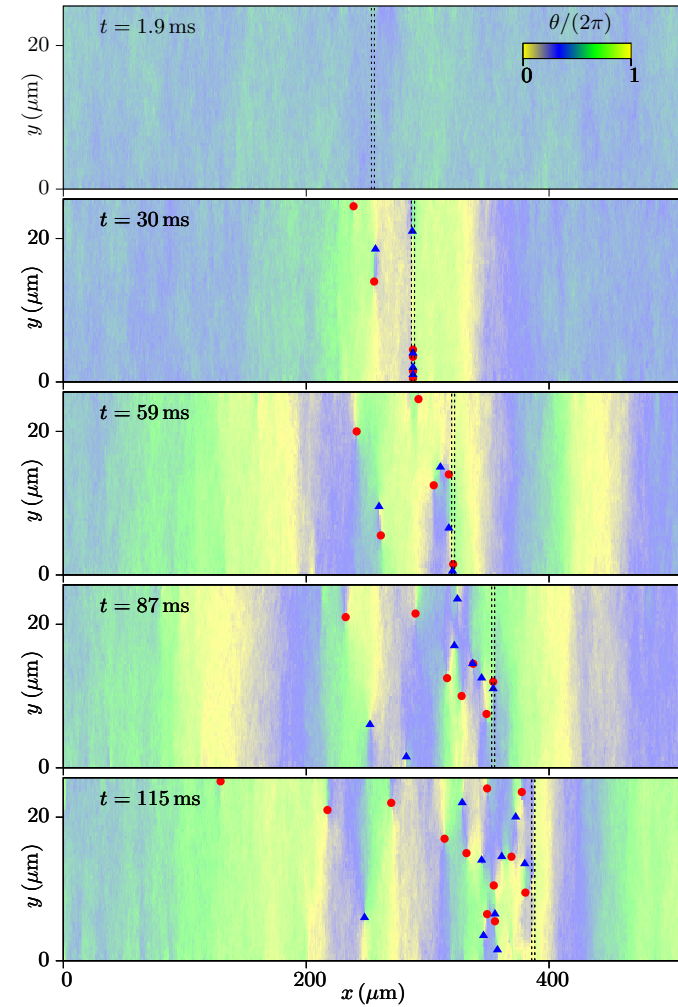


FIGURE II.21. Résultats numériques dans la même configuration que les figures II.19 et II.20, avec $v/v_c = 1.06$. On a tracé ici le profil de phase dans le plan xy à différents instants. Les triangles bleus et les points rouges marquent la position de vortex d'enroulement $+2\pi$ et -2π . Figure extraite de SINGH, POLO et al. (2024).

La figure II.21 montre l'identification de l'ensemble des vortex présents à différents instants dans le gaz dans le régime dissipatif $v/v_c = 1.06$. Les vortex sont créés par paires avec des circulations opposées dans la région de la barrière, zone de faible densité, et ces paires se séparent ensuite. On notera que dans ce régime dissipatif, il devient délicat de définir la phase $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$ car les distributions de phase de part et d'autre de la jonction présentent des singularités aux emplacements de ces vortex. La définition de $\Delta\mu = \mu_a - \mu_b$ reste en revanche possible, à partir de la densité linéique $\rho(x) = \int \rho^{(2D)}(x, y) dy$.

Notons que dans un système tri-dimensionnel, la nucléation de paires de vortex mentionnées ci-dessus et à l'origine de la dissipation est remplacée par la nucléation d'anneaux de vortécité [voir par exemple XHANI, NERI et al. (2020)]. Remarquons par ailleurs que nous sommes limités ici aux mécanismes de dissipation à température nulle. Le rôle de la fraction thermique dans l'apparition d'un écoulement résistif est discuté par JENDRZEJEWSKI, ECKEL et al. (2014).

4 L'effet tunnel macroscopique

4-1 États quantiques macroscopiques

Depuis le célèbre exemple paradoxal de Schrödinger considérant un chat dans une superposition de "l'état vivant" et de "l'état mort", une recherche très active a été menée sur l'étude de systèmes macroscopiques – ou au moins mésoscopiques – préparés dans une telle superposition cohérente d'états antinomiques. Les jonctions Josephson sont vite apparues comme des candidats remarquables pour explorer cette frontière entre le monde classique et le monde quantique. A.J. Leggett a en particulier exploré plusieurs voies possibles de tests pouvant être menés avec ces jonctions, voir par exemple LEGGETT (1978) et LEGGETT (1980).

Une version simple d'un état quantique macroscopique concerne un système composé de N particules, pouvant chacune se trouver dans deux états microscopiques possibles a et b , décrits par les fonctions d'onde à un

corps $\psi_a(x)$ et $\psi_b(x)$. Un état du système à N corps est par exemple :

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \psi_a(x_1) \cdots \psi_a(x_N), \quad (\text{II.37})$$

c'est-à-dire un condensat de Bose-Einstein avec chaque particule dans l'état a . On peut bien sûr considérer l'état obtenu avec chaque particule dans l'état b :

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \psi_b(x_1) \cdots \psi_b(x_N), \quad (\text{II.38})$$

ou encore l'état où chaque particule est dans un état superposé $\alpha\psi_a(x) + \beta\psi_b(x)$, avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$:

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = [\alpha\psi_a(x_1) + \beta\psi_b(x_1)] \cdots [\alpha\psi_a(x_N) + \beta\psi_b(x_N)]. \quad (\text{II.39})$$

Aucun des trois états à N corps que nous venons d'écrire ne correspond à un état "chat de Schrödinger". Ils peuvent décrire des phénomènes quantiques macroscopiques (si $N \gg 1$), comme des condensats de Bose-Einstein spineurs, mais ils restent des états factorisés. Par exemple, pour l'état (II.39), la détection de la particule 1 dans l'état a ou dans l'état b n'apporte aucune renseignement sur ce que pourrait donner une mesure ultérieure de l'état d'une autre particule.

Pour notre exemple d'un espace de Hilbert de dimension 2 pour chaque particule, un état "chat de Schrödinger" correspond par exemple à :

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \alpha\psi_a(x_1) \cdots \psi_a(x_N) + \beta\psi_b(x_1) \cdots \psi_b(x_N) \quad (\text{II.40})$$

avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Cet état présente des corrélations fortes : la mesure de la particule 1 dans l'état a assure que l'on trouvera toutes les autres particules dans le même état si on effectue une mesure ultérieure sur elles. Par ailleurs, il s'agit d'une superposition cohérente, dans le sens où on doit être capable de distinguer expérimentalement cet état avec les coefficients (α, β) de l'état qu'on obtiendrait en prenant par exemple $(\alpha, -\beta)$ ou $(\alpha, i\beta)$. Ce deuxième point est essentiel pour caractériser la cohérence de cet état et le distinguer du simple mélange statistique de (II.37) et (II.38).

LEGGETT (1980) discute la possibilité d'atteindre un tel état à partir d'un effet tunnel faisant basculer les particules individuelles entre a et b , en s'intéressant plus particulièrement à un anneau supraconducteur comportant une jonction Josephson. Le point remarquable dans ce cas est que l'état du système peut être décrit avec une seule variable, par exemple le flux traversant le circuit. Toutefois, Leggett conclut à la difficulté pratique de cette

expérience⁶, et s'intéresse alors à l'effet tunnel lui-même :

"If quantum coherence is problematic from an experimental point of view, what of quantum tunnelling by itself? Here the prospects seem a great deal more favourable."

L'obstacle à l'observation de l'effet tunnel pour une variable macroscopique est la dissipation, qui trouve son origine dans le couplage du système avec son environnement, mais CALDEIRA & LEGGETT (1981) ont montré que les circuits à base de jonctions Josephson possédaient les qualités requises pour que ce phénomène reste observable. La balle passait donc dans le camp des expérimentateurs.

4-2 Jonction au voisinage du courant critique

La recherche d'un effet tunnel macroscopique avec une jonction Josephson se fait à partir du potentiel en "planche à laver inclinée" que nous avons étudié en § 1. Le principe consiste à choisir $I < I_c$ et à prendre l'état initial de la jonction dans l'état de tension moyenne nulle ($\bar{V} = 0$) correspondant à un minimum local de

$$U(\varphi) = -I_c \cos \varphi - I\varphi, \quad (\text{II.41})$$

puis à mesurer le temps caractéristique pour que la particule fictive s'échappe de ce puits de potentiel, la jonction passant alors dans un état $\bar{V} \neq 0$.

En pratique, on choisit I proche de I_c pour que les puits de potentiel de $U(\varphi)$ soient peu profonds (figure II.22). Les extrema (minima et maxima) de $U(\varphi)$ sont alors tous deux proches de $\pi/2$ (modulo 2π).

Posons $\varphi = \frac{\pi}{2} + x$ pour faire un développement du potentiel en puissances de x ; on trouve, à l'ordre 3 inclus en x :

$$\begin{aligned} U(x) &= I_c \sin x - I \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \\ &\approx -\frac{I\pi}{2} + (I_c - I)x - \frac{I_c}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^5). \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

6. Ces états sont désormais réalisés et exploités dans les dispositifs utilisant des qubits de flux. L'information quantique est alors encodée dans le sens du courant circulant dans une boucle supraconductrice contenant des jonctions Josephson (chapitre 6).

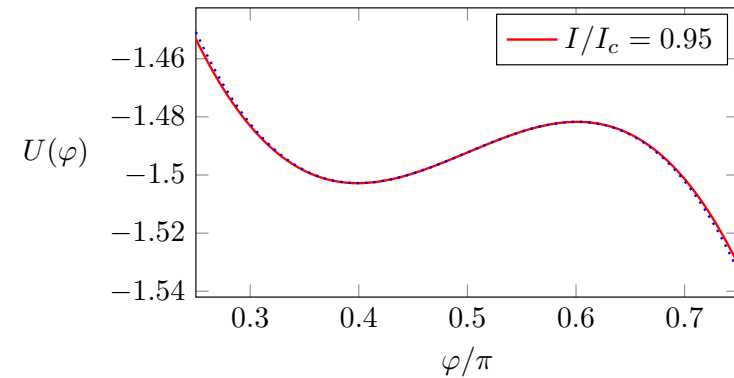


FIGURE II.22. Le potentiel $U(\varphi)$ en trait plein et son approximation cubique (II.42) en pointillés pour $I = 0.95 I_c$.

La force agissant sur la "particule" est

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -(I_c - I) + \frac{I_c}{2}x^2 \quad (\text{II.43})$$

d'où la position des points stationnaires

$$x_{\pm} \approx \pm \sqrt{2(1-s)} \quad \text{pour } s \equiv \frac{I}{I_c} \approx 1. \quad (\text{II.44})$$

Les signes + et - correspondent respectivement au maximum et au minimum local de U . La hauteur de la barrière à franchir pour s'échapper du minimum local est

$$\Delta U(I) = U(x_+) - U(x_-) \approx \frac{4\sqrt{2}}{3} I_c (1-s)^{3/2} \quad \text{pour } s \approx 1 \quad (\text{II.45})$$

et la fréquence d'oscillation $\omega_p(I)$ autour du minimum local, calculée à partir de la courbure du potentiel d^2U/dx^2 en ce point, est reliée à la fréquence plasma calculée précédemment, $\omega_p(0)$, par

$$\frac{\omega_p(I)}{\omega_p(0)} \approx [2(1-s)]^{1/4} \quad \text{pour } s \approx 1. \quad (\text{II.46})$$

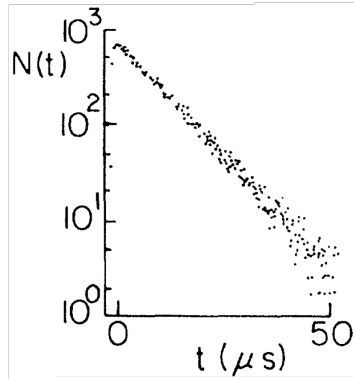


FIGURE II.23. Distribution exponentielle des événements de bascule de la jonction de l'état de tension nulle ("particule" piégée dans le minimum local de $U(\varphi)$) vers l'état de tension non nulle. Figure extraite de DEVORET, MARTINIS et al. (1984).

4-3 Activation thermique de la barrière

Avant d'aborder le régime quantique avec l'observation de l'effet tunnel macroscopique, DEVORET, MARTINIS et al. (1984) se sont intéressés à la possibilité pour la particule fictive de coordonnée φ de sortir du puits de potentiel centré en $\pi/2 + x_-$ du fait des fluctuations thermiques. Le taux avec lequel la particule s'échappe est donné par une formule de type "loi d'Arrhenius" :

$$\Gamma(I, T) = \frac{\omega_p(I)}{2\pi} e^{-\Delta U(I)/k_B T} \quad (\text{II.47})$$

à des corrections près pour le préfacteur devant l'exponentielle, sans importance ici.

Le nombre de particules " survivantes " après une durée t est montrée en figure II.23. Comme attendu, c'est une loi exponentielle dont on déduit le taux $\Gamma(I, T)$. En pratique, chaque mesure de Γ requiert 10^5 événements.

Cette expérience peut être répétée pour différentes intensités I , le taux Γ devenant de plus en plus grand quand I s'approche de I_c puisque la

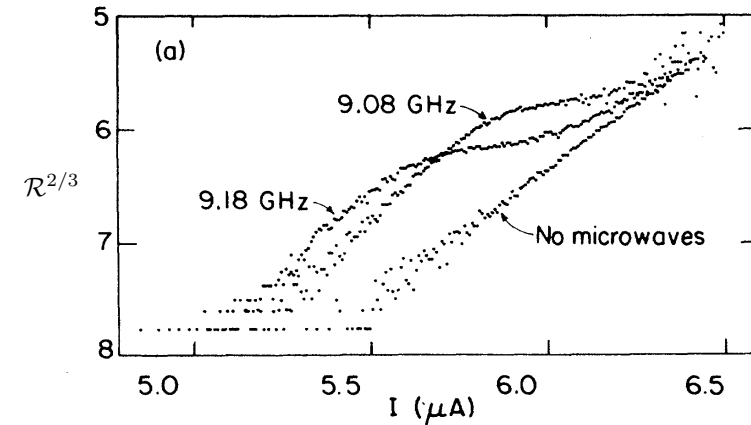


FIGURE II.24. Variation de $\mathcal{R}^{2/3}$ (où \mathcal{R} est défini en (II.48)) en fonction de I . La loi linéaire trouvée en absence de microonde permet de déduire la température du système. Noter l'inversion de l'axe des ordonnées. Figure extraite de DEVORET, MARTINIS et al. (1984).

barrière ΔU devient plus faible. On attend la loi

$$\mathcal{R} \equiv \ln \left(\frac{\Gamma(I, T)}{\omega_p(I)/2\pi} \right) \approx \frac{-\Delta U(I)}{k_B T} \propto \frac{(I_c - I)^{3/2}}{T}. \quad (\text{II.48})$$

Pour vérifier cette loi, DEVORET, MARTINIS et al. (1984) ont tracé la quantité $\mathcal{R}^{2/3}$ en fonction de I et ils ont effectivement observé une variation linéaire, dont on peut déduire la température du système (figure II.24). Le résultat trouvé, 4.2(1) K, est en parfait accord avec la température mesurée par ailleurs, ce qui constitue une validation importante du modèle. On déduit également de cette mesure la valeur de I_c avec une très bonne précision, en l'occurrence $I_c = 8.77(5) \mu\text{A}$.

DEVORET, MARTINIS et al. (1984) ont ensuite refait ces mesures du taux Γ en présence d'une microonde de fréquence voisine des $\omega_p(I)$ attendues. Ils ont observé une activation résonante (figure II.24) : quand l'intensité I est telle que $\omega_p(I) = \omega_{\text{microonde}}$, la particule fictive est éjectée beaucoup plus rapidement du puits de potentiel.

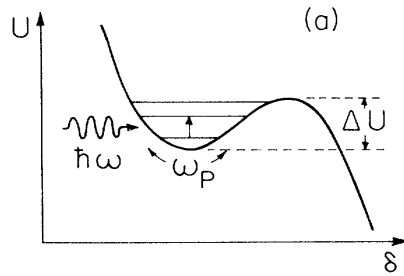


FIGURE II.25. Structure de niveaux typique pour les jonctions utilisées par le groupe de Berkeley en 1985. Figure extraite de MARTINIS, DEVORET et al. (1985).

4-4 Niveaux quantifiés dans le potentiel $U(\varphi)$

Comment nous l'avons mentionné au chapitre précédent pour le circuit LC , le mouvement de la particule fictive de coordonnée φ dans le puits de potentiel $U(\varphi)$ peut être traité quantiquement. Si la fréquence d'oscillation au fond du puits $\omega_p(I)$ est telle que $\hbar\omega_p \ll \Delta U$ et si la température est assez grande ($\hbar\omega_p \ll k_B T$), cette quantification est peu utile car les effets quantiques sont difficilement détectables. En revanche, si on se place dans une situation où $\Delta U/\hbar\omega_p$ est proche de 1 et $k_B T \ll \hbar\omega_p$, la quantification devient alors essentielle pour décrire le système. C'est précisément cette situation que le groupe de Berkeley a abordé dans ses publications suivantes : DEVORET, MARTINIS et al. (1985) et MARTINIS, DEVORET et al. (1985).

Ces expériences sont faites à beaucoup plus basse température que celles décrites en §4-3, autour de 20 mK (au lieu de 4 K). Par ailleurs, on utilise des courants I très proches de I_c , typiquement $|I - I_c| \sim 0.01 I_c$. Cela permet d'atteindre un régime où seuls deux ou trois états liés sont attendus dans la barrière (figure II.25). En fait, ces états ne sont que quasi-liés en raison de la décroissance par effet tunnel que nous discuterons dans le paragraphe suivant. La transition de l'état fondamental vers un des états excités peut alors se détecter par une augmentation du taux de décroissance. Il faut pour cela que la largeur des niveaux associée à cette décroissance

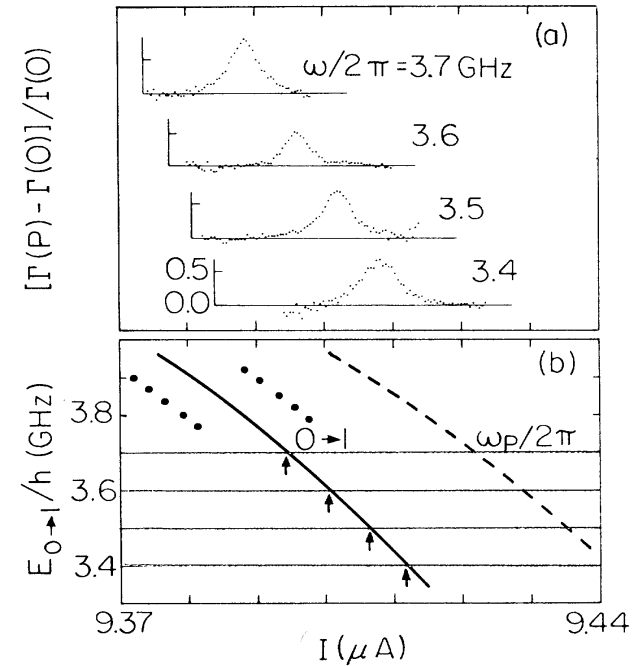


FIGURE II.26. Augmentation du taux de décroissance dans le puits de la figure II.25, induite par une microonde, quand on varie l'intensité électrique I traversant la jonction Josephson. Les résonances observées correspondent à la transition $n = 0 \rightarrow n = 1$. Figure extraite de MARTINIS, DEVORET et al. (1985).

reste faible devant leur écart, on vérifiera sur l'équation (II.50) introduite un peu plus loin que cette inégalité est bien vérifiée.

L'expérience commence par une calibration précise des paramètres de la jonction dans le cadre du modèle RCSJ. Pour une des deux jonctions utilisées, MARTINIS, DEVORET et al. (1985) trouvent $I_c = 9.489(7) \mu\text{A}$ et $C = 6.35(40) \text{pF}$, avec un facteur de qualité $Q = 30(15)$. La microonde est ajustée pour favoriser la transition du niveau fondamental $n = 0$ vers le premier niveau excité $n = 1$. La figure II.26 montre les résultats obtenus, avec la variation attendue de la fréquence de cette transition avec l'intensité I . Notons que cette fréquence de transition mesurée est très signifi-

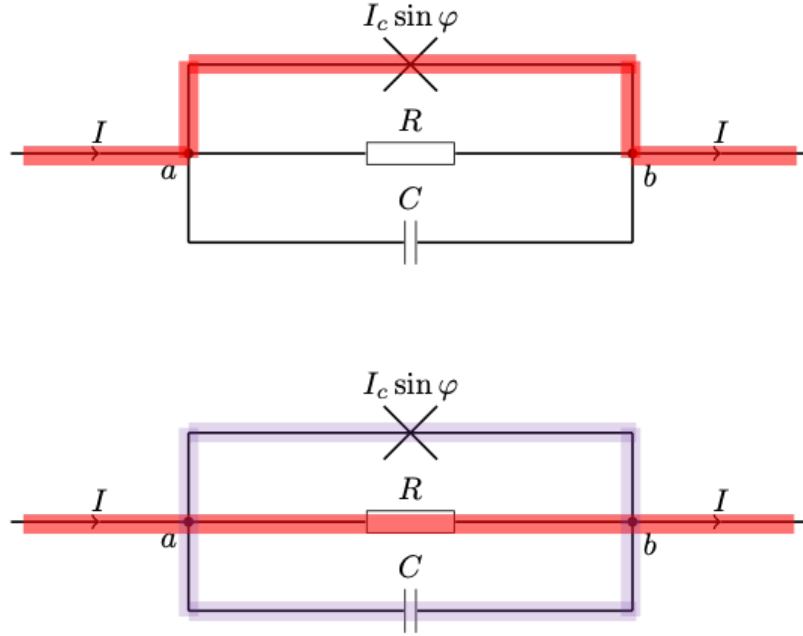


FIGURE II.27. Les deux états macroscopiquement différents de la jonction pour I légèrement inférieure à I_c . L'effet tunnel permet de passer de l'état du haut, pour lequel $\dot{\varphi} \approx 0$ et donc $\bar{V} = 0$, vers l'état représenté en bas, pour lequel la particule fictive roule le long de la planche à laver sans s'arrêter ($\bar{V} \neq 0$).

cativement différente de la fréquence plasma $\omega_p(I)$, ce qui constitue une signature claire de la quantification des niveaux dans ce puits non harmonique.

MARTINIS, DEVORET et al. (1985) ont également étudié une autre jonction, de surface 8 fois plus grande, pour laquelle ils ont mis en évidence les transitions $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 2$ et $2 \rightarrow 3$.

4-5 Observation de l'effet tunnel macroscopique

Dans l'article de DEVORET, MARTINIS et al. (1985) publié quasi-simultanément avec celui décrit au paragraphe précédent, le groupe de Berkeley a étudié de façon précise le taux Γ avec lequel la particule fictive s'échappe du puits de potentiel $U(\varphi)$, ce qui correspond la bascule entre les deux états de la jonction représentés en figure II.27. Pour un mécanisme activé thermiquement, nous avons déjà donné le taux attendu

$$\Gamma_{\text{therm.}} \approx \frac{\omega_p}{2\pi} e^{-\Delta U/k_B T}. \quad (\text{II.49})$$

Si ce mécanisme était le seul présent, on s'attendrait à ce que Γ s'annule quand T tend vers 0. Mais la possibilité pour la particule de s'échapper du puits par effet tunnel entraîne que ce taux tend vers une valeur finie non nulle dans la limite $T \rightarrow 0$.

Le calcul précis de cette limite a été fait par CALDEIRA & LEGGETT (1981) et nous contenterons de donner ici la structure du résultat :

$$\Gamma_{\text{quant.}} \approx a_q \frac{\omega_p}{2\pi} e^{-b_q \Delta U/\hbar\omega_p}. \quad (\text{II.50})$$

avec $a_q \sim 75$ et $b_q \sim 7$ pour le système considéré ici.

DEVORET, MARTINIS et al. (1985) ont effectué une mesure du coefficient $\Gamma(I, T)$ pour une gamme de températures comprise entre 20 et 1000 mK. Pour chaque température, ils ont représenté leurs données pour les différentes intensités I par une loi d'Arrhenius en $\exp(-\Delta U/k_B T_{\text{esc}})$, où la température T_{esc} est un paramètre ajustable. Ceci nécessite bien sûr une bonne connaissance des paramètres de la jonction pour relier ΔU et I .

À haute température, on s'attend à ce que T_{esc} coïncide avec la température réelle. À basse température en revanche, les effets quantiques deviennent dominants et le passage par effet tunnel devient plus probable que l'activation thermique. On s'attend alors à ce que T_{esc} tende vers une valeur directement reliée à ω_p . Comme on le voit sur la figure II.28, c'est précisément ce qui est trouvé expérimentalement à très basse température. On trouve $T_{\text{esc}} = 37(4)$ mK, à comparer à la prédiction $T_{\text{esc}} = 36 \pm 1.4$ mK obtenue à partir du modèle de CALDEIRA & LEGGETT (1981).

Notons pour terminer que la modélisation que nous venons de présenter n'a pas nécessité d'un traitement quantique élaboré de la jonction.

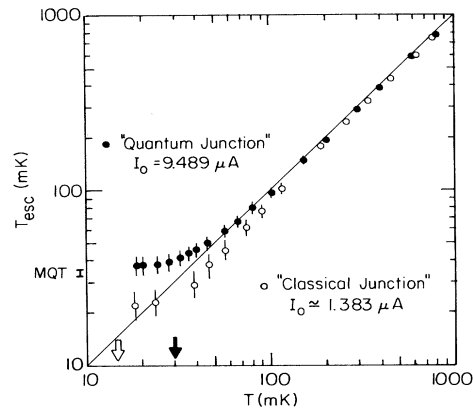


FIGURE II.28. Variation du paramètre ajustable T_{esc} en fonction de la température T du système. Le fait que T_{esc} ne tende pas vers 0 quand $T \rightarrow 0$ est une signature directe de l'effet tunnel macroscopique pour la variable φ . Figure extraite de DEVORET, MARTINIS *et al.* (1985)

Le seul ingrédient que nous avons utilisé est le suivant : partant d'un oscillateur classique unidimensionnel de pulsation ω_p , on aboutit pour son homologue quantique à des niveaux d'énergie $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_p$. Nous proposons aux chapitres 5 et 6 une approche quantique plus complète, en nous basant sur la relation de commutation entrevue au chapitre 1 entre l'opérateur phase et l'opérateur nombre de particules. Nous retrouverons bien sûr ce spectre en $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_p$ et nous pourrons de plus caractériser la forme des états propres associés.

Chapitre III

L'effet Josephson alternatif et les résonances de Shapiro

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes concentrés sur le régime stationnaire des jonctions Josephson et sur leurs petites oscillations autour de la position d'équilibre, appelées oscillations plasmas. Nous allons maintenant passer à des situations où l'évolution temporelle est plus riche, soit en raison d'un déséquilibre initial de la jonction, soit grâce à une excitation modulée dans le temps.

Ces phénomènes dépendant explicitement du temps avaient été prédits¹ dans l'article initial de JOSEPHSON (1962). En particulier, si on applique un courant modulé à la fréquence ω sur la jonction, Josephson avait mentionné la possibilité d'observer des plateaux dans la caractéristique courant tension (I, \bar{V}) pour des valeurs quantifiées $2e\bar{V} = n\hbar\omega$, où n est un nombre entier. Ce phénomène a été observé expérimentalement par SHAPIRO (1963), et ces résonances portent désormais son nom.

Cette possibilité de relier un voltage à une fréquence est essentielle, car elle a ouvert la voie à des mesures des grandeurs électriques beaucoup plus précises que ceux qui existaient à l'époque. L'effet Josephson a ainsi joué un rôle central dans le nouveau système international d'unités, quand il s'est agi de fixer la valeur de la charge élémentaire et de la constante de Planck. ANDERSON (1970) fait un parallèle très pertinent entre le rôle de l'effet Josephson pour les mesures électriques et les mesures d'interférométrie laser pour mesurer des distances.

1. ANDERSON (1970) écrit qu'il avait consulté l'avocat en charge des brevets aux Bell Labs et sa réponse avait été que "Josephson's paper was so complete that no one else was ever going to be very successful in patenting any substantial aspect of the Josephson effect".

Avant d'aborder les résonances de Shapiro, nous allons commencer par un effet plus simple, l'effet Josephson alternatif : il s'agit du courant oscillant qui apparaît quand on impose une différence de potentiel entre les bornes de la jonction (il s'agit du potentiel électrique pour les jonctions supraconductrices, et de la pression ou du potentiel chimique pour les jonctions atomiques).

Nous passerons ensuite aux résonances de Shapiro, dont nous rendrons compte dans le cadre du modèle RCSJ (*resistively capacitance shunted junction*) que nous avons déjà abondamment utilisé dans les chapitres précédents. Nous décrirons succinctement comment ces résonances sont utilisées pour mesurer avec une grande précision des différences de potentiel électrique.

Nous aborderons enfin des réalisations expérimentales qui ont mis en évidence ces résonances dans des jonctions atomiques, tout d'abord avec de l'hélium 3 liquide superfluide puis, beaucoup plus récemment, avec des jonctions atomiques utilisant l'idée de barrière mobile présentée au chapitre 2.

1 L'effet Josephson alternatif

1-1 Le principe de l'effet

L'effet Josephson alternatif est une conséquence directe des deux relations de Josephson pour une jonction idéale :

$$\begin{cases} I = I_c \sin \varphi \\ \hbar \dot{\varphi} = 2eV \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Si on applique aux bornes de la jonction une tension continue V_0 , la phase va défiler uniformément :

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{2eV_0}{\hbar} t, \quad (\text{III.2})$$

ce qui va conduire à un courant alternatif dans la jonction :

$$I(t) = I_c \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (\text{III.3})$$

avec

$$\boxed{\hbar\omega = 2eV_0} \quad (\text{III.4})$$

Dans la mesure où l'on impose la tension aux bornes de la jonction (et pas le courant comme au chapitre précédent), il n'est pas utile de revenir au modèle RCSJ représenté sur la figure III.1 pour traiter ce problème. Plus précisément, chacune des trois composantes de ce modèle se comporte de manière indépendante :

- la jonction idéale donne naissance au courant alternatif donné ci-dessus;
- la résistance est traversée par le courant continu V_0/R ;
- la capacité acquiert la charge $q = CV_0$.

Nous pouvons donc nous concentrer sur la jonction "idéale" dans ce qui suit.

Il est important de bien distinguer cet effet Josephson alternatif des oscillations plasma que nous avons décrites dans les chapitres précédents. Les oscillations plasma se produisent par exemple pour une jonction en

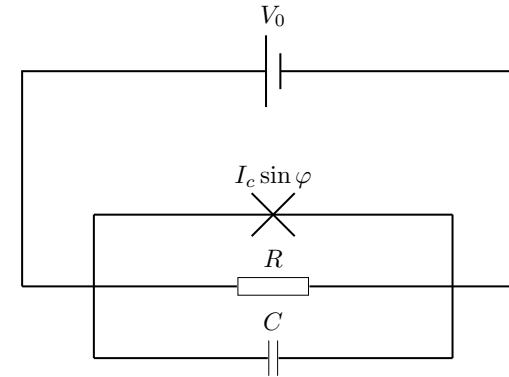


FIGURE III.1. Jonction Josephson dans le modèle RCSJ, connectée ici à un générateur de tension constante V_0 .

circuit ouvert ($I = 0$) et peuvent être rapprochées des oscillations d'un circuit LC , où l'inductance L est reliée à I_c par $L = \hbar/2eI_c$ (cf. chapitre 1). Rappelons que dans la représentation "mécanique" de la jonction par un pendule pesant, la phase φ est associée à l'angle du pendule par rapport à la verticale. Les oscillations plasma sont un mouvement libre de faible amplitude autour de la position d'équilibre. L'effet Josephson alternatif est quant à lui un mouvement de rotation uniforme à la fréquence angulaire ω , imposé de l'extérieur par le générateur de tension V_0 (figure III.2).

1-2 Expériences sur l'hélium

Nous n'allons pas passer ici en revue la littérature sur l'observation de l'effet Josephson alternatif sur des jonctions supraconductrices, et nous renvoyons les personnes intéressées vers les ouvrages classiques comme BARONE & PATERNO (1982) et TINKHAM (2004). Nous allons plutôt nous concentrer sur des réalisations plus récentes sur des atomes, en commençant par l'hélium ^3He superfluide.

Les premières expériences dans cette ligne de recherche ont été menées par AVENEL & VAROQUAUX (1988). Nous allons nous décrire ici sur une

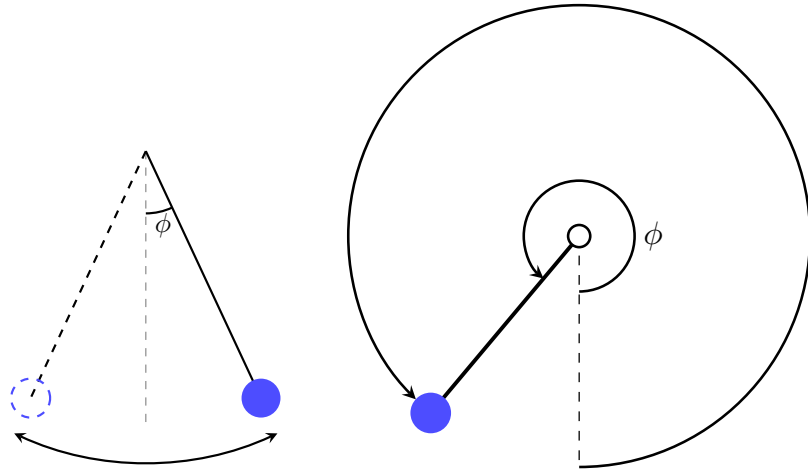


FIGURE III.2. Analogie mécanique de la jonction Josephson. Les oscillations plasma correspondent au mouvement de faible amplitude autour de la position d'équilibre pour une jonction en circuit ouvert ($I = 0$). L'effet Josephson alternatif correspond au mouvement de rotation à la fréquence angulaire $\omega = 2eV_0/\hbar$ pour une jonction connectée à un générateur de tension V_0 .

expérience plus récente faite à Berkeley par PEREVERZEV, LOSHAK et al. (1997). Dans ce système, la jonction Josephson est constituée par une membrane rigide de nitrure de silicium percée par une série de $65 \times 65 = 4225$ trous, chacun de diamètre 100 nm (figure III.3). De part et d'autre de cette membrane rigide se trouvent deux bains de ^3He dans leur état superfluide. L'équivalent des paires de Cooper de l'état supraconducteur sont ici des paires d'atomes d'hélium, de masse $m_{\text{paire}} = 2m$.

Dans cette expérience, le rôle du générateur de tension V_0 est joué par une électrode qui déforme une paroi souple, ce qui a pour effet de créer une différence de pression ΔP entre les deux côtés de la membrane rigide percée. On enregistre ensuite le mouvement oscillant de la paroi souple, ce qui permet de remonter au courant de particules qui traverse la membrane rigide percée.

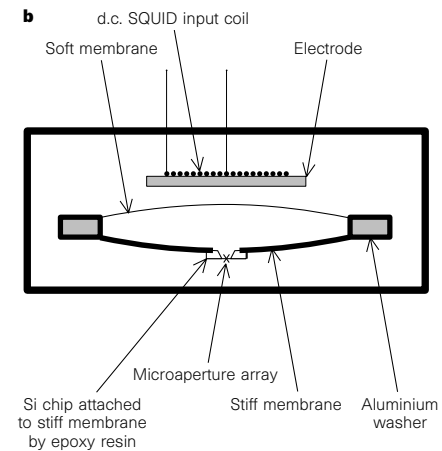
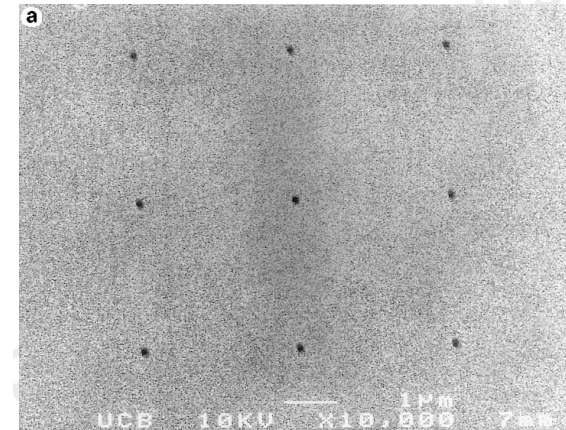


FIGURE III.3. Dispositif d'étude de l'effet Josephson alternatif dans le liquide ^3He superfluide. Figure extraite de PEREVERZEV, LOSHAK et al. (1997).

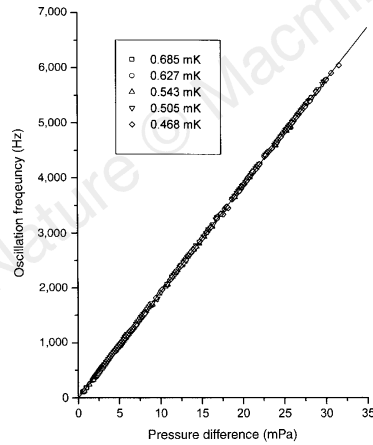


FIGURE III.4. Lien entre fréquence d'oscillation et différence de pression appliquée dans l'expérience d'effet Josephson alternatif sur ^3He superfluide. Figure extraite de PEREVERZEV, LOSHAK et al. (1997).

La transposition du résultat $\hbar\omega = 2eV_0$ s'écrit ici

$$\hbar\omega = \frac{m_{\text{paire}}}{\rho} \Delta P \quad (\text{III.5})$$

où $\rho = 82 \text{ kg/m}^3$ désigne la masse volumique du liquide. L'expérience confirme parfaitement ce résultat (figure III.4). On trouve bien une relation linéaire entre ω et ΔP avec une pente de $194(15) \text{ kHz/Pa}$, en accord avec la valeur attendue théoriquement 183.7 kHz/Pa .

Notons que la même année, le groupe de Berkeley a publié un autre article dans lequel il teste, avec le même dispositif, la relation courant-phase à la base de l'effet Josephson (BACKHAUS, PEREVERZEV et al. 1997). Par ailleurs, après ces expériences sur ^3He , l'effet Josephson a ensuite été observé sur l'hélium 4 (SUKHATME, MUKHARSKY et al. 2001).

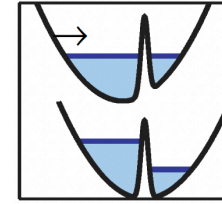


FIGURE III.5. Procédure utilisée pour induire l'effet Josephson alternatif pour un gaz d'atomes de rubidium confinés dans un double puits. Figure extraite de LEVY, LAHOUD et al. (2007).

1-3 Gaz dilué et auto-piégeage

La première mise en évidence de l'effet Josephson alternatif avec un gaz d'atomes froids a été faite par LEVY, LAHOUD et al. (2007). Les auteurs sont partis d'un gaz de 10^5 atomes de rubidium, confiné dans un piège harmonique allongé (fréquence longitudinale 26 Hz , fréquence transverse 224 Hz). Ce gaz est coupé en deux par une fine nappe de lumière de largeur totale à $1/e^2$ de $1.4 \mu\text{m}$.

Le double puits est initialement assez fortement dissymétrique et le gaz est préparé dans son état fondamental (figure III.5). Pour initier l'effet Josephson alternatif, on ramène la barrière au centre du piège en un temps court (5 à 10 ms), ce qui crée une différence de potentiel chimique initiale $\overline{\Delta\mu} = \bar{\mu}_a - \bar{\mu}_b$ importante entre les deux côtés de la barrière. Comme nous allons le voir, il est essentiel que $|\overline{\Delta\mu}|/\hbar$ soit grand devant la fréquence plasma ω_p pour que l'oscillation des nombres d'atomes $N_{a,b}$ qui résulte du déplacement de la barrière puisse s'interpréter en terme d'effet Josephson alternatif.

Pour analyser l'évolution du gaz après le déplacement de la barrière, revenons aux équations de Josephson pour une jonction atomique que nous avons établies au chapitre 1. Nous introduisons la phase relative $\varphi(t) = \varphi_a(t) - \varphi_b(t)$ et nous prenons ici $\gamma(n) \approx 1$ car la variation de ce coefficient joue un rôle négligeable dans ce qui suit. Les équations établies

au chapitre 1 s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \hbar \dot{n} = E_J \sin \varphi \\ \hbar \dot{\varphi} = -\overline{\Delta\mu} - nE_C \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Les nombres d'atomes de part et d'autre de la barrière à l'instant t sont notés

$$N_a(t) = \bar{N}_a + n(t) \quad N_b(t) = \bar{N}_b - n(t), \quad (\text{III.7})$$

où $\bar{N}_{a,b}$ désignent les nombres d'atomes juste après le déplacement de la barrière (instant $t = 0$). Les énergies E_J et E_C désignent comme précédemment le couplage Josephson et l'énergie de charge de la barrière, et on rappelle la valeur de la fréquence plasma (petites oscillations autour de la position d'équilibre $N_a = N_b = N/2$) : $\hbar\omega_p = \sqrt{E_C E_J}$.

Supposons que l'amplitude de l'oscillation de $n(t)$ soit suffisamment faible pour que le terme nE_C dans la seconde relation de Josephson reste petit devant $\overline{\Delta\mu}$, hypothèse que nous vérifierons à la fin du calcul. Le terme $\overline{\Delta\mu}$ peut alors jouer le rôle de la tension constante de l'effet Josephson alternatif d'une jonction supraconductrice. On intègre cette seconde relation : $\varphi(t) = -\overline{\Delta\mu} t/\hbar$, et on reporte le résultat dans la première relation de Josephson pour en déduire l'évolution de n :

$$n(t) = -\frac{E_J}{\overline{\Delta\mu}} [1 - \cos(\overline{\Delta\mu} t/\hbar)]. \quad (\text{III.8})$$

La valeur maximale de $|n|$ est donc $2E_J/|\overline{\Delta\mu}|$ et il reste à vérifier que l'hypothèse de départ, $|nE_C| \ll |\overline{\Delta\mu}|$, est valable à tout temps t . Cela impose $2E_J E_C \ll \overline{\Delta\mu}^2$ ou encore $\hbar\omega_p \ll |\overline{\Delta\mu}|$, comme annoncé. La fréquence plasma est généralement petite² devant le potentiel chimique μ , de sorte qu'il est tout à fait réaliste de satisfaire cette inégalité.

On déduit de l'analyse que nous venons de mener qu'en absence de processus de dissipation, le déséquilibre initial de population n'évolue que très peu. En particulier, bien que la barrière soit positionnée de manière symétrique à la fin de la phase de préparation, le gaz n'atteint pas le point

2. Dans le régime Josephson $\frac{E_J}{N^2} \ll E_C$, on trouve pour la fréquence plasma l'inégalité $\hbar\omega_p = \sqrt{E_C E_J} \ll NE_C$. Or nous avons trouvé pour l'énergie de charge l'estimation $E_C \sim \frac{\mu}{N}$, d'où l'inégalité annoncé $\hbar\omega_p \ll \mu$.

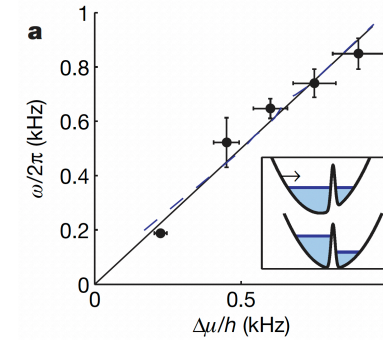


FIGURE III.6. Fréquence $\omega/2\pi$ de l'oscillation de $N_a - N_b$ en fonction de la différence de potentiel chimique $\Delta\mu$. Le potentiel chimique de chacun des gaz est déterminé à partir de leur taille. Figure extraite de LEVY, LAHOUD et al. (2007).

$N_a = N_b$ au cours de l'oscillation. Cet effet, appelé auto-piégeage (*self-trapping*), peut également se comprendre à partir des courbes iso-énergie d'une jonction atomique, nous y reviendrons au chapitre 4 (§4.4).

En se plaçant dans de telles conditions, LEVY, LAHOUD et al. (2007) ont effectivement trouvé que la différence de population $N_a - N_b$ oscillait périodiquement à la fréquence $\omega = \overline{\Delta\mu}/\hbar$, avec une amplitude beaucoup plus faible que le déséquilibre initial $\bar{N}_a - \bar{N}_b$. Les résultats expérimentaux pour ω en fonction de $\Delta\mu$ sont montrés en figure III.6. Cette expérience d'effet Josephson alternatif a ensuite été reprise par plusieurs groupes [voir par exemple (SPAGNOLLI, SEMEGHINI et al. 2017)] et elle a également été étendue à un gaz de polaritons de cavité (ABBARCHI, AMO et al. 2013).

L'auto-piégeage lui-même avait été vu dès la première expérience menée sur un double puits par ALBIEZ, GATI et al. (2005). On montre en figure III.7 leur résultat, obtenu sur le même montage que celui qui a permis d'observer l'oscillation plasma (cf. Chapitre 1). Ces auteurs n'ont pas détecté le régime Josephson alternatif (il se produirait ici avec une période de l'ordre de la milliseconde), mais ils ont clairement observé que la population du puits de gauche restait supérieure à celle du puits de droite sur une longue échelle de temps.

LEVY, LAHOUD et al. (2007) ont étudié la dépendance du phénomène

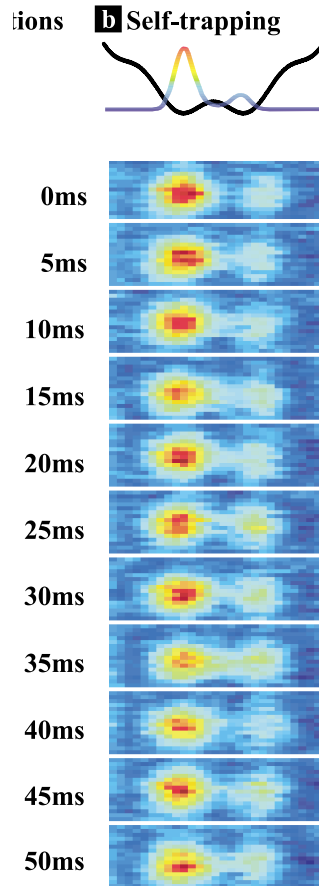


FIGURE III.7. Auto-piégeage de la population dans un double puits initialement fortement déséquilibré. Figure extraite de ALBIEZ, GATI et al. (2005).

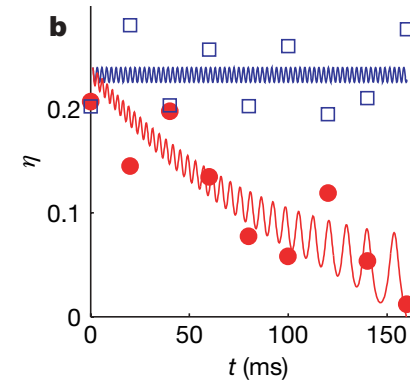


FIGURE III.8. Influence de la température sur le phénomène d’auto-piégeage, avec $\eta = (N_a - N_b)/N$. Carrés bleus : $T \approx 0.3 T_c$, disques rouges : $T \approx 0.5 T_c$. La fréquence de l’effet Josephson alternatif (de l’ordre du kHz) est trop élevée pour être détectée expérimentalement compte tenu du faible échantillonnage des points. La courbe théorique rouge a été calculée dans le cadre du modèle RCJS avec une valeur ajustée pour R. Figure extraite de LEVY, LAHOUD et al. (2007).

d’auto-piégeage avec la température (figure III.8). Pour $T \approx 0.3 T_c$, où T_c est la température de condensation, ils n’ont observé aucune décroissance de $N_a - N_b$ sur une échelle de temps de 150 ms, soit plus d’une centaine d’oscillations dues à l’effet Josephson alternatif. En revanche, pour $T \approx 0.5 T_c$, ils ont mesuré une relaxation de $N_a - N_b$ vers 0 sur cette échelle de temps.

2 Les résonances de Shapiro

2-1 L’expérience de Shapiro

Dès les premières études expérimentales sur l’effet Josephson avec des supraconducteurs, l’influence d’une modulation à haute fréquence ($\omega/2\pi \sim 10$ à 100 GHz) a été abordée, en particulier par SHAPIRO (1963). Pour une jonction alimentée par un générateur de courant délivrant l’in-

tensité

$$I(t) = I_0 + I_1 \sin(\omega t), \quad (\text{III.9})$$

l'observation principale est l'existence de plateaux dans la caractéristique (I_0, \bar{V}) de la jonction (figure III.9), où \bar{V} est la tension moyenne aux bornes de la jonction ; plus précisément, certaines valeurs particulières de \bar{V} satisfaisant la condition de quantification

$$2e\bar{V} = n\hbar\omega \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z} \quad (\text{III.10})$$

sont observables pour toute une plage de valeurs de l'intensité moyenne I_0 . Dans cette expérience pionnière, Shapiro a utilisé une jonction Al-Al₂O₃-Sn qu'il a placé dans une cavité microonde résonante. Les fréquences utilisées sont de 9.3 GHz et 24.85 GHz. Pour une fréquence de 10 GHz, le "quantum de tension" apparaissant sur (III.10) est

$$\frac{\omega}{2\pi} = 10 \text{ GHz} : \quad V_1 = \frac{\hbar\omega}{2e} = 20.7 \mu\text{V} \quad (\text{III.11})$$

Les marches de Shapiro sont donc très proches les unes des autres pour ce domaine de fréquence.

Le résultat obtenu par Shapiro généralise celui obtenu en l'absence de modulation haute fréquence, où la tension $\bar{V} = 0$ pouvait être obtenue pour la plage d'intensité $[-I_c, I_c]$. Comme nous l'avons écrit en introduction, son importance pratique est considérable puisque qu'il permet de relier une tension V à la fréquence ω d'une micro-onde. La réalisation de fréquences extrêmement stables dans le domaine micro-onde étant bien maîtrisée, ce phénomène a ouvert de façon naturelle la voie vers des standards électriques de grande précision, nous y reviendrons en §3.

Les caractéristiques obtenues par SHAPIRO (1963) révèlent d'emblée un certain nombre de propriétés importantes.

- Les plateaux correspondant à différentes valeurs de l'entier n peuvent se recouvrir. Cela signifie que pour une intensité I donnée dans la zone de recouvrement entre ces plateaux, plusieurs tensions V_n sont observables. Cette possibilité apparaît clairement sur la figure III.10, extraite de KAUTZ (1996).
- Pour une jonction alimentée en courant continu, nous avons mentionné un régime bistable : pour une plage de valeurs de I , la tension

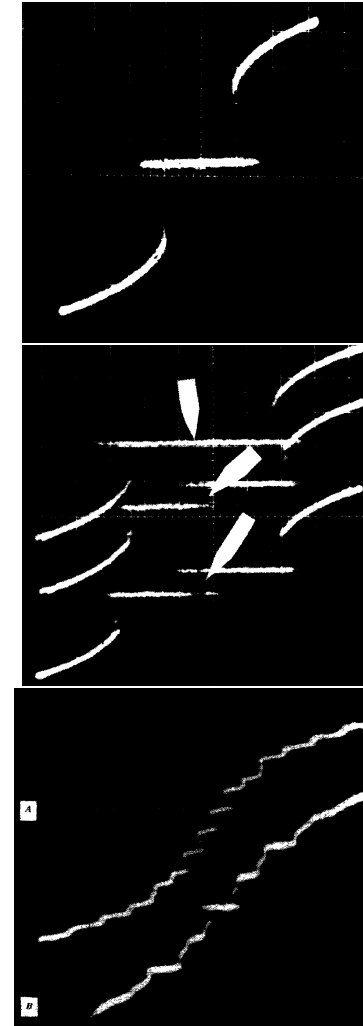


FIGURE III.9. Caractéristique (I, V) mesurées par SHAPIRO (1963). Haut : jonction non modulée. Milieu : apparition de deux paliers à $V = \pm\hbar\omega/(2e)$. Bas : paliers multiples observés pour deux fréquences de modulations, 9.3 GHz et 24.850 GHz.

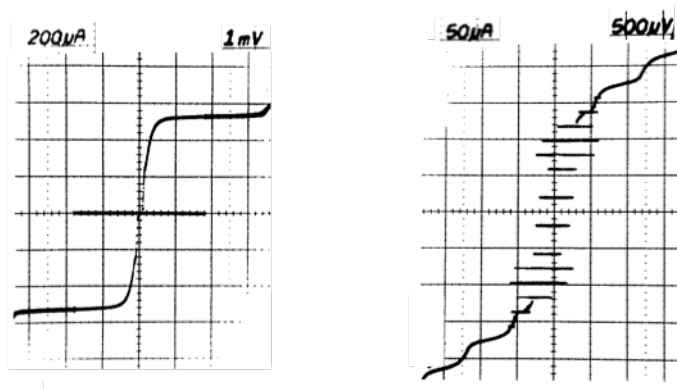


FIGURE III.10. Caractéristique d'une jonction Josephson utilisée en métrologie en absence (gauche) et en présence (droite) d'un courant modulé. Figure extraite de KAUTZ (1996).

peut prendre la valeur $V = 0$ ou une valeur non nulle. On atteint l'une ou l'autre valeur selon qu'on varie I dans le sens des intensités croissantes ou décroissantes. Dans le cas modulé, si trois valeurs de V_n sont possibles pour une valeur donnée de I (comme c'est le cas sur la figure III.10), la situation est plus complexe et l'obtention de l'une ou l'autre de ces valeurs dépendra finement des conditions initiales. Un comportement chaotique peut même être observé pour certains domaines de paramètres.

- La possibilité d'obtenir une tension V_n quantifiée selon (III.10) existe même si la composante continue I_0 du courant traversant la jonction s'annule. La seule application de la microonde suffit à générer cette tension. Ce point est particulièrement important pour la réalisation de standard de tension dans le domaine du volt ou de la dizaine de volts.
- Une conséquence du point précédent est qu'il est possible, pour un courant continu (légèrement) négatif, d'observer une tension positive, par exemple $+\hbar\omega/2e$, et réciproquement. Ce point avait été particulièrement souligné par SHAPIRO (1963), qui mentionnait le terme de "résistance négative".

2-2 Utilisation du modèle RCSJ

Dans ce modèle représenté sur la figure III.1, le courant total $I(t)$ est donné par la loi de Kirchoff

$$I(t) = I_c \sin[\varphi(t)] + \frac{V(t)}{R} + C \frac{dV}{dt} \quad (\text{III.12})$$

à laquelle on adjoint la seconde relation de Josephson :

$$\hbar \frac{d\varphi}{dt} = 2eV. \quad (\text{III.13})$$

Dans le cas qui nous intéresse dans ce chapitre, le courant $I(t)$ est la somme d'un courant continu I_0 (éventuellement nul) et du courant modulé induit par la microonde $I_1 \sin(\omega t)$. En éliminant la tension $V(t)$ au profit de la phase $\varphi(t)$, on obtient donc l'équation d'évolution

$$I_0 + I_1 \sin(\omega t) = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (\text{III.14})$$

Comme nous allons le voir, la résolution numérique de cette équation permet de reproduire les phénomènes que nous avons mentionnés dans le paragraphe précédent. Il faut noter malgré tout que ce modèle n'est pas véritablement quantitatif pour décrire les phénomènes à haute fréquence ou à grand voltage (KAUTZ 1996). Par exemple, il ne prend pas en compte la possibilité que la microonde casse des paires de Cooper, créant ainsi des processus tunnel assistés par les photons de cette micro-onde. Pour des jonctions étendues, la dépendance spatiale de la phase φ peut également jouer un rôle significatif non pris en compte dans le modèle RCSJ.

L'équation (III.14) dépend de six paramètres physiques : $I_0, I_1, \omega, I_c, R, C$. Comme toujours, il est utile de reformuler cette équation en terme de paramètres sans dimension pour limiter le domaine d'étude. L'intensité critique I_c fournit une unité naturelle pour exprimer I_0 et I_1 et nous posons :

$$i_0 \equiv \frac{I_0}{I_c} \quad i_1 \equiv \frac{I_1}{I_c}. \quad (\text{III.15})$$

Par ailleurs, nous choisissons la même unité de temps qu'au chapitre précédent

$$t_0 \equiv \frac{\hbar}{2eRI_c} \quad (\text{III.16})$$

et nous posons

$$\tau \equiv \frac{t}{t_0} \quad \tilde{\omega} \equiv \omega t_0 \quad \dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{d\tau} = t_0 \frac{d\varphi}{dt} \quad (\text{III.17})$$

de sorte que (III.14) s'écrit :

$$\boxed{i_0 + i_1 \sin(\tilde{\omega}\tau) = \sin \varphi + \dot{\varphi} + \beta_c \ddot{\varphi}} \quad (\text{III.18})$$

où l'on a introduit comme aux chapitres précédents le nombre sans dimension β_c (paramètre de Stewart-McCumber) :

$$\beta_c = \frac{2eI_c R^2 C}{\hbar}. \quad (\text{III.19})$$

Rappelons que le régime $\beta_c \ll 1$ correspond au régime très amorti, et $\beta_c \gg 1$ au régime opposé. On est donc ramené à un problème à quatre paramètres sans dimension $i_0, i_1, \tilde{\omega}$ et β_c .

La détermination d'une caractéristique courant-tension dans ce cadre passe donc par les étapes suivantes :

- Fixer les trois paramètres $i_1, \tilde{\omega}, \beta_c$.
- Chercher pour chaque valeur de i_0 un ou plusieurs régimes forcés pour l'équation (III.18).
- Obtenir ainsi un point de la caractéristique (I_0, \bar{V}) , où \bar{V} représente la tension moyenne aux bornes de la jonction. La moyenne est prise sur une période $T = 2\pi/\omega$ de la microonde :

$$\bar{V} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt \quad (\text{III.20})$$

ce qui donne en utilisant la seconde relation de Josephson $\hbar \frac{d\varphi}{dt} = 2eV$:

$$\bar{V} = \frac{\hbar}{2eT} \int_0^T \frac{d\varphi}{dt} dt = \frac{\hbar\omega}{2e} \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \quad (\text{III.21})$$

où $\Delta\varphi = \varphi(T) - \varphi(0)$ représente l'accroissement de phase sur une période de la microonde. Dans ce qui suit, nous présenterons les caractéristiques pour les quantités réduites $I_0/I_c = i_0$ et \bar{V}/RI_c , qui s'écrit aussi :

$$\frac{\bar{V}}{RI_c} = \tilde{\omega} \frac{\Delta\varphi}{2\pi}. \quad (\text{III.22})$$

où nous avons injecté les définitions (III.16, III.17) dans (III.21).

La forme (III.21) permet de donner une interprétation simple à la condition de quantification $2e\bar{V} = n\hbar\omega$, ou de son équivalent en variables adimensionnées $\frac{\bar{V}}{RI_c} = n\tilde{\omega}$. Elle entraîne en effet que

$$\boxed{\Delta\varphi = n2\pi}, \quad (\text{III.23})$$

ce qui correspond à un régime où la phase φ augmente d'un nombre entier de 2π en une période de la microonde. Dans le modèle de la "planche à laver" inclinée, la microonde induit un mouvement oscillant de la planche et la particule fictive progresse de n périodes du potentiel $\cos \varphi$ en une période T (voir la figure III.11 pour le cas $n = 1$).

Les caractéristiques des figures III.9 et III.10 montrent que ce verrouillage de la phase sur l'oscillation microonde peut se faire de manière stable, au moins sur le temps de mesure utilisé.

2-3 Quelques résultats du modèle RCSJ

Nous présentons sur les figures III.12 et III.13 quelques résultats obtenus par résolution numérique de l'équation d'évolution (III.18). La figure III.12 correspond à $\beta_c = 1$, c'est-à-dire une jonction avec un amortissement résistif relativement fort, dont la caractéristique en absence de modulation ne présente pas d'hystérésis. La figure III.13 est calculée pour $\beta_c = 10$ pour lequel il existe un hystérésis significatif. Les caractéristiques en absence de modulation sont rappelées en haut de ces figures.

Ces calculs sont faits en balayant le courant I_0 dans le sens positif, puis dans le sens négatif, par pas de $\delta i_0 = 10^{-3}$. Pour chaque nouveau pas, on prend pour condition initiale le régime forcé utilisé au pas précédent, de manière à favoriser un suivi adiabatique. Pour chaque valeur de β_c , on a pris deux valeurs de l'intensité de modulation i_1 et deux valeurs de la fréquence de modulation $\tilde{\omega}$.

On voit apparaître les plateaux quantifiés V_n avec $V_n/RI_c = n\tilde{\omega}$. Quand on augmente i_1 , le nombre de plateaux clairement identifiables croît et la largeur du plateau central ($n = 0$), initialement égale à 2, décroît. Pour $\beta_c = 1$, on constate que l'absence d'hystérésis subsiste pour $i_1 \neq 0$, au moins dans la gamme de valeurs étudiées. Pour $\beta_c = 10$, l'hystérésis demeure : une même intensité I_0 peut conduire à deux valeurs n différentes

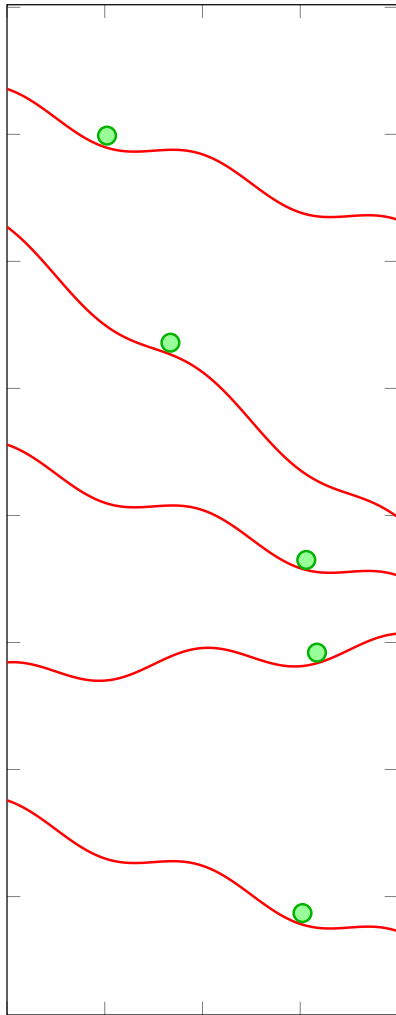


FIGURE III.11. Régime forcé dans le modèle de la planche à laver : la microonde de fréquence $\omega/2\pi$ induit un mouvement oscillant de la planche autour de la pente moyenne i_0 . Le régime quantifié (III.10) est obtenu quand la particule fictive de position φ se déplace de n fois 2π en une période d'oscillation $2\pi/\tilde{\omega}$, avec ici $n = 1$. Figure tracée pour $\beta_c = 1$, $i_0 = 0.82$, $i_1 = 1$, $\tilde{\omega} = 0.5$ (cf. paramètres de la figure III.12, ligne du bas, colonne de droite).

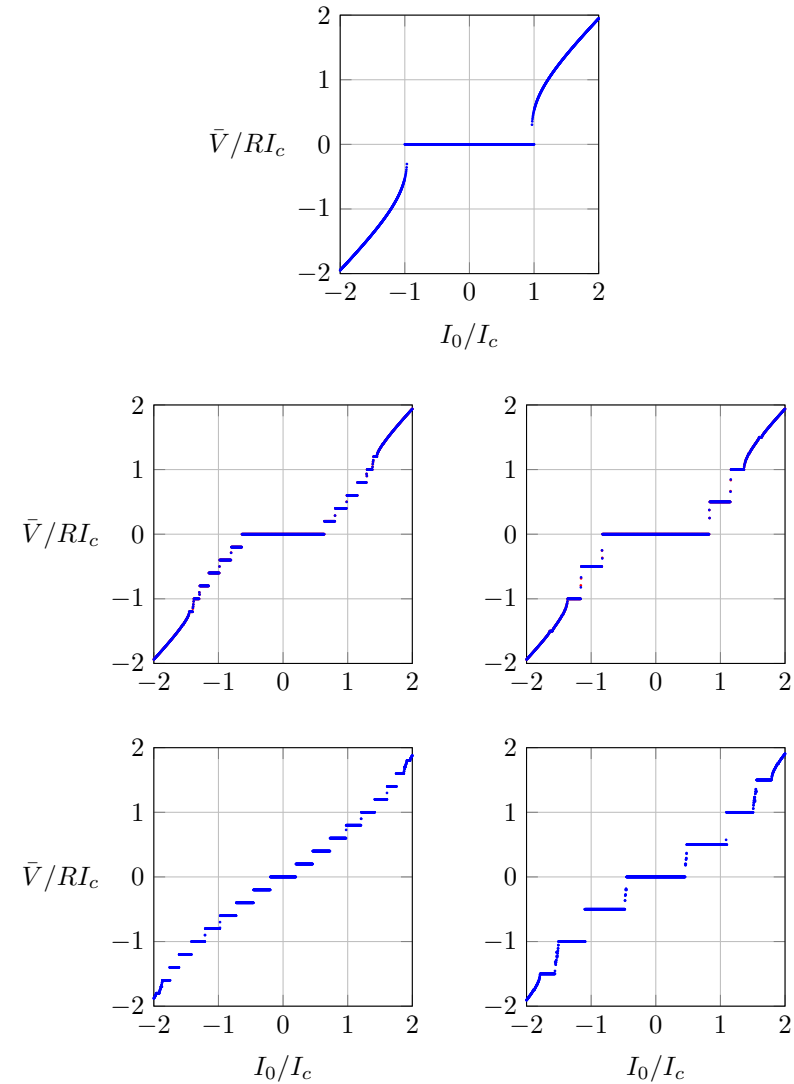


FIGURE III.12. $\beta_c=1$. Ligne du milieu : $i_1 = 1/2$, ligne du bas $i_1 = 1$. Colonne de gauche : $\tilde{\omega} = 0.2$, colonne de droite $\tilde{\omega} = 0.5$. Le graphe supérieur représente la caractéristique en absence de modulation pour cette valeur de β_c .

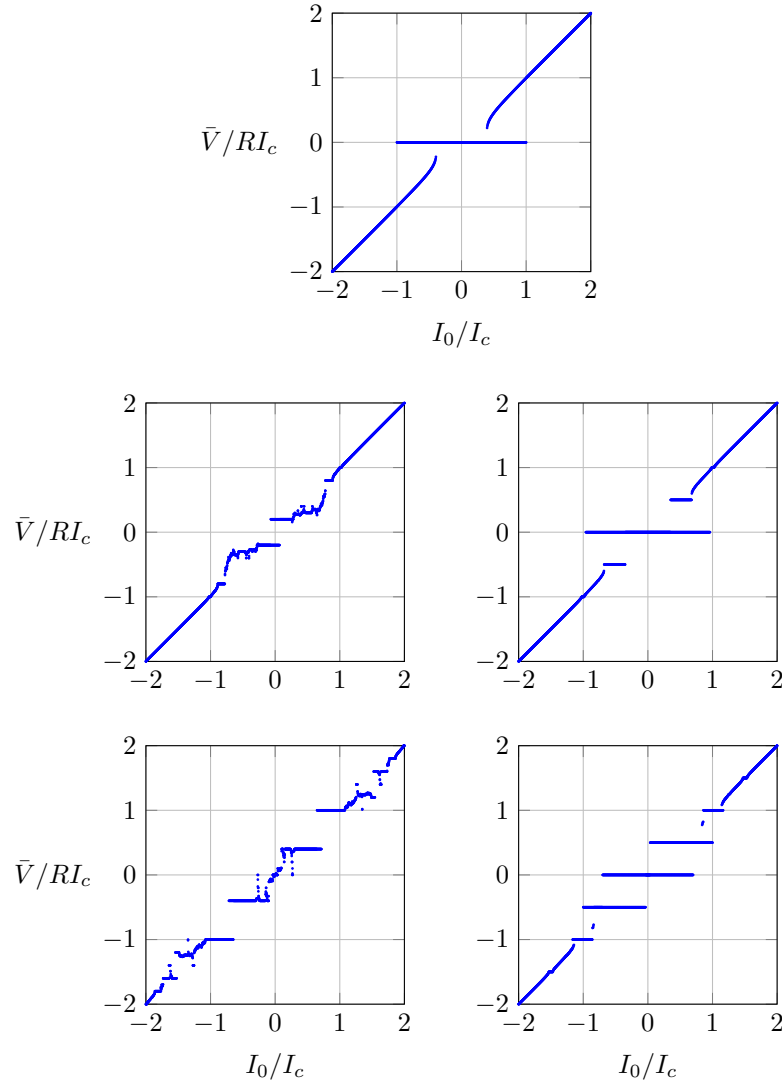


FIGURE III.13. $\beta_c=10$. Ligne du milieu : $i_1 = 1$, ligne du bas $i_1 = 3$. Colonne de gauche : $\tilde{\omega} = 0.2$, colonne de droite $\tilde{\omega} = 0.5$. Le graphe supérieur représente la caractéristique en absence de modulation pour cette valeur de β_c .

selon le sens de balayage. On remarque également pour ce cas $\beta_c = 10$ que certaines caractéristiques semblent très bruitées. Ce bruit peut être vu comme la signature d'un régime chaotique pour ce domaine de paramètres (KAUTZ 1996) et il ne dépend quasiment pas de la durée sur laquelle on moyenne la valeur de V (ici 1000 périodes T).

2-4 Modulation en tension sinusoïdale

En pratique, la jonction Josephson est branchée sur un générateur de courant fournissant l'intensité sinusoïdale $I_0 + I_1 \sin(\omega t)$, comme étudié précédemment. Dans ce cas, il est nécessaire de se tourner vers une résolution numérique du problème RCSJ pour trouver la caractéristique courant-tension (§2-3).

Il existe une autre situation qui permet quant à elle d'obtenir des résultats analytiques; elle concerne le cas d'une modulation sinusoïdale en tension :

$$V(t) = V_0 + V_1 \sin(\omega t). \quad (\text{III.24})$$

Même si cette situation est rarement implémenté en pratique, ses résultats peuvent constituer une bonne approximation du cas d'une modulation sinusoïdale en intensité quand une des deux conditions est vérifiée

$$\omega \gg \omega_c \quad \text{ou} \quad \omega \gg \frac{\omega_c}{\sqrt{\beta_c}}. \quad (\text{III.25})$$

où on a posé

$$\omega_c \equiv \frac{1}{t_0} = \frac{2eI_c R}{\hbar}. \quad (\text{III.26})$$

Ces conditions expriment le fait que l'impédance $L\omega$ de la jonction (avec $L = \hbar/2eI_c$) est grande devant la résistance R ou devant l'impédance capacitive $1/C\omega$ (KAUTZ 1996).

Une fois donné le voltage $V(t)$ de l'équation (III.24), la seconde relation de Josephson permet de déduire par intégration la phase $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{2eV_0 t}{\hbar} - \frac{2eV_1}{\hbar\omega} \cos(\omega t). \quad (\text{III.27})$$

Reprenons maintenant l'équation d'évolution

$$I(t) = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (\text{III.28})$$

et prenons sa moyenne sur une période T de l'oscillation microonde en utilisant l'expression (III.27). La contribution de la dérivée seconde est toujours nulle et il reste :

$$\bar{I} = I_c \langle \sin \varphi \rangle + \frac{V_0}{R}. \quad (\text{III.29})$$

Si la moyenne sur le temps de $\sin \varphi$ s'annule, on retrouve la partie résistive de la caractéristique $V_0 = R\bar{I}$. Mais il se peut que cette moyenne soit non nulle, comme on le voit en utilisant le développement en fonctions de Bessel :

$$e^{-ia \cos(\omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n(a) e^{-in\omega t} \quad (\text{III.30})$$

qui entraîne

$$\sin(\varphi(t)) = \text{Im} \left[e^{i\varphi(t)} \right] = \text{Im} \left[e^{i\varphi_0} e^{i\frac{2eV_0}{\hbar}t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n \left(\frac{2eV_1}{\hbar\omega} \right) e^{-in\omega t} \right]. \quad (\text{III.31})$$

On remarque en effet qu'un terme de la somme sur n peut donner une contribution non nulle à la moyenne sur le temps si on a

$$\frac{2eV_0}{\hbar} = n\omega \quad (\text{III.32})$$

ce qui n'est autre que la condition de quantification (III.10). La moyenne temporelle de $\sin \varphi$ vaut alors

$$\langle \sin \varphi \rangle = J_n \left(\frac{2eV_1}{\hbar\omega} \right) \sin(\varphi_0 - n\pi/2). \quad (\text{III.33})$$

Le terme $\sin(\varphi_0 - n\pi/2)$ peut prendre n'importe quelle valeur entre -1 et 1 , et on obtient donc un plateau de valeurs de \bar{I} compris entre les deux bornes :

$$\frac{n\hbar\omega}{2eR} - I_c J_n \left(\frac{2eV_1}{\hbar\omega} \right) \quad \text{et} \quad \frac{n\hbar\omega}{2eR} + I_c J_n \left(\frac{2eV_1}{\hbar\omega} \right) \quad (\text{III.34})$$

ou encore

$$\left| \frac{\bar{I}}{I_c} - n \frac{\omega}{\omega_c} \right| < \left| J_n \left(\frac{2eV_1}{\hbar\omega} \right) \right|. \quad (\text{III.35})$$

Chaque plateau est centré sur la droite résistive $\bar{I} = V_0/R$ et sa largeur, donnée par la fonction de Bessel $J_n(2eV_1/\hbar\omega)$, va décroître rapidement aux grands n , à V_1/ω fixé.

3 Un standard électrique

3-1 Mise en série de jonctions

Comme nous l'avons vu ci-dessus, le domaine de fréquences $\omega/2\pi$ utilisable en pratique se situe dans le domaine s'étendant entre 10 et 100 GHz. Pour le choix $\omega/2\pi = 100$ GHz, le quantum $\hbar\omega/2e$ vaut 0.2 mV, ce qui est très faible. Même si on verrouille la jonction sur un indice n supérieur à 1, on reste dans le domaine du millivolt alors que les besoins pratiques sont plutôt dans le domaine du volt, voire la dizaine de volts.

La solution à ce problème est simple sur le papier : il suffit de mettre un grand nombre de jonctions en série, de sorte que les tensions s'ajoutent et on peut atteindre ainsi des valeurs supérieures au volt. C'est effectivement ce qui est fait en pratique, mais cela passe par un certain nombre d'étapes délicates.

On voit sur la figure III.14 extraite de l'article de HAMILTON (2000) le principe de la mise en série de jonctions Nb/Al₂O₃/Nb, avec une microonde de fréquence 75 GHz. On dispose 16 lignes comportant 1263 jonctions chacune, soit 20 208 jonctions au total mises en série. Du point de vue de la propagation de la microonde, les 16 lignes sont en parallèle, ce qui permet d'assurer une bonne homogénéité de l'intensité I_1 .

3-2 Plateaux de tension à courant nul

Les premiers dispositifs de séries de jonctions Josephson à fin métrologique comportaient une vingtaine de jonctions, chacune avec une capacité C relativement faible, conduisant à une caractéristique du type de celles montrées en figures III.12-III.13. Pour ce type de jonction, il faut imposer un courant I_0 non nul à chaque jonction pour se placer sur le plateau désiré.

Le courant I_0 à appliquer diffère d'une jonction à l'autre du fait d'imperfections lors de la fabrication. Pour un dispositif utilisant une vingtaine de jonctions, il est possible (mais délicat) de contrôler chacun des 20 courants individuels I_0 . Quand on passe à une assemblée de 20 000 jonctions, cela devient irréaliste.

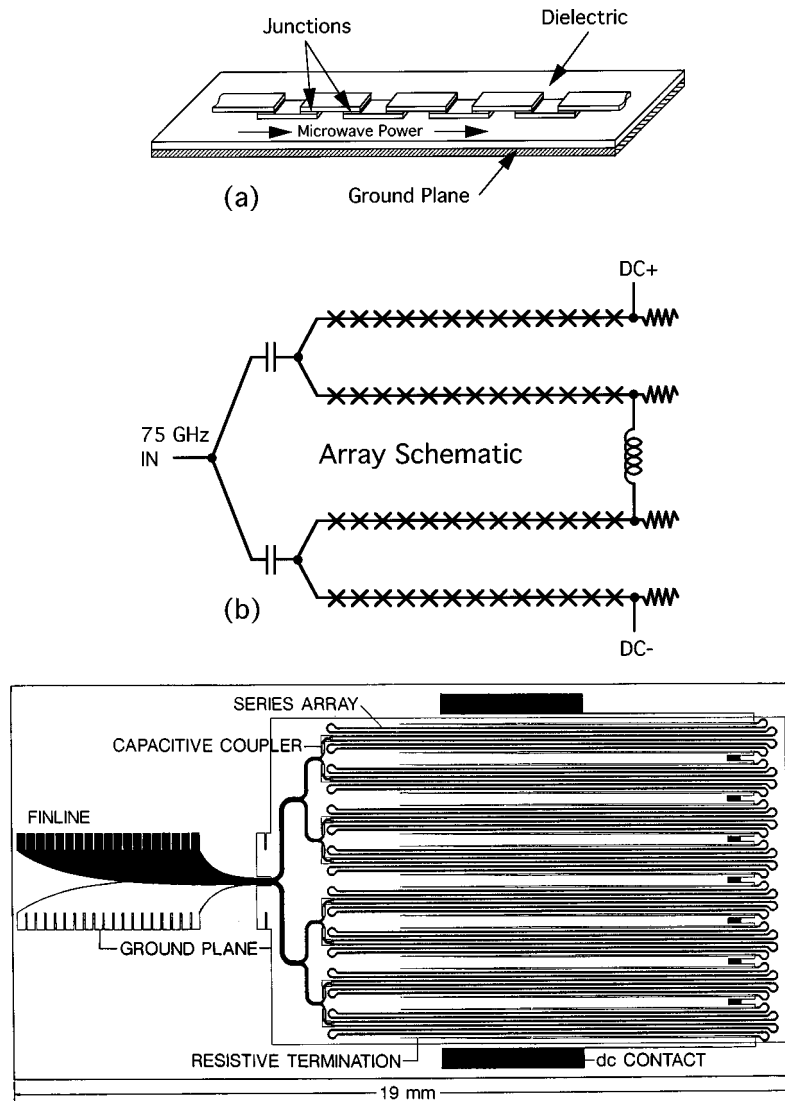


FIGURE III.14. Dispositif comportant un grand nombre ($> 20\,000$) jonctions Josephson en série permettant de réaliser un étalon de tension dans la gamme de la dizaine de volts. Figure adaptée à partir de HAMILTON (2000).

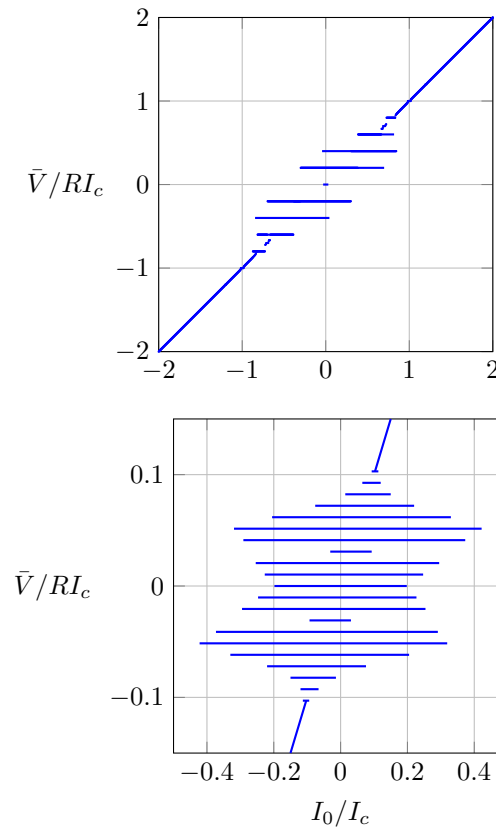


FIGURE III.15. Exemples de caractéristiques calculées par le modèle RCSJ, présentant plusieurs plateaux V_n pour $I_0 = 0$. Calcul effectué pour $\beta = 100$, $i_1 = 10$, $\tilde{\omega} = 0.2$ (haut) et $\beta \approx 10^5$, $i_1 = 80$, $\tilde{\omega} \approx 10^{-2}$ (bas). La caractéristique du bas est plus précisément obtenue pour les paramètres physiques fournis par KAUTZ (1996) pour sa figure 1(b) : $I_c = 0.2\text{ mA}$, $R = 100\ \Omega$, $C = 20\text{ pF}$, $I_1 = 16\text{ mA}$ et $\omega/2\pi = 100\text{ GHz}$.

Pour contourner ce problème, on se tourne vers des jonctions de plus grande capacité, donc de plus grand paramètre β_c , typiquement $\beta_c \geq 100$. Dans ce cas, la caractéristique comporte des segments de voltage quantifiés V_n pour un courant I_0 nul. La figure III.15 présente des caractéristiques calculées dans le modèle RCSJ et la figure III.16 une caractéristique mesurée expérimentalement. Il n'est alors plus nécessaire de contrôler le courant biais de chaque jonction. Il faut simplement trouver un moyen de verrouiller la jonction – ou l'ensemble de jonctions – sur le segment n désiré. Pour les standards de 10 volts comme celui représenté en figure III.14, l'entier n peut prendre toutes les valeurs entre -75 000 et +75 000 (HAMILTON 2000).

La caractéristique de la figure III.16 résulte d'une optimisation du courant I_1 induit par la microonde. Pour un courant plus faible, la plage en tension sur laquelle on observe des marches se réduit. Pour des courants plus forts, on observe plus de marches, mais leur longueur diminue et elles ne croisent plus l'axe $I_0 = 0$. On peut utiliser le résultat (III.35) pour estimer si la marche n croise l'axe de courant nul $I = 0$. Il faut pour cela que

$$n \frac{\omega}{\omega_c} < \left| J_n \left(\frac{2eV_1}{\hbar\omega} \right) \right| \quad (\text{III.36})$$

Comme la valeur de la fonction de Bessel $J_n(x)$ est toujours comprise entre -1 et $+1$, on voit sur cette équation que les plateaux croisant l'axe $I = 0$ ne peuvent être obtenus que si $\omega < \omega_c$ (au moins dans le régime où l'approche en terme de tension modulée sinusoïdalement est correcte).

3-3 Le verrouillage sur un plateau V_n donné

Une fois réalisée la caractéristique courant-tension du système Josephson avec plusieurs dizaines de milliers de plateaux V_n quantifiés, traversant tous l'axe $I_0 = 0$, il reste à verrouiller ce dispositif sur le plateau désiré pour disposer d'un standard délivrant des valeurs discrètes de voltage. Le processus réel est complexe et son principe est résumé sur la figure III.17.

On impose aux bornes du système une tension V_s avec une résistance de biais V_s . La tension V_s est proche de la tension recherchée et R_s est choisie de sorte que l'intersection de la caractéristique du système Josephson et de la droite $V_s - R_s I$ ne comporte qu'un seul (ou quelques) points. Un

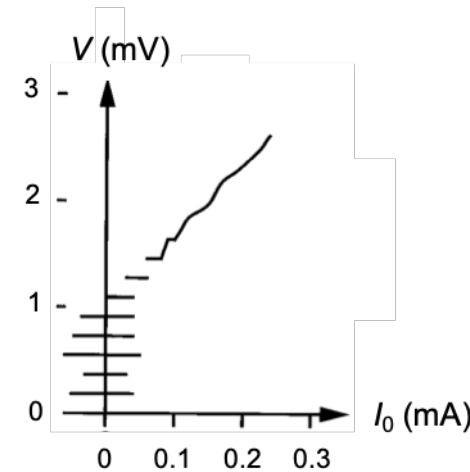


FIGURE III.16. Exemple d'une observation expérimentale des marches de Shapiro pour une jonction de grande capacité. Figure adaptée de HAMILTON (2000).

contrôle judicieux de R_s et V_s permet alors d'amener le système Josephson au point choisi : $I_0 = 0, \bar{V} = V_n$. Une fois ce plateau atteint, le système peut y rester verrouillé pendant plusieurs heures avec une stabilité relative meilleure que 10^{-9} . On trouvera dans HAMILTON (2000) ou sur la page wikipedia "Josephson Voltage Standard" des exemples d'algorithmes permettant d'utiliser la tension ainsi réalisée pour déterminer une tension inconnue.

4 Effet Shapiro pour des jonctions atomiques

4-1 Effet Shapiro dans ^3He superfluide

Nous avons décrit en §1-2 le dispositif expérimental du groupe de Berkeley qui a permis l'observation de l'effet Josephson ac avec un bain de ^3He superfluide (PEREVERZEV, LOSHAK et al. 1997). Ce même montage a permis quelques années plus tard la caractérisation de résonances de Shapiro

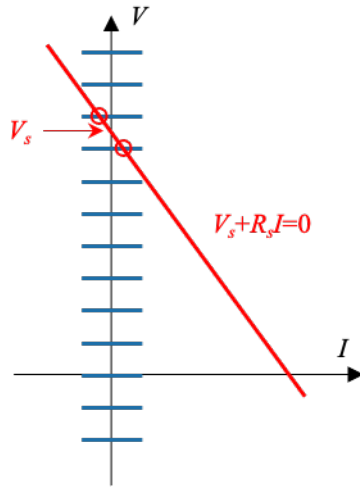


FIGURE III.17. Principe du montage électrique permettant de verrouiller l'étalon de tension sur un plateau V_n déterminé. Figure adaptée de HAMILTON (2000).

pour l'hélium 3 par SIMMONDS, MARCHENKOV et al. (2001).

Le principe de l'expérience est de moduler de façon contrôlée la pression d'un côté de la membrane rigide percée de trous (figure III.18). Cette modulation est obtenue en agissant au moyen d'électrodes disposées sur la paroi souple. C'est l'équivalent mécanique de la modulation de la tension électrique pour une jonction supraconductrice. On est donc directement dans le cas de figure envisagé en §2-4, qui conduit à des plateaux en courant dont la largeur est donnée par des fonctions de Bessel [eq. (III.35)].

La différence de pression entre les deux côtés de la membrane percée s'écrit donc

$$P(t) = P_0 + P_1 \sin(\omega t) \tag{III.37}$$

et un courant de particules de moyenne temporelle non nulle va pouvoir se produire à travers cette membrane si la condition de résonance

$$\frac{2mP_0}{\rho} = n \hbar \omega \tag{III.38}$$

est remplie (équivalent du résultat (III.32) avec la masse $2m$ d'une paire de

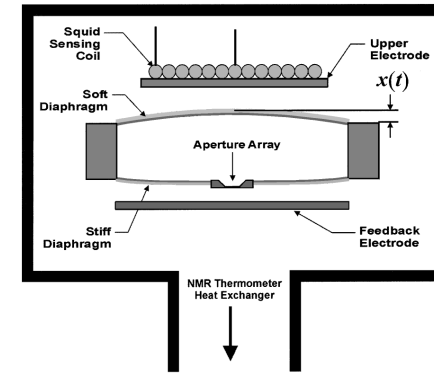


FIGURE III.18. Montage expérimental de SIMMONDS, MARCHENKOV et al. (2001) similaire à celui montré en figure III.3, avec cette fois-ci une modulation sinusöidale de la position de la paroi souple (position réperée par $x(t)$), ce qui conduit à une modulation de la pression, analogue mécanique du cas envisagé en §2-4.

Cooper pour ^3He).

Intéressons-nous au cas $n = 1$ pour lequel la résonance se produit pour $\omega/2\pi = 105 \text{ Hz}$ pour la pression P_0 choisie. Pour un choix donné de l'amplitude de modulation P_1 , on s'attend alors à observer un plateau de courant de largeur $2|J_1(2mP_1/\hbar\omega\rho)|$. Ces plateaux sont bien visibles sur la figure III.19 et leur largeur est en bon accord avec la variation en fonction de Bessel attendue (figure III.20). SIMMONDS, MARCHENKOV et al. (2001) ont également observé la résonance correspondant à $n = 2$.

4-2 Barrière mobile dans un gaz quantique

Nous avons vu au chapitre précédent comment une barrière se déplaçant à vitesse constante dans un gaz quantique uniforme permettait de simuler l'équivalent d'un courant constant imposé à une jonction supraconductrice. La généralisation de ce dispositif pour observer l'équivalent de résonances de Shapiro est alors naturel : au lieu de bouger la barrière à

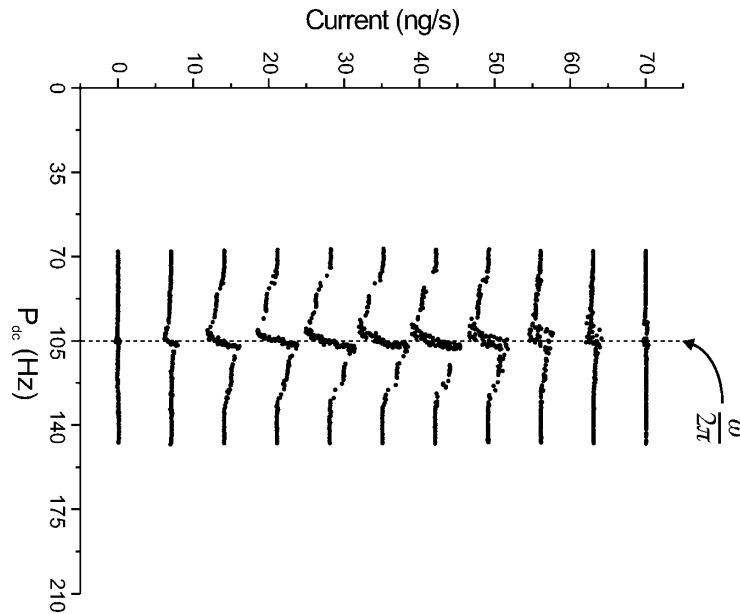


FIGURE III.19. Caractéristique courant-pression (avec $P_{dc} \equiv P_0$) permettant d'observer une résonance de Shapiro dans un bain de ^3He superfluide. Les courbes, obtenues pour différents valeurs de P_1 , sont décalées les unes par rapport aux autres pour améliorer la lisibilité. Figure adaptée de SIMMONDS, MARCHENKOV et al. (2001).

vitesse constante, on lui donne un mouvement du type

$$x(t) = vt + x_1 \sin(\omega t) \quad (\text{III.39})$$

comme représenté sur la figure III.21, extraite de la proposition théorique de SINGH, POLO et al. (2024).

Dans cette étude théorique, les auteurs ont considéré un gaz 2D de molécules de ^6Li décrit par l'équation de Gross-Pitaevskii, avec une densité de 5.6 atomes par micron carré. Ils ont pris en compte les effets de température finie en ajoutant un bruit adéquat sur la fonction d'onde initiale. La taille du gaz est 512×27 microns et le paramètre d'interaction (sans dimension

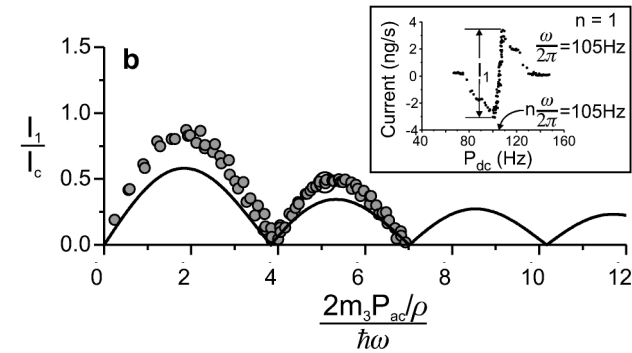


FIGURE III.20. Largeur du plateau de courant de la figure III.19 en fonction de l'amplitude de modulation en pression $P_{ac} \equiv P_1$. Figure extraite de SIMMONDS, MARCHENKOV et al. (2001).

à 2D) est $\tilde{g} = 0.1$.

Après le déplacement de la barrière, ils déterminent les nombres d'atomes N_a et N_b de part et d'autre de la barrière et calculent $z = (N_a - N_b)/(N_a + N_b)$. Cette valeur de z est comparée à \bar{z} , qui serait obtenu si les densités et donc les potentiels chimiques étaient restés parfaitement égaux de part et d'autre de la jonction.

La quantité $\Delta z = z - \bar{z}$ (équivalent de la tension pour une jonction supraconductrice), est tracée en figure III.21 en fonction de la vitesse moyenne v (équivalent du courant) pour différentes valeurs de l'amplitude de modulation x_1 , à fréquence $\omega/2\pi = 45$ Hz fixée. Les résultats sont conformes à ce qu'on attend intuitivement : on trouve des plateaux pour Δz , correspondant à une différence de potentiel chimique $\Delta\mu$ entre les deux côtés de la jonction :

$$\Delta\mu = n \hbar\omega \quad (\text{III.40})$$

SINGH, POLO et al. (2024) ont procédé à une calibration soignée de la barrière à partir de la caractéristique calculée. Ils ont montré que l'on pouvait effectivement la décrire par les mêmes paramètres que ceux du modèle RCSJ des jonctions supraconductrices. Nous montrons en figure III.22 leurs résultats pour les paramètres $G \equiv 1/R$ et β_c en fonction de

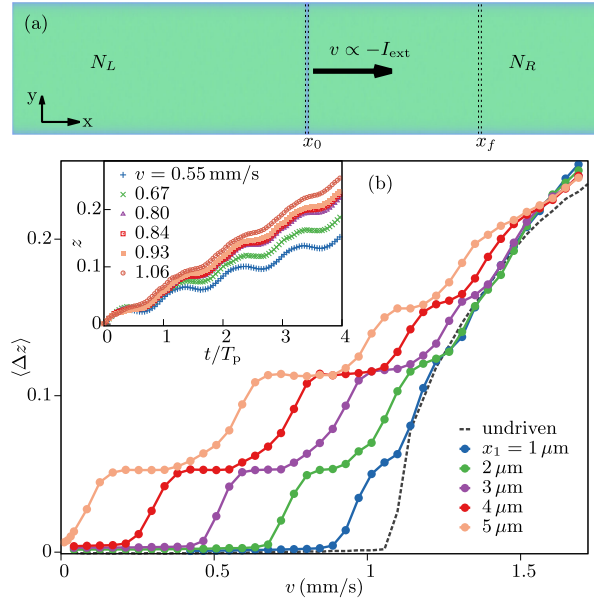


FIGURE III.21. Barrière mobile dans un gaz 2D. La position de la barrière s'écrit $x(t) = vt + x_1 \sin(\omega t)$. Le mouvement donne naissance à des marches de Shapiro pour $x_1 \neq 0$. Ces résultats sont obtenus en intégrant numériquement l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps, avec une condition initiale qui simule une température non nulle (truncated Wigner approximation). Figure extraite de SINGH, POLO et al. (2024).

la hauteur $\tilde{V}_0 = V_0/\mu$ de la barrière. Le potentiel créé par la barrière est supposé ici gaussien avec une demi-largeur à $1/e^2$ (*waist*) fixée à 1.1ξ , où ξ est la longueur de cicatrisation.

4-3 Observation expérimentale des plateaux

Fin 2025, deux équipes ont publié leur observation de résonances de Shapiro sur un gaz d'atomes froids grâce à une barrière tunnel modulée. BERNHART, RÖHRLE et al. (2025) ont utilisé un gaz 3D de ^{87}Rb en géométrie cylindrique et DEL PACE, HERNÁNDEZ-RAJKOV et al. (2025) ont

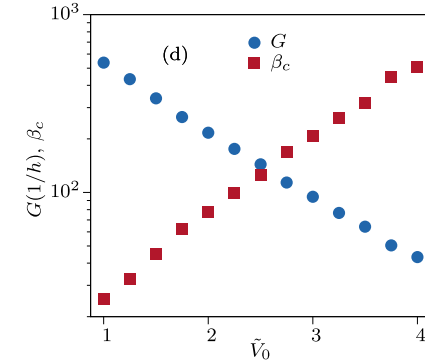


FIGURE III.22. Paramètres de la barrière utilisée par SINGH, POLO et al. (2024).

travaillé sur un gaz de ^6Li (fermions) dans le régime unitaire et placé dans une géométrie quasi2D.

Nous montrons en figure III.23 le résultat obtenu par BERNHART, RÖHRLE et al. (2025). On voit clairement apparaître des plateaux à $\Delta\mu$ constant quand on varie la vitesse moyenne de la jonction (donc le courant moyen la traversant). La valeur des plateaux est proche de la valeur quantifiée attendue [eq. (III.40)] pour la fréquence de modulation choisie, $\omega/2\pi = 90$ Hz. Quand on varie cette fréquence de modulation entre 50 et 200 Hz, on vérifie que la position des plateaux se déplace en suivant la loi $\Delta\mu \propto \omega$ (figure III.24).

4-4 Les processus dissipatifs en jeu

Pour terminer cette description des expériences récentes sur les résonances Shapiro, il est intéressant de regarder les processus dissipatifs qui permettent à la jonction d'atteindre le régime stationnaire conduisant à la formation de plateaux. Les simulations numériques fondées sur l'équation de Gross-Pitaevskii sont très utiles pour cela, pourvu qu'elles aient été validées précédemment par comparaison avec l'expérience, en ce qui concerne le fonctionnement de la jonction elle-même.

Comme nous l'avons déjà indiqué pour une jonction statique, la nature

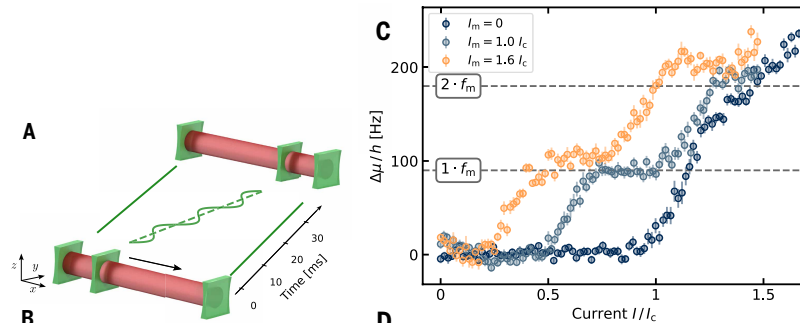


FIGURE III.23. Gauche : schéma expérimental de BERNHART, RÖHRLE *et al.* (2025). Droite : caractéristiques courant - potentiel chimique mettant en évidence les deux premières résonances de Shapiro. Pour la plus grande amplitude de modulation (notée ici I_m), on notera un écart par rapport à la relation attendue $\Delta\mu = \hbar\omega$; cet écart peut être dû à une incertitude sur la mesure du nombre d'atomes et la forme du potentiel de confinement, qui interviennent dans la calibration du potentiel chimique. Figures extraites de BERNHART, RÖHRLE *et al.* (2025).

de ces processus dissipatifs dépend de la dimensionalité du système. Dans l'expérience "tubulaire" de BERNHART, RÖHRLE *et al.* (2025), on constate que la dissipation est liée à l'émission de solitons sombres ou d'anneaux de vorticité en aval de la jonction, en phase avec le mouvement de la barrière. Plus précisément, la stabilisation du plateau n est obtenue grâce à l'émission de n solitons en une période d'oscillation (figure III.25). La nature solitonique de ces excitations est révélée par la simulation numérique, qui donne le profil de phase en plus de la distribution en densité. La formation de ces solitons est à l'origine de la différence de densité qui appar it entre les deux côtés de la jonction.

Nous montrons également en figure III.26 le résultat obtenu par DEL PACE, HERNÁNDEZ-RAJKOV *et al.* (2025) sur un gaz de Fermi unitaire dans une géométrie quasi2D. Dans ce cas, le processus dissipatif dominant est la formation de paires de vortex de circulations opposées, à raison d'une paire par période de modulation pour le plateau $n = 1$.

Une question ouverte   ce stade porte sur l'utilisation pratique de ces

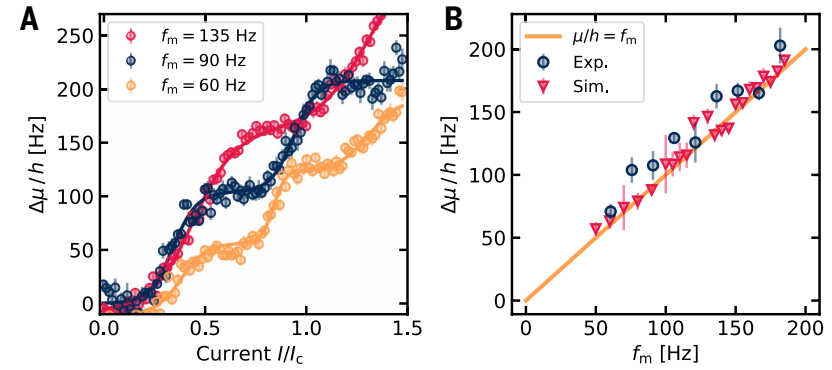


FIGURE III.24.  volution de la position des plateaux $\Delta\mu$ avec la fréquence de modulation de la barrière. Figures extraites de BERNHART, RÖHRLE *et al.* (2025).

résonances de Shapiro : peuvent-elles, à l'instar du cas supraconducteur, avoir un intérêt métrologique pour mesurer très précisément des potentiels chimiques ?

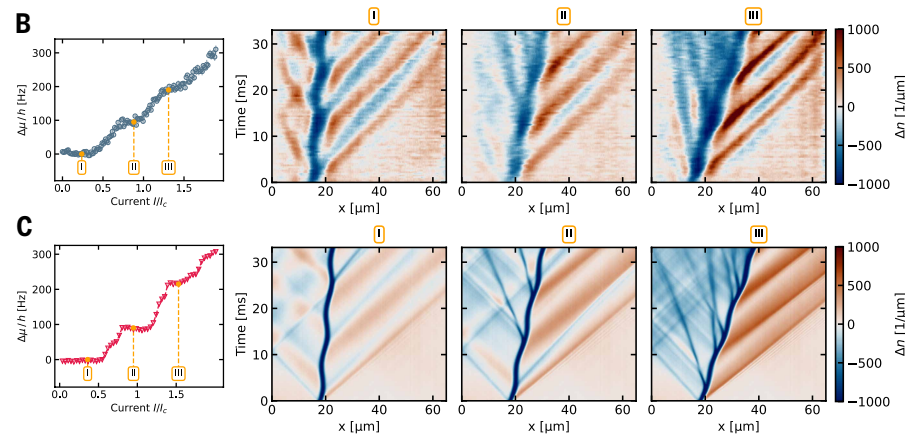


FIGURE III.25. Origine de la dissipation conduisant aux résonances de Shapiro. Haut : expérience, bas : résultats numériques. On voit que n solitons sont émis par période pour le plateau n . Il y a également émission de phonons se propageant à la vitesse c . Figure extraite de BERNHART, RÖHRLE *et al.* (2025)

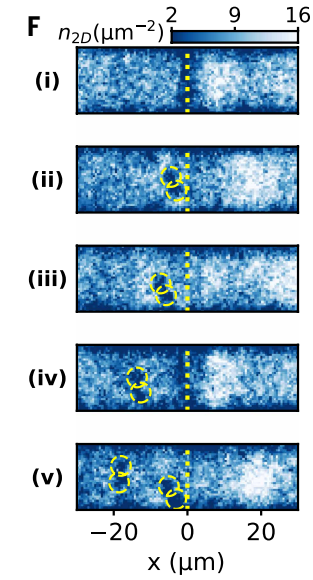


FIGURE III.26. Évolution d'un gaz de Fermi unitaire dans une géométrie quasi2D en présence d'une barrière modulée (position marquée par la ligne pointillée jaune). On s'est placé ici sur le plateau $n = 1$ et les instants de mesure sont $\omega t/2\pi = 1.03, 1.38, 1.7, 2.08, 2.43$. Figure extraite de DEL PACE, HERNÁNDEZ-RAJKOV *et al.* (2025)

Chapitre IV

Les jonctions atomiques internes

Dans sa proposition initiale, JOSEPHSON (1962) a considéré deux supraconducteurs couplés par l'intermédiaire d'une barrière physique, formée par une fine couche d'isolant ou de métal normal. Quelques années plus tard, LEGGETT (1966) a proposé d'étendre cette idée à un couplage entre degrés de liberté interne. Dans cette première publication, Leggett considérait un modèle de supraconducteur à deux bandes et décrivait ce qu'il qualifiait "d'effet Josephson interne". Même si le modèle initial n'a pas été validé expérimentalement, cette idée s'est révélée extrêmement féconde par la suite, lorsque la superfluidité de l'hélium 3 liquide a été découverte (1972). Elle a notamment permis d'expliquer les anomalies de la résonance magnétique nucléaire dans ce superfluide (LEGGETT 2004).

Cette idée de coupler deux états internes par une excitation cohérente pour former une jonction Josephson interne se généralise naturellement aux gaz d'atomes froids. Le formalisme que nous avons mis en place aux chapitres précédents va rester valable, avec notamment la description de la dynamique de la jonction à l'aide des deux énergies E_J et E_C . Rappelons que la première décrit le couplage entre les deux états de la jonction, et elle sera associée à la fréquence de Rabi du couplage; la seconde décrit l'énergie de charge de la jonction, c'est-à-dire le coût énergétique pour passer de la situation équilibrée $N_a = N_b = N/2$ à la situation voisine $N_a = N/2 - 1$, $N_b = N/2 + 1$.

Il va néanmoins y avoir des différences quantitatives entre les jonctions internes et les jonctions externes :

- Le couplage tunnel E_J peut être notablement plus grand : au lieu de reposer sur un effet tunnel à travers une paroi, donc un événement localisé et de faible probabilité, le couplage entre deux états internes a et b se produit sur tout le volume de l'échantillon. Par ailleurs, son intensité peut être rendue arbitrairement grande en augmentant la puissance de l'onde électromagnétique qui couple a et b .
- Le terme de charge E_C est lui aussi modifié. Pour une jonction externe, seules comptent les interactions $a - a$ ou $b - b$, puisque deux atomes situés de part et d'autre de la barrière ne se "voient" quasiment pas. En revanche, pour une jonction interne, les atomes dans les états a et b occupent la même région de l'espace et les interactions $a - b$ jouent un rôle dans l'énergie de charge, au même titre que les interactions $a - a$ et $b - b$. Cela vient enrichir le problème en fournissant un paramètre de contrôle supplémentaire.

Dans les chapitres précédents consacrés aux jonctions externes, nous avons montré que différents régimes de fonctionnement de la jonction sont possibles, selon les valeurs relatives de E_C et de E_J/N^2 . Pour les jonctions externes, on a généralement $E_C \gg E_J/N^2$, de sorte qu'il est difficile d'explorer ces différents régimes. Les jonctions internes, qui offrent en pratique une plus grande plage de valeurs de E_J et E_C , vont permettre cette exploration, en particulier l'étude des bifurcations et des transitions de phase qui peuvent se produire quand $E_C \sim E_J/N^2$.

Dans ce chapitre, nous allons commencer par modéliser le couplage d'un atome unique avec une onde électromagnétique résonnante ou quasi-

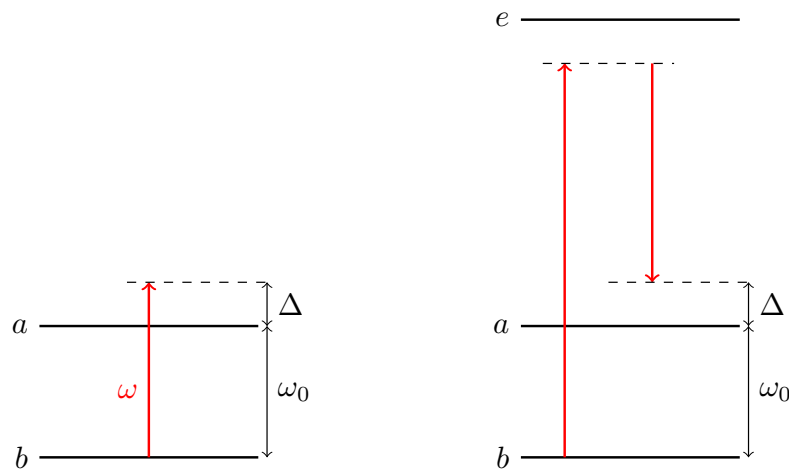


FIGURE IV.1. Couplage quasi-résonnant entre les deux états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ issus du niveau électronique fondamental. L'excitation peut être directe par une micro-onde (gauche), ou indirecte par un processus Raman stimulé, impliquant le passage virtuel par le niveau électronique excité $|e\rangle$ (droite).

résonnante. Nous adopterons un modèle d'atome à deux niveaux, décrit par un pseudo-spin $1/2$. Nous passerons ensuite au cas de N atomes occupant tous la même fonction d'onde spatiale, de sorte que seul le degré de liberté interne joue un rôle. Dans cette approximation du mode spatial unique, les N atomes peuvent être décrits comme un moment cinétique $J = N/2$, suivant la représentation de Schwinger que nous détaillerons. Nous vérifierons que la limite classique de cette représentation permet de retrouver les équations de Josephson. Nous étudierons pour finir les états stationnaires des jonctions internes et nous montrerons pourquoi la non-linéarité des équations du mouvement peut faire apparaître une transition de phase pour une valeur critique du rapport $E_C/(E_J/N^2)$.

1 Préliminaire : l'atome habillé

1-1 Système à deux niveaux et couplage cohérent

Considérons un atome modélisé par un système "à deux niveaux", notés $|a\rangle$ et $|b\rangle$ et séparés par l'énergie $\hbar\omega_0 > 0$ (figure IV.1). Cet atome est décrit par l'hamiltonien¹

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} (|a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b|) = \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z. \quad (\text{IV.2})$$

On couple ces deux niveaux par un potentiel monochromatique de fréquence ω :

$$\begin{aligned} \hat{V}(t) &= -\hbar\Omega \cos(\omega t + \gamma) (|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|), \\ &= -\hbar\Omega \cos(\omega t + \gamma) \hat{\sigma}_x, \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

où Ω est appelée *fréquence de Rabi* du couplage, prise ici positive par convention. En pratique, la paire d'états $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ que nous rencontrerons dans ce cours sera choisie à l'intérieur du niveau électronique fondamental. Le couplage cohérent \hat{V} sera induit par une onde radio-fréquence ou micro-onde, ou encore par une transition Raman, c'est-à-dire l'absorption d'un photon à une longueur d'onde optique suivie de l'émission stimulée d'un autre photon de fréquence voisine.

L'évolution d'un état quelconque du système à deux niveaux, noté

$$|\psi(t)\rangle = \alpha_a(t) |a\rangle + \alpha_b(t) |b\rangle, \quad (\text{IV.4})$$

est donné par l'équation de Schrödinger $i\hbar|\dot{\psi}\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{V})|\psi\rangle$, ce qui donne :

$$\begin{cases} i\dot{\alpha}_a = +\frac{\omega_0}{2}\alpha_a - \Omega \cos(\omega t + \gamma)\alpha_b \\ i\dot{\alpha}_b = -\frac{\omega_0}{2}\alpha_b - \Omega \cos(\omega t + \gamma)\alpha_a \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

1. Toutes les matrices de cette section sont écrites dans la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ et on rappelle l'expression des matrices de Pauli :

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.1})$$

Ce système différentiel dépendant du temps n'admet pas de solution analytique exacte, mais nous allons pouvoir le simplifier et le résoudre grâce à l'approximation du champ tournant (*Rotative wave approximation, RWA*).

1-2 Approximation du champ tournant

Pour Ω nulle, l'évolution "naturelle" des coefficients α_a et α_b est

$$\alpha_a(t) = \alpha_a(0) e^{-i\omega_0 t/2} \quad \alpha_b(t) = \alpha_b(0) e^{+i\omega_0 t/2}. \quad (\text{IV.6})$$

Nous allons supposer dans tout ce qui suit que la fréquence de Rabi Ω et le désaccord à résonance Δ sont tous les deux petits devant la fréquence ω_0 :

$$\Delta \equiv \omega - \omega_0 : \quad \Omega, |\Delta| \ll \omega_0 \approx \omega. \quad (\text{IV.7})$$

Dans ces conditions, on peut simplifier le système différentiel (IV.5) pour ne garder que la partie résonante du couplage. Plus précisément, on écrit :

$$\cos(\omega t + \gamma) = \frac{1}{2} (e^{i(\omega t + \gamma)} + e^{-i(\omega t + \gamma)}) \quad (\text{IV.8})$$

et on ne garde dans l'équation d'évolution de α_a que le terme $e^{-i(\omega t + \gamma)}$ qui, quand on le multiplie par $\alpha_b(t)$, donne un terme en $\sim e^{-i\omega t/2}$. Pour l'équation d'évolution de α_b , on ne garde au contraire que le terme $e^{+i(\omega t + \gamma)}$, ce qui conduit au système

$$\begin{cases} i\dot{\alpha}_a = +\frac{\omega_0}{2}\alpha_a - \frac{\Omega}{2}e^{-i(\omega t + \gamma)}\alpha_b \\ i\dot{\alpha}_b = -\frac{\omega_0}{2}\alpha_b - \frac{\Omega}{2}e^{i(\omega t + \gamma)}\alpha_a \end{cases}. \quad (\text{IV.9})$$

Pour trouver la solution exacte de ce système, on utilise le changement de fonctions :

$$\beta_a(t) = \alpha_a(t) e^{+i\omega t/2} \quad \beta_b(t) = \alpha_b(t) e^{-i\omega t/2} \quad (\text{IV.10})$$

qui obéissent au système différentiel indépendant du temps :

$$\begin{cases} i\dot{\beta}_a = -\frac{\Delta}{2}\beta_a - \frac{\Omega e^{-i\gamma}}{2}\beta_b \\ i\dot{\beta}_b = +\frac{\Delta}{2}\beta_b - \frac{\Omega e^{+i\gamma}}{2}\beta_a \end{cases}. \quad (\text{IV.11})$$

Ce système peut être vu comme l'équation de Schrödinger pour un système à deux niveaux évoluant sous l'effet d'un hamiltonien indépendant du temps qui s'écrit dans la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \Omega e^{-i\gamma} \\ \Omega e^{+i\gamma} & -\Delta \end{pmatrix} \quad (\text{IV.12})$$

ou encore

$$\hat{H} = -\hbar\Omega \left(\hat{S}_x \cos \gamma + \hat{S}_y \sin \gamma \right) - \hbar\Delta \hat{S}_z \quad (\text{IV.13})$$

où les trois opérateurs de spin \hat{S}_j , $j = x, y, z$ sont reliés aux trois matrices de Pauli par

$$\hat{S}_j = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_j. \quad (\text{IV.14})$$

Convention sur les opérateur de spins. Dans l'équation (IV.14), nous avons supposé que l'opérateur de spin \hat{S} était sans dimension, de sorte que ses relations de commutation sont du type

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hat{S}_z, \quad (\text{IV.15})$$

avec les deux relations qui s'en déduisent par permutation circulaire. On peut revenir aux opérateurs dimensionnés conventionnels, en les multipliant par \hbar , ce qui conduit à remplacer le membre de droite de (IV.15) par $i\hbar\hat{S}_z$.

1-3 États habillés et sphère de Bloch

Puisque nous nous sommes ramenés à l'étude de l'évolution d'un système à deux niveaux sous l'effet de l'hamiltonien indépendant du temps (IV.12), il est naturel de rechercher les états propres de cet hamiltonien. Introduisons l'angle θ défini par

$$\cos \theta = \frac{\Delta}{\tilde{\Omega}} \quad \sin \theta = \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} \quad \text{avec} \quad \tilde{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}. \quad (\text{IV.16})$$

Comme la fréquence de Rabi Ω est prise ici positive, l'angle θ peut être choisi entre 0 et π . L'hamiltonien (IV.12) se réécrit :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar\tilde{\Omega}}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\gamma} \sin \theta \\ e^{i\gamma} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

ses énergies propres sont

$$\boxed{E_1 = -\frac{\hbar\tilde{\Omega}}{2} \quad E_2 = +\frac{\hbar\tilde{\Omega}}{2}} \quad (\text{IV.18})$$

et les états propres associés sont dans la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$:

$$\boxed{|1\rangle = \begin{pmatrix} C \\ e^{i\gamma}S \end{pmatrix} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} S \\ -C e^{i\gamma} \end{pmatrix}} \quad (\text{IV.19})$$

où on a posé

$$C = \cos \frac{\theta}{2} \quad S = \sin \frac{\theta}{2}. \quad (\text{IV.20})$$

L'état $|1\rangle$ est toujours l'état propre de plus basse énergie.

Une visualisation géométrique commode d'un état $|\psi\rangle$ d'un système à deux niveaux (i.e. un *qubit*) consiste à le représenter par un point à la surface d'une sphère, appelée *sphère de Bloch*. Plus précisément, on calcule les trois valeurs moyennes $\langle\psi|\hat{\sigma}_j|\psi\rangle$, ce qui donne un vecteur de norme 1 que l'on reporte sur la sphère. Pour l'état habillé $|1\rangle$ donné en (IV.19), on trouve ainsi les trois composantes $(\sin\theta\cos\gamma, \sin\theta\sin\gamma, \cos\theta)$, de sorte que le point correspondant a pour colatitude θ et pour azimuth γ . Le point représentant l'état $|2\rangle$ est diamétralement opposé à celui représentant $|1\rangle$.

Il est utile pour la suite d'avoir en tête quelques cas particuliers (cf. figure IV.2) :

Cas résonnant : $\Delta = 0$. Les états propres sont alors localisés sur l'équateur de la sphère de Bloch ($\theta = \pi/2$) :

$$\Delta = 0 : \quad |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\gamma} \end{pmatrix} \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\gamma} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.21})$$

et ils ont pour énergies $\mp\hbar\Omega/2$.

Désaccord grand et positif : $\Delta \gg \Omega$. L'angle θ est proche de 0, de sorte que l'état $|1\rangle$ est alors proche de $|a\rangle$ et l'état $|2\rangle$ est proche de $|b\rangle$:

$$\Delta > 0 \text{ et } \Delta \gg \Omega : \quad \begin{cases} |1\rangle \approx |a\rangle & E_1 \approx -\hbar\Delta/2 \\ |2\rangle \approx |b\rangle & E_2 \approx +\hbar\Delta/2 \end{cases} \quad (\text{IV.22})$$

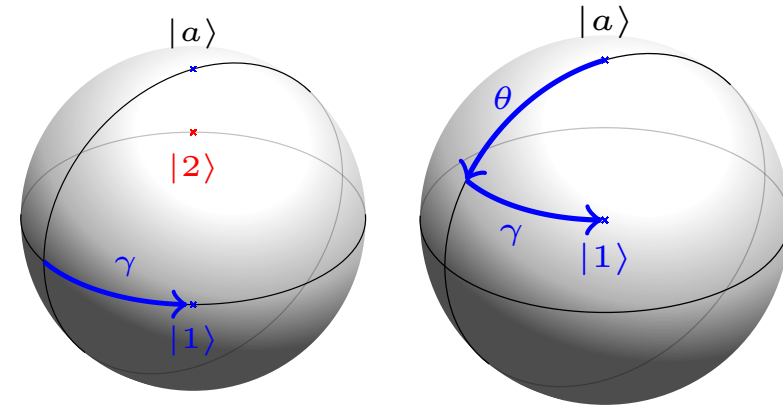


FIGURE IV.2. *Sphère de Bloch et états habillés dans le cas résonnant ($\Delta = 0$) à gauche et de cas d'un désaccord positif à droite. Les états "nus" $|a\rangle$ et $|b\rangle$ sont situés respectivement au pôle nord et au pôle sud de la sphère. Les états habillés $|1\rangle$ et $|2\rangle$ sont toujours diamétralement opposés, l'état $|1\rangle$ est de coordonnées (θ, γ) et l'état $|2\rangle$ de coordonnées $(\pi - \theta, \gamma + \pi)$.*

Désaccord grand et négatif : $|\Delta| \gg \Omega$. L'angle θ est proche de π , de sorte que l'état $|1\rangle$ est alors proche de $|b\rangle$ et l'état $|2\rangle$ est proche de $|a\rangle$:

$$\Delta < 0 \text{ et } |\Delta| \gg \Omega : \quad \begin{cases} |1\rangle \approx |b\rangle & E_1 \approx -\hbar|\Delta|/2 \\ |2\rangle \approx |a\rangle & E_2 \approx +\hbar|\Delta|/2 \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

Hiérarchie des états. On pourrait s'étonner de voir que pour $\Delta \gg \Omega > 0$, l'état habillé $|1\rangle$ peut être à la fois proche de $|a\rangle$ et constituer l'état de plus basse énergie, alors que l'état $|a\rangle$ a manifestement une énergie supérieure à $|b\rangle$ sur la figure IV.1. Ce paradoxe apparent est dû au passage dans le référentiel tournant. Il se résout simplement si on traite quantiquement le champ micro-onde. On doit alors comparer les énergies de $|1\rangle \approx |a, n\rangle$ et $|2\rangle = |b, n+1\rangle$, où n désigne le nombre de photons dans le champ, et on en déduit immédiatement la hiérarchie des énergies donnée ci-dessus.

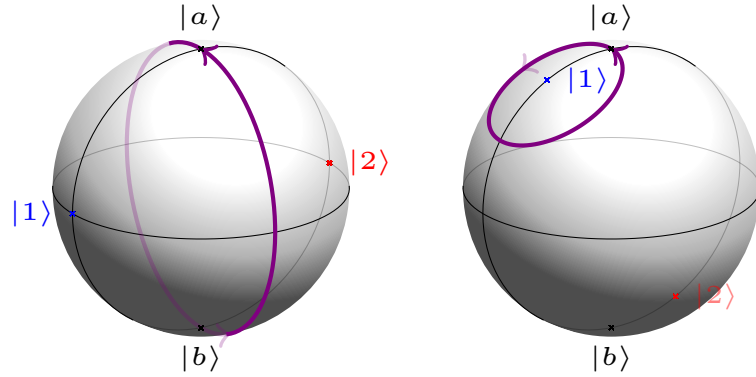


FIGURE IV.3. Trajectoire suivie sur la sphère de Bloch dans le cas résonnant ($\Delta = 0$) à gauche et dans le cas $\Delta > 0$ à droite. La trajectoire est toujours située sur un cercle orthogonal à l'axe passant par les états habillés $|1\rangle$ et $|2\rangle$. On a pris ici $\gamma = 0$ et $|\psi(0)\rangle = |a\rangle$.

1-4 Évolution cohérente et préparation d'un état habillé

Considérons pour commencer le cas particulier d'une excitation résonnante ($\Delta = 0$), avec le choix de phase $\gamma = 0$. Les états habillés sont situés sur l'équateur aux longitudes 0 et π et le système (IV.11) s'écrit

$$i\dot{\beta}_a = -\frac{\Omega}{2}\beta_b \quad i\dot{\beta}_b = -\frac{\Omega}{2}\beta_a. \quad (\text{IV.24})$$

Supposons que le système dans l'état $|a\rangle$ à l'instant initial ; l'état à l'instant t est :

$$\beta_a(t) = \cos \frac{\Omega t}{2} \quad \beta_b(t) = i \sin \frac{\Omega t}{2} \quad (\text{IV.25})$$

ce qui correspond sur la sphère de Bloch à un mouvement circulaire le long du méridien de longitude $\pi/2$. Ce mouvement correspond donc à une rotation autour de l'axe passant par les deux états habillés (figure IV.3).

Plus généralement, pour toute valeur du triplet (Δ, Ω, γ) , un état initial

$|\psi(0)\rangle$ peut se décomposer sur la base des états habillés

$$|\psi(0)\rangle = c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle \quad (\text{IV.26})$$

et son évolution est ensuite donnée par :

$$|\psi(t)\rangle = c_1 e^{+i\tilde{\Omega}t/2} |1\rangle + c_2 e^{-i\tilde{\Omega}t/2} |2\rangle. \quad (\text{IV.27})$$

Cela correspond à un mouvement circulaire uniforme sur la surface de la sphère de Bloch, autour de l'axe joignant les deux états habillés. Les probabilités d'occupation des états habillés, p_1 et p_2 , restent constantes au cours de l'évolution et la fréquence angulaire de ce mouvement est égale à $\tilde{\Omega}$.

Dans la suite de ce cours, nous décrivons des expériences où il faut préparer le système dans un état habillé donné, $|1\rangle$ ou $|2\rangle$, pour un triplet (Δ, Ω, γ) . Pour cela, on peut envisager deux classes de méthodes :

- La première consiste à effectuer un suivi adiabatique : on prépare le système dans l'état nu $|a\rangle$ ou $|b\rangle$, avec le couplage cohérent fortement désaccordé : $|\Delta_{\text{ini}}| \gg \Omega$. Les états habillés coïncident alors quasiment avec les états nus. On diminue ensuite lentement le désaccord pour l'amener à la valeur voulue Δ .
- La seconde méthode consiste à partir d'un autre triplet bien choisi $(\Delta', \Omega', \gamma')$, effectuer une fraction de tour sur le cercle correspondant (cf. figure IV.3) en s'arrangeant pour que ce cercle passe par l'état habillé désiré. À l'instant où l'état $|\psi(t)\rangle$ coïncide avec l'état habillé, on change soudainement le triplet à la valeur souhaitée (Δ, Ω, γ) et le système reste ensuite dans cet état stationnaire. Par exemple, si on veut préparer l'état habillé $|1\rangle$ à résonance pour la phase $\gamma = 0$, on peut partir de $|a\rangle$, appliquer le couplage $(\Delta' = 0, \Omega' = \Omega, \gamma' = \pi/2)$, puis faire passer soudainement la phase à $\gamma = 0$ après un quart d'oscillation de Rabi (pulse $\pi/2$), c'est-à-dire quand l'état est arrivé sur l'équateur de la sphère de Bloch.

2 L'approximation du mode spatial unique

Nous nous intéressons maintenant au cas de N atomes identiques (bosons) avec deux états internes $|a\rangle$ et $|b\rangle$, couplés de manière cohérente

comme au paragraphe précédent. Nous allons considérer la situation la plus simple où tous les degrés de liberté spatiaux des atomes sont gelés grâce à un fort confinement. La seule dynamique possible est donc celle portant sur l'état interne.

Nous reprenons le couplage atome – champ cohérent décrit en §1 en prenant pour simplifier la phase γ égale à 0 (cela revient à faire le choix approprié pour l'orientation de l'axe x de la sphère de Bloch), ce qui donne pour un atome unique :

$$\hat{H}_{\text{coh}} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \Omega \\ \Omega & -\Delta \end{pmatrix} = -\hbar\Omega \hat{S}_x - \hbar\Delta \hat{S}_z \quad (\text{IV.28})$$

2-1 Hamiltonien en seconde quantification

On considère un système de particules identiques bosoniques, pouvant chacune occuper les deux états $|a\rangle$ et $|b\rangle$. Une base de l'espace de Hilbert du problème est donc formée par les états $|N_a, N_b\rangle$, avec N_a particules dans l'état $|a\rangle$ et N_b particules dans l'état $|b\rangle$ ($N_{a,b} \in \mathbb{N}$). Si on dispose de N particules au total avec la possibilité de transférer les particules de l'état $|a\rangle$ vers l'état $|b\rangle$, la dimension de l'espace de Hilbert est donc $N + 1$ avec la base :

$$\{|N, 0\rangle, |N-1, 1\rangle, \dots, |1, N-1\rangle, |0, N\rangle\}. \quad (\text{IV.29})$$

Dans le formalisme de la seconde quantification, on introduit les opérateurs création \hat{a}^\dagger et \hat{b}^\dagger , et les opérateurs destruction associés \hat{a} et \hat{b} , caractérisés par leur action sur la base $\{|N_a, N_b\rangle\}$:

$$\begin{cases} \hat{a}^\dagger |N_a, N_b\rangle = \sqrt{N_a + 1} |N_a + 1, N_b\rangle \\ \hat{b}^\dagger |N_a, N_b\rangle = \sqrt{N_b + 1} |N_a, N_b + 1\rangle \end{cases} \quad (\text{IV.30})$$

et

$$\begin{cases} \hat{a} |N_a, N_b\rangle = \sqrt{N_a} |N_a - 1, N_b\rangle \text{ si } N_a \neq 0, & \hat{a} |0, N_b\rangle = 0 \\ \hat{b} |N_a, N_b\rangle = \sqrt{N_b} |N_a, N_b - 1\rangle \text{ si } N_b \neq 0, & \hat{b} |N_a, 0\rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.31})$$

Les opérateurs nombre de particules dans les états a et b sont donnés par :

$$\hat{N}_a = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad \hat{N}_b = \hat{b}^\dagger \hat{b} \quad (\text{IV.32})$$

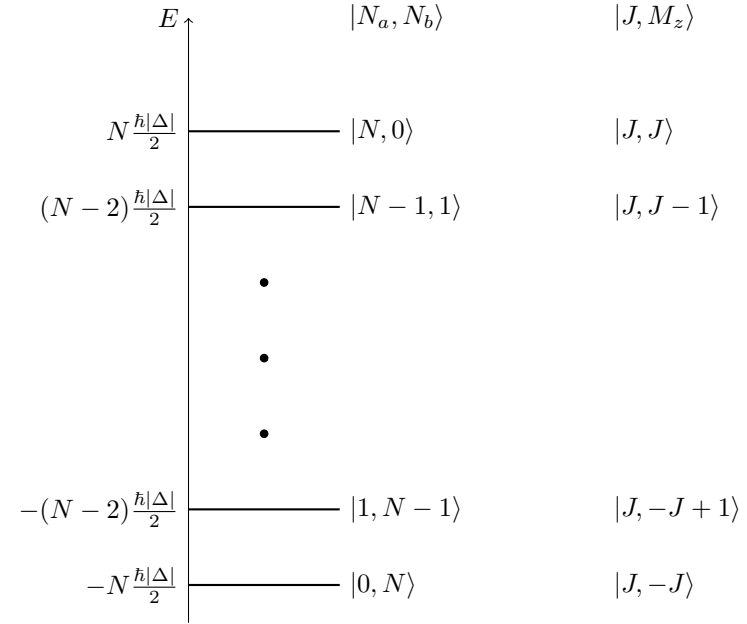


FIGURE IV.4. Niveaux d'énergie de (IV.34) pour $\Omega = 0$. Les états propres indiqués correspondent au cas $\Delta < 0$, pour lequel l'énergie de l'état $|a\rangle$ (dans le référentiel tournant associé à la RWA) est supérieure à l'énergie de l'état $|b\rangle$.

et l'opérateur $\hat{N} = \hat{N}_a + \hat{N}_b$ est une constante du mouvement : il commute avec tous les hamiltoniens que nous serons amenés à considérer car le nombre total de particules est conservé.

Les états $|N_a, N_b\rangle$ se construisent par action des opérateurs \hat{a}^\dagger et \hat{b}^\dagger sur l'état vide $|0, 0\rangle$:

$$|N_a, N_b\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^{N_a} (\hat{b}^\dagger)^{N_b}}{\sqrt{N_a!} \sqrt{N_b!}} |0, 0\rangle \quad (\text{IV.33})$$

Dans ce formalisme de seconde quantification, l'hamiltonien (IV.28) décrivant le couplage atome-champ s'écrit

$$\hat{H}_{\text{coh}} = -\frac{\hbar\Omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger) - \frac{\hbar\Delta}{2} (\hat{N}_a - \hat{N}_b). \quad (\text{IV.34})$$

Les niveaux d'énergie correspondants sont indiqués sur la figure IV.4 dans le cas particulier $\Omega = 0, \Delta < 0$.

2-2 Représentation de Schwinger

Il est utile de disposer d'une représentation de ce problème en termes d'opérateurs de moment cinétique (Schwinger, 1952). Introduisons les trois opérateurs

$$\begin{cases} \hat{J}_x = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger) \\ \hat{J}_y = \frac{i}{2} (\hat{a} \hat{b}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{b}) \\ \hat{J}_z = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}) \end{cases} \quad (\text{IV.35})$$

qui vérifient les règles de commutation d'un opérateur moment cinétique :

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i \hat{J}_z \quad (\text{IV.36})$$

et les deux autres relations déduites par permutation circulaire (rappelons que nous choisissons ici des opérateurs de spin sans dimension, cf. §1-2). On a par ailleurs :

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 = \frac{\hat{N}}{2} \left(\frac{\hat{N}}{2} + 1 \right). \quad (\text{IV.37})$$

Puisque chaque atome est assimilé à un spin 1/2, la valeur trouvée pour \hat{J}^2 indique que nous travaillons ici dans l'espace de spin $J = N/2$, c'est-à-dire la valeur maximale que l'on peut obtenir en additionnant les N spins. Une base de l'espace de Hilbert, qui est de dimension $N + 1 = 2J + 1$, est donnée par les états $|J, M_z\rangle$, c'est-à-dire les états propres de \hat{J}^2 et \hat{J}_z avec les valeurs propres $J(J + 1)$ et $M_z \in \{-J, \dots, +J\}$. Le lien avec la base $|N_a, N_b\rangle$ est immédiat (figure IV.4) :

$$|J, M_z\rangle = |N_a, N_b\rangle \quad \text{avec} \quad J = \frac{1}{2}(N_a + N_b), \quad M_z = \frac{1}{2}(N_a - N_b) \quad (\text{IV.38})$$

ce qui permet de construire explicitement les états $|J, M_z\rangle$ à partir de (IV.33) :

$$|J, M_z\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^{J+M_z}}{\sqrt{(J+M_z)!}} \frac{(\hat{b}^\dagger)^{J-M_z}}{\sqrt{(J-M_z)!}} |0, 0\rangle \quad (\text{IV.39})$$

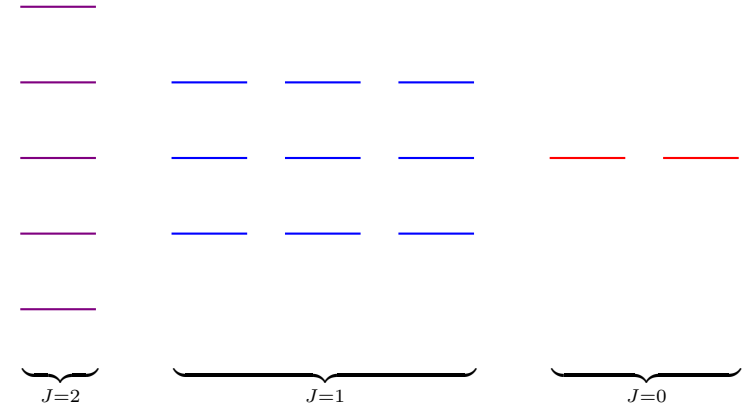


FIGURE IV.5. Représentation de l'espace de Hilbert de $N = 4$ spins 1/2, de dimension $2^N = 16$. On travaille ici dans le sous-espace des états complètement symétriques (colonne de gauche), de dimension $2J + 1 = N + 1$, associé au moment cinétique $J = N/2$. L'espace total se décompose en ce sous-espace de moment cinétique $J = 2$, et des sous-espaces associés à des moments cinétiques $J = 1$ et $J = 0$. Ces derniers ne joueront pas de rôle dans ce qui suit.

On vérifie par exemple que l'opérateur échelle,

$$\hat{J}_+ \equiv \hat{J}_x + i \hat{J}_y = \hat{a}^\dagger \hat{b} \quad (\text{IV.40})$$

agit sur un état $|J, M_z\rangle = |N_a, N_b\rangle$ selon

$$\hat{J}_+ |J, M_z\rangle = \alpha |J, M_z + 1\rangle \quad (\text{IV.41})$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= [J(J + 1) - M_z(M_z + 1)]^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} [(N_a + N_b)(N_a + N_b + 2) - (N_a - N_b)(N_a - N_b + 2)]^{1/2} \\ &= \sqrt{(N_a + 1)N_b}. \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

Cette construction, proposée par Schwinger en 1952, est très commode pour aborder l'algèbre d'un moment cinétique quelconque (les opérateurs

de rotation par exemple) à partir de celle d'un spin 1/2. L'espace de Hilbert dans lequel on travaille, de dimension $N + 1$, est bien sûr beaucoup plus petit que l'espace total associé à N spins 1/2, de dimension 2^N (figure² IV.5), car on se restreint ici aux états complètement symétriques des spins. Partant par exemple de $|N_a = N, N_b = 0\rangle = |J = N/2, J_z = N/2\rangle$, ces états complètement symétriques sont les seuls que l'on peut atteindre par action d'opérateurs symétriques comme \hat{J}_x ou \hat{J}_z .

Si on pouvait agir de manière différenciée sur les spins individuels, ce sous-espace constitué par les états complètement symétriques ne serait pas suffisant et il faudrait travailler dans l'espace total, de dimension 2^N . En l'occurrence, puisque nous nous intéressons à N particules bosoniques indiscernables occupant toutes le même mode spatial, l'état de spin de ces particules doit être complètement symétrique.

L'hamiltonien (IV.34) décrivant le couplage des N atomes avec le champ s'écrit avec ces opérateurs

$$\hat{H}_{\text{coh}} = -\hbar\Omega\hat{J}_x - \hbar\Delta\hat{J}_z \quad (\text{IV.43})$$

ce qui est une généralisation immédiate de (IV.28), en remplaçant l'opérateur \hat{S} pour un spin 1/2 par \hat{J} pour une assemblée de spins.

2-3 Le terme d'interaction

Nous allons maintenant prendre en compte les interactions binaires entre atomes qui vont venir modifier considérablement la dynamique par rapport à celle étudiée en §1 pour un atome unique.

Nous rappelons que pour un condensat placé dans un état interne donné et dans l'état externe décrit par la fonction d'onde $\Phi(\mathbf{r})$, l'énergie

2. La décomposition représentée sur cette figure est obtenue à partir de la procédure suivante. On commence par utiliser la décomposition de l'espace produit tensoriel de deux spins 1/2 en une somme directe d'un espace associé à un spin 1 (triplet) et un espace associé à un spin 0 (singulet). En notant a, b, c, d les quatre spins 1/2 de départ, cette décomposition peut se noter symboliquement comme $2_a \otimes 2_b = 3_{ab} \oplus 1_{ab}$ et $2_c \otimes 2_d = 3_{cd} \oplus 1_{cd}$. On couple ensuite les moments cinétiques des espaces (ab) et (cd) entre eux; le couplage des deux états triplets donne ainsi naissance à un espace de spin 2, un espace de spin 1 et un espace de spin 0, ce qui s'écrit formellement $3_{ab} \otimes 3_{cd} = 5_{abcd} \oplus 3_{abcd} \oplus 1_{abcd}$. On procède même avec les couplages triplet-singulet et singulet-singulet, ce qui donne $3_{ab} \otimes 1_{cd} = 3'_{abcd}$, $1_{ab} \otimes 3_{cd} = 3''_{abcd}$ et $1_{ab} \otimes 1_{cd} = 1'_{abcd}$, d'où le résultat final.

d'interaction s'écrit dans une description champ moyen

$$E_{\text{int}} = \frac{1}{2}gN^2 \int |\Phi(\mathbf{r})|^4 d^3r \quad \text{avec} \quad \int |\Phi(\mathbf{r})|^2 d^3r = 1, \quad (\text{IV.44})$$

où la constante g est reliée à la longueur de diffusion a_s par $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$.

Si les atomes peuvent être préparés dans deux états internes a et b , il faut trois coefficients pour décrire les interactions binaires possibles

- Les deux coefficients intra-espèce g_{aa} et g_{bb}
- Le coefficient inter-espèce g_{ab} .

Nous nous plaçons toujours dans l'approximation du mode externe unique : nous supposons que l'état externe des atomes est décrit par la même fonction d'onde spatiale $\Phi(\mathbf{r})$, qu'ils occupent l'état interne a , l'état interne b ou une superposition des deux. Dans ces conditions, l'énergie d'interaction du gaz préparé dans l'état $|N_a, N_b\rangle$ s'écrit

$$E_{\text{int}} = \frac{\mathcal{I}}{2} (g_{aa}N_a^2 + 2g_{ab}N_aN_b + g_{bb}N_b^2) \quad \text{avec} \quad \mathcal{I} = \int |\Phi(\mathbf{r})|^4 d^3r \quad (\text{IV.45})$$

ce qui correspond en seconde quantification à l'opérateur

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{\mathcal{I}}{2} (g_{aa}\hat{N}_a^2 + 2g_{ab}\hat{N}_a\hat{N}_b + g_{bb}\hat{N}_b^2). \quad (\text{IV.46})$$

Pour un gaz de densité uniforme dans un volume \mathcal{V} , la fonction d'onde normalisée $\Phi(\mathbf{r})$ est égale à $1/\sqrt{\mathcal{V}}$ et l'intégrale \mathcal{I} est donnée par $\mathcal{I} = 1/\mathcal{V}$.

Considérons par exemple un gaz préparé dans l'état habillé $|1\rangle$ (celui de plus basse énergie défini en (IV.19)), qui a pour amplitudes $C = \cos(\theta/2)$ et $S = \sin(\theta/2)$ sur a et sur b . Ces amplitudes correspondent à $N_a = NC^2$ et $N_b = NS^2$, d'où l'énergie de champ moyen

$$E_{\text{chp.moy.}} = \frac{\mathcal{I}}{2}g_{11}N^2 \quad \text{avec} \quad g_{11} = C^4g_{aa} + 2S^2C^2g_{ab} + S^4g_{bb}. \quad (\text{IV.47})$$

Nous montrons dans l'appendice de ce chapitre que l'on peut retrouver ce résultat, obtenu ici par une approche de champ moyen, en étudiant une collision entre deux atomes habillés préparés dans l'état $|1\rangle$.

Pour la suite, il est utile de réécrire l'hamiltonien \hat{H}_{int} en fonction des opérateurs moment cinétique \hat{J} introduit plus haut. Utilisons

$$\hat{N}_a = \frac{N}{2} + \hat{J}_z \quad \hat{N}_b = \frac{N}{2} - \hat{J}_z \quad (\text{IV.48})$$

où le spectre de \hat{J}_z s'étend de $-N/2$ à $N/2$. On peut mettre cet hamiltonien sous la forme

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2}\bar{g}N^2\mathcal{I} + \hbar\Delta_{\text{int}}\hat{J}_z + \frac{E_C}{2}\hat{J}_z^2. \quad (\text{IV.49})$$

Pour le premier terme, nous avons défini le paramètre d'interaction moyen

$$\bar{g} \equiv \frac{1}{4}(g_{aa} + 2g_{ab} + g_{bb}). \quad (\text{IV.50})$$

Pour les petits écarts à la jonction équilibrée ($|\langle J_z \rangle| \ll N$), ce premier terme est dominant, mais il est constant. Nous l'omettrons donc dans la suite. Dans le deuxième terme, nous avons introduit le désaccord lié aux interactions

$$\hbar\Delta_{\text{int}} \equiv \frac{1}{2}N\mathcal{I}(g_{aa} - g_{bb}). \quad (\text{IV.51})$$

Enfin, nous avons posé pour le troisième terme

$$E_C \equiv \mathcal{I}(g_{aa} + g_{bb} - 2g_{ab}). \quad (\text{IV.52})$$

Le choix de la notation E_C n'est bien sûr pas anodin, et nous verrons que ce paramètre joue le même rôle que l'énergie de charge pour une jonction externe.

Nous pouvons maintenant écrire (à une constante additive près) l'hamiltonien total, somme du couplage cohérent \hat{H}_{coh} et de l'interaction \hat{H}_{int} :

$$\hat{H} = -\hbar\Omega \hat{J}_x - \hbar\tilde{\Delta} \hat{J}_z + \frac{E_C}{2} \hat{J}_z^2 \quad (\text{IV.53})$$

où nous avons réintégré le désaccord lié aux interactions Δ_{int} dans la définition du désaccord :

$$\tilde{\Delta} \equiv \Delta - \Delta_{\text{int}}. \quad (\text{IV.54})$$

L'hamiltonien (IV.53) est connu sous le nom de modèle de Lipkin-Meshkov-Glick (LIPKIN, MESHKOV et al. 1965) et il admet dans certains cas des solutions exactes. Ces auteurs l'ont initialement proposé comme un banc d'essai pour tester différentes méthodes d'approximation, notamment en physique nucléaire. Il a récemment été étudié dans le régime quantique et avec des systèmes atomiques par LANYON, HEMPEL et al. (2011), ISLAM, EDWARDS et al. (2011) et MAKHALOV, SATOOR et al. (2019).

3 La jonction Josephson retrouvée

3-1 L'approximation classique

Une fois connu l'hamiltonien \hat{H} , on peut en déduire les équations du mouvement en point de vue de Heisenberg. Rappelons que dans ce point de vue, l'état du système est indépendant du temps et ce sont les opérateurs qui évoluent dans le temps.

En utilisant la forme générale pour l'évolution d'un opérateur \hat{O} :

$$i\hbar \frac{d\hat{O}}{dt} = [\hat{O}, \hat{H}] \quad (\text{IV.55})$$

on trouve pour les trois composantes du moment cinétique $\hat{\mathcal{J}}$:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{J}_x}{dt} = \bar{\Delta}\hat{J}_y - \frac{E_C}{2\hbar}(\hat{J}_y\hat{J}_z + \hat{J}_z\hat{J}_y) \\ \frac{d\hat{J}_y}{dt} = \Omega\hat{J}_z - \bar{\Delta}\hat{J}_x + \frac{E_C}{2\hbar}(\hat{J}_x\hat{J}_z + \hat{J}_z\hat{J}_x) \\ \frac{d\hat{J}_z}{dt} = -\Omega\hat{J}_y \end{cases} \quad (\text{IV.56})$$

Nous allons maintenant prendre la moyenne de ces équations de Heisenberg sur l'état du système, en supposant que cet état est tel qu'on peut négliger les corrélations entre les différentes composantes de $\hat{\mathcal{J}}$:

$$\langle \hat{J}_y \hat{J}_z \rangle \approx \langle \hat{J}_y \rangle \langle \hat{J}_z \rangle \quad (\text{IV.57})$$

et les deux autres relations déduites par permutation circulaire. Cela revient à remplacer les opérateurs \hat{J}_i par leur valeur moyenne $J_i = \langle \hat{J}_i \rangle$ dans les équations d'évolution ci-dessus

$$\begin{cases} \frac{dJ_x}{dt} = \bar{\Delta}J_y - \frac{E_C}{\hbar}J_yJ_z \\ \frac{dJ_y}{dt} = \Omega J_z - \bar{\Delta}J_x + \frac{E_C}{\hbar}J_xJ_z \\ \frac{dJ_z}{dt} = -\Omega J_y \end{cases} \quad (\text{IV.58})$$

Nous allons montrer au paragraphe suivant que ces trois équations couplées sont équivalentes à celles décrivant une jonction Josephson.

Auparavant, revenons brièvement sur cette approximation classique. Comme nous l'avons écrit, elle revient à négliger les corrélations entre les trois composantes de \mathbf{J} . Elle est raisonnable pour certains états de spin et dans la limite de grand nombres d'atomes, donc $J \gg 1$. Nous explorerons ses limites en détail dans le prochain chapitre. Pour l'instant, nous pouvons noter que cette approximation de non-corrélation entre les composantes cartésiennes de $\hat{\mathbf{J}}$ entraîne

$$\langle \hat{\mathbf{J}}^2 \rangle \approx \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle \cdot \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle. \quad (\text{IV.59})$$

Nous savons que le membre de gauche est toujours égal à $J(J+1) \approx J^2$; nous en déduisons que dans l'approximation faite ici, le vecteur $\langle \hat{\mathbf{J}} \rangle$ est de norme J . Cette condition est effectivement réalisée pour les états $|M_i = J\rangle$ pour $i = x, y, z$ et plus généralement pour tous les états de type $|M_u = J\rangle$, où le vecteur \mathbf{u} définit un axe de quantification arbitraire. Dans la suite de ce paragraphe, nous allons nous intéresser exclusivement à ce type d'états.

De façon générale, cette approximation classique ne peut donner que les termes dominants pour une puissance de $\hat{\mathbf{J}}$ donnée. Par exemple, si on voit apparaître le produit d'opérateurs $\hat{J}_x \hat{J}_y$ dans un calcul, le résultat classique $\langle \hat{J}_x \hat{J}_y \rangle \approx \langle \hat{J}_x \rangle \langle \hat{J}_y \rangle$ donnera correctement le terme d'ordre J^2 ; mais si dans ce calcul, ce produit d'opérateurs n'apparaît que sous la forme $\hat{J}_x \hat{J}_y - \hat{J}_y \hat{J}_x$, l'utilisation "brutale" de l'approximation classique donnera zéro alors que l'on sait que ce commutateur est égal à $i\hat{J}_z$, donc une contribution d'ordre 1 en J .

3-2 Équations du mouvement

Puisque nous considérons des états tels que le moment cinétique moyen $\mathbf{J} = \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle$ a une longueur J , nous allons choisir une paramétrisation appropriée de ce vecteur, qui va nous permettre de retrouver les équations de la jonction externe. Pour cela, nous revenons à la définition des trois composantes de $\hat{\mathbf{J}}$ définies en (IV.35) et nous faisons la même substitution qu'au

chapitre 1 :

$$\begin{aligned} \hat{a} &\longrightarrow c_a = \sqrt{N_a} e^{i\varphi_a} \\ \hat{b} &\longrightarrow c_b = \sqrt{N_b} e^{i\varphi_b} \end{aligned} \quad (\text{IV.60})$$

Introduisons les deux variables n et φ :

$$n = \frac{1}{2}(N_a - N_b) \quad \varphi = \varphi_a - \varphi_b \quad (\text{IV.61})$$

de sorte que \mathbf{J} s'écrit :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}N\gamma(n) \cos \varphi \\ -\frac{1}{2}N\gamma(n) \sin \varphi \\ n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \gamma(n) = \sqrt{1 - \frac{4n^2}{N^2}}, \quad (\text{IV.62})$$

ce qui correspond bien à un vecteur de norme $J = N/2$.

On peut alors visualiser l'état de la jonction sur une sphère de Bloch généralisée, tracée dans l'espace (J_x, J_y, J_z) ; cette sphère a pour rayon J , l'angle azimutal de \mathbf{J} correspond (au signe près) à la différence de phase $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$ entre les deux parties de la jonction, et l'écart à l'équateur repère le déséquilibre $n = (N_a - N_b)/2$ de la jonction (figure IV.6).

Reportons maintenant cette paramétrisation dans l'équation d'évolution (IV.58). Nous obtenons le résultat suivant pour \dot{n} et $\dot{\varphi}$:

$$\begin{cases} \hbar \dot{n} = \frac{N\hbar\Omega}{2} \gamma(n) \sin \varphi \\ \hbar \dot{\varphi} = \hbar\tilde{\Delta} - nE_C + \frac{N\hbar\Omega}{2} \gamma'(n) \cos \varphi \end{cases}. \quad (\text{IV.63})$$

Nous trouvons également l'énergie déduite de (IV.53) :

$$E(\varphi, n) = -\frac{N\hbar\Omega}{2} \gamma(n) \cos \varphi - \hbar\tilde{\Delta} n + \frac{E_C}{2} n^2 \quad (\text{IV.64})$$

On reconnaît exactement les équations du mouvement et l'énergie de la jonction Josephson atomique étudiée dans les chapitres précédents avec la correspondance suivante :

$$\begin{aligned} E_J &\longleftrightarrow \frac{N\hbar\Omega}{2} \\ \overline{\Delta\mu} &\longleftrightarrow -\hbar\tilde{\Delta} \end{aligned} \quad (\text{IV.65})$$

l'énergie de charge E_C jouant le même rôle dans les deux cas.

	Jonction supraconductrice (RCSJ)	Double puits atomique	Jonction interne (Schwinger)
Paramètres	I_c $E_J = \hbar I_c / (2e)$	$E_J = \frac{1}{2} (E[\Phi_1] - E[\Phi_0])$	$E_J = \frac{1}{2} N \hbar \Omega$
	C $E_C = (2e)^2 / C$	$E_C = g (\int \Phi_a ^4 + \Phi_b ^4)$	$E_C = 2g_s \int \Phi ^4$ avec $g_s = \frac{1}{2}(g_{aa} + g_{bb}) - g_{ab}$
	R	-	-
Contrôle	I_{ext} (ou V)	déplacement de la jonction (ou $\overline{\Delta\mu}$)	Ω (ou $\tilde{\Delta}$)
Variables	φ et $Q = CV$	φ et $n = \frac{1}{2}(N_a - N_b)$	$\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ avec $J = \frac{N}{2}$ et $\hat{J}_z = \frac{1}{2}(\hat{N}_a - \hat{N}_b)$
Énergie	$\frac{E_C}{2} \left(\frac{Q}{2e}\right)^2 - E_J \cos \varphi - \frac{\hbar I_{\text{ext}}}{2e} \varphi$	$\frac{E_C}{2} n^2 - E_J \gamma(n) \cos \varphi + \overline{\Delta\mu} n$	$\frac{E_C}{2} \hat{J}_z^2 - \hbar \Omega \hat{J}_x - \hbar \tilde{\Delta} \hat{J}_z$
Dynamique	$I_{\text{ext}} = I_c \sin \varphi + \frac{V}{R} + \dot{Q}$ $\hbar \dot{\varphi} = 2eV$	$\hbar \dot{n} = E_J \gamma(n) \sin \varphi$ $\hbar \dot{\varphi} = -\overline{\Delta\mu} - n E_C + E_J \gamma'(n) \cos \varphi$	$\dot{\hat{J}}_z = -\Omega \hat{J}_y$ $i \dot{\hat{J}}_+ = \tilde{\Delta} \hat{J}_+ - \frac{E_C}{2\hbar} (\hat{J}_+ \hat{J}_z + \hat{J}_z \hat{J}_+) - \Omega \hat{J}_z$
Régime Josephson	toujours	$E_J / N^2 \ll E_C$ $\gamma(n) = 1$ $\gamma'(n) = 0$	$\hbar \Omega \ll \mu_s$ avec $\mu_s = N E_C$

TABLE IV.1. Description des principales jonctions rencontrées dans ce cours. Les jonctions supraconductrices sont principalement contrôlées par le courant extérieur I_{ext} . Pour le double puits atomique symétrique, traité ici classiquement, on a posé $\gamma(n) = \left(1 - \frac{4n^2}{N^2}\right)^{1/2}$ et $\gamma'(n)$ désigne la dérivée de $\gamma(n)$. Le cas de la jonction interne est traité ici quantiquement et présentée dans l'approximation du mode spatial unique. La ligne "Énergie" correspond au cas sans dissipation ($R = \infty$ pour la jonction supraconductrice). Le passage à la limite classique pour la jonction interne, avec $J_+ = J\gamma(n)e^{-i\varphi}$ et $J_z = n$, est possible si $E_C \ll E_J$ et permet de retrouver les résultats du double puits.

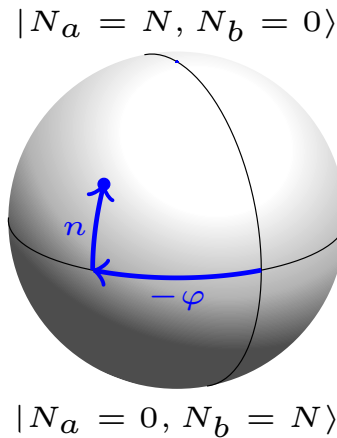


FIGURE IV.6. Sphère de rayon J permettant de visualiser l'état de la jonction selon la paramétrisation (IV.62). L'angle azimutal repère (au signe près) la différence de phase $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$ entre les états a et b et l'écart à l'équateur la différence de population $n = (N_a - N_b)/2$. Les pôles correspondent aux états $|N, 0\rangle$ et $|0, N\rangle$.

3-3 Comparaison entre jonctions internes et externes

Nous venons de montrer que dans l'approximation d'un gaz mono-mode spatialement, nos modélisations des jonctions internes et des jonctions externes sont formellement équivalentes. Cette équivalence est résumée sur le tableau IV.1. Les différences entre les deux systèmes résident dans les valeurs pratiques des paramètres. Nous allons les passer en revue, d'abord E_C , puis E_J .

La structure du terme capacitif d'une jonction interne

$$E_C = \mathcal{I}(g_{aa} + g_{bb} - 2g_{ab}) \quad (\text{IV.66})$$

ouvre des perspectives intéressantes. Bien sûr, ce terme capacitif E_C est lié aux interactions aussi bien pour une jonction externe qu'interne. Toutefois, pour une jonction externe, il ne fait intervenir qu'un seul facteur de couplage g ; les interactions entre particules à gauche et à droite de la jonction

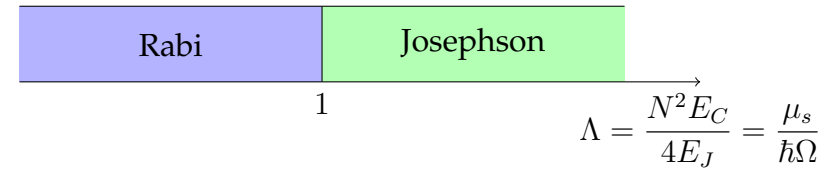


FIGURE IV.7. Séparation entre régime de Rabi et régime de Josephson.

sont négligeables, puisque ces deux zones sont séparées spatialement. Le terme E_C est généralement positif car on travaille usuellement avec des interactions répulsives³, nécessaires pour assurer la stabilité du gaz pour des jonctions étendues. Pour une jonction interne, toutes les particules sont localisées dans la même région d'espace et les interactions contribuent par l'intermédiaire de $g_{aa} + g_{bb} - 2g_{ab}$, un paramètre qui peut être aussi bien positif que négatif⁴, même si chacun des g_{ij} est choisi positif pour assurer la stabilité du fluide. Dans la littérature, on définit souvent le potentiel chimique μ_s associé aux "excitations de spin", c'est-à-dire à la dynamique interne qui nous intéresse ici :

$$\mu_s = \frac{1}{2} N E_C. \quad (\text{IV.67})$$

Pour un fluide uniforme de volume \mathcal{V} , nous avons signalé que l'intégrale \mathcal{I} était égale à $1/\mathcal{V}$. Le potentiel chimique μ_s est donc proportionnel à la densité $\rho = N/\mathcal{V}$ du fluide :

$$\text{Fluide uniforme : } \mu_s = \left[\frac{1}{2} (g_{aa} + g_{bb}) - g_{ab} \right] \rho. \quad (\text{IV.68})$$

Nous avons vu que le couplage E_J pour une jonction externe est relativement faible, puisqu'il repose sur l'effet tunnel. Pour une jonction interne, la fréquence de Rabi Ω peut être rendue arbitrairement grande (en principe) en augmentant l'intensité de la radiofréquence ou de la micro-onde

3. L'expérience de TRENKWALDER, SPAGNOLLI et al. (2016) explore néanmoins le régime attractif dans la limite de faibles interactions.

4. Notons que si $g_{ab} > \sqrt{g_{aa}g_{bb}}$, le mélange $a - b$ est non miscible si on le place dans un volume arbitrairement grand.

à l'origine du couplage entre $|a\rangle$ et $|b\rangle$. Plus précisément, nous avons mentionné à plusieurs reprises que la plupart des jonctions atomiques externes opèrent dans le "régime Josephson" (figure IV.7) :

$$\frac{4E_J}{N^2} \ll E_C. \quad (\text{IV.69})$$

En utilisant le tableau de correspondance (IV.65), le rapport entre ces deux énergies s'écrit :

$$\Lambda \equiv \frac{N^2 E_C}{4E_J} \longleftrightarrow \Lambda \equiv \frac{NE_C}{2\hbar\Omega} = \frac{\mu_s}{\hbar\Omega}. \quad (\text{IV.70})$$

Pour une jonction interne, le paramètre Λ peut être positif ou négatif selon le signe de E_C , et il peut être rendu (en valeur absolue) grand ou petit devant 1 selon l'effet recherché. Nous verrons un peu plus loin que le régime $|\Lambda| \sim 1$ est particulièrement intéressant car il se produit une bifurcation autour de ce point. Les jonctions internes permettent donc d'étudier cette transition plus facilement que les jonctions externes.

Notons finalement que l'expression de l'énergie obtenue pour une jonction externe résultait d'un développement de Taylor de l'énergie en fonction du nombre de particules. Ce développement n'était *a priori* valable que pour de faibles excursions $|n| \ll N/2$. Pour la jonction interne, pourvu que l'approximation à un mode spatial soit valide, il est possible d'explorer toute la gamme de valeurs de n entre $-N/2$ et $N/2$.

4 États stationnaires et bifurcation

L'hamiltonien quantique (IV.53) est la somme de deux termes qui ne commutent pas, $-\hbar\Omega\hat{J}_x$ d'une part, $-\hbar\tilde{\Delta}\hat{J}_z + (E_C/2)\hat{J}_z^2$ d'autre part. Pour simplifier son étude, plaçons-nous à désaccord effectif⁵ $\tilde{\Delta}$ nul, et considérons l'hamiltonien

$$\hat{H} = -\hbar\Omega\hat{J}_x + \frac{E_C}{2}\hat{J}_z^2. \quad (\text{IV.71})$$

5. Rappelons que $\tilde{\Delta}$ défini en (IV.51) contient la contribution Δ_{int} du terme d'interaction. Par conséquent, le choix $\tilde{\Delta} = 0$ assure que les deux états $|N_a = N, N_b = 0\rangle$ et $|N_a = 0, N_b = N\rangle$ sont états propres de \hat{H} avec la même énergie dans la limite $\hbar\Omega \ll N^2 E_C$, même si $g_{aa} \neq g_{bb}$.

Nous allons dans ce qui suit nous intéresser à son état fondamental, puis revenir aux équations classiques pour déterminer les différents états stationnaires possibles.

4-1 L'état quantique fondamental : discussion qualitative

La nature de l'état fondamental de l'hamiltonien (IV.71) dépend de la valeur relative des éléments de matrices de ses deux composantes, $\sim N\hbar\Omega/2 = E_J$ d'une part, $\sim E_C N^2/8$ d'autre part.

Si la condition $\hbar\Omega \gg NE_C$, équivalente à $E_J/N^2 \gg E_C$, est remplie, on retrouve le régime appelé "régime de Rabi" dans les chapitres précédents. Dans ce cas, le terme en $-\hbar\Omega\hat{J}_x$ est dominant et l'état fondamental du système est :

$$\hbar\Omega \gg N|E_C| : \quad \text{état fondamental } |M_x = J\rangle, \quad E = -\frac{1}{2}N\hbar\Omega = -E_J. \quad (\text{IV.72})$$

Les interactions jouent un rôle négligeable et tous les atomes sont dans l'état habillé $|1\rangle$.

Dans le régime opposé $\hbar\Omega \ll N|E_C|$, le terme en \hat{J}_z^2 est dominant et l'état fondamental dépend du signe de E_C . On trouve :

$$E_C > 0 \text{ et } \hbar\Omega \ll NE_C : \quad \text{état fondamental } |M_z = 0\rangle, \quad E = 0 \quad (\text{IV.73})$$

ou

$$E_C < 0 \text{ et } \hbar\Omega \ll N|E_C| : \quad \text{état fondamental } |M_z = \pm J\rangle, \quad E = -\frac{1}{8}N^2|E_C|. \quad (\text{IV.74})$$

Le cas $E_C > 0$ correspond à la situation où la moyenne des interactions intra-espèces $(g_{aa} + g_{bb})/2$ est plus grande que l'interaction inter-espèce g_{ab} . Il n'y a pas dans ce cas de comportement singulier : quand on varie le rapport $NE_C/\hbar\Omega$ de 0 à $+\infty$, on peut s'attendre (et c'est confirmé par le calcul) à ce que l'état fondamental évolue continûment dans l'espace de Hilbert associé au moment cinétique pour passer de $|M_x = -J\rangle$ à $|M_z = 0\rangle$ (pour J entier, donc N pair⁶). Dans les deux cas, les populations moyennes N_a et N_b restent égales à $N/2$.

6. Si N est impair, donc J demi-entier, les états de plus basse énergie sont $|M_z = \pm 1/2\rangle$, c'est-à-dire $n = \pm 1$.

Nous reviendrons dans le chapitre suivant, consacré aux condensats fragmentés, sur cette évolution continue entre les deux types d'états $|M_x = J\rangle$ et $|M_z = 0\rangle$. Pour l'instant, nous notons simplement que l'état $|M_z = 0\rangle$, qui s'écrit aussi $|N_a = \frac{N}{2}, N_b = \frac{N}{2}\rangle$, conduit aux valeurs moyennes $\langle \hat{J}_i \rangle = 0$ pour les trois coordonnées $i = x, y, z$. Ce n'est donc pas un état pour lequel on peut négliger les corrélations entre composantes de $\hat{\mathbf{J}}$ puisque $\langle \hat{\mathbf{J}}^2 \rangle = J(J+1)$ est très différent de $\langle \hat{\mathbf{J}} \rangle \cdot \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle = 0$; en particulier, il n'est pas possible de le représenter comme un point à la surface de la sphère de rayon J montrée en figure IV.6.

Le cas $E_C < 0$ correspond à la situation où l'énergie d'interaction inter-espèce g_{ab} est plus grande que $(g_{aa} + g_{bb})/2$. Il peut alors être énergétiquement favorable de placer les atomes majoritairement dans l'état a ou dans l'état b , plutôt que garder un mélange équilibré. Plus précisément, l'existence des deux états propres dégénérés $|M_z = \pm J\rangle$ (tous les atomes en a ou tous les atomes en b) quand Ω devient négligeable indique la possibilité d'une bifurcation quand on varie $\hbar\Omega/|E_C|$. Cette bifurcation peut s'analyser dans la limite classique puisque les états en jeu sont bien du type $|M_i = J\rangle$ et elle correspond à une transition de phase avec brisure de la symétrie \mathbb{Z}_2 .

L'état de plus haute énergie. L'espace de Hilbert associé au spin J est de dimension finie, ce qui permet de s'intéresser également à l'état de plus haute énergie. En fait, il y a une dualité entre les résultats pour cet état et ce que nous venons de voir pour l'état fondamental. Plus précisément, on a les résultats suivants :

- Pour $\hbar\Omega \gg N|E_C|$, l'état de plus haute énergie est $|M_x = -J\rangle$, d'énergie $+N\hbar\Omega/2$.
- Pour $\hbar\Omega \ll N|E_C|$, cet état dépend lui aussi du signe de E_C . Pour $E_C > 0$, cet état est $|M_z = \pm J\rangle$, d'énergie $E = +\frac{1}{8}N^2|E_C|$. Pour $E_C < 0$, cet état est $|M_z = 0\rangle$ d'énergie $E = 0$.

La possibilité d'observer une bifurcation est donc inversée par rapport à ce qu'on a trouvé pour l'état fondamental : elle va se produire pour cet état de haute énergie dans le cas $E_C > 0$. Nous en verrons un exemple un peu plus loin.

4-2 Stationnarité des équations classiques

Nous nous plaçons à partir de maintenant dans le cas où le système a été préparé dans un état tel que les équations du mouvement classiques (IV.63) et l'énergie associée (IV.64) sont une bonne approximation de la dynamique du système. Pour simplifier les calculs, nous allons nous placer dans le cas d'un désaccord $\tilde{\Delta}$ nul et nous réécrivons l'énergie sous la forme

$$E(\varphi, n) = \frac{E_C}{2}n^2 - E_J \gamma(n) \cos \varphi \quad \text{avec} \quad \gamma(n) = \sqrt{1 - \frac{4n^2}{N^2}} \quad (\text{IV.75})$$

où on a utilisé la correspondance $E_J = N\hbar\Omega/2$. Rappelons que l'énergie E_J choisie positive par convention, alors que E_C peut être positive ou négative, selon le signe de $g_{11} + g_{22} - 2g_{12}$.

Recherchons les points où l'énergie $E(\varphi, n)$ est extrême :

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0 & \Rightarrow & E_J \gamma(n) \sin \varphi = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial n} = 0 & \Rightarrow & E_C n - E_J \gamma'(n) \cos \varphi = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.76})$$

La première équation impose⁷

$$\sin \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi = \pi, \quad (\text{IV.77})$$

et nous posons dans ce qui suit $\varepsilon = \cos \varphi$ avec :

$$\varepsilon = +1 \quad \text{si} \quad \varphi = 0 \quad \varepsilon = -1 \quad \text{si} \quad \varphi = \pi. \quad (\text{IV.78})$$

En utilisant

$$\gamma'(n) = -\frac{4n/N^2}{\gamma(n)}, \quad (\text{IV.79})$$

la seconde équation de (IV.76) s'écrit alors

$$n \left(E_C + \frac{\varepsilon}{\gamma(n)} \frac{4E_J}{N^2} \right) = 0 \quad (\text{IV.80})$$

7. Nous écartons ici la possibilité $\gamma(n) = 0$, où tous les atomes occupent l'état a ou l'état b , qui ne serait pertinente qu'en l'absence de couplage.

On trouve alors deux types de solutions possibles :

$$\text{type 1 : } n = 0 \quad (\text{IV.81})$$

ce qui correspond à une jonction équilibrée avec $\bar{N}_a = \bar{N}_b$, d'énergie $-\epsilon E_J$, et

$$\text{type 2 : } \gamma(n) = -\epsilon \frac{4E_J}{N^2 E_C} = -\frac{\epsilon}{\Lambda}, \quad (\text{IV.82})$$

où nous voyons apparaître une nouvelle fois le rapport

$$\Lambda \equiv \frac{N^2 E_C}{4E_J}. \quad (\text{IV.83})$$

La quantité $\gamma(n)$ étant par construction comprise entre 0 et 1, ce deuxième type de solution n'existe que si

$$|\Lambda| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{4E_J}{N^2} < E_C \quad \text{ou} \quad E_C < -\frac{4E_J}{N^2} < 0, \quad (\text{IV.84})$$

ce qui correspond au régime appelé "régime Josephson" (par opposition au "régime de Rabi"). Quand $|\Lambda| > 1$, l'énergie de cette solution de type 2 est :

$$E = \frac{E_J}{2} \left(\Lambda + \frac{1}{\Lambda} \right) \quad (\text{IV.85})$$

et le déséquilibre n de la jonction est donné par :

$$|\Lambda| > 1 : \quad n = \pm \frac{N}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}}. \quad (\text{IV.86})$$

En résumé, on peut donc distinguer deux cas :

- Si $|\Lambda| < 1$, c'est-à-dire pour une grande fréquence de Rabi Ω ou, de manière équivalente, un fort couplage tunnel E_J , alors seul le premier type de solution est acceptable et les deux valeurs possibles de φ conduisent aux états d'énergie extrême :

$$\begin{aligned} \text{énergie minimale pour } \varphi = 0 : \quad E &= -E_J = \frac{1}{2} N \hbar \Omega \\ \text{énergie maximale pour } \varphi = \pi : \quad E &= +E_J = \frac{1}{2} N \hbar \Omega \end{aligned} \quad (\text{IV.87})$$

- Si $|\Lambda| > 1$, donc une faible fréquence de Rabi, les états stationnaires de type 1 ($n = 0$) restent possibles avec l'énergie $E = \pm E_J$, mais on trouve également ceux de type 2 avec l'énergie donnée en (IV.85). La nature de ces points stationnaires (état d'énergie minimale ou maximale, point selle?) dépend du signe de Λ , donc de E_C , et nous la discutons dans les deux paragraphes suivants.

4-3 La transition para-ferromagnétique ($E_C < 0$)

Pour étudier la nature des points stationnaires que nous avons trouvés au paragraphe précédent, nous allons discuter séparément les cas $E_C < 0$ et $E_C > 0$. Nous nous intéressons dans ce paragraphe au cas E_C négatif ou, de façon équivalente, Λ négatif. Rappelons que ce cas est peu fréquent pour des jonctions atomiques externes car il faut disposer d'interactions attractives entre atomes et choisir le potentiel de piégeage de façon judicieuse pour éviter l'effondrement du gaz sur lui-même (TRENKWALDER, SPAGNOLLI et al. 2016).

Pour une jonction interne, ce cas est obtenu pour :

$$E_C < 0 : \quad g_{ab} > \frac{1}{2} (g_{aa} + g_{bb}). \quad (\text{IV.88})$$

L'énergie des points stationnaires de type 2 donnée en (IV.85) est alors strictement inférieure à celle trouvée pour les points de type 1, c'est-à-dire $E = -E_J$. Ces points de type 2, quand ils existent, constituent donc l'état fondamental du système. Cet état est dégénéré puisque les deux possibilités $n = \pm \frac{N}{2} (1 - \frac{1}{\Lambda^2})^{1/2}$ sont possibles [cf (IV.86)].

On est ici en présence de l'équivalent d'une transition de phase du second ordre quand on varie Λ autour de la valeur

$$\Lambda_c = -1 \quad (\text{IV.89})$$

Cette transition correspond précisément à la bifurcation que nous avons pressentie en §4-1. Pour la caractériser, commençons par remarquer que pour $E_C < 0$, les solutions de type 2 données en (IV.82) sont obtenues pour $\epsilon = 1$, donc $\varphi = 0$. Considérons des valeurs de Λ proches de Λ_c pour lesquelles les valeurs n des minima de type 2 restent proches de 0. On peut

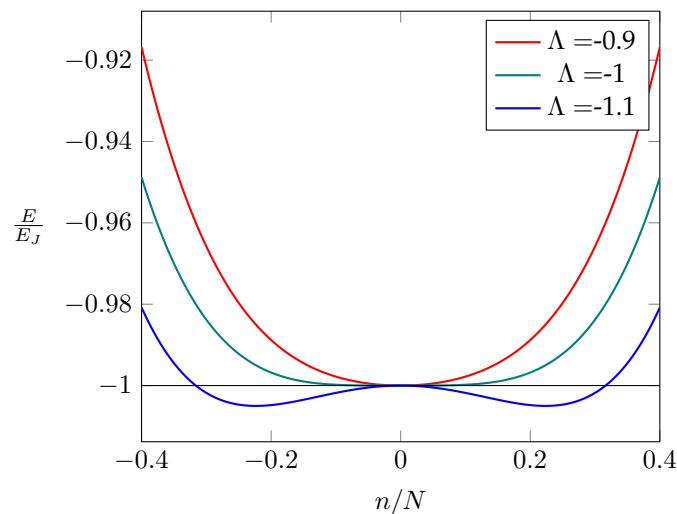


FIGURE IV.8. Cas $\Lambda < 0$: bifurcation pour l'énergie minimale quand on varie le paramètre Λ autour de la valeur critique $\Lambda_c = -1$.

alors utiliser l'énergie (IV.75) et en faire un développement limité pour les petites valeurs de n :

$$E(n, \varphi = 0) \approx E_J \left[-1 + \frac{2n^2}{N^2} (1 + \Lambda) + \frac{2n^4}{N^4} \right]. \quad (\text{IV.90})$$

La recherche du ou des minima de cette énergie permet de retrouver les résultats de §4-2 :

- Pour $1 + \Lambda > 0$, donc $-1 < \Lambda < 0$ (grande fréquence de Rabi), cette fonction est minimale en $n = 0$ et son minimum vaut $-E_J$. On retrouve le minimum de type 1.
- Pour $\Lambda < -1$ (petite fréquence de Rabi), les minima sont situés en

$$n \approx \frac{N}{\sqrt{2}} \sqrt{|1 + \Lambda|} \quad (\text{IV.91})$$

en accord avec (IV.86) pour $\Lambda \approx -1$.

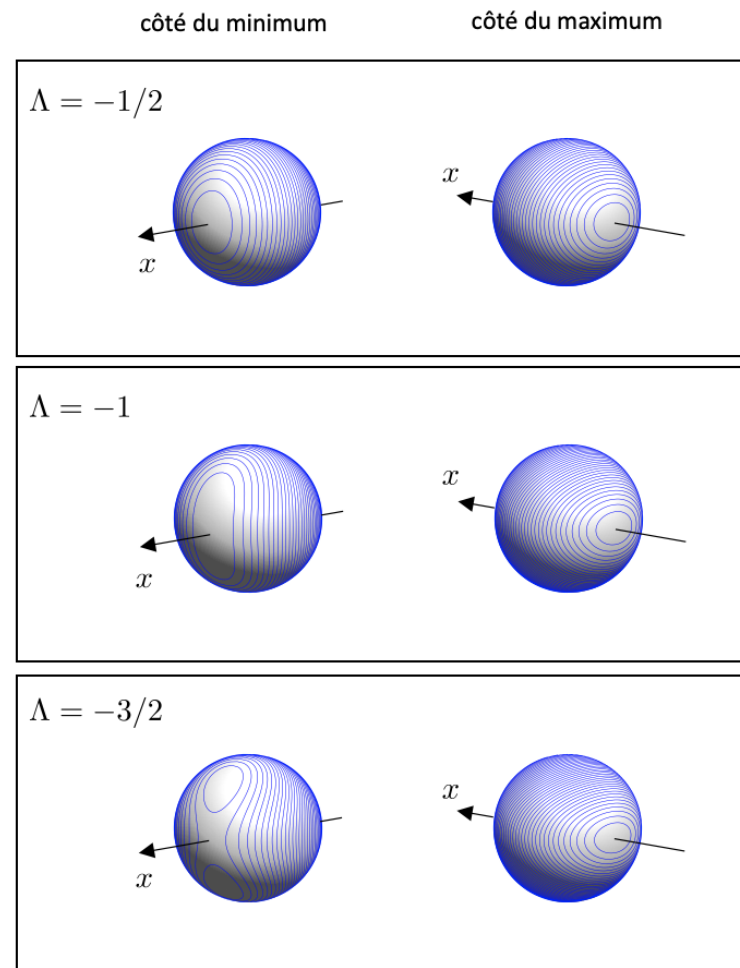


FIGURE IV.9. Cas d'une jonction avec une énergie de charge E_C négative. On a tracé les courbes iso-énergies sur la sphère de rayon $J = N/2$. La colonne de gauche montre la région du (ou des) minimum(s), toujours situé(s) sur le méridien $\varphi = 0$. La colonne de droite montre la région du maximum, situé sur le méridien $\varphi = \pi$. La première ligne est en deçà du point critique ($\Lambda = -1/2$) avec le minimum sur l'équateur, la deuxième au point critique ($\Lambda = -1$), et la troisième en deçà ($\Lambda = -3/2$). La jonction est supposée ici être à résonance ($\tilde{\Delta} = 0$).

On retrouve ici la phénoménologie habituelle d'une transition de phase du deuxième ordre (figure IV.8).

Il est instructif de visualiser cette transition en représentant les isocontours en énergie sur la sphère de rayon J de la figure IV.6. Rappelons que les points sont paramétrés par $(\frac{N}{2} \cos \varphi \gamma(n), \frac{N}{2} \sin \varphi \gamma(n), n)$. Pour $E_C < 0$, le minimum ou les minima d'énergie sont toujours situés sur le méridien $\varphi = 0$. Pour $-1 < \Lambda < 0$, il n'y a qu'un minimum et il est localisé sur l'équateur (figure IV.9, en haut à gauche). Pour $\Lambda < -1$, les deux minima sont localisés de manière symétrique de part et d'autre de l'équateur et le point $n = 0, \varphi = 0$ devient alors un point col (en bas à gauche). Son symétrique $n = 0, \varphi = \pi$ reste quant à lui le maximum absolu (colonne de droite de la figure IV.9).

Lien avec la transition magnétique para-ferro. La transition entre un état paramagnétique et un état ferromagnétique peut se modéliser par un système tri-dimensionnel de N moments magnétiques interagissant les uns avec les autres par un couplage modélisé⁸ par $V = -J \sum_{i,j} \mu_i \cdot \mu_j$, avec $J > 0$. L'état fondamental du système est donc obtenu quand tous les moments magnétiques sont alignés les uns avec les autres, la direction de cet alignement pouvant être quelconque.

Si l'assemblée de moments magnétique est à température non nulle, cet alignement est en compétition avec le désordre associé aux fluctuations thermiques. On a donc une compétition entre deux phases possibles, une phase ferromagnétique avec une aimantation moyenne $\langle \mu \rangle$ non nulle à basse température et une phase paramagnétique d'aimantation nulle au dessus d'une certaine température critique.

Dans ce que nous avons étudié ici, le rôle de la température est joué par l'excitation cohérente, qui tend à faire osciller les atomes entre les états a et b , et celui des interactions est décrit par le terme $E_C \hat{J}_z^2$ avec $E_C < 0$, qui tend à mettre tous les atomes dans le même état interne a ou b .

Remarque sur la dégénérescence des états d'énergie minimale. Dans un traitement quantique du problème pour $\Omega = 0$ (c'est-à-dire $E_J = 0$ ou

8. Ce couplage peut être seulement entre proches voisins ou à plus longue portée, cela n'a pas d'impact sur notre discussion qualitative.

encore $\Lambda = 0$), les deux états d'énergie minimale de l'hamiltonien (IV.71), $\hat{H} = \frac{E_C}{2} \hat{J}_z^2$, sont $|M_z = \pm J\rangle$, ce qui conduit à un niveau fondamental dégénéré d'énergie $-|E_C|J^2/2$. Ces deux états correspondent aux deux pôles de la sphère de la figure IV.9.

Dès que Ω est non nul, il se produit une levée de dégénérescence de ce niveau fondamental. Plus précisément, les deux états $|M_z = \pm J\rangle$ sont couplés par le terme en $\hbar\Omega \hat{J}_x$ de l'hamiltonien (IV.71), qui possède des éléments de matrice non nuls entre $|M_z\rangle$ et $|M_z \pm 1\rangle$.

Les véritables états propres sont alors en bonne approximation les combinaisons⁹ symétriques et antisymétriques de $|M_z = \pm J\rangle$. Toutefois, ce couplage fait intervenir N actions de $\hbar\Omega \hat{J}_x$ avec des écart en énergie $\propto E_C$ entre niveaux intermédiaires, et son effet sera donc proportionnel à $(\hbar\Omega/E_C)^N$. Ce couplage devient donc exponentiellement petit quand N augmente : pour $N \gg 1$, l'écart en énergie entre les états symétrique et antisymétrique est très faible et on retombe sur les deux états dégénérés trouvés classiquement.

4-4 Le cas $E_C > 0$

Considérons maintenant le cas opposé du précédent, c'est-à-dire $E_C > 0$ (i.e. $\Lambda > 0$). Ce cas est celui ordinairement rencontré pour une jonction externe (interactions répulsives, donc $g > 0$). Pour une jonction interne, il est obtenu pour

$$g_{ab} < \frac{1}{2} (g_{aa} + g_{bb}). \quad (\text{IV.92})$$

La situation se déduit du cas $\Lambda < 0$ en inversant les rôles des maxima et des minima, et nous énonçons donc les différents résultats sans reprendre l'analyse détaillée :

- L'état $n = 0, \varphi = 0$ reste l'état fondamental quel que soit $\Lambda > 0$.
- Pour $0 < \Lambda < 1$ (grande fréquence de Rabi), le seul autre état stationnaire est l'état $n = 0, \varphi = \pi$, qui est l'état de plus haute énergie (cf. (IV.87)).

9. Chaque combinaison constitue, pour $J \gg 1$, un état de type "chat de Schrödinger", c'est-à-dire la superposition cohérente de deux états classiquement très différents. Une réalisation expérimentale d'un tel chat (ou plutôt un "chaton") pour un moment cinétique $J = 8$, donc $N = 16$, est décrite par CHALOPIN, BOUAZZA et al. (2018).

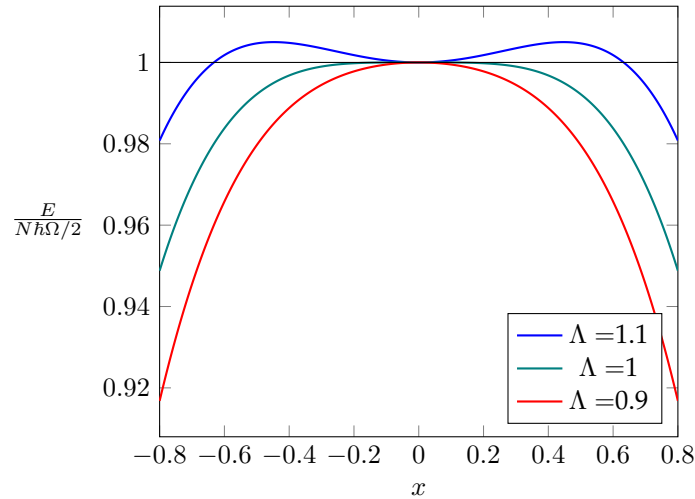


FIGURE IV.10. Cas $\Lambda > 0$: bifurcation pour l'énergie maximale quand on varie le paramètre Λ autour de la valeur critique $\Lambda_c = +1$.

— Pour $1 < \Lambda$ (petite fréquence de Rabi), l'état $n = 0, \varphi = \pi$ est un point selle et les deux états d'énergie maximale sont obtenus pour $n = \pm \frac{N}{2} (1 - \frac{1}{\Lambda^2})^{1/2}$ et $\varphi = \pi$.

Nous avons représenté sur la figure IV.11 les iso-contours en énergie dans le cas $E_C > 0$. Le fonctionnement habituel d'une jonction correspond à la ligne du bas, $\Lambda \gg 1$, c'est-à-dire $E_C \gg \frac{E_J}{N^2}$. On y retrouve les deux régimes importants identifiés aux chapitres précédents, correspondant à un mouvement sur un contour iso-énergie (figure IV.12) :

- les oscillations plasmas autour du minimum, qui est situé sur l'équateur en $\varphi = 0$, que nous avons décrites au chapitre 1.
- le régime d'auto-piégeage pour l'effet Josephson alternatif, décrit au chapitre 3, obtenu pour des conditions initiales s'écartant significativement de l'équateur. Ce mouvement correspond à un mouvement à latitude presque constante autour de la sphère. L'oscillation résiduelle de la latitude donne l'amplitude de l'oscillation du courant dans la jonction.

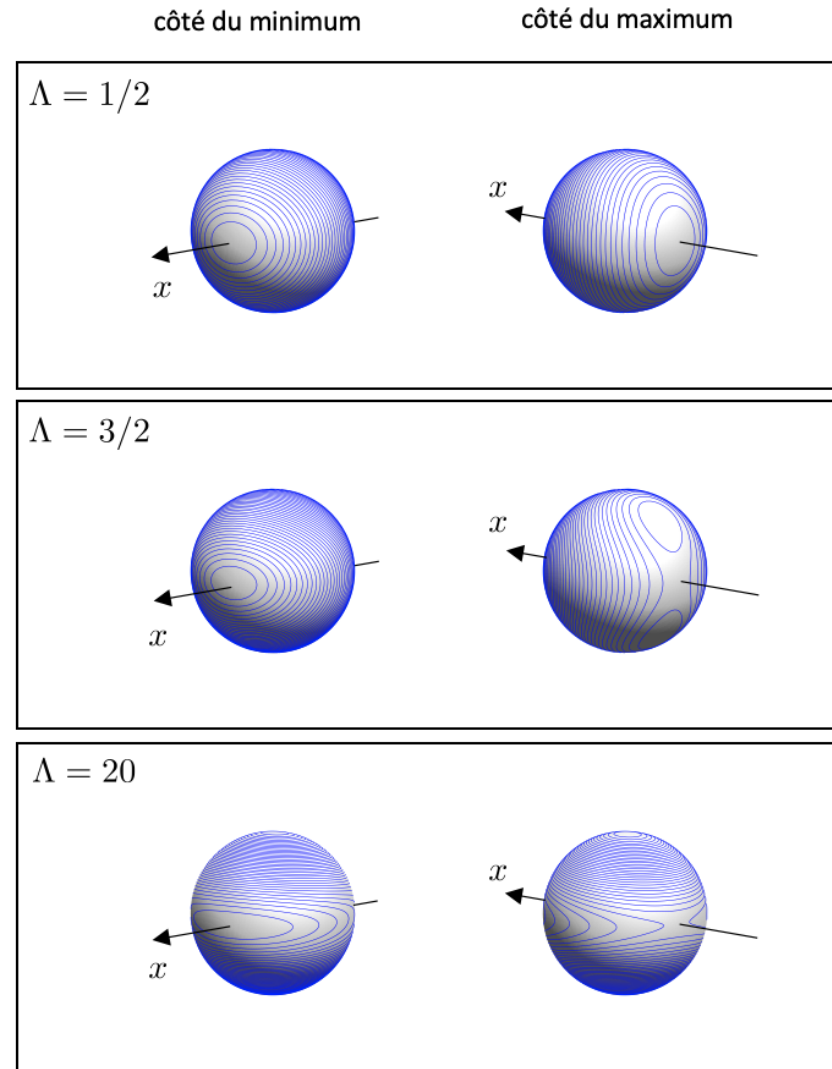


FIGURE IV.11. Cas d'une jonction "usuelle" : $E_C > 0$. Le tracé suit le même principe que celui de la figure IV.9 avec les trois lignes $\Lambda = 1/2$, $\Lambda = 3/2$ et $\Lambda = 20$. La position du minimum, visible sur la colonne de gauche, reste alors inchangée. La position du maximum, visible sur la colonne de droite, subit une bifurcation pour $\Lambda = 1$.

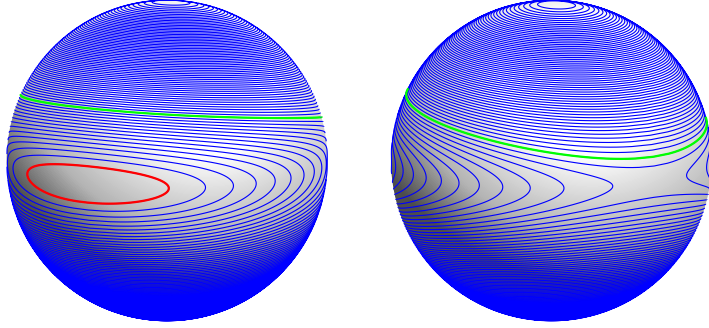


FIGURE IV.12. Visualisation de deux types de dynamique d'une jonction atomique pour $\Lambda = 20$: en rouge, les oscillations plasma au voisinage du minimum d'énergie (cf. chapitre 1); en vert, le régime d'autopiégeage (cf. chapitre 3), pour lequel la jonction reste en permanence déséquilibrée (ici $n > 0$ à chaque instant).

La figure IV.11 révèle un autre point sur lequel nous reviendrons en détail au prochain chapitre : quand E_C augmente, les courbes iso-énergie autour du minimum deviennent de plus en plus étendues le long de l'équateur, et de plus en plus comprimées quand on s'en écarte. Cette remarque est centrale quand on s'intéresse à l'état fondamental quantique de la jonction. Dans une représentation graphique que nous préciserons (représentation d'Husimi), un état quantique doit recouvrir une certaine aire à la surface de la sphère. Cette déformation des courbes iso-énergie correspond alors au fait que l'état fondamental est comprimé, avec des fluctuations de J_z en dessous de la limite quantique standard \sqrt{J} , et des fluctuations de la phase (la longitude sur la sphère) au dessus de cette limite quantique standard ($1/\sqrt{N}$). Nous verrons que la limite ultime est atteinte pour $E_C \gg E_J$: dans ce cas, l'état quantique fondamental est complètement délocalisé le long de l'équateur.

4-5 Première mise en évidence expérimentale

Comme nous l'avons indiqué plus haut, la réalisation de la condition $E_C < 0$ est tout à fait faisable avec des jonctions internes ; il suffit pour cela

de travailler avec une paire d'états a, b telle que $g_{ab} > (g_{aa} + g_{bb})/2$. C'est par exemple le cas de l'expérience de ZENESINI, BERTI et al. (2024).

Toutefois, la première expérience réalisée avec une jonction interne et qui étudié la bifurcation que nous venons de décrire a été réalisée dans le cas $E_C > 0$, et c'est donc une bifurcation de l'état de plus haute énergie qui a été mise en évidence. Cette expérience, due à ZIBOLD, NICKLAS et al. (2010), a été menée sur un condensat de $N = 500$ atomes de rubidium ^{87}Rb , en utilisant les deux états hyperfins $|a\rangle = |F = 2, m = -1\rangle$ et $|b\rangle = |F = 1, m = 1\rangle$. Ces deux états sont couplés par une transition à deux photons, comprenant un photon micro-onde (6.8 GHz) et un photon radio-fréquence (6 MHz). L'énergie E_C décrivant les interactions entre atomes est ajustée grâce à une résonance de Feshbach et sa valeur est fixée à $h \times 0.13$ Hz (rappelons que son ordre de grandeur est μ/N). Le paramètre Λ est varié en modifiant l'intensité de la radio-fréquence.

L'état interne des atomes est préparé en utilisant la méthode décrite en §1. Rappelons que cet état correspond à un point donné de la sphère de Bloch généralisée de la figure IV.6. On suit ensuite l'évolution de cet état en mesurant après un instant t la différence de population $N_a - N_b$ ou la différence de phase $\varphi_a - \varphi_b$. On obtient ainsi un "portrait de phase" permettant de suivre l'évolution d'une condition initiale donnée sur la sphère de Bloch généralisée.

Deux exemples d'évolution sont montrés en figure IV.13. Le premier correspond au cas d'une grand fréquence de Rabi Ω , plus précisément $\Lambda = 0.78$. On voit que le gaz préparé au voisinage du point $J_z = 0, \varphi = \pi$ reste au voisinage de ce point. Le second exemple correspond à $\Lambda = 1.55$, donc au dessus du point critique $\Lambda_c = 1$. L'oscillation du système autour des deux points stationnaires (ici des maxima d'énergie) est clairement visible. En variant la valeur du paramètre Λ , ZIBOLD, NICKLAS et al. (2010) ont mis en évidence la bifurcation du point stationnaire de plus haute énergie (figure IV.14).

5 Appendice : interaction entre états habillés

Dans les chapitres qui précèdent, nous nous sommes intéressés à un fluide d'atomes composé d'une seule espèce et nous avons caractérisé les

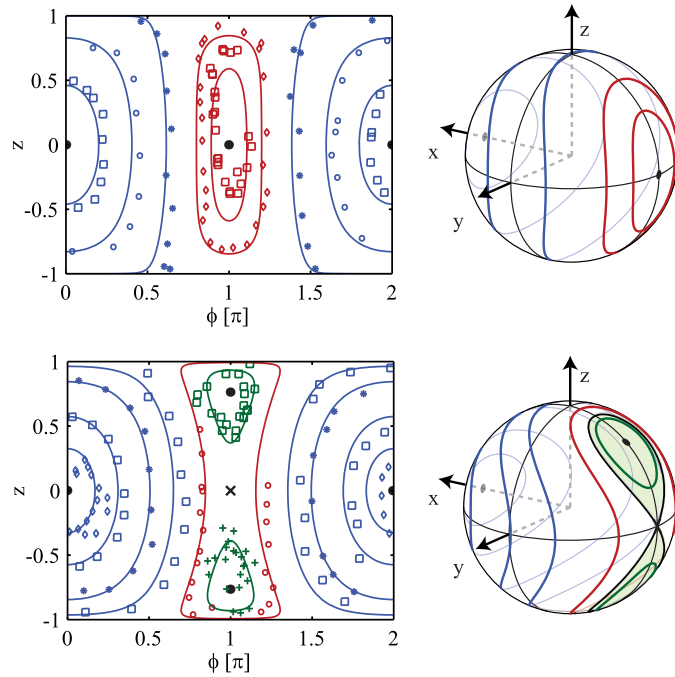


FIGURE IV.13. Trajectoires sur la sphère de Bloch généralisée pour un condensat de ^{87}Rb , avec $\chi > 0$. Ces figures sont obtenues pour $\Lambda = 0.78$ (haut) et $\Lambda = 1.55$ (bas). Figures extraites de ZIBOLD, NICKLAS *et al.* (2010).

interactions entre atomes par le paramètre g , relié à la longueur de diffusion en onde s :

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} . \quad (\text{IV.93})$$

Nous considérons ici des atomes avec deux états internes possibles, et il nous faut donc introduire trois longueurs de diffusion, a_{aa} , a_{ab} et a_{gg} , pour décrire les trois types de collisions binaires possibles. Une fois le couplage cohérent mis en place entre les niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$, les états pertinents pour décrire le système sont les états habillés $|1\rangle$ et $|2\rangle$ et il se pose alors la question de caractériser les interactions entre ces états habillés.

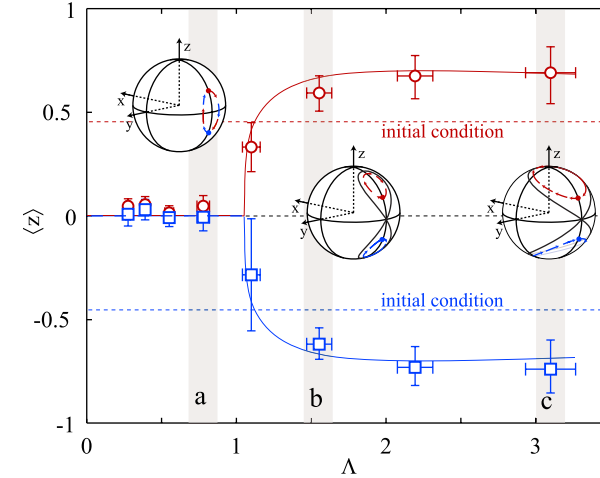


FIGURE IV.14. Variation avec Λ des points stationnaires de haute énergie. Deux conditions initiales différentes sont utilisées pour mettre en évidence les deux points stationnaires pour $\Lambda > 1$. Figure extraite de ZIBOLD, NICKLAS *et al.* (2010).

Le pseudo-potentiel

Commençons par indiquer la façon la plus simple pour décrire l'interaction à basse énergie entre deux atomes neutres (cf. cours 2020-21). On se place dans le référentiel du centre de masse et on considère un potentiel d'interaction à courte portée $V(r)$, où r désigne la variable relative de la paire d'atomes (figure IV.15). On néglige donc ici l'interaction dipolaire anisotrope (cf. cours 2023-24). On sait qu'à suffisamment basse énergie, cette interaction se produit essentiellement en onde s ; pour une collision de vecteur d'onde incident \mathbf{k} , l'état stationnaire de diffusion associé peut donc s'écrire comme la somme de l'onde plane incidente $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ et de l'onde sphérique divergente e^{ikr}/r . En pratique, cette description est valable tant qu'on s'intéresse à des distances r supérieures au rayon de van der Waals, R_{vdW} , qui caractérise la portée des potentiels inter-atomiques (de l'ordre de quelques nanomètres).

Cette interaction peut être modélisée par le pseudo-potentiel (figure

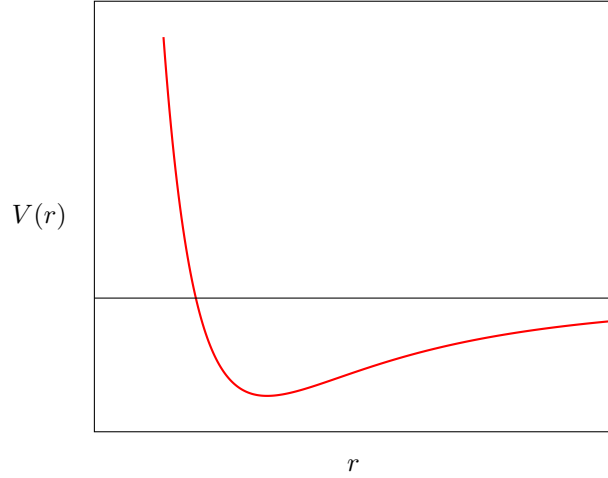


FIGURE IV.15. Un potentiel interatomique "typique", avec une partie attractive à longue distance et une partie répulsive à courte distance.

IV.16) dont l'action sur des fonctions d'onde s'écrit :

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{A}{r} + \psi_{\text{reg}}(\mathbf{r}) : \quad \hat{V}_{\text{PP}}[\psi(\mathbf{r})] = g \delta(\mathbf{r}) \psi_{\text{reg}}(0) \quad (\text{IV.94})$$

où ψ_{reg} est régulière en $\mathbf{r} = 0$ et où g caractérise la force des interactions. On a donc

$$\hat{V}_{\text{PP}} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] = igk \delta(\mathbf{r}) \quad \hat{V}_{\text{PP}} \left[\frac{e^{-r/\ell}}{r} \right] = -\frac{g}{\ell} \delta(\mathbf{r}). \quad (\text{IV.95})$$

Dans ce qui suit, on aura également besoin de l'opérateur laplacien ∇^2 sur ces fonctions d'onde :

$$\nabla^2 \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] = -4\pi \delta(\mathbf{r}) - k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \quad \nabla^2 \left[\frac{e^{-r/\ell}}{r} \right] = -4\pi \delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{\ell^2} \frac{e^{-r/\ell}}{r}. \quad (\text{IV.96})$$

Pour établir la relation entre la force du potentiel g et la longueur de

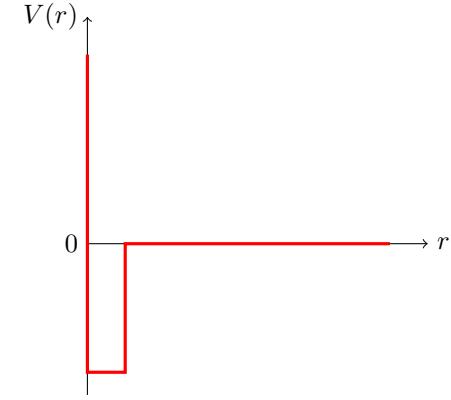


FIGURE IV.16. Puits carré dont on peut ajuster la largeur r_0 et la profondeur V_0 pour déduire le pseudo-potentiel par un passage à la limite bien choisi, en se plaçant au voisinage du seuil d'apparition du premier état lié.

diffusion a , considérons un état stationnaire de diffusion¹⁰

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{a}{1 + ika} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (\text{IV.97})$$

et écrivons que cet état doit être état propre de l'hamiltonien

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_r} \nabla^2 + \hat{V}_{\text{PP}} \right) \psi(\mathbf{r}) = \epsilon_k \psi(\mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad \epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} \quad (\text{IV.98})$$

où $m_r = m/2$ représente la masse relative. On constate par un calcul relativement simple que cette équation aux valeurs propres est satisfaite si seulement si :

$$a = \frac{gm_r}{2\pi\hbar^2} \quad \Leftrightarrow \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (\text{IV.99})$$

On trouve en particulier pour l'état d'énergie nulle

$$\psi_0(\mathbf{r}) = 1 - \frac{a}{r}, \quad (\text{IV.100})$$

¹⁰. La forme proposée en (IV.97) est *a priori* une forme asymptotique pour r grand, mais elle est faite exacte en tout point dans le cas du pseudo-potentiel.

pour lequel on vérifie immédiatement :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_r}\nabla^2 + V_{pp}\right)\psi_0(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m_r}4\pi a\delta(\mathbf{r}) + g\delta(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{IV.101})$$

On sait donc bien relier la force g du pseudo-potentiel et la longueur de diffusion a .

Collision entre deux atomes habillés

Le problème à deux états a et b que nous considérons dans ce chapitre est caractérisé par trois longueurs de diffusion $a_{\alpha\beta}$ avec $\alpha, \beta = a, b$, ou encore par les trois constantes de couplage $g_{\alpha\beta} = 4\pi\hbar^2 a_{\alpha\beta}/m$. Pour une collision entre atomes nus, on a trois voies d'entrée possibles, $|aa\rangle$, $|bb\rangle$ et $|ab\rangle_s$, cette dernière correspondant à la combinaison symétrique $(|ab\rangle + |ba\rangle)/\sqrt{2}$ (nous supposons qu'on traite ici le cas de bosons). La modélisation la plus simple consiste à prendre pour chacun de ces canaux une interaction en pseudo-potentiel

$$\hat{V}_{\alpha\beta}[\psi(\mathbf{r})] = g_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}) \left. \frac{\partial}{\partial r} [r\psi(\mathbf{r})] \right|_{r=0} \quad (\text{IV.102})$$

ce qui donne pour l'opérateur global :

$$\hat{V}_{pp}[\psi(\mathbf{r})] = \delta(\mathbf{r}) \sum_{(\alpha\beta)} g_{\alpha\beta} \hat{P}_{\alpha\beta} \psi_{\text{reg}}(0) \quad (\text{IV.103})$$

où $\hat{P}_{\alpha\beta} = |\alpha\beta\rangle\langle\alpha\beta|$ désigne le projecteur sur l'état $|\alpha\beta\rangle$.

En présence du couplage radio-fréquence, on doit envisager les trois canaux d'entrée possibles, $|11\rangle$, $|22\rangle$ et $|12\rangle_s$, ce dernier correspondant à l'état symétrisé $(|12\rangle + |21\rangle)/\sqrt{2}$. On va s'intéresser d'abord à la voie d'entrée $|11\rangle$, qui correspond à l'énergie la plus basse (figure IV.17). Les collisions correspondant aux deux autres voies d'entrée peuvent donner lieu à des processus inélastiques.

La fonction d'énergie nulle, repérée par rapport au canal d'entrée, s'écrit donc :

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \left(1 - \frac{a_{11}}{r}\right) |11\rangle + B \frac{e^{-r/\ell}}{r} |12\rangle_s + B' \frac{e^{-r/\ell'}}{r} |22\rangle \quad (\text{IV.104})$$

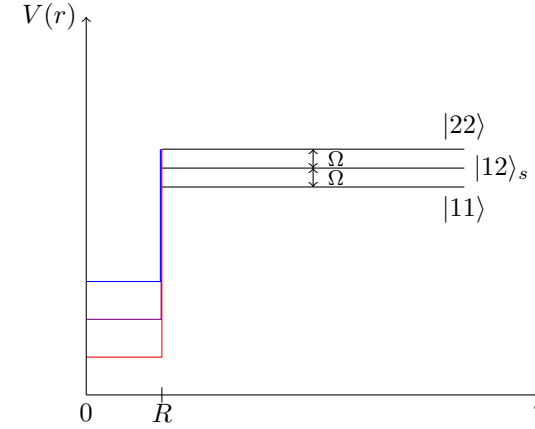


FIGURE IV.17. Les trois canaux couplés dans une collision entre états habillés (avec ici une interaction en puits carré). Dans le texte, on se concentre sur une collision avec le canal d'entrée $|11\rangle$, pour lequel il n'y a pas de collisions inélastiques (à suffisamment basse énergie).

avec

$$\frac{\hbar^2}{2m_r\ell^2} \equiv \hbar\Omega \quad \frac{\hbar^2}{2m_r\ell'^2} \equiv 2\hbar\Omega \quad (\ell' = \ell/\sqrt{2}). \quad (\text{IV.105})$$

À ce stade, la longueur de diffusion a_{11} et les deux coefficients B et B' sont inconnus. Pour les déterminer, nous allons imposer à cette fonction d'onde d'être état propre de l'hamiltonien total.

L'opérateur énergie cinétique $-(\hbar^2/2m_r)\nabla^2$ agissant sur cet état donne :

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi\hbar^2}{m_r}\delta(\mathbf{r}) [-a_{11}|11\rangle + B|12\rangle_s + B'|22\rangle] \\ & - \frac{\hbar^2}{2m_r\ell^2} B \frac{e^{-r/\ell}}{r} |12\rangle_s - \frac{\hbar^2}{2m_r\ell'^2} B' \frac{e^{-r/\ell'}}{r} |22\rangle. \end{aligned} \quad (\text{IV.106})$$

Le couplage atome-lumière vient compenser les deux derniers termes de (IV.106). Le terme en $\delta(\mathbf{r})$ est quant à lui compensé par le pseudo-potentiel écrit en (IV.103), dont l'action fait intervenir la partie régulière de $\psi_0(\mathbf{r})$ en

$r = 0$:

$$\psi_{\text{reg}}(0) = |11\rangle - \frac{B}{\ell} |12\rangle_s - \frac{B'}{\ell'} |22\rangle. \quad (\text{IV.107})$$

On obtient alors un système linéaire de trois équations permettant de déterminer les trois inconnues a_{11} , B , B' .

Dans ce qui suit, nous donnons les résultats de la résolution de ce système pour une petite fréquence de Rabi, plus précisément :

$$a_{11}, a_{12}, a_{22} \ll \ell, \ell' \quad \Leftrightarrow \quad \hbar\Omega \ll E_{\text{vdW}} \quad (\text{IV.108})$$

où nous avons supposé que les longueurs de diffusion $a_{\alpha\beta}$ sont telles que $\hbar^2/m\alpha_{\alpha\beta}^2 \sim E_{\text{vdW}}$. En pratique E_{vdW}/h est de l'ordre de quelques MHz à quelques dizaines de MHz selon les espèces atomiques. On obtient à l'ordre le plus bas :

$$a_{11} = C^4 a_{aa} + 2S^2 C^2 a_{ab} + S^4 a_{bb} \quad (\text{IV.109})$$

ce qui constitue le résultat recherché : on a réussi à caractériser l'interaction entre deux états habillés (ici l'état $|1\rangle$) en fonction du couplage entre les états nus $|a\rangle$ et $|b\rangle$.

On peut traiter de la même façon une collision entre deux atomes préparés tous deux dans l'état habillé $|2\rangle$, ou encore une collision entre un atome dans l'état $|1\rangle$ et l'autre dans l'état $|2\rangle$. Dans ces deux cas, on trouve une longueur de diffusion avec une partie imaginaire non nulle, qui permet d'évaluer le taux de collision inélastique sous l'effet des processus exothermiques $2 + 2 \rightarrow 1 + 1$, $2 + 2 \rightarrow 1 + 2$ et $1 + 2 \rightarrow 1 + 1$.

Pour une collision $2 - 2$, on trouve pour la partie réelle de la longueur de diffusion

$$a_{22} = S^4 a_{aa} + 2S^2 C^2 a_{ab} + C^4 a_{bb} \quad (\text{IV.110})$$

et de même pour une collision $1 - 2$:

$$a_{12} = 2C^2 S^2 (a_{aa} + a_{bb}) + (C^2 - S^2)^2 a_{ab} \quad (\text{IV.111})$$

Ces résultats pour les parties réelles des a_{ij} ont été obtenus par SEARCH & BERMAN (2001) par une approche consistant à évaluer l'énergie de champ moyen d'un condensat de Bose-Einstein en présence du couplage $a - b$ (voir aussi §2-3). L'avantage de la méthode que nous venons de présenter

est de fournir également les taux de collisions inélastiques à partir de la partie imaginaire des a_{ij} .

Les prédictions qui précèdent ont été partiellement vérifiées dans la période 2010-2020 par plusieurs groupes (voir par exemple NICKLAS, MUESSEL et al. (2015)). Plus récemment, le test complet portant à la fois sur les effets élastiques et les effets inélastiques a été effectué par SANZ, FRÖLIAN et al. (2022) sur un gaz de ^{39}K sur les deux sous-niveaux Zeeman $|F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|F = 1, m_F = 0\rangle$ de l'état fondamental. Par ailleurs, LAVOINE, HAMMOND et al. (2021) ont mis en évidence des corrections à l'énergie provenant de contributions au delà du champ moyen pour un gaz d'atomes à deux niveaux en présence d'un couplage cohérent. HAMMOND, LAVOINE et al. (2022) ont également montré l'émergence d'un terme effectif à trois corps induit par ce couplage cohérent.

Chapitre V

Les condensats fragmentés

Dans les chapitres précédents, notre description d'une jonction Josephson, qu'elle soit interne ou externe, a été essentiellement basée sur une approximation de champ moyen. Celle-ci revient à supposer que les N atomes sont placés dans le même état à une particule, noté

$$|\psi(t)\rangle = \alpha_a(t) |a\rangle + \alpha_b(t) |b\rangle . \quad (\text{V.1})$$

Les atomes forment donc un condensat de Bose-Einstein pur, décrit par l'état à N corps factorisé :

$$|\Psi(t)\rangle = (\alpha_a(t) |a\rangle + \alpha_b(t) |b\rangle)^{\otimes N} \quad (\text{V.2})$$

et les relations de Josephson donnent l'évolution temporelle des coefficients complexes α_a et α_b .

Nous allons maintenant explorer les limites de cette description et montrer que dans certaines conditions, il est nécessaire d'aller au-delà de cette approximation de champ moyen en utilisant une modélisation quantique de la jonction. Plus précisément, nous allons montrer que l'état fondamental peut former un *condensat fragmenté*, pour lequel deux états à une particule ont une population significative, sans qu'il y ait de cohérence entre eux (MUELLER, HO et al. 2006).

Nous débuterons ce chapitre par une définition précise de la fraction condensée et de la notion de fragmentation, en nous appuyant sur la matrice densité à un corps et son spectre de valeurs propres. Nous appliquerons ensuite cette notion à une jonction Josephson et nous reviendrons sur

la séparation entre régime de Rabi et régime Josephson qui est déjà apparue à plusieurs reprises dans ce cours. Nous montrerons qu'il faut compléter cette description par un troisième régime, le régime de Fock, correspondant précisément à un état fondamental fragmenté pour la jonction.

Dans une description quantique de la jonction, des opérateurs nouveaux particulièrement pertinents apparaissent : il s'agit de l'opérateur \hat{n} qui décrit le déséquilibre en nombres d'occupation de part et d'autre de la jonction, et de l'opérateur phase $\hat{\varphi}$, associé à la différence de phase entre ces deux côtés. Nous construirons ces opérateurs en partant de la représentation de Schwinger, déjà introduite au chapitre précédent, et nous montrerons en particulier la relation de commutation :

$$[e^{i\hat{\varphi}}, \hat{n}] = e^{i\hat{\varphi}} , \quad (\text{V.3})$$

tout en signalant les dangers de la notation $e^{i\hat{\varphi}}$. Cette relation joue un rôle central dans l'étude des qubits formés à partir de jonctions Josephson. Par ailleurs, elle limite la connaissance simultanée que l'on peut avoir pour les variables n et φ en imposant la relation de Heisenberg $\Delta n \Delta \varphi \gtrsim 1/2$.

Nous terminerons ce chapitre par la présentation d'un nouveau type de jonction Josephson interne, utilisant une assemblée d'atomes de spin 1. Cette jonction ne nécessite pas de couplage cohérent externe, ce rôle étant joué par les interactions entre particules. Cette jonction a permis l'observation directe d'un condensat fragmenté dans l'expérience de EVRARD, QU et al. (2021) que nous décrirons.

1 Fraction condensée d'un fluide quantique

1-1 Le gaz parfait homogène

Dans ses articles fondateurs (EINSTEIN 1924; EINSTEIN 1925a; EINSTEIN 1925b), Einstein a considéré un gaz parfait de N particules confiné dans une boîte de volume L^3 et obéissant à la statistique de Bose. Il a montré que ce gaz subit une transition de phase quand on le refroidit tout en maintenant sa densité constante. Cette transition se manifeste par l'apparition d'une population macroscopique, donc d'ordre N , de l'état microscopique fondamental de la boîte :

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}}. \quad (\text{V.4})$$

Nous prenons ici des conditions aux limites périodiques de sorte que cet état décrit une particule d'impulsion nulle.

L'existence de cette transition de phase est une conséquence directe de la statistique quantique proposée par Bose. Elle ne se produit pas pour un gaz obéissant à la statistique classique de Maxwell-Boltzmann. Néanmoins, à température strictement nulle, l'état du système est le même dans les deux cas : toutes les particules occupent l'état fondamental et la fonction d'onde à N corps s'écrit

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \psi_0(\mathbf{r}_1) \cdots \psi_0(\mathbf{r}_N). \quad (\text{V.5})$$

Le système est alors complètement condensé : le nombre de particules N_0 occupant l'état ψ_0 est égal à N et la fraction condensée, définie ici comme

$$f \equiv \frac{N_0}{N} \quad (\text{V.6})$$

est égale à 1.

Conservons pour l'instant les deux hypothèses du modèle d'Einstein, gaz sans interaction et confinement dans une boîte à fond plat. Quand on augmente la température, les particules ont une probabilité non nulle d'occuper des niveaux excités de la boîte et la fraction condensée, définie en (V.6), décroît. Pour un système de taille finie, elle tend vers 0 de façon régulière dans la limite des grandes températures. Quand on prend la limite

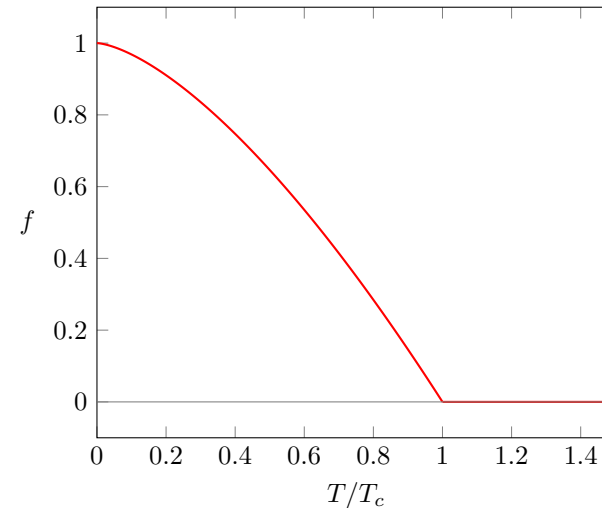


FIGURE V.1. Fraction condensée pour un gaz de Bose idéal dans une boîte (conditions aux limites périodiques).

thermodynamique, $N, V \rightarrow \infty$ avec $N/V = \text{Cte}$, on voit apparaître la transition de phase prédite par Einstein et mentionnée plus haut, avec f_c qui est rigoureusement nulle au dessus d'une température critique $T_c(\rho)$ (figure V.1). Plus précisément, $f_c(T)$ est continue en T_c et sa dérivée première est discontinue.

1-2 Gaz homogène avec interactions

La situation se complique quand on prend en compte les interactions entre particules. Plaçons-nous dans le cas d'interactions à deux corps, décrites par une longueur de diffusion a positive, ce qui correspond à des interactions répulsives. Dans ce cas, même à température nulle, la population moyenne de l'état ψ_0 n'est pas égale à 1. En effet, les interactions sont à l'origine des processus virtuels conservant l'impulsion (figure V.2) :

$$(\mathbf{p}_0 = 0) + (\mathbf{p}_0 = 0) \rightleftharpoons (\mathbf{p}) + (-\mathbf{p}) \quad \text{avec } \mathbf{p} \neq 0. \quad (\text{V.7})$$

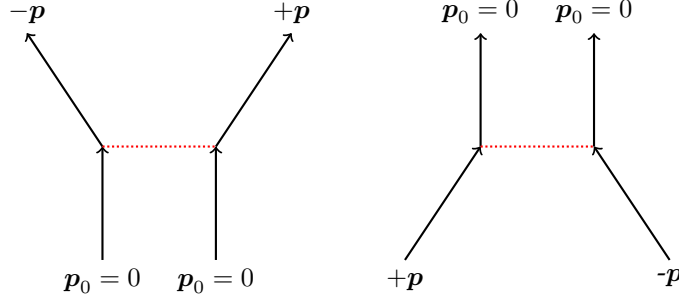


FIGURE V.2. Interactions binaires entre particules dépeuplant et repeuplant un condensat.

Pour caractériser plus précisément l'état du gaz dans ces conditions, PENROSE & ONSAGER (1956) introduisent la matrice densité à un corps

$$\hat{\rho}_1 = N \text{Tr}_{2,\dots,N}(\hat{\rho}) \quad (\text{V.8})$$

obtenu en prenant la trace partielle sur $N - 1$ particules. L'opérateur $\hat{\rho}_1$ est hermitien, positif et sa trace vaut :

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_1) = N. \quad (\text{V.9})$$

Cette opération de trace partielle s'écrit en point de vue position

$$\langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle = N \int d^3 r_2 \dots d^3 r_N \langle \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}', \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N | \hat{\rho} | \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N \rangle \quad (\text{V.10})$$

et, avec le formalisme de la seconde quantification :

$$\langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle = \text{Tr}(\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\rho}), \quad (\text{V.11})$$

où l'opérateur champ $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ détruit une particule au point \mathbf{r} . La définition de la fraction condensée f_c , pour un système de densité spatiale ρ à la limite thermodynamique, est alors (figure V.3) :

$$f_c \equiv \frac{1}{\rho} \lim_{\infty} \langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle \quad (\text{V.12})$$

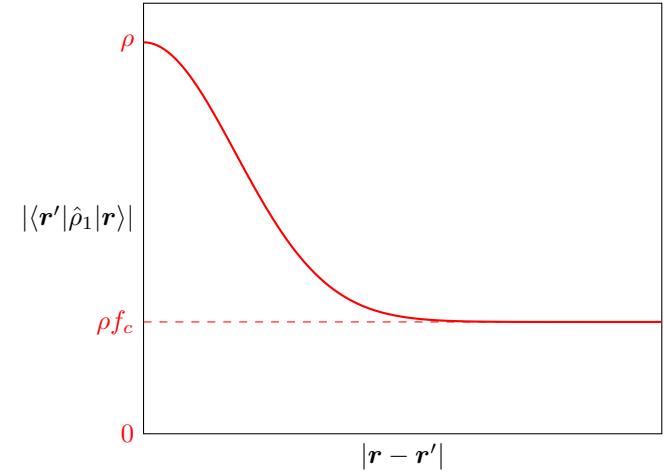


FIGURE V.3. Variation de la fonction $|\langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle|$ avec la distance $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ pour un gaz de Bose. La fraction condensée est définie à partir de la valeur asymptotique de cette fonction.

où la limite est prise pour $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$. Dans ce point de vue, la fraction condensée caractérise donc l'ordre en phase à longue portée du fluide.

Pour relier cette définition à celle du gaz parfait basée sur la population de l'état à une particule ψ_0 , commençons par utiliser le fait que l'opérateur $\hat{\rho}_1$ est hermitien et positif. On peut donc le diagonaliser et on sait que ses valeurs propres seront toutes positives ou nulles, de somme égale à N . Pour un gaz dans une boîte avec des conditions aux limites périodiques, donc un système invariant par translation, les états propres sont les états d'impulsion bien déterminée, c'est-à-dire les ondes planes

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi_{\mathbf{k}} \rangle = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} / \sqrt{L^3}. \quad (\text{V.13})$$

En notant $N_{\mathbf{k}}$ la valeur propre associée à $\psi_{\mathbf{k}}$, nous pouvons mettre $\hat{\rho}_1$ sous la forme

$$\hat{\rho}_1 = \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} |\psi_{\mathbf{k}}\rangle \langle \psi_{\mathbf{k}}| \quad \text{avec} \quad \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} = N, \quad (\text{V.14})$$

ou encore, en point de vue position :

$$\langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}. \quad (\text{V.15})$$

Isolons dans cette somme la contribution de $\mathbf{k} = 0$:

$$\langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle = \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} N_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}. \quad (\text{V.16})$$

Dans la limite $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$, la somme sur $\mathbf{k} \neq 0$, composée d'un grand nombre de termes oscillants avec des fréquences spatiales différentes, a une contribution négligeable. On trouve donc en utilisant la définition (V.12) de f_c :

$$f_c = \frac{1}{\rho} \frac{N_0}{L^3} \quad \Rightarrow \quad f_c = \frac{N_0}{N}. \quad (\text{V.17})$$

On retrouve donc la définition de la fraction condensée proposée pour le gaz parfait. L'intérêt de ce passage par les valeurs propres de la matrice densité à un corps est la possibilité de généraliser cette définition au cas de systèmes non homogènes, comme nous le verrons en §1-3.

À température nulle, la fraction condensée du gaz de Bose en interaction a été calculée par BOGOLIUBOV (1947)

$$f_c \approx 1 - \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{\rho a^3} \quad (\text{V.18})$$

et l'énergie correspondante a été obtenue par LEE, HUANG et al. (1957). Ces résultats sont valables si la quantité $\sqrt{\rho a^3}$ est petite devant 1, donc pour une faible déplétion de l'état $|\psi_0\rangle$. Nous renvoyons les lecteurs intéressés vers le cours 2021-22 où nous avons étudié en détail ce problème.

1-3 Définition générale de la fraction condensée

Nous nous intéressons maintenant à un fluide quelconque de N particules ; le confinement n'est pas nécessairement une boîte à fond plat et la structure interne des particules peut jouer un rôle dans le cas d'un gaz spiny. Nous supposons seulement que les N particules sont identiques de sorte que l'on peut toujours définir la matrice densité à un corps :

$$\langle \mathbf{r}', \alpha' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r}, \alpha \rangle = \text{Tr} \left(\hat{\Psi}_{\alpha'}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) \hat{\rho} \right), \quad (\text{V.19})$$

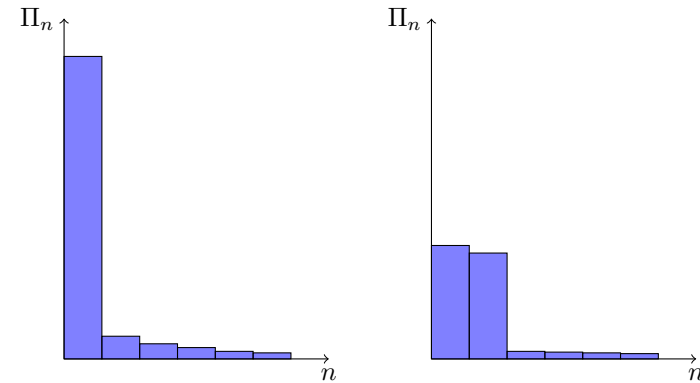


FIGURE V.4. Valeurs propres de la matrice densité à un corps rangées par ordre décroissant dans le cas d'un condensat "usuel" (gauche) et d'un condensat fractionné (droite).

où l'opérateur champ $\hat{\Psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r})$ crée une particule au point \mathbf{r} dans l'état interne α (généralement un état de spin).

Certaines propriétés mentionnées plus haut pour $\hat{\rho}_1$ restent vérifiées : c'est un opérateur à une particule, hermitien, positif, et sa trace est égale à N . On peut donc le diagonaliser et ranger ses valeurs propres par ordre décroissant :

$$\Pi_0 \geq \Pi_1 \geq \Pi_2 \geq \dots \quad \text{avec} \quad \sum_j \Pi_j = N. \quad (\text{V.20})$$

Les fonction propres associées

$$\hat{\rho}_1 |\psi_j\rangle = \Pi_j |\psi_j\rangle \quad (\text{V.21})$$

sont des états à une particule et forment une base orthonormée. Toutefois, contrairement au cas homogène où ces états sont facilement identifiables (ondes planes), leur calcul peut être compliqué et ils dépendent généralement du nombre de particules N .

Plusieurs situations sont alors possibles :

— La valeur propre la plus grande, Π_0 , est d'ordre N et toutes les autres

sont petites devant Π_0 (figure V.4, gauche). C'est le cas d'un condensat "usuel" et $|\psi_0\rangle$ représente la fonction d'onde du condensat.

- Toutes les valeurs propres sont petites devant N , voire nulles à la limite thermodynamique quand celle-ci est bien définie. Il n'y alors pas de condensat, ce qui peut se produire pour plusieurs raisons : la température peut être trop grande, au dessus du seuil de condensation ; ou alors les interactions sont suffisamment fortes pour empêcher l'accumulation de particules dans un même état, c'est par exemple le cas pour un isolant de Mott, même à température nulle.
- Quelques valeurs propres sont comparables et d'ordre N (figure V.4, droite) : on a alors affaire à un *condensat fragmenté*. Par exemple, si Π_0 et Π_1 sont comparables entre elles et toutes les autres valeurs propres négligeables, $\hat{\rho}_1$ s'écrit

$$\hat{\rho}_1 \approx \sum_{j=0,1} \Pi_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| = \begin{pmatrix} \Pi_0 & 0 \\ 0 & \Pi_1 \end{pmatrix} \quad (\text{V.22})$$

où la matrice est écrite dans la base $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle\}$.

Dans le dernier cas, la matrice densité à un corps est donc un mélange statistique des deux états $|\psi_0\rangle$ et $|\psi_1\rangle$, ce qui correspond à une entropie statistique non nulle. Il ne faudrait pas en déduire que le système à N corps est également un mélange statistique. Pour $\Pi_0 = \Pi_1 = 1/2$, cette matrice densité à un corps peut par exemple être obtenue avec un état pur de type "chat de Schrödinger" :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0, \dots, 0\rangle + |1, 1, \dots, 1\rangle) . \quad (\text{V.23})$$

Plus généralement, la matrice densité à un corps est parfaitement adaptée pour décrire les quantités physiques elles-mêmes à un corps (densité spatiale, distribution en impulsion), mais ne donne pas accès aux corrélations entre particules.

1-4 Fragmentation vs. énergie d'échange

Dans un condensat usuel, composé d'un grand nombre de particules sans spin ou polarisées, et en présence d'interactions répulsives, la fragmentation est généralement empêchée par l'énergie d'échange (NOZIERES

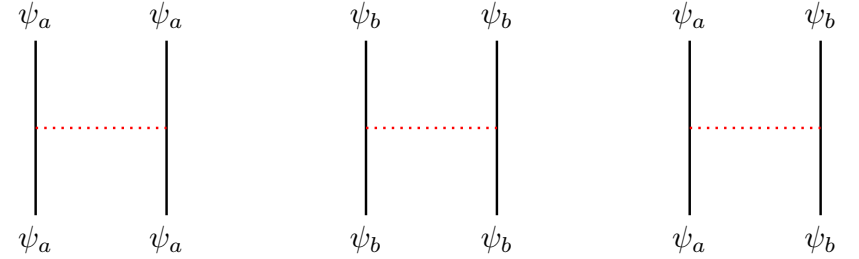


FIGURE V.5. Processus d'interaction directs contribuant à la première partie de l'énergie donnée en (V.26).

1995). Pour montrer ce résultat, considérons un système tel que deux états à une particule, notés $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$ ont quasiment la même énergie $\epsilon_a \approx \epsilon_b$. En absence d'interaction, tous les états à N particules $|N_a, N_b\rangle$ (avec $N_a + N_b = N$) sont donc quasi-dégénérés.

Prenons maintenant en compte le potentiel d'interaction binaire $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ entre particules, décrit en seconde quantification par l'opérateur

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^3r d^3r' \quad (\text{V.24})$$

où l'opérateur champ $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ détruit une particule au point \mathbf{r} et s'écrit :

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \psi_a(\mathbf{r}) \hat{a} + \psi_b(\mathbf{r}) \hat{b} + \dots \quad (\text{V.25})$$

où \hat{a} et \hat{b} détruisent une particule dans les états ψ_a et ψ_b , et où la somme s'étend sur tous les états à une particule. Évaluons maintenant la moyenne de \hat{V} dans un état $|N_a, N_b, \dots\rangle$. En nous limitant aux contributions des états ψ_a et ψ_b , nous trouvons¹

$$\langle V \rangle = \frac{V_0}{2} [N_a(N_a - 1) + N_b(N_b - 1) + 2N_a N_b] + V_{\text{ech}} N_a N_b \quad (\text{V.26})$$

1. Pour simplifier, nous ne prenons pas compte les processus où les nombres n_a, n_b ne sont pas conservés, comme par exemple $a + a \rightarrow a + b$, en supposant par exemple qu'une règle de conservation (impulsion, moment cinétique) les interdit.

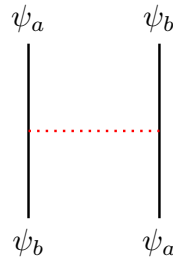


FIGURE V.6. Processus d'interaction d'échange contribuant à la seconde partie de l'énergie donnée en (V.26).

où nous avons supposé que les éléments de matrice "directs" correspondant aux diagrammes de la figure V.5

$$\langle \psi_a \psi_a | V | \psi_a \psi_a \rangle \quad \langle \psi_b \psi_b | V | \psi_b \psi_b \rangle \quad \langle \psi_a \psi_b | V | \psi_a \psi_b \rangle \quad (\text{V.27})$$

étaient tous égaux entre eux pour conserver la symétrie entre les états a et b . Cette hypothèse est vérifiée si on prend par exemple $\psi_{a,b}(x) = e^{\pm ikx} / \sqrt{L^3}$ pour des particules confinées sur un cube de côté L . Nous avons par ailleurs introduit le terme d'échange correspondant au diagramme de la figure V.6

$$V_{\text{ech}} = \langle \psi_a \psi_b | V | \psi_b \psi_a \rangle = \langle \psi_b \psi_a | V | \psi_a \psi_b \rangle. \quad (\text{V.28})$$

Pour des interactions de contact, ce terme d'échange est égal au terme direct V_0 .

Si ce terme d'échange était absent, l'interaction moyenne $\langle V \rangle$ ne lèverait pas la dégénérescence entre tous les états $|N_a, N_b\rangle$ puisqu'elle s'écrirait $\frac{V_0}{2} N(N-1)$: on aurait toujours une fragmentation maximale du condensat. En revanche, quand on le prend en compte en notant que V_0 doit être positif pour que le gaz n'implose pas, on constate que ce terme vient favoriser les deux états extrêmes $|N, 0\rangle$ et $|0, N\rangle$.

2 L'état fondamental d'une jonction atomique

Dans les trois premiers chapitres de ce cours, nous avons utilisé essentiellement une description de la jonction Josephson en terme de champ classique. Cela suppose que le fluide est entièrement condensé dans un état à une particule, noté $|\psi(t)\rangle$. Par exemple, dans le cas d'une jonction formée par un double puits de potentiel, nous avons écrit la fonction d'onde à un corps sous la forme

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \alpha_a(t) \Phi_a(\mathbf{r}) + \alpha_b(t) \Phi_b(\mathbf{r}), \quad (\text{V.29})$$

et nous avons étudié la dynamique de la jonction à l'aide des amplitudes $\alpha_j(t)$. Cette approche est tout à fait pertinente pour une grande partie des jonctions réalisées avec des gaz d'atomes froids, mais il importe de bien connaître ses limites.

2-1 États cohérents de spin et distribution de Husimi

Pour explorer ce problème, nous allons partir de la description quantique de la jonction présentée au chapitre 4. Rappelons que dans ce modèle à deux états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ pour chaque particule, l'espace de Hilbert pour les N particules identiques composant la jonction est de dimension $N+1$ et il est engendré par les états nombre $|N_a, N_b\rangle$, également appelés *états de Fock* :

$$|N, 0\rangle, |N-1, 1\rangle, \dots, |1, N-1\rangle, |0, N\rangle. \quad (\text{V.30})$$

Dans la mesure où le nombre total $N = N_a + N_b$ est fixé une fois pour toutes, nous écrivons ces états plus simplement :

$$|n\rangle \equiv \left| N_a = \frac{N}{2} + n, N_b = \frac{N}{2} - n \right\rangle \quad n = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}. \quad (\text{V.31})$$

Avec cette écriture, nous supposons que N est pair, donc $N/2$ entier, ce qui simplifie les notations. Dans la limite $N \gg 1$, cette hypothèse de parité n'a pas de conséquences physiques significatives, sauf dans des cas bien spécifiques que nous signalerons.

Dans cette partie, nous écrivons l'hamiltonien du problème sous la

forme²

$$\hat{H} = -\frac{E_J}{N}(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}) + \frac{E_C}{4}(\hat{N}_a^2 + \hat{N}_b^2) \quad (\text{V.32})$$

où \hat{a} (resp. \hat{a}^\dagger) détruit (resp. crée) une particule sur le site a , et idem pour b . Les opérateurs nombres de particules $\hat{N}_{a,b}$ sont définis par $\hat{N}_a = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ et $\hat{N}_b = \hat{b}^\dagger \hat{b}$.

Rappelons que le terme proportionnel à E_J décrit le couplage tunnel entre les composantes a et b pour une jonction externe, ou le couplage cohérent induit par une onde électromagnétique pour une jonction interne. Le terme proportionnel à E_C décrit les interactions entre particules. Dans ce chapitre, nous ferons l'hypothèse $E_C > 0$, que la jonction soit externe ou interne : l'état fondamental ne subit donc pas de bifurcation quand on varie le rapport E_C/E_J (cf. chapitre 4).

États cohérents de spin. Pour étudier les aspects quantiques d'une jonction, nous allons utiliser la famille d'états à N corps appelée *états cohérents de spin*, déjà introduite au chapitre 4. Cette famille est obtenue en mettant toutes les particules dans un même état combinaison linéaire de $|a\rangle$ et $|b\rangle$. Nous pouvons écrire cet état à une particule comme

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2) e^{i\varphi/2} |a\rangle + \sin(\theta/2) e^{-i\varphi/2} |b\rangle \quad (\text{V.33})$$

où l'angle θ repère les poids relatifs des états a et b et où φ représente la phase relative entre les deux puits. Nous avons omis la phase globale de $|\psi\rangle$, sans importance ici.

En seconde quantification, l'état cohérent de spin s'écrit alors (LEGGETT & SOLS 1991) :

$$|\theta, \varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left[\cos(\theta/2) e^{i\varphi/2} \hat{a}^\dagger + \sin(\theta/2) e^{-i\varphi/2} \hat{b}^\dagger \right]^N |0\rangle. \quad (\text{V.34})$$

En toute rigueur, il faudrait également spécifier la valeur de N dans cette définition et noter cet état $|N, \theta, \varphi\rangle$, mais N sera fixé dans tout ce qui suit et

2. Au chapitre 4, nous avons écrit le terme correspondant à l'énergie de charge sous la forme $\frac{E_C}{2} \hat{J}_z^2$ avec $\hat{J}_z = \frac{1}{2}(\hat{N}_a - \hat{N}_b)$. Cette forme diffère de celle écrite en (V.32) par un terme additif constant, donc sans importance pour ce qui suit, puisque $\hat{J}_z^2 = \frac{1}{2}(\hat{N}_a^2 + \hat{N}_b^2) - \frac{N^2}{4}$.

nous omettrons donc de le mentionner explicitement³. Pour l'état cohérent $|\theta, \varphi\rangle$, les nombres moyens de particules dans les états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ sont

$$\langle \hat{N}_a \rangle = N \cos^2(\theta/2) \quad \langle \hat{N}_b \rangle = N \sin^2(\theta/2). \quad (\text{V.36})$$

Les états cohérents de spin sont en nombre infini, ce qui entraîne immédiatement qu'ils ne sont pas indépendants les uns des autres puisqu'ils sont tous éléments de l'espace de dimension finie $N + 1$. En revanche, ils forment un système générateur et fournissent notamment une *résolution de l'identité* :

$$\int |\theta, \varphi\rangle \langle \theta, \varphi| d^2\Omega = \frac{4\pi}{N+1} \hat{1} \quad \text{avec} \quad d^2\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (\text{V.37})$$

Le recouvrement entre deux états cohérents est donné par

$$|\langle \theta, \varphi | \theta', \varphi' \rangle|^2 = \cos^{2N}(\gamma/2) \approx e^{-N\gamma^2/4} \quad (\text{V.38})$$

où γ désigne l'angle entre les deux directions (θ, φ) et (θ', φ') . La dernière expression (approchée) est valable si $\gamma \ll 1$ et elle montre que pour $N \gg 1$, un état cohérent $|\theta, \varphi\rangle$ n'a un recouvrement significatif qu'avec ses voisins immédiats, situés dans le secteur angulaire centré sur (θ, φ) et de largeur $\sim 1/\sqrt{N}$.

États cohérents équatoriaux ou "états de phase". Parmi l'ensemble des états cohérents, un sous-ensemble très utile est formé par les états de phase (CASTIN & DALIBARD 1997). Ces états sont centrés sur l'équateur de la sphère de Bloch ($\theta = \pi/2$) et ont donc le même nombre moyen de particules en a et b . En développant la définition (V.34) pour $\theta = \pi/2$, on obtient :

$$\left| \frac{\pi}{2}, \varphi \right\rangle = \sum_n c(n) e^{in\varphi} |n\rangle \quad \text{avec} \quad c(n) = \frac{1}{2^{N/2}} \sqrt{\frac{N!}{N_a! N_b!}}, \quad (\text{V.39})$$

ce qui se simplifie dans la limite $N \gg 1$ en utilisant la formule de Stirling :

$$c(n) \approx \frac{e^{-n^2/N}}{(\pi N/2)^{1/4}}. \quad (\text{V.40})$$

3. Notons néanmoins les relations

$$\hat{a} |N, \theta, \varphi\rangle = \sqrt{N} \cos(\theta/2) e^{i\varphi/2} |N-1, \theta, \varphi\rangle \quad \hat{b} |N, \theta, \varphi\rangle = \sqrt{N} \sin(\theta/2) e^{-i\varphi/2} |N-1, \theta, \varphi\rangle \quad (\text{V.35})$$

qui seront des intermédiaires de calcul utiles dans la suite.

Les états de phase sont donc essentiellement concentrés sur les états de Fock $|n\rangle$ autour de $n = 0$ (c'est-à-dire $N_a = N_b = N/2$) avec une largeur $\Delta n \approx \frac{1}{2}\sqrt{N}$. On vérifiera que cette approximation de $c(n)$ conserve la normalisation de $|\Psi\rangle$ quand on passe à la limite continue :

$$\sum_n |c(n)|^2 \approx \int_{-\infty}^{\infty} |c(x)|^2 dx = 1. \quad (\text{V.41})$$

L'extension des bornes $\pm N/2$ jusqu'à $\pm\infty$ est légitime dans la mesure où la largeur $\sim \sqrt{N}$ de la distribution est très petite devant $N/2$.

Notons qu'il est possible d'inverser la relation (V.39) et d'exprimer les états nombres en terme des états de phase; en multipliant (V.39) par $e^{-in\varphi}$ et en intégrant sur φ entre $-\pi$ et $+\pi$, on obtient :

$$|n\rangle = \frac{1}{2\pi c(n)} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-in\varphi} \left| \frac{\pi}{2}, \varphi \right\rangle d\varphi. \quad (\text{V.42})$$

Énergie d'un état cohérent de spin. Pour l'hamiltonien écrit en (V.32), l'énergie moyenne $E(\theta, \varphi) = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle$ d'un état cohérent de spin s'écrit

$$E(\theta, \varphi) = -E_J \sin \theta \cos \varphi + \frac{N(N-1)E_C}{8} (1 + \cos^2 \theta) + \frac{NE_C}{4}. \quad (\text{V.43})$$

Pour les états de phase ($\theta = \pi/2$), cette énergie vaut

$$E(\theta, \varphi) = -E_J \cos \varphi + \frac{N(N+1)E_C}{8}. \quad (\text{V.44})$$

Elle est minimale pour l'état de phase $|\frac{\pi}{2}, 0\rangle$ et vaut $-E_J + \frac{1}{8}N(N+1)E_C$.

Distribution de Husimi. Une manière commode pour visualiser un état à N corps quelconque, noté ici $|\Psi\rangle$, consiste à s'intéresser à la fonction

$$\mathcal{Q}(\theta, \varphi) \equiv \frac{N+1}{4\pi} |\langle \theta, \varphi | \Psi \rangle|^2 \quad (\text{V.45})$$

correspondant au recouvrement entre cet état et les états cohérents de spin. La résolution de l'identité (V.37) donne :

$$\int \mathcal{Q}(\theta, \varphi) d^2\Omega = 1, \quad (\text{V.46})$$

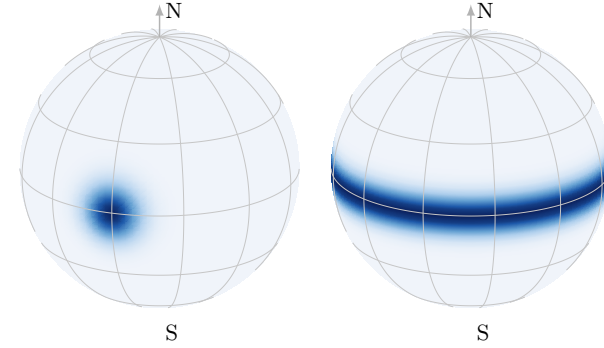


FIGURE V.7. Distribution de Husimi pour $|\theta = \pi/2, \varphi = 0\rangle$ (gauche) et $|n = 0\rangle \equiv |N_a = N/2, N_b = N/2\rangle$ (droite). On a pris $N = 100$. Le code couleur est ajusté pour que le maximum soit complètement sombre sur chaque exemple.

ce qui indique que $\mathcal{Q}(\theta, \varphi)$ peut s'interpréter comme une distribution de probabilité.

Deux exemples de distributions de Husimi sont tracés en figure V.7 pour des états qui joueront un rôle important dans la suite, l'état de phase $|\frac{\pi}{2}, \varphi = 0\rangle$ et l'état de Fock $|n = 0\rangle \equiv |N_a = N/2, N_b = N/2\rangle$.

2-2 État fondamental de la jonction

Nous revenons à l'hamiltonien (V.32) de la jonction symétrique et nous allons chercher à déterminer son état fondamental de manière approchée⁴ en utilisant la méthode variationnelle. Pour cela, nous allons prendre une famille de fonctions d'essai qui permet d'interpoler entre les deux situations limites aisément identifiables :

- En l'absence d'interaction entre particules, i.e. $E_C = 0$, l'état fondamental de cet hamiltonien est l'état de phase $|\frac{\pi}{2}, \varphi = 0\rangle$ avec l'énergie propre $-E_J$.

⁴ On peut également déterminer cet état fondamental de façon exacte au moyen de l'ansatz de Bethe (LINKS, FOERSTER et al. 2006; BARDIN, MINGUZZI et al. 2026).

— En l'absence d'énergie tunnel, i.e. $E_J = 0$, l'état fondamental est l'état $|n = 0\rangle = |\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle$, puisqu'on minimise la somme $N_a^2 + N_b^2$ en mettant le même nombre $N_a = N_b = N/2$ de part et d'autre de la barrière tunnel.

Partant de l'état $|\frac{\pi}{2}, \varphi = 0\rangle$ qui s'écrit sur la base de Fock [cf. (V.39-V.40)]

$$|\frac{\pi}{2}, 0\rangle \approx \frac{1}{(\pi N/2)^{1/4}} \sum_n e^{-n^2/N} |n\rangle, \quad (\text{V.47})$$

nous allons nous intéresser à la famille d'états paramétrés par le nombre sans dimension ζ :

$$|\Psi(\zeta)\rangle = \frac{\zeta^{1/4}}{(\pi N/2)^{1/4}} \sum_n e^{-\zeta n^2/N} |n\rangle \quad (\text{V.48})$$

On retrouve l'état $|\frac{\pi}{2}, 0\rangle$ pour $\zeta = 1$. Le choix $\zeta > 1$ permet d'avoir une distribution en n plus concentrée autour de $n = 0$. Quelques distributions de Husimi pour la famille $\{|\psi(\zeta)\rangle\}$ sont tracées en figure V.8. En particulier, quand ζ devient comparable à N , seuls quelques états de Fock autour de $|n = 0\rangle$ sont significativement peuplés (au lieu de $\sim \sqrt{N}$ pour l'état $|\Psi(\zeta = 1)\rangle$).

Avant d'évaluer la valeur de ζ qui minimise l'énergie moyenne pour un couple (E_J, E_C) donné, il est intéressant de regarder la distribution en phase des états $|\Psi(\zeta)\rangle$. On trouve, en remplaçant la somme discrète sur n par une intégrale :

$$\langle \frac{\pi}{2}, \varphi | \psi(\zeta) \rangle \approx \zeta^{1/4} \sqrt{\frac{2}{1+\zeta}} e^{-N\varphi^2/4(1+\zeta)} \quad (\text{V.49})$$

de sorte que la distribution de phase de $|\Psi(\zeta)\rangle$ reste piquée autour de $\varphi = 0$ tant que $\zeta \ll N$. En revanche pour $\zeta \approx N$, $|\Psi(\zeta)\rangle$ a un recouvrement similaire avec tous les états de phase.

Le calcul de l'énergie moyenne de la jonction pour l'état $|\Psi(\zeta)\rangle$ se mène de façon similaire et on arrive à :

$$E(\zeta) \approx -E_J \left(1 + \frac{1}{N} - \frac{1}{2\zeta N}\right) e^{-\zeta/2N} + \frac{1}{8} N^2 E_C \left(1 + \frac{1}{N\zeta}\right). \quad (\text{V.50})$$

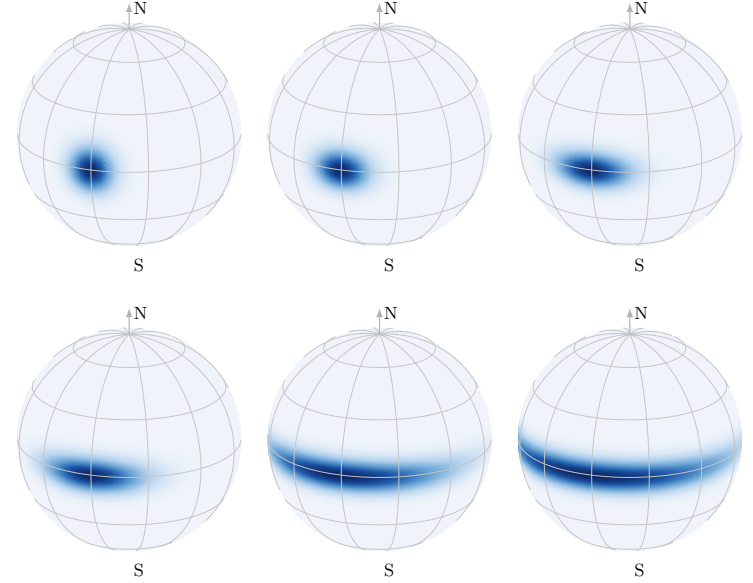


FIGURE V.8. Exemples de distributions de Husimi pour les états variationnels $|\Psi(\zeta)\rangle$ pour $N = 100$. De gauche à droite et de haut en bas : $\zeta = 1$ (état de phase), $\zeta = 2$, $\zeta = 5$, $\zeta = 10$, $\zeta = 50$, $\zeta = 100$. Le code couleur est ajusté pour chaque exemple pour que le maximum soit complètement sombre.

Faisons l'hypothèse que la valeur de ζ qui minimise cette énergie est petite devant N , hypothèse que nous discuterons à la fin de l'analyse. On peut alors développer l'exponentielle $e^{-\zeta/2N}$ et mettre l'énergie sous la forme

$$E(\zeta) \approx \frac{1}{2N} \left[E_J \zeta + \left(E_J + \frac{1}{4} N^2 E_C \right) \frac{1}{\zeta} \right] + E_0 \quad (\text{V.51})$$

avec

$$E_0 = -E_J \left(1 + \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{8} N^2 E_C. \quad (\text{V.52})$$

Le minimum de cette quantité est atteint pour

$$\zeta_{\min} = \left(1 + \frac{N^2 E_C}{4E_J}\right)^{1/2} \quad (\text{V.53})$$

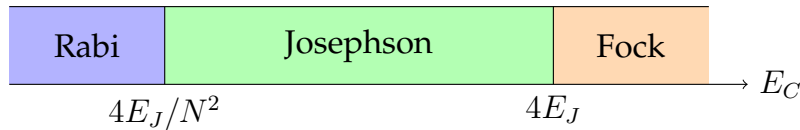


FIGURE V.9. Les trois régimes identifiés pour le fonctionnement d'une jonction Josephson, selon la valeur du rapport E_C/E_J .

ce qui permet de distinguer les trois régimes reportés sur la figure V.9 (LEGGETT 2001) :

— **le régime de Rabi :**

$$E_C \ll 4E_J/N^2 \Rightarrow \zeta_{\min} \approx 1, \quad E(\zeta_{\min}) \approx -E_J. \quad (\text{V.54})$$

Les interactions jouent un rôle négligeable et l'état fondamental de la jonction est égal à l'état de phase $|\frac{\pi}{2}, \varphi = 0\rangle$, avec une distribution gaussienne des probabilités d'occupation des différents états $|n\rangle$, de largeur $\Delta n \approx \frac{1}{2}\sqrt{N}$. La distribution de phase est centrée sur $\varphi = 0$ et très étroite : $\Delta\varphi \approx 1/\sqrt{N}$.

— **le régime Josephson :**

$$4E_J/N^2 \ll E_C \ll 4E_J \Rightarrow \zeta_{\min} \approx N \left(\frac{E_C}{4E_J} \right)^{1/2} \quad (\text{V.55})$$

c'est-à-dire

$$1 \ll \zeta_{\min} \ll N. \quad (\text{V.56})$$

L'énergie minimale est alors :

$$E(\zeta_{\min}) \approx \frac{1}{2}\hbar\omega_p + E_0 \quad \text{avec} \quad \hbar\omega_p = \sqrt{E_J E_C}. \quad (\text{V.57})$$

La distribution des probabilités d'occupation des différents états $|n\rangle$ pour $|\psi(\zeta_{\min})\rangle$ reste relativement large :

$$\Delta n = \sqrt{\frac{N}{4\zeta_{\min}}} \sim \left(\frac{E_J}{4E_C} \right)^{1/4} \gg 1, \quad (\text{V.58})$$

mais elle est plus resserrée que dans le cas sans interaction ($\Delta n \ll \sqrt{N}$). La distribution sur les états de phase est au contraire augmentée par rapport au cas sans interaction (on a ici encore $\Delta\varphi \Delta n \sim \frac{1}{2}$), mais reste petite devant 1. La phase de la jonction est donc toujours une quantité bien définie. L'état minimiseur est un *état comprimé en spin*, qui joue un rôle central en métrologie quantique (voir remarque ci-dessous).

— **le régime de Fock :**

$$4E_J \ll E_C. \quad (\text{V.59})$$

Dans ce régime, le résultat (V.53) conduit à $\zeta_{\min} > N$, ce qui contredit l'hypothèse $\zeta \ll N$ que nous avons faite pour arriver à (V.53). Plus précisément, on trouve dans ce régime l'état fondamental

$$|\psi_{\text{fond}}\rangle \approx |n = 0\rangle \equiv \left| \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \right\rangle \quad E_{\text{fond}} \approx \frac{1}{8}N^2 E_C. \quad (\text{V.60})$$

Les deux composantes de cet état sont appelés *états jumeaux de Fock* (*Twin Fock states*). Cet état est séparé de ses "voisins"

$$|n = \pm 1\rangle \equiv \left| \frac{N}{2} \pm 1, \frac{N}{2} \mp 1 \right\rangle \quad (\text{V.61})$$

par l'énergie d'interaction $E_C/2$, qui est grande devant l'élément de matrice de couplage $\sim E_J$ entre ces différents états. L'effet tunnel n'est donc pas résonnant dans ce régime extrême et les populations restent "verrouillées" sur la valeur centrale $N_a = N_b = N/2$. Cette situation rappelle celle d'un isolant de Mott pour des atomes piégés sur les sites d'un réseau optique.

Nous avons déjà identifié les deux premiers régimes au chapitre 1, en étudiant la dynamique de la jonction par une approche en terme de champ classique. En particulier, nous avons montré que dans le régime de Josephson, l'évolution de la jonction autour de sa position d'équilibre était donnée par la fréquence plasma ω_p . Il est donc satisfaisant de voir apparaître en (V.57) le demi-quantum d'énergie $\hbar\omega_p/2$ correspondant au mouvement de point zéro de cet oscillateur. Nous approfondirons l'émergence de cette structure d'oscillateur harmonique en §3-2.

En revanche, le troisième régime ne pouvait pas être obtenu par l'approche classique. Il correspond à un état localisé sur un seul état dans la

base de Fock, avec un recouvrement uniforme de tous les états de phase entre $\varphi = -\pi$ et $\varphi = +\pi$ [cf. (V.42) pour $n = 0$]. Il a été réalisé de manière approchée avec des photons (THEKKADATH, MYCROFT et al. 2020) et avec des atomes (LUO, ZOU et al. 2017), mais dans un contexte différent de celui des jonctions Josephson. Nous retrouverons des états similaires au prochain chapitre pour des jonctions supraconductrices, quand nous nous intéresserons à la formation de qubits.

Applications métrologiques. Les états comprimés en spin, obtenus pour $\zeta > 1$, jouent un rôle central en métrologie quantique (PEZZE, SMERZI et al. 2018; SINATRA 2022). Pour expliquer ce rôle, supposons que l'on s'intéresse à un phénomène physique qui transfère des atomes entre les états $|a\rangle$ et $|b\rangle$. Partons d'un état pour lequel $\langle N_a \rangle = \langle N_b \rangle = N/2$. Si l'on dispose d'atomes indépendants, donc non corrélés entre eux, une réalisation de l'expérience permettra de déterminer le nombre d'atomes ayant subi la transition à \sqrt{N} près : c'est le bruit quantique standard. Si l'on dispose d'un état initial comprimé, avec une dispersion en $n = (N_a - N_b)/2$ notablement réduite par rapport à \sqrt{N} , on aura naturellement une meilleure précision sur la mesure du nombre d'atomes ayant transité de $|a\rangle$ vers $|b\rangle$ pendant la durée d'observation. L'état comprimé "ultime" $|\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle$, si on sait le préparer et compter les atomes à l'unité près pour le distinguer de $|\frac{N}{2} \pm 1, \frac{N}{2} \mp 1\rangle$, permet même de détecter la transition d'un seul atome!

2-3 Fragmentation de l'état fondamental

Comme nous l'avons vu de façon générale en §1, la fraction condensée se définit à partir de la matrice densité à un corps $\hat{\rho}_1$. Dans le cas présent, la situation est simple puisque l'espace de Hilbert à une particule est de dimension 2, avec comme base possible les deux états $|a\rangle$ et $|b\rangle$. La matrice densité à un corps est donc définie par

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \hat{b} \rangle \\ \langle \hat{b}^\dagger \hat{a} \rangle & \langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle \end{pmatrix} \quad (\text{V.62})$$

où les valeurs moyennes sont prises dans l'état du système à N corps.

Intéressons-nous à l'état variationnel $|\Psi(\zeta)\rangle$ défini en (V.48). En passant comme précédemment à la limite continue pour le calcul des sommes sur

n , on trouve pour les coefficients diagonaux

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle = \frac{N}{2} \quad (\text{V.63})$$

et pour les coefficients non diagonaux :

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{b} \rangle = \langle \hat{b}^\dagger \hat{a} \rangle \approx \frac{N}{2} \left(1 + \frac{1}{N} - \frac{1}{2\zeta N} \right) e^{-\zeta/2N}. \quad (\text{V.64})$$

Plaçons-nous d'abord dans le régime de Rabi ou dans le régime Josephson, pour lesquels $\zeta_{\min} \ll N$; les coefficients non diagonaux de $\hat{\rho}_1$ sont alors voisins des coefficients diagonaux, de sorte que les valeurs propres de $\hat{\rho}_1$ sont approximativement N et 0. Plus précisément, en prenant $\zeta = \zeta_{\min}$, on trouve dans le régime de Rabi, à des termes d'ordre $1/N$ près :

$$\text{Rabi :} \quad \Pi_0 = N \quad \Pi_1 = 0 \quad (\text{V.65})$$

et dans le régime Josephson :

$$\text{Josephson :} \quad \Pi_0 \sim N - \frac{N}{8} \sqrt{\frac{E_C}{E_J}} \quad \Pi_1 \sim \frac{N}{8} \sqrt{\frac{E_C}{E_J}}. \quad (\text{V.66})$$

Le condensat est donc très peu fragmenté tant que $E_C \ll E_J$.

En revanche, dans le régime de Fock $E_C \gtrsim E_J$, la fragmentation du condensat devient très significative. Pour l'état $|N/2, N/2\rangle$, on a $\langle \hat{a}^\dagger \hat{b} \rangle = \langle \hat{b}^\dagger \hat{a} \rangle = 0$, de sorte que les deux valeurs propres de $\hat{\rho}_1$ sont

$$\text{État de Fock } \left| \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \right\rangle : \quad \Pi_0 = \frac{N}{2} \quad \Pi_1 = \frac{N}{2}, \quad (\text{V.67})$$

ce qui correspond à la fragmentation maximale possible. On trouvera en figure V.10 la variation de Π_0 et Π_1 avec le paramètre $N^2 E_C / 4 E_J$ pour le cas $N = 100$.

Le gain en énergie de la fragmentation. Il est utile de comparer, pour une configuration donnée, l'énergie de l'état fondamental fragmenté par rapport au résultat prédit par une approche champ moyen. Prenons le cas limite $E_J = 0$, correspondant à l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{E_C}{4} (\hat{N}_a^2 + \hat{N}_b^2) \quad (\text{V.68})$$

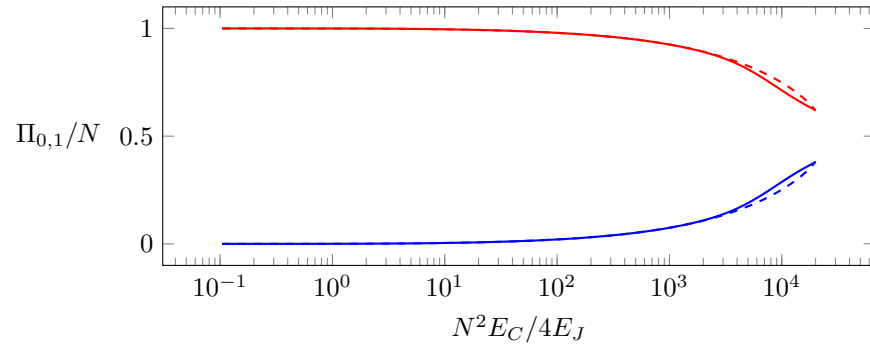


FIGURE V.10. Variation des deux valeurs propres Π_0 (rouge) et Π_1 (bleu) avec le paramètre $N^2 E_C / 4 E_J$ pour $N = 100$. Le trait plein est obtenu par diagonalisation exacte de l'hamiltonien (V.32), le trait tireté correspond à l'approche variationnelle décrite dans le texte.

Comme nous l'avons déjà signalé, l'état de Fock $|n=0\rangle \equiv |N_a = N/2, N_b = N/2\rangle$ est état propre avec l'énergie $\frac{1}{8} N^2 E_C$. Prenons maintenant les états de phase $|\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi\rangle$ définis en (V.39). Leur énergie calculée en (V.44) est voisine, mais légèrement supérieure : $E(\varphi) = \frac{1}{8} N(N+1) E_C$. On voit donc que la fragmentation du condensat, qui conduit à l'état fondamental [cf. (V.42)]

$$|n=0\rangle \propto \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{\pi}{2}, \varphi \right\rangle d\varphi \quad (\text{V.69})$$

c'est-à-dire une superposition cohérente à amplitudes égales de tous les états de champ moyen $|\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi\rangle$, permet d'abaisser l'énergie d'une quantité sub-extensive, avec un gain relatif en $1/N$ (figure V.11). On s'attend donc à ce que ce gain soit significatif uniquement pour des nombres de particules pas trop grands. Nous retrouverons un scénario similaire pour le cas d'un gaz de particules de spin 1 en § 4.

Remarque sur la parité de N . Nous avons supposé dans ce qui précède que nous prenions N pair pour simplifier les notations ; nous avons également mentionné que cette hypothèse n'avait généralement pas de consé-

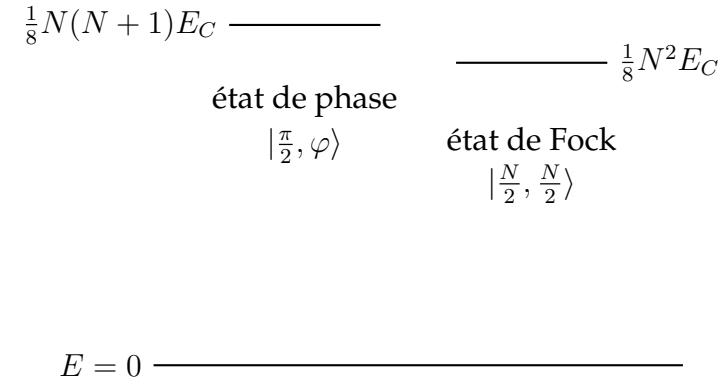


FIGURE V.11. Dans le cas E_J négligeable, l'état fragmenté $|\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle$ a une énergie abaissée de $\frac{1}{8} N E_C$ par rapport à l'état de champ moyen, où tous les spins occupent le même état (état de phase).

quences physiques. La fragmentation dans le régime de Fock est une exception à cette affirmation. Si N est impair, l'état d'énergie minimale dans le régime $E_C \gg E_J$ est

$$N \text{ impair : } |\psi_{\text{fond}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2} \right\rangle + \left| \frac{N+1}{2}, \frac{N-1}{2} \right\rangle \right) \quad (\text{V.70})$$

ce qui conduit aux valeurs propres $\Pi_0 = 3N/4$ et $\Pi_1 = N/4$ pour la matrice densité à un corps. L'état est toujours fortement fragmenté, mais à un degré moindre que dans le cas des nombres N pairs.

3 Spectre énergétique de la jonction

3-1 Rappel : représentation de Schwinger

Au paragraphe précédent, nous avons utilisé une approche variationnelle pour déterminer l'état fondamental de la jonction. Il est intéressant de compléter cette étude en déterminant le spectre en énergie de ce système,

au moins dans sa partie basse. Pour cela, revenons à la représentation de la jonction dans le formalisme de Schwinger, que nous avons développé au chapitre précédent. Rappelons que cette représentation consiste à introduire les trois opérateurs

$$\begin{cases} \hat{J}_x = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger) \\ \hat{J}_y = \frac{i}{2} (\hat{a} \hat{b}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{b}) \\ \hat{J}_z = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}) \end{cases} \quad (\text{V.71})$$

qui vérifient les règles de de commutation d'un opérateur moment cinétique :

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i \hat{J}_z \quad (\text{V.72})$$

et les deux autres relations déduites par permutation circulaire. On a par ailleurs :

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 = \frac{\hat{N}}{2} \left(\frac{\hat{N}}{2} + 1 \right). \quad (\text{V.73})$$

L'espace de dimension $N+1$ dans lequel on décrit la jonction à deux modes et N atomes peut donc être vu comme l'espace associé à un moment cinétique de valeur $J = N/2$.

Nous avons donné au chapitre précédent l'hamiltonien décrivant la dynamique de ce moment cinétique. Nous le réécrivons ici en nous plaçant d'emblée à résonance (voir la note en bas de page 2, page 107) :

$$\hat{H} = -\frac{E_J}{J} \hat{J}_x + \frac{E_C}{2} \hat{J}_z^2. \quad (\text{V.74})$$

Pour $E_C = 0$, l'état fondamental de cet hamiltonien est l'état $|J_x = J\rangle$, c'est-à-dire l'état associé à la plus grande valeur propre possible de l'opérateur \hat{J}_x . Cet état n'est autre que l'état de phase déjà rencontré

$$|J_x = J\rangle = \left| \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0 \right\rangle \quad (\text{V.75})$$

dont la représentation de Husimi est tracée en figure V.7, gauche. Plus généralement, l'état cohérent $|\theta, \varphi\rangle$ coïncide avec l'état $|M_{\mathbf{u}} = J\rangle$, où le vecteur unitaire \mathbf{u} définissant l'axe de quantification est défini par les angles θ, φ en coordonnées sphériques.

3-2 L'oscillateur harmonique sous-jacent

Pour progresser, nous allons nous intéresser aux états "voisins" de l'état fondamental, en partant de

$$\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 = J(J+1) \approx J^2 \quad (\text{V.76})$$

en faisant l'approximation suivante pour l'action de l'opérateur \hat{J}_x sur ces états :

$$\hat{J}_x \approx J - \frac{1}{2J} (\hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2). \quad (\text{V.77})$$

Cette approximation est valable tant qu'on s'intéresse à des états donnant naissance à des éléments de matrice de \hat{J}_y et \hat{J}_z très petits devant J . On obtient alors un hamiltonien quadratique en \hat{J}_y et \hat{J}_z :

$$\hat{H} = \frac{E_J}{2J^2} \hat{J}_y^2 + \left(\frac{E_J}{2J^2} + \frac{E_C}{2} \right) \hat{J}_z^2 - E_J \quad (\text{V.78})$$

Par ailleurs, la relation de commutation canonique entre \hat{J}_y et \hat{J}_z se simplifie dans ce régime :

$$[\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i \hat{J}_x \quad \Rightarrow \quad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] \approx iJ \quad (\text{V.79})$$

ce qui correspond (à un coefficient multiplicatif près) à la relation de commutation usuelle entre position et impulsion.

Nous sommes donc ramenés à un problème typique d'oscillateur harmonique. En écrivant l'hamiltonien et la relation de commutation sous la forme compacte

$$\hat{H} = \frac{A}{2} \hat{J}_y^2 + \frac{B}{2} \hat{J}_z^2 - E_J \quad \text{avec} \quad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = iJ \quad (\text{V.80})$$

nous obtenons les évolutions en point de vue de Heisenberg

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d\hat{J}_y}{dt} = [\hat{J}_y, \hat{H}] = iBJ \hat{J}_z \\ i\hbar \frac{d\hat{J}_z}{dt} = [\hat{J}_z, \hat{H}] = -iAJ \hat{J}_y \end{cases} \quad (\text{V.81})$$

qui sont bien du type attendu pour un oscillateur harmonique et dont on déduit la fréquence d'oscillation $\hbar\omega = J\sqrt{AB}$. En utilisant les coefficients

entrant explicitement dans (V.78), on arrive donc à

$$\hbar\omega_p = \left[E_J \left(\frac{4E_J}{N^2} + E_C \right) \right]^{1/2} \quad (\text{V.82})$$

où l'on reconnaît la fréquence plasma ω_p déjà obtenue dans l'approche champ classique. Pour $N \gg 1$, le bas du spectre de la jonction est donc composée d'une série de niveaux équidistants :

$$E_j = \left(j + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_p - E_J \quad j \in \mathbb{N}. \quad (\text{V.83})$$

Ce point de vue "moment cinétique" offre une interprétation physique intéressante du passage du régime de Rabi au régime Josephson, puis au régime de Fock, quand on augmente la force des interactions entre particules, donc le coefficient E_C :

- Dans le régime de Rabi, l'énergie de couplage proportionnelle à E_J domine et les coefficients de \hat{J}_y^2 et \hat{J}_z^2 dans (V.78) sont comparables. L'état fondamental en représentation de Husimi est alors celui montré en figure V.7 (gauche), avec des extensions égales selon y et z .
- Quand l'effet des interactions décrit par E_C augmente, le coefficient de \hat{J}_z^2 est augmenté alors que celui de \hat{J}_y^2 est inchangé. Les interactions (répulsives) tendent en effet à égaliser les populations N_a et N_b , donc à diminuer la dispersion de la distribution de Husimi de part et d'autre de l'équateur : cette distribution prend donc une forme elliptique.
- L'état de Fock correspond au régime ultime où la compression est si forte que la localisation sur l'équateur est maximale, au prix d'une perte complète de l'information sur la phase.

3-3 La relation de commutation phase-nombre

La relation de commutation approchée $[\hat{J}_y, \hat{J}_z] \approx iJ$ trouvée ci-dessus a une interprétation physique intéressante entre termes d'opérateur nombre \hat{n} et "d'opérateur phase" $\hat{\varphi}$ (la raison des guillemets apparaîtra dans un instant). Pour obtenir cette relation, nous allons partir de l'action de ces opérateurs sur les états au voisinage de l'état $|J_x = J\rangle = |\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0\rangle$.

Pour relier \hat{J}_y à l'opérateur phase $\hat{\varphi}$ qui va être associé à la mesure de l'angle azimutal, regardons la moyenne de cet opérateur sur un état de phase $|\frac{\pi}{2}, \varphi\rangle$:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\pi}{2}, \varphi \left| \hat{J}_y \right| \frac{\pi}{2}, \varphi \right\rangle &= \frac{1}{2^N N!} \langle 0 | \left(e^{-i\varphi/2} \hat{a} + e^{i\varphi/2} \hat{b} \right)^N \hat{J}_y \left(e^{i\varphi/2} \hat{a}^\dagger + e^{-i\varphi/2} \hat{b}^\dagger \right)^N | 0 \rangle \\ &= -\frac{N}{2} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (\text{V.84})$$

Limitons pour l'instant à des états proches de $|J\rangle_x = J$, c'est-à-dire $\varphi \ll 1$; en utilisant $J = N/2$, nous sommes donc conduit à poser

$$\hat{J}_y = -J \hat{\varphi}. \quad (\text{V.85})$$

Par ailleurs, la définition de \hat{J}_z donnée en (V.71) correspond à $\hat{J}_z = \frac{1}{2} (\hat{N}_a - \hat{N}_b) = \hat{n}$. La relation de commutation (approchée) $[\hat{J}_y, \hat{J}_z] \approx iJ$ peut alors s'écrire

$$[\hat{n}, \hat{\varphi}] \approx i \quad (\text{V.86})$$

Cette relation est à prendre avec précaution. Tout d'abord, puisque nous travaillons ici en dimension finie⁵, il est clair qu'elle ne peut pas être valable sur tout l'espace. Pour le prouver, prenons la trace des deux membres de cette relation. On sait que pour tout couple d'opérateurs (\hat{A}, \hat{B}) en dimension finie, $\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \text{Tr}(\hat{B}\hat{A})$. La trace d'un commutateur est donc toujours nulle, en particulier $\text{Tr}([\hat{n}, \hat{\varphi}]) = 0$, alors que la trace du membre de droite est égale à $i(N+1)$.

La relation (V.86) a toutefois une vertu importante. Elle va nous guider pour construire un opérateur \hat{E} que l'on pourra associer à $e^{i\hat{\varphi}}$ (avec certaines précautions). Pour cela, remarquons que d'un point de vue formel, la relation de commutation (V.86), si elle est supposée exacte, s'étend aux puissances de $\hat{\varphi}$:

$$[\hat{n}, \hat{\varphi}^k] = i k \hat{\varphi}^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad (\text{V.87})$$

et donc à l'opérateur $e^{i\hat{\varphi}}$:

$$e^{i\hat{\varphi}} \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\hat{\varphi})^k}{k!} : \quad [e^{i\hat{\varphi}}, \hat{n}] = e^{i\hat{\varphi}}. \quad (\text{V.88})$$

5. Quand on passe en dimension infinie, la définition précise d'un opérateur phase en physique quantique est également un problème délicat, que nous n'allons pas discuter ici. Nous renvoyons les lecteurs intéressés à l'analyse approfondie de CASTIN (2025), § 3.5.

Cherchons donc un opérateur \hat{E} qui vérifie la relation de commutation inspirée de (V.88), $[\hat{E}, \hat{n}] = \hat{E}$, en lui imposant de conserver la norme, à une exception près qui va apparaître dans ce qui suit. Si on fait agir cette relation de commutation sur la base propre de \hat{n} , c'est-à-dire les états $|n\rangle \equiv |\frac{N}{2} + n, \frac{N}{2} - n\rangle$, on trouve

$$\hat{n} (\hat{E} |n\rangle) = (n - 1) (\hat{E} |n\rangle) . \quad (\text{V.89})$$

On en déduit que si $n \neq -N/2$, on peut prendre simplement :

$$n > -N/2 : \quad \hat{E} |n\rangle = |n - 1\rangle , \quad (\text{V.90})$$

ce qui conserve bien la norme. Pour l'action sur $|n = -N/2\rangle$, nous prendrons :

$$\hat{E} |-N/2\rangle = 0 . \quad (\text{V.91})$$

On peut donc écrire cet opérateur \hat{E} sous la forme générique :

$$\hat{E} = \sum_{n=-N/2}^{N/2} |n - 1\rangle \langle n| . \quad (\text{V.92})$$

Vérifions maintenant que cet opérateur \hat{E} permet effectivement de retrouver la phase d'un état, quand celle-ci est bien définie. Pour cela, faisons agir \hat{E} sur un des états de phase définis plus haut :

$$\begin{aligned} \hat{E} \left| \frac{\pi}{2}, \varphi \right\rangle &= \sum_n c(n) e^{in\varphi} \hat{E} |n\rangle \\ &= \sum_n c(n) e^{in\varphi} |n - 1\rangle = e^{i\varphi} \sum_n c(n + 1) e^{in\varphi} |n\rangle \\ &\approx e^{i\varphi} \left| \frac{\pi}{2}, \varphi \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{V.93})$$

où nous avons (i) étendu les sommes sur n à $\pm\infty$ et (ii) fait l'approximation $c(n + 1) \approx c(n)$, ce qui est légitime car (i) seuls les $c(n)$ avec $n \ll N$ prennent des valeurs appréciables et (ii) l'échelle de variation des $c(n)$ est $\sim \sqrt{N} \gg 1$. On voit sur ce résultat qu'un état de phase est "presque" état propre de \hat{E} avec la valeur propre $e^{i\varphi}$. Là encore, cette relation ne peut pas être exacte : un opérateur agissant en dimension finie ne peut pas avoir une infinité de valeurs propres distinctes. Mais elle montre que compte

tenu des contraintes liées à cette dimension finie, \hat{E} est proche de ce qu'on attend d'un opérateur mesurant l'exponentielle complexe de la phase.

On trouve ainsi fréquemment dans la littérature les relations qui précèdent écrites en substituant la notation $e^{i\hat{\varphi}}$ à \hat{E} , en particulier

$$e^{i\hat{\varphi}} = \sum_n |n - 1\rangle \langle n| \quad [e^{i\hat{\varphi}}, \hat{n}] = e^{i\hat{\varphi}} . \quad (\text{V.94})$$

Il s'agit d'une notation commode, que l'on peut utiliser tant qu'on se rappelle que $\hat{E} \equiv e^{i\hat{\varphi}}$ n'est pas véritablement unitaire (contrairement à ce que cette notation suggère), puisque $\hat{E} |-N/2\rangle = 0$.

4 Spins 1 et jonction Josephson

Dans cette dernière partie, nous allons nous intéresser à un autre type de jonction Josephson interne, se produisant pour des atomes de spin 1. Nous considérons N atomes confinés dans un piège très raide, de sorte que les degrés de liberté spatiaux des atomes sont gelés. Nous nous plaçons donc dans l'approximation du mode spatial unique, déjà utilisée auparavant. Nous ne détaillerons pas ici tous les calculs (parfois longs) propres à la physique des gaz spineurs et nous renvoyons les lecteurs intéressés vers l'article de revue de STAMPER-KURN & UEDA (2013).

4-1 Les interactions entre atomes de spin 1

Contrairement aux atomes à deux niveaux, pour lesquels les nombres d'atomes N_a et N_b sont conservés si on n'applique pas un couplage cohérent extérieur, les interactions entre atomes de spin 1 autorisent une dynamique intrinsèque non triviale. Plus précisément, si on choisit un axe de quantification (noté z) et qu'on introduit les trois états $|m_z = -1\rangle$, $|m_z = 0\rangle$ et $|m_z = +1\rangle$ pour décrire l'état de spin d'un atome, l'interaction entre deux atomes donne naissance au processus

$$|0\rangle + |0\rangle \rightleftharpoons |+1\rangle + |-1\rangle . \quad (\text{V.95})$$

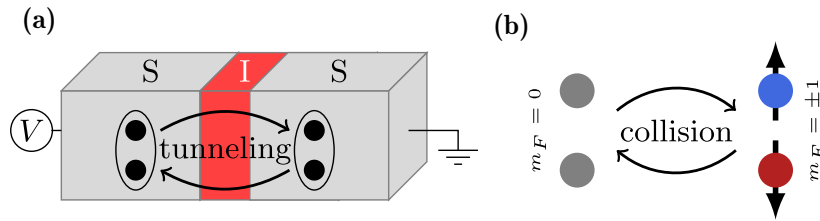


FIGURE V.12. Équivalence entre une jonction Josephson avec l'effet tunnel de paires de Cooper (a) et un gaz de particules de spin 1 (b), dans l'approximation du mode spatial unique. Figure extraite de EVRARD, QU et al. (2019).

Ce processus fournit l'équivalent d'une jonction Josephson. Pour l'expliquer, limitons-nous pour simplifier à un gaz de polarisation nulle, pour lequel $N_{+1} = N_{-1}$. Cette polarisation est conservée sous l'effet de l'interaction (V.95) et les deux côtés de la jonction peuvent être vus comme une assemblée d'atomes dans l'état $|0\rangle$ d'une part, et une assemblée d'atomes dans les états $|\pm 1\rangle$ d'autre part (figure V.12). Sur le plan mathématique, l'interaction (V.95) est décrite par un couplage proportionnel à

$$\hat{a}_{+1}^\dagger \hat{a}_{-1}^\dagger (\hat{a}_0)^2 + (\hat{a}_0^\dagger)^2 \hat{a}_{+1} \hat{a}_{-1}. \quad (\text{V.96})$$

Pour comprendre comment le terme (V.96) émerge, résumons le principe du traitement théorique de l'interaction entre deux atomes de spin 1. Dans le régime de très basse température (onde s), on modélise le potentiel d'interaction sous la forme

$$\hat{V}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \otimes \hat{V}_{\text{spin}}. \quad (\text{V.97})$$

La partie orbitale est donnée par le pseudo-potentiel $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, correspondant à une interaction de contact. Sa contribution apparaîtra dans un coefficient multiplicatif global faisant intervenir le mode spatial occupé par les atomes. La partie intéressante pour notre problème concerne la partie agissant sur le spin, qui peut se mettre sous la forme

$$\hat{V}_{\text{spin}} = g_0 \hat{1} + g_s \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 \quad (\text{V.98})$$

Le terme en g_0 , proportionnel à l'identité sur l'espace de spin, ne contribue pas à la dynamique et ajoute simplement un terme constant à l'hamiltonien

du problème. Nous allons donc nous concentrer dans ce qui suit sur le terme $\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2$.

Passons au cas de N atomes. Comme toutes les particules partagent la même fonction d'onde spatiale, tous les couples (i, j) possibles contribuent de la même façon à l'hamiltonien d'interaction, que nous écrirons sous la forme

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{U_s}{2N} \sum_{i \neq j} \hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{s}}_j = \frac{U_s}{2N} \left(\hat{\mathbf{S}}^2 - \sum_i \hat{\mathbf{s}}_i^2 \right) = \frac{U_s}{2N} \hat{\mathbf{S}}^2 - U_s \quad (\text{V.99})$$

où nous avons introduit l'opérateur de spin total :

$$\hat{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{s}}_i \quad (\text{V.100})$$

et utilisé le fait que chaque $\hat{\mathbf{s}}_i^2$ est une constante, égale à 2 (comme précédemment, nos opérateurs de spin sont sans dimension). L'énergie U_s résulte de l'intégration sur \mathbf{r} du potentiel de contact avec la fonction d'onde spatiale partagée par tous les atomes. Nous ne détaillerons pas son calcul [voir par exemple JACOB, SHAO et al. (2012)] et nous notons simplement que son signe⁶ est le même que celui de g_s ; il peut être positif ou négatif, selon l'espèce atomique utilisée.

L'écriture de cet opérateur en termes des opérateurs de création \hat{a}_m^\dagger et de destruction \hat{a}_m ($m = 0, \pm 1$) permet de mettre \hat{H}_{int} sous la forme :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}} = & \frac{U_s}{N} \left[\hat{a}_{+1}^\dagger \hat{a}_{-1}^\dagger (\hat{a}_0)^2 + (\hat{a}_0^\dagger)^2 \hat{a}_{+1} \hat{a}_{-1} \right] \\ & - \frac{U_s}{2N} \left[\hat{N}_0^2 + (\hat{N}_{+1} + \hat{N}_{-1})^2 \right] + \text{cte} \end{aligned} \quad (\text{V.101})$$

où nous avons utilisé le fait que nous restreignons à un gaz non polarisé ($S_z = 0$) et où nous avons négligé des termes d'ordre $1/N$ par rapport aux termes dominants.

On reconnaît sur cette expression les deux ingrédients principaux d'une jonction Josephson :

6. Il est positif pour l'état hyperfin de spin 1 de certaines espèces atomiques alcalines (²³Na par exemple) et négatif pour d'autres (⁸⁷Rb par exemple).

- la première ligne, pressentie en (V.96), décrit le couplage tunnel entre paires d'atomes ;
- le deuxième ligne possède la structure du terme capacitif usuel en $\frac{E_C}{4}(\hat{N}_a^2 + \hat{N}_b^2)$.

Notons que pour ce type de jonction, le coefficient du terme tunnel et celui du terme capacitif sont liés (tous les deux proportionnels à U_s), alors que dans une jonction usuelle, E_J et E_C sont des paramètres indépendants.

Une fois cette correspondance établie entre l'assemblée de spins 1 et une jonction Josephson "traditionnelle", il est possible de mettre en évidence sur cette assemblée des phénomènes caractéristiques des jonctions comme les résonances de Shapiro, et d'étudier les mécanismes de dissipation liés à la partie résistive de la jonction (EVRARD, QU et al. 2019).

4-2 Le rôle de l'effet Zeeman

La présence d'un champ magnétique extérieur $B = Bu_z$ vient ajouter un terme supplémentaire à l'hamiltonien de l'assemblée de spins. Nous supposons ce champ magnétique suffisamment faible pour qu'il soit possible de limiter le calcul à l'ordre 2 inclus en B . Le déplacement des états $|m_z\rangle$ s'écrit à cet ordre

$$\Delta E_{\pm 1} = \pm \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 \quad \Delta E_0 = \beta_2 B^2. \quad (\text{V.102})$$

Le terme en $\alpha_1 B$ est bien sûr dominant par rapport aux termes d'ordre 2, mais il n'a pas d'effet sur la dynamique liée aux processus (V.95) : la différence d'énergie entre le membre de droite et le membre de gauche est simplement égale à $q = (\alpha_2 - \beta_2)B^2$, les termes d'ordre 1 se compensant puisqu'ils sont opposés pour $m = +1$ et pour $m = -1$, et nuls pour $m = 0$.

La prise en compte de l'effet Zeeman se fait donc simplement en ajoutant le terme $-q\hat{N}_0$ à l'hamiltonien, plus un terme constant sans effet sur la dynamique du système. On arrive donc à l'hamiltonien total de notre assemblée de spin 1 (à une constante additive près) :

$$\hat{H} = \frac{U_s}{2N} \sum_{i \neq j} \hat{s}_i \cdot \hat{s}_j - q\hat{N}_0 \quad (\text{V.103})$$

Signe de q . Pour les atomes alcalins de spin nucléaire $3/2$, on trouve effectivement un niveau (hyperfine) fondamental de spin $F = 1$, résultant du couplage entre le spin nucléaire et celui de l'unique électron de la couche externe. L'autre niveau hyperfine (de spin $F = 2$) est au dessus du niveau de spin 1, et l'effet Zeeman quadratique caractérisé par le coefficient q résulte du couplage induit par B entre ces deux niveaux :

$$\text{états Zeeman issus de } F = 1 : \quad \Delta E_m^{(2)} = -\frac{(\mu_B B)^2}{4\hbar\omega_{\text{hf}}} (1 - m^2/4) \quad (\text{V.104})$$

où μ_B est le magnéton de Bohr et $\hbar\omega_{\text{hf}}$ l'écart hyperfine. On trouve dans ces conditions que q est positif. Néanmoins, il est possible de changer ce signe en ajoutant une micro-onde quasi-résonnante avec la transition hyperfine [voir par exemple ZHAO, JIANG et al. (2014)].

4-3 État fondamental en champ moyen

Nous allons nous limiter dans ce paragraphe au cas $q \geq 0$ et utiliser une analyse en champ moyen, ce qui revient à négliger les corrélations entre les spins et prendre

$$\langle \hat{s}_i \cdot \hat{s}_j \rangle = \langle \hat{s}_i \rangle \cdot \langle \hat{s}_j \rangle \quad (\text{V.105})$$

où $\langle \hat{s}_j \rangle$ désigne la valeur moyenne d'un spin individuel. Puisque nous considérons un état condensé, tous les spins sont supposés être dans le même état que nous paramétrons dans la base $\{|m_z = +1\rangle, |m_z = 0\rangle, |m_z = -1\rangle\}$ par

$$|\psi(\theta, \chi, \varphi)\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i(\chi - \varphi)} \\ \cos \theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i(\chi + \varphi)} \end{pmatrix} \quad (\text{V.106})$$

où nous avons pris par convention une composante réelle pour $|m_z = 0\rangle$ (la phase globale de $|\psi\rangle$ est sans importance). Nous avons pris en compte l'hypothèse $\langle S_z \rangle = 0$ en imposant la même amplitude pour $|m_z = \pm 1\rangle$. On trouve alors (après un calcul un peu long...) l'énergie moyenne de l'état de champ moyen $|\psi(\theta, \chi, \varphi)\rangle^{\otimes N}$:

$$E(\theta, \chi, \varphi) = \frac{1}{2} N U_s \sin^2(2\theta) \sin^2 \chi - q N \cos^2 \theta \quad (\text{V.107})$$

Notons que cette énergie fait intervenir la phase moyenne χ de $|m = \pm 1\rangle$ par rapport à $|m = 0\rangle$, mais est indépendante de la phase relative φ entre $|m = +1\rangle$ et $|m = -1\rangle$.

Cas antiferromagnétique, $U_s > 0$. Dans ce cas, la minimisation de l'énergie de champ moyen est simple :

- Pour q strictement positif, le terme de champ magnétique est minimum pour $\theta = 0$, ce qui minimise également le terme d'interaction. L'état fondamental est donc unique; il est obtenu en plaçant tous les spins dans l'état $|m_z = 0\rangle$.
- Pour $q = 0$, il suffit de prendre $\chi = 0$ en laissant θ et φ libres. On a donc, au niveau champ moyen, une infinité d'états dégénérés (parmi lesquels l'état $|m_z = 0\rangle$ obtenu pour $q > 0$) :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \cos \theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (\text{V.108})$$

permettant d'atteindre l'énergie minimale $E = 0$. La discontinuité de la dégénérescence du niveau fondamental entre $q \neq 0$ et $q = 0$ est un artefact de l'approximation de champ moyen. La zone de quasi-dégénérescence massive du niveau fondamental se produit plus précisément pour $q \lesssim U_s/N$. Nous verrons ci-dessous (§ 4-5) que cette zone correspond à la fragmentation du condensat.

On peut vérifier que les états ainsi obtenus sont les *états polaires* (ou *nématiques*), définis comme la famille $\{|m_{\mathbf{u}} = 0\rangle\}$, où \mathbf{u} est un vecteur unitaire pointant dans une direction (θ, φ) arbitraire. En effet, la matrice de rotation correspondant à une rotation de θ autour de l'axe y , puis de φ autour de l'axe z , qui amène le vecteur \mathbf{u}_z sur le vecteur \mathbf{u} d'angles sphériques (θ, φ) , est représentée dans la base $\{|m_z = +1\rangle, |m_z = 0\rangle, |m_z = -1\rangle\}$ par [cf. EDMONDS (1996)] :

$$D^{(1)}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} e^{-i\varphi} & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} & \frac{1-\cos\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos\theta}{2} e^{i\varphi} & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & \frac{1+\cos\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (\text{V.109})$$

et on constate qu'elle amène bien le ket $|m_z = 0\rangle$ sur celui écrit en (V.108).

Cas ferromagnétique, $U_s < 0$. Le minimum d'énergie est obtenu en prenant $\chi = 0$ (modulo π). Une fois ce choix fait, il reste à minimiser la quantité

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} E(\rho_0, 0, \varphi) &= -2|U_s| \rho_0 (1 - \rho_0) - q \rho_0 \\ &= 2|U_s| \rho_0^2 - (q + 2|U_s|) \rho_0 \quad \text{avec } \rho_0 = \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{V.110})$$

Pour q suffisamment petit, le minimum est atteint pour $\rho_0 = \frac{1}{2} + \frac{q}{4|U_s|}$. Quand on augmente le champ magnétique, q atteint la valeur $q_c = 2|U_s|$ et ρ_0 prend sa valeur maximale : $\rho_0 = 1$ (STENGER, INOUE et al. 1998). Il se produit donc une transition de phase continue en ce point, les populations de $|m_z = \pm 1\rangle$ étant non nulles pour $q < q_c$ et s'annulant pour $q \geq q_c$. Cette transition a été observée par CHANG, HAMLEY et al. (2004) et CHANG, QIN et al. (2005).

4-4 Fragmentation dans le cas antiferromagnétique

Revenons au cas antiferromagnétique ($U_s > 0$) et intéressons-nous au cas spécifique $q = 0$, pour lequel l'hamiltonien est simplement

$$\hat{H} = \frac{U_s}{2N} \sum_{i \neq j} \hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{s}}_j = \frac{U_s}{2N} \hat{\mathbf{S}}^2 - U_s \quad (\text{V.111})$$

Comme indiqué plus haut, dans l'approximation de champ moyen, la valeur moyenne de \hat{H} est minimisée pour un état polaire $|m_{\mathbf{u}} = 0\rangle^{\otimes N}$, quelle que soit la direction choisie pour \mathbf{u} . Cette dégénérescence massive au niveau champ moyen rappelle celle que nous avons rencontrée pour une jonction traditionnelle en § 2-3. Nous avons alors montré que l'état fondamental exact était fragmenté et permettait d'abaisser l'énergie par une quantité sub-extensive par rapport à l'estimation obtenue en champ moyen.

La situation présente est similaire à celle trouvée pour une jonction usuelle. Quand on dispose d'un nombre N pair de spins 1, il est possible de former un état complètement symétrique de ces spins (donc éligible en tant qu'état condensé de bosons) pour lequel le spin total est nul. Cet état que nous noterons $|S = 0\rangle$ est état propre de $\hat{\mathbf{S}}^2$ avec la valeur propre 0, donc état propre de \hat{H} avec la valeur propre $-U_s$: il y a bien un abaissement d'énergie par rapport au résultat de la théorie de champ moyen ($E = 0$).

La construction explicite de cet état de spin total nul peut se faire de la façon suivante (LAW, PU et al. 1998; KOASHI & UEDA 2000; HO & YIP 2000) :

— Pour $N = 2$, on place la paire d'atomes dans l'état singulet de spin

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (|m_z = +1, m_z = -1\rangle - |m_z = 0, m_z = 0\rangle + |m_z = -1, m_z = +1\rangle). \quad (\text{V.112})$$

Cet état est bien symétrique par échange des deux particules et il s'écrit en seconde quantification

$$\hat{A}^\dagger |0\rangle \quad \text{avec} \quad \hat{A}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[(\hat{a}_0^\dagger)^2 - 2\hat{a}_{+1}^\dagger \hat{a}_{-1}^\dagger \right]. \quad (\text{V.113})$$

— Pour N pair quelconque, on forme l'état à partir de $N/2$ paires, chacune dans l'état singulet :

$$|S = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{(N/2)!}} (\hat{A}^\dagger)^{N/2} |0\rangle. \quad (\text{V.114})$$

L'état obtenu est (par construction) complètement symétrique par échange de deux particules. Son spin total est nul et il est donc invariant par rotation. Son expression ne dépend donc pas de l'axe de quantification z choisi pour écrire (V.112) et (V.113).

On pourra vérifier que cet état $|S = 0\rangle$ peut s'écrire comme une superposition cohérente de tous les états polaires avec des amplitudes identiques (CASTIN & HERZOG 2001; ASHHAB & LEGGETT 2002) :

$$|S = 0\rangle = \frac{\sqrt{N+1}}{4\pi} \int |m_{\mathbf{u}} = 0\rangle^{\otimes N} d^2u \quad (\text{V.115})$$

où l'intégrale porte sur toutes les orientations possibles du vecteur unitaire \mathbf{u} . Cette relation est similaire à celle obtenue en (V.69) dans le cas d'une jonction "traditionnelle". C'est un état fragmenté, comme on peut le voir en calculant les éléments de matrice de $\hat{\rho}_1$:

$$\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_{m'} \rangle = \frac{N}{3} \delta_{m,m'} \quad \text{avec} \quad m, m' = -1, 0, +1. \quad (\text{V.116})$$

La matrice densité à un corps est donc diagonale, avec trois valeurs propres égales.

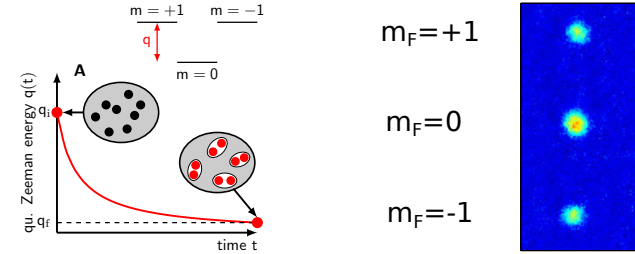


FIGURE V.13. Gauche : Préparation d'un état fragmenté d'une assemblée de spins 1 par évolution adiabatique depuis l'état $|m_z = 0\rangle$. Droite : image du nuage après une expérience de Stern et Gerlach, donnant accès aux populations des trois composantes $|m_F\rangle$. Figure extraite de EVRARD, QU et al. (2021).

Le cas N impair. Dans ce cas, on peut procéder au même appariement pour $N - 1$ particules, et il reste un atome célibataire, ce qui fournit un spin total égal à 1 et conduit à l'énergie $-(2N - 1)U_s$. On a toujours une énergie abaissée par rapport aux états de champ moyen, avec cette fois-ci une dégénérescence 3 pour le niveau fondamental à N corps. Comme pour le cas N pair, la matrice densité à un corps est maximalelement fragmentée avec ses trois valeurs égales à $1/3$.

4-5 Observation d'un état fragmenté

L'observation d'un état fragmenté a été faite par EVRARD, QU et al. (2021) sur une assemblée de $N \approx 100$ atomes de sodium confinés dans un piège optique. La raideur du piège est suffisamment forte pour que l'approximation du mode spatial unique soit valable. Les atomes sont initialement refroidis dans ce piège en présence d'un champ magnétique orienté selon z , de l'ordre d'un gauss, ce qui est suffisant pour assurer que seul l'état $|m_z = 0\rangle$ est occupé ($q/h \sim 300$ Hz à comparer à $U_s/h \sim 20$ Hz).

On diminue ensuite le champ magnétique avec une rampe suffisamment lente (durée d'une seconde) pour que le gaz reste dans l'état fondamental du piège. À la fin de la rampe, le champ magnétique ne vaut que 4 mG, de sorte qu'on prédit un recouvrement supérieur à 90% avec l'état fondamental à N corps en champ nul, que N soit pair ou impair.

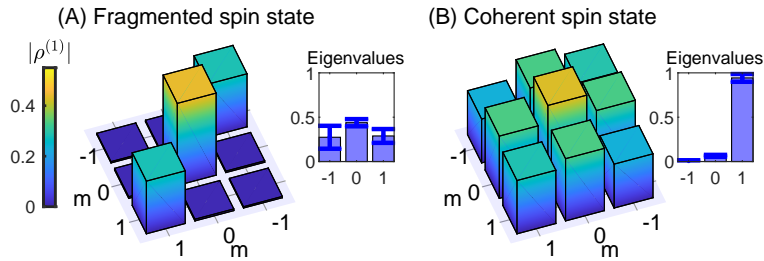


FIGURE V.14. Matrice densité à un corps de l'assemblée de spins dans le cas fragmenté (gauche) et non fragmenté (droite). Cet état non fragmenté correspond à $|m_x = +1\rangle^{\otimes N}$. Figure extraite de EVRARD, QU et al. (2021).

Pour accéder à la matrice densité à un corps, on utilise une procédure de type Stern-Gerlach : grâce à un gradient de champ magnétique appliqué soudainement, on sépare les trois composantes $|m\rangle$ selon l'axe z et un système d'imagerie optimisé permet de compter – à un atome près! – les populations N_m des trois sous-niveaux.

Si on applique directement cette mesure au gaz d'atomes, on accède aux éléments diagonaux $\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle$. Pour déterminer les éléments non-diagonaux, on utilise d'abord une impulsion radio-fréquence pour faire tourner les spins autour des axes y et z avec des angles ajustables, avant d'appliquer la procédure Stern-Gerlach. Cette méthode, répétée plusieurs milliers de fois, donne accès à des combinaisons linéaires des $\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_{m'} \rangle$ avec des coefficients ajustables, dont on peut déduire les éléments de matrice recherchés.

Le résultat est montré en figure V.14, et comparé avec celui obtenu pour l'état non fragmenté $|m_x = +1\rangle^{\otimes N}$. Dans le cas non fragmenté (figure de droite), tous les coefficients – diagonaux et non-diagonaux – sont comparables et une seule valeur propre de $\hat{\rho}_1$ diffère significativement de zéro. Dans le cas fragmenté (à gauche), $\hat{\rho}_1$ est diagonale et ses trois valeurs propres sont comparables, de l'ordre de $N/3$.

L'obtention d'une matrice densité $\hat{\rho}_1$ avec trois valeurs propres identiques ne suffit pas à prouver que l'on a préparé le système à N corps dans un état condensé fragmenté. Il faut s'assurer que l'on n'est pas sim-

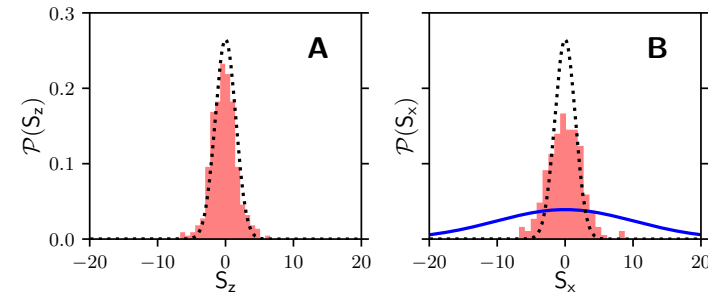


FIGURE V.15. Histogramme des mesures du spin des N atomes de spin 1 selon les axes z et x . La ligne pointillée indique le bruit de détection. La courbe en trait plein sur l'histogramme de droite montre le résultat attendu pour un état non corrélé, l'état polaire $|m_z = 0\rangle^{\otimes N}$. Figure extraite de EVRARD, QU et al. (2021).

plement face à un système chaud, mélange statistique de tous les états possibles. Pour cela, on peut tracer l'histogramme des mesures des composantes $S_{x,y,z}$ obtenues par la procédure Stern-Gerlach. Les résultats sont montrés en figure V.15. On obtient des distributions centrées sur 0 (comme attendu pour l'état (V.114)) et extrêmement étroites : leur largeur est essentiellement déterminée par le bruit résiduel de la mesure. Par comparaison, on a tracé sur la figure V.15, droite, le résultat attendu pour l'état polaire $|m_z = 0\rangle^{\otimes N}$.

Ces histogrammes permettent de calculer les moyennes des observables à deux corps $\langle \hat{S}_m^2 \rangle$, et de leur somme $\langle \hat{S}^2 \rangle$. On trouve $\langle \hat{S}^2 \rangle \sim 9$, ce qui est 20 fois plus faible que la valeur attendue pour un état de champ moyen, sans corrélation entre particules ($\langle \hat{S}^2 \rangle \sim 2N$). Cela prouve qu'on a effectivement fabriqué un état très comprimé de l'assemblée de spins, même si $\langle \hat{S}^2 \rangle$ n'atteint pas exactement la valeur prédite pour l'état fondamental en champ strictement nul, 0 ou 2 selon que N est pair ou impair. Notons qu'on ne contrôle pas la parité de N dans cette expérience.

Finalement, on peut utiliser l'ensemble des mesures Stern-Gerlach pour reconstruire l'état à N corps. On ne peut pas procéder à une tomographie complète de l'état pour un nombre de particules aussi élevé ($N = 100$), mais on peut utiliser une méthode de maximum de vraisemblance. Le ré-

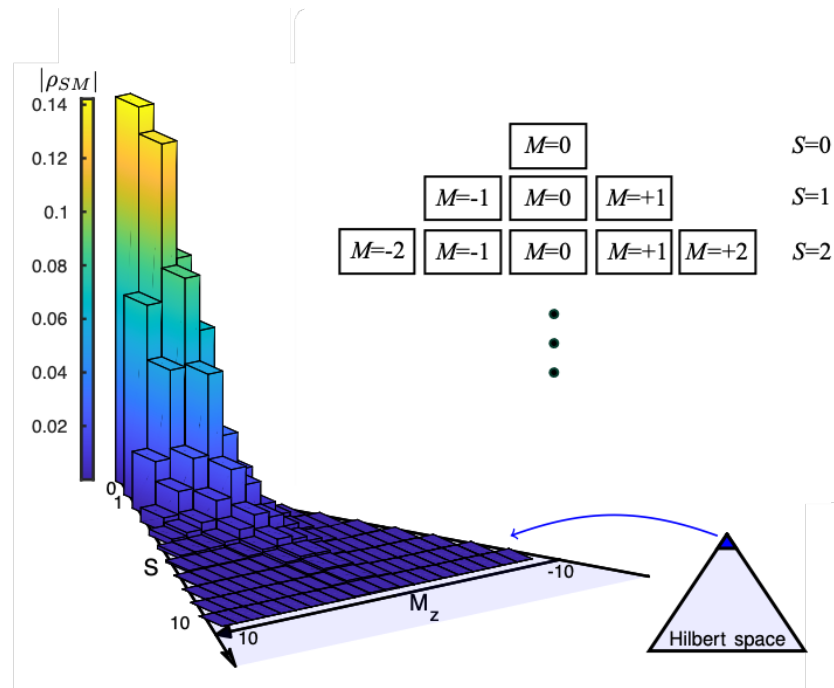


FIGURE V.16. Populations des états à N corps $|S, M\rangle$, déduites des expériences Stern-Gerlach à partir d'une méthode de maximum de vraisemblance. Figure extraite de EVRARD, QU et al. (2021).

sultat est montré sur la figure V.16 et il indique que les 4 premières valeurs possibles du spin total, $S = 0, 1, 2, 3$, concentrent 90% de la population (l'espace de Hilbert de spin est de dimension $N(N - 1) \sim 10\,000$). Il s'agit donc d'un état collectif à très faible entropie, alors même que les valeurs propres de la matrice densité à un corps sont égales entre elles : on a bien produit un condensat fragmenté.

Chapitre VI

Du SQUID supraconducteur au SQUID atomique

Les SQUIDs (*superconducting quantum interference devices*) occupent une place centrale dans les nombreuses applications des jonctions Josephson (CLARKE & BRAGINSKI 2004). Ce sont des dispositifs dans lesquels on exploite la phase quantique de l'assemblée de particules – les paires de Cooper pour les jonctions supraconductrices – pour fabriquer un interféromètre. Comme bien souvent en physique, la possibilité d'exploiter des interférences procure une très grande sensibilité à un paramètre extérieur, en l'occurrence le champ magnétique dans le cas supraconducteur.

Nous commencerons ce chapitre par la présentation des SQUIDs supraconducteurs, en expliquant comment la présence d'un champ magnétique vient modifier le formalisme mis en place dans les chapitres précédents. Nous nous intéresserons à un anneau sur lequel on a placé deux jonctions Josephson (figure VI.1), et nous montrerons comment un signal d'interférence permet de mesurer le flux du champ à travers cet anneau.

Nous profiterons de cette présentation des SQUIDs supraconducteurs pour faire un bref détour du côté des qubits supraconducteurs, qui sont parmi les plateformes les plus prometteuses pour le traitement quantique de l'information. Nous présenterons le principe de deux types de qubits, la boîte à paires de Cooper et le transmon.

Nous passerons ensuite aux SQUIDs utilisant des fluides de particules neutres : de l'hélium liquide ou des gaz d'atomes froids. Pour ces particules neutres, le rôle du champ magnétique est remplacé par une mise en rotation du système. Nous décrirons une expérience réalisée avec de l'hé-

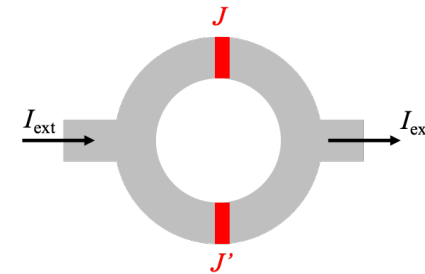


FIGURE VI.1. SQUID composé de deux jonctions identiques J et J' et alimenté par un courant total I_{ext} .

lium 3 superfluide en géométrie de type SQUID et qui a mis en évidence la rotation terrestre. Nous terminerons avec quelques expériences menées avec des atomes froids au cours des dix dernières années.

1 Le SQUID supraconducteur

Un SQUID supraconducteur est constitué d'un anneau supraconducteur, sur lequel on a placé deux jonctions Josephson (figure VI.1). L'anneau est plongé dans un champ magnétique extérieur B perpendiculaire à son

plan et on s'intéresse au courant total I_{ext} (imposé de l'extérieur) pouvant circuler dans ce dispositif. Pour modéliser ce système, nous allons commencer par indiquer comment décrire le mouvement quantique de particules chargées (les paires de Cooper) dans un champ magnétique, en insistant sur l'utilisation de quantités physiques invariantes de jauge. Nous présenterons un second élément préliminaire, l'effet Meissner, se produisant quand le supraconducteur utilisé est suffisamment épais : le champ magnétique est alors "éjecté" du matériau et le courant dans la région centrale du supraconducteur est négligeable. Nous aborderons ensuite le problème de l'anneau de la figure VI.1, d'abord en l'absence, puis en présence des deux jonctions.

1-1 Champ magnétique et invariance de jauge

Considérons un champ magnétique statique $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ pouvant être décrit par le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (\text{VI.1})$$

L'hamiltonien d'une particule de masse m et de charge q dans le champ magnétique est

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})]^2 \quad (\text{VI.2})$$

où $\hat{\mathbf{r}}$ et $\hat{\mathbf{p}}$ désignent les opérateurs position et impulsion de la particule, avec leur action sur une fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$:

$$\hat{\mathbf{r}}[\psi(\mathbf{r})] = \mathbf{r}\psi(\mathbf{r}) \quad \hat{\mathbf{p}}[\psi(\mathbf{r})] = -i\hbar \nabla \psi(\mathbf{r}) . \quad (\text{VI.3})$$

Pour un champ magnétique \mathbf{B} donné, il existe une infinité de choix possibles pour le potentiel vecteur \mathbf{A} . Ces choix sont reliés entre eux par une transformation de jauge, qui peut se mettre sous la forme suivante (JACKSON 2012) :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \longrightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \chi(\mathbf{r}) , \quad (\text{VI.4})$$

où $\chi(\mathbf{r})$ est une fonction scalaire que nous supposons régulière. Pour que les propriétés physiques déduites de l'équation de Schrödinger soient inchangées dans cette transformation de jauge, on doit l'accompagner

d'un changement de la fonction d'onde décrivant la particule (COHEN-TANNOUJDI, DIU et al. (1973), chapitre 3, et cours 2013-14, chapitre 1) :

$$\psi(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \psi'(\mathbf{r}, t) = e^{iq\chi(\mathbf{r})/\hbar} \psi(\mathbf{r}, t) . \quad (\text{VI.5})$$

L'opérateur vitesse se déduit de l'équation du mouvement

$$\hat{\mathbf{v}} \equiv \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\mathbf{r}}] , \quad (\text{VI.6})$$

ce qui donne

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{m} (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})) . \quad (\text{VI.7})$$

On peut vérifier que la valeur moyenne de cet opérateur est bien une quantité invariante de jauge, comme on l'attend pour toute grandeur physique. Pour cela, prenons une fonction d'onde localisée spatialement (normalisable), mettons-la sous la forme $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\theta(\mathbf{r})}$ où $\rho(\mathbf{r})$ désigne la densité de probabilité au point \mathbf{r} , et utilisons $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$. On constate d'abord que seul le gradient de la phase θ va jouer un rôle dans le calcul de $\langle \hat{\mathbf{v}} \rangle$ et on peut mettre sa contribution sous la forme

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{m} \int [\hbar \nabla \theta(\mathbf{r}) - q\mathbf{A}(\mathbf{r})] \rho(\mathbf{r}) d^3r . \quad (\text{VI.8})$$

On peut proposer une interprétation physique simple pour ce résultat. La quantité $\langle \mathbf{v} \rangle$ est la moyenne de la vitesse locale

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{m} [\hbar \nabla \theta(\mathbf{r}) - q\mathbf{A}(\mathbf{r})] \quad (\text{VI.9})$$

avec la densité de probabilité $\rho(\mathbf{r})$. À partir de ce champ de vitesses, on peut également définir la densité de courant électrique local

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = q\rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r}) . \quad (\text{VI.10})$$

On vérifie immédiatement que les formes (VI.9-VI.10) sont invariantes quand on applique le double changement de jauge (VI.4-VI.5) :

$$\nabla \theta(\mathbf{r}) - \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \longrightarrow \nabla \left[\theta(\mathbf{r}) + \frac{q\chi(\mathbf{r})}{\hbar} \right] - \frac{q}{\hbar} [\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \chi(\mathbf{r})] . \quad (\text{VI.11})$$

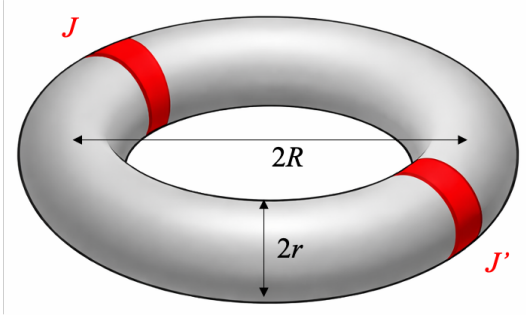


FIGURE VI.2. Anneau supraconducteur comportant deux jonctions Josephson.

Dans ce qui va suivre, il sera important de toujours se ramener à des quantités invariantes de jauge pour déterminer les propriétés physiques du système. Par exemple, si on considère un élément de circuit \mathcal{C} allant d'un point b à un point a , l'intégrale de la quantité (VI.11) sur cet élément s'écrit :

$$\int_{\mathcal{C}} \left[\nabla\theta(\mathbf{r}) - \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right] \cdot d\mathbf{r} = \theta(a) - \theta(b) - \frac{q}{\hbar} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad [2\pi]. \quad (\text{VI.12})$$

La quantité invariante de jauge n'est donc pas la différence de phase "nue" $\theta(a) - \theta(b)$, mais cette différence corrigée par l'intégrale curviligne du potentiel vecteur sur l'élément de circuit. Cette quantité dépendra de la forme de \mathcal{C} si un champ magnétique est présent.

1-2 Effet Meissner et longueur de pénétration

Dans cette partie, nous allons supposer que l'anneau supraconducteur formant le SQUID a une forme torique, comme celle indiquée sur la figure VI.2. Nous supposons que le rayon r de la section du tore est suffisamment grand pour que le champ magnétique sur le cercle médian du tore (de rayon R) soit négligeable. Cette hypothèse n'est pas indispensable pour décrire le fonctionnement d'un SQUID, mais elle simplifiera notablement l'analyse. Mais pourquoi le champ magnétique peut-il être considéré comme négligeable au cœur d'un matériau supraconducteur ?

Cet effet, appelé *effet Meissner*, résulte de l'utilisation conjointe des deux expressions régissant l'établissement d'un courant dans ce système :

- Prenons une densité de charges ρ_s uniforme dans le supraconducteur. La relation (VI.10) s'écrit donc

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{q\rho_s}{m} [\hbar\nabla\theta(\mathbf{r}) - q\mathbf{A}(\mathbf{r})] \quad (\text{VI.13})$$

où $q = -2e < 0$ désigne la charge d'une paire de Cooper et m sa masse.

- Par ailleurs, le champ magnétique \mathbf{B} est lié à la densité de courant \mathbf{j} par l'équation d'Ampère statique :

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (\text{VI.14})$$

Les deux champs \mathbf{B} et \mathbf{j} sont donc couplés par ces deux équations et on peut éliminer (par exemple) \mathbf{j} au profit de \mathbf{B} en prenant le rotationnel de la première relation, ce qui donne l'équation de London :

$$\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{q^2\rho_s}{m} \mathbf{B}. \quad (\text{VI.15})$$

Reportons ce résultat dans la seconde relation. En utilisant $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}$ (puisque $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$), on arrive à l'équation

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} \quad \text{avec} \quad \lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 \rho_s q^2}}. \quad (\text{VI.16})$$

La quantité λ_L est appelée *longueur de pénétration de London*. Prenons pour simplifier une géométrie planaire, avec le demi-espace supraconducteur côté $x > 0$ et un champ magnétique perpendiculaire à la surface $\mathbf{B} = B(x)\mathbf{u}_z$. L'équation (VI.16) devient à l'intérieur du supraconducteur $B'' = B/\lambda_L^2$, dont la solution bornée est $B(x) = B_0 \exp(-x/\lambda_L)$. Le champ B tend donc exponentiellement vite vers zéro à l'intérieur du supraconducteur et il en va de même pour le courant \mathbf{j} . L'annulation de B provient de la compensation¹ entre le champ extérieur et celui créé par le courant d'écrantage \mathbf{j} qui circule parallèlement à la surface selon la direction y , dans une nappe d'épaisseur effective λ_L .

En pratique, l'ordre de grandeur de λ_L est de quelques dizaines de nanomètres. C'est donc une distance grande devant les distances interatomiques, mais généralement petite devant les dimensions typiques des fils

1. Côté $x < 0$, le champ appliqué B_a et le champ créé par la nappe de courant s'ajoutent pour donner $B_0 = 2B_a$.

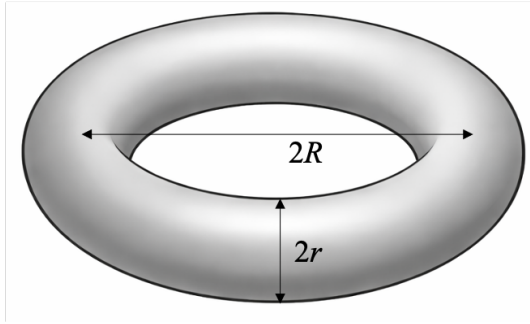


FIGURE VI.3. Anneau supraconducteur de rayon moyen R . Le rayon r de la section de l'anneau est supposé petit devant R . L'anneau est plongé dans un champ magnétique perpendiculaire à son plan. On note $\Phi_{\text{ext}} = \pi R^2 B$ le flux créé par ce champ.

supraconducteurs. Nous supposons que c'est le cas du fil représenté en figure VI.2 et nous poserons donc que le champ magnétique \mathbf{B} et le courant \mathbf{j} sont nuls sur le cercle médian de rayon R à l'intérieur du tore.

1-3 Anneau supraconducteur et champ magnétique

Avant d'aborder le SQUID dans le paragraphe suivant, nous allons considérer ici un simple anneau torique supraconducteur (donc sans jonction Josephson) de rayon moyen R (figure VI.3). Cet anneau est plongé dans un champ magnétique \mathbf{B} perpendiculaire à son plan, et il est donc traversé par le flux $\Phi_{\text{ext}} = \pi R^2 B$. Nous supposons que le rayon r de la section du tore est petit devant R , mais grand devant la longueur de London λ_L de sorte que le champ \mathbf{B} et le courant \mathbf{j} sont négligeables sur le cercle médian de rayon R .

Le relation (VI.13) intégrée le long de ce cercle médian devient :

$$0 = \hbar \oint \nabla \theta(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - q \oint \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{VI.17})$$

La fonction d'onde $\sqrt{\rho_s} e^{i\theta(\mathbf{r})}$ décrivant l'assemblée de paires doit être mo-

novaluée, ce qui impose

$$\oint \nabla \theta(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 2\pi n \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{VI.18})$$

Par ailleurs, l'intégrale de contour sur \mathbf{A} se transforme en une intégrale de surface du champ magnétique, égale au flux total Φ traversant l'anneau. On a donc $0 = 2\pi n \hbar - \Phi$ ou encore :

$$\Phi = n \Phi_0 \quad \text{avec } \Phi_0 = \frac{2\pi \hbar}{|q|}. \quad (\text{VI.19})$$

Il est important de noter à ce stade que Φ désigne le flux total traversant l'anneau, c'est-à-dire la somme du flux extérieur Φ_{ext} et du flux LI généré par le courant I circulant dans l'anneau, L désignant l'inductance de l'anneau :

$$\Phi = \Phi_{\text{ext}} + LI. \quad (\text{VI.20})$$

Le supercourant I qui circule à la surface de l'anneau s'ajuste donc pour que le flux total passant à travers l'anneau soit quantifié.

Quantification du fluxoïde. Si on ne souhaite pas faire l'approximation d'un courant nul dans le cœur de l'anneau, la relation (VI.17) s'écrit :

$$\mu_0 \lambda_L^2 \oint \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = n \Phi_0 - \Phi \quad \Leftrightarrow \quad \oint \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{m} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right), \quad (\text{VI.21})$$

relation appelée *quantification du fluxoïde*.

1-4 Le SQUID

Nous passons maintenant au cas d'un anneau comportant deux jonctions Josephson J et J' , comme représenté sur la figure VI.2. Nous définissons les différences de phase aux bornes des deux jonctions sous la forme invariante de jauge définie en (VI.12) :

$$\begin{cases} \varphi = \theta(a) - \theta(b) - \frac{q}{\hbar} \int_b^a \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\ \varphi' = \theta(a') - \theta(b') - \frac{q}{\hbar} \int_{b'}^{a'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \end{cases} \quad (\text{VI.22})$$

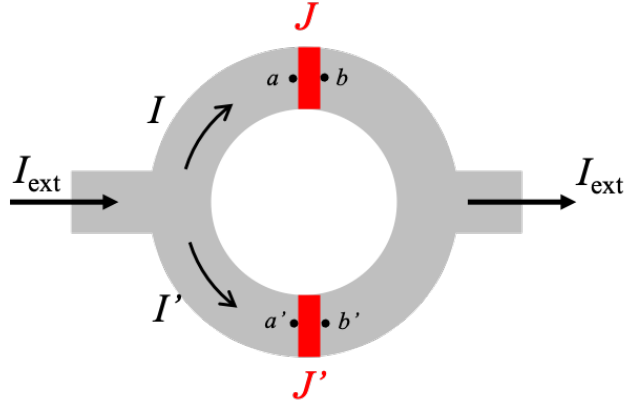


FIGURE VI.4. Anneau supraconducteur avec une double jonction.

et nous allons montrer la relation entre le flux total traversant l'anneau et les phases φ et φ' :

$$\boxed{\varphi - \varphi' = 2\pi \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \quad n \in \mathbb{Z}} \quad (\text{VI.23})$$

Nous supposons que la phase $\theta(x)$, où x représente l'abscisse curviligne le long de l'anneau est bien définie en tout point x , en dehors des jonctions elles-mêmes.

Pour prouver cette relation, partons de nouveau de la nullité du courant défini en (VI.13) sur le cercle médian de l'anneau. Intégrons cette relation sur les deux arcs de cercle aa' et $b'b$ en tournant dans le sens trigonométrique :

$$0 = \left(\int_a^{a'} + \int_{b'}^b \right) \left[\hbar \frac{d\theta}{dx} - qA(x) \right] dx \quad (\text{VI.24})$$

où nous avons projeté les vecteurs $\nabla\theta$ et \mathbf{A} sur le vecteur unitaire azimutal. On peut simplifier cette relation en utilisant :

$$\int_a^{a'} \frac{d\theta}{dx} dx = \theta(a') - \theta(a) \quad [2\pi] \quad \int_{b'}^b \frac{d\theta}{dx} dx = \theta(b) - \theta(b') \quad [2\pi] \quad (\text{VI.25})$$

et

$$\left(\int_a^{a'} + \int_{b'}^b \right) A(x) dx = \oint A(x) dx - \left(\int_b^a + \int_{a'}^{b'} \right) A(x) dx. \quad (\text{VI.26})$$

L'intégrale sur le contour complet $\oint A(x) dx$ est égale au flux Φ du champ magnétique total à travers l'anneau, de sorte que (VI.24) peut se réécrire :

$$0 = \hbar(\varphi' - \varphi) - q\Phi + 2\pi\hbar n \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{VI.27})$$

ce qui n'est autre que (VI.23) puisque $\Phi_0 = 2\pi\hbar/|q|$. Notons que cette preuve n'utilise pas la valeur de $\theta(\mathbf{r})$ à l'intérieur même des jonctions J et J' , qui est une notion mal définie.

La relation (VI.23) verrouille entre elles les phases de deux jonctions et elle joue un rôle central dans le fonctionnement d'un SQUID. Pour le montrer, considérons la géométrie de cette figure VI.1 et relierons le courant I_{ext} au flux extérieur Φ_{ext} imposé sur l'anneau. Le courant I_{ext} s'écrit

$$I_{\text{ext}} = I + I' = I_c (\sin \varphi + \sin \varphi'), \quad (\text{VI.28})$$

où nous avons supposé pour simplifier que les deux jonctions avaient le même courant critique. Une relation trigonométrique simple donne alors

$$\boxed{I_{\text{ext}} = \bar{I}_c(\Phi) \sin \bar{\varphi} \quad \text{avec} \quad \bar{I}_c(\Phi) \equiv 2I_c \cos \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)} \quad (\text{VI.29})$$

où nous avons posé

$$\bar{\varphi} \equiv \frac{1}{2}(\varphi + \varphi'). \quad (\text{VI.30})$$

L'équation (VI.29), $I_{\text{ext}} = \bar{I}_c \sin \bar{\varphi}$, peut être vue comme la relation usuelle reliant courant et phase pour une jonction Josephson unique, mais avec un courant critique \bar{I}_c qui dépend du flux magnétique à travers le circuit. La phase $\bar{\varphi}$ caractérisant cette jonction "globale" est la moyenne des deux phases φ et φ' . La dépendance sinusoïdale de \bar{I}_c vis-à-vis de Φ résulte d'une interférence entre les deux chemins passant respectivement par la jonction A et la jonction B . L'argument $\pi\Phi/\Phi_0$ du cosinus est égal à la phase d'Aharonov-Bohm que l'on calcule pour une particule chargée circulant dans cette géométrie (voir par exemple le cours 2013-14, Chap. 1, §4, et refs. in).

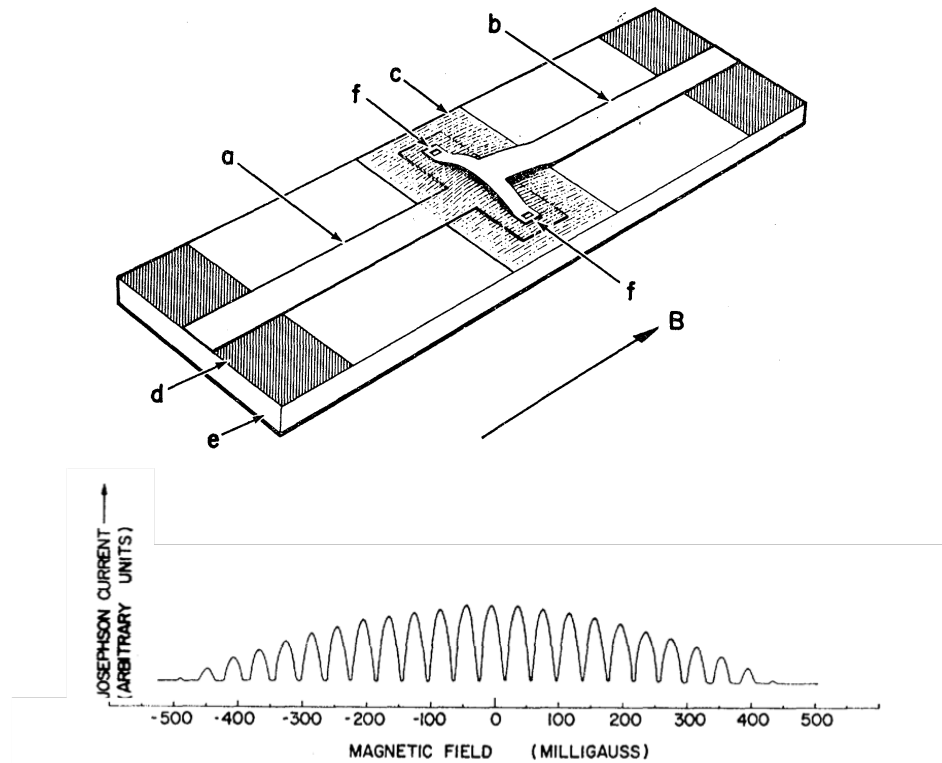


FIGURE VI.5. Variation du courant critique avec B dans un SQUID (maxima de courant d'environ 1 mA). Les supraconducteurs sont notés a et b , la couche d'isolant formant la barrière tunnel est désignée par c , et les deux jonctions par f . La séparation entre les deux jonctions est de 3 mm et la largeur d'une jonction est de 0.5 mm. La périodicité de ~ 40 mG est due au phénomène d'interférence entre les deux jonctions décrit dans ce paragraphe. L'enveloppe en forme de sinus cardinal s'explique par l'influence du champ magnétique sur chaque jonction, de façon analogue à la figure d'interférences lumineuses avec deux fentes de largeur non nulle. Figures adaptées de JAKLEVIC, LAMBE et al. (1965).

À ce stade, le flux Φ représente le flux total traversant l'anneau, somme du flux extérieur et du flux généré par les courants I et I' . En pratique, pour les SQUIDS conçus pour détecter de faibles variations de flux magnétiques, on utilise des géométries telles que le flux maximal généré par le courant dans l'anneau, $\sim LI_{c1}$, soit petit devant le quantum de flux Φ_0 . La contribution majeure à Φ est alors le flux extérieur Φ_{ext} et on peut négliger la contribution des courants I et I' .

Par conséquent, si on impose le courant I_{ext} et le flux extérieur Φ_{ext} , la variable φ va s'ajuster pour que la relation $I_{\text{ext}} = \bar{I}_c(\Phi_{\text{ext}}) \sin \varphi$ soit satisfaite, ce qui est possible si le courant I_{ext} ne dépasse pas la valeur $\bar{I}_c(\Phi_{\text{ext}})$. La très grande sensibilité des SQUIDS pour la mesure des champs magnétiques découle directement de cette expression. Pour un SQUID de surface 1 mm^2 , un changement de B de 10^{-9} T suffit à changer l'argument du cosinus de $\pi/2$ dans l'expression de $\bar{I}_c(\Phi)$, donc passer du courant maximum $2I_c$ à un courant nul.

En pratique, les SQUIDS sont actuellement parmi les dispositifs les plus performants pour détecter de faibles variations de champ magnétique, en particulier quand une bande passante élevée est requise (jusqu'à 100 MHz); SCHMELZ, STOLZ et al. (2012) présentent ainsi un dispositif dont la sensibilité atteint quelques 10^{-16} T pour un temps de mesure d'une seconde.

Les concurrents directs des SQUIDS sont les magnétomètres atomiques mesurant une précession de Larmor. Ces derniers ont l'avantage de ne pas requérir un environnement cryogénique et ils ont une exactitude qui peut atteindre 10^{-10} T , bien meilleure que celle des SQUIDS. En revanche, leur sensibilité pour détecter de faibles variations de B (à ne pas confondre avec l'exactitude) n'est bonne qu'à faible fréquence, car leur bande passante est inférieure à la centaine de Hz.

2 Qubits supraconducteurs

2-1 Critères pour obtenir des qubits utilisables

Nous allons maintenant décrire très brièvement l'utilisation des SQUIDS pour la réalisation de qubits, la brique élémentaire de tout processeur quantique. Les différents critères pour disposer de qubits fiables sont détaillés par DIVINCENZO (2000). Résumons-les ici :

- Il faut disposer d'un système quantique dont on peut restreindre la dynamique à un espace de Hilbert de dimension 2, dont on écrit une base possible $\{|a\rangle, |b\rangle\}$. Tous les états "combinaison linéaire" de type $\alpha |a\rangle + \beta |b\rangle$ avec α, β complexes tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ doivent également être accessibles. La dimension réelle de l'espace de Hilbert est bien sûr beaucoup plus grande, voire infinie, et il faut donc que ces états soient bien isolés du reste du spectre.
- Il faut que le temps de cohérence du système à deux niveaux soit long devant le temps nécessaire pour effectuer des portes logiques. Le qubit doit donc être bien isolé de son environnement.
- Il faut disposer d'un moyen pour l'initialiser dans un état connu, $|0\rangle$ par exemple.
- Il faut disposer d'un moyen pour effectuer des transformations unitaires dans l'espace de Hilbert de dimension 2.
- Il faut disposer d'un moyen pour lire l'état du qubit dans une base donnée, c'est-à-dire projeter l'état du qubit sur une base donnée, $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ par exemple.
- Il faut pouvoir coupler de manière contrôlée les qubits par paires pour réaliser des portes logiques à deux qubits.

Nous allons considérer (sans souci d'exhaustivité) deux réalisations de qubits à partir de jonctions supraconductrices, en nous restreignant aux premiers critères de cette liste, portant sur la production de qubits isolés. Nous allons nous concentrer sur la boîte à paires de Cooper, qui a constitué la première démonstration expérimentale de la cohérence pour un qubit supraconducteur, puis sur le transmon, son descendant direct, qui est l'ingrédient le plus utilisé actuellement dans les processeurs quantiques. D'autres types de qubits supraconducteurs, pour certains toujours dans la course vers l'ordinateur quantique, sont par exemple :



FIGURE VI.6. Gauche : boîte à paires de Cooper simple. Droite : boîte à paires de Cooper à deux jonctions, permettant de disposer d'un $E_J(\Phi)$ ajustable. Figures extraites de MAKHLIN, SCHÖN et al. (2001).

- les qubits de chat (MIRRAHIMI, LEGHTAS et al. 2014; GRIMM, FRATTINI et al. 2020), utilisés notamment par Alice & Bob et par Amazon;
- le fluxonium (MANUCHARYAN, KOCH et al. 2009; KOCH, MANUCHARYAN et al. 2009), utilisé par exemple par Atlantic Quantum;
- les qubits de phase (MARTINIS, NAM et al. 2002; STEFFEN, ANSMANN et al. 2006), qui utilisent le potentiel en "plaque à laver" décrit aux chapitres précédents.
- les qubits de flux (MOOIJ, ORLANDO et al. 1999; VAN DER WAL, TER HAAR et al. 2000; FRIEDMAN, PATEL et al. 2000) qui peuvent être considérés comme des ancêtres du fluxonium.

2-2 La boîte à paires de Cooper

Un exemple spectaculaire d'utilisation d'un SQUID dans ce contexte concerne la réalisation des premiers qubits supraconducteurs cohérents (NAKAMURA, PASHKIN et al. 1999). Cette réalisation utilise la notion de boîte à paires de Cooper, proposée par BOUCHIAT, VION et al. (1998). Dans sa version de base, cette boîte utilise une seule jonction Josephson, comme représenté sur la figure VI.6, gauche. Elle est constituée d'une petite île supraconductrice connectée à un réservoir supraconducteur par une jonction

Josephson de capacité C_J et d'énergie E_J . La tension de grille V_g est appliquée via la capacité C_g . Le paramètre de contrôle est la charge de grille :

$$n_g \equiv \frac{C_g V_g}{2e}. \quad (\text{VI.31})$$

Traisons quantiquement le nombre n de paires de Cooper et la phase φ entre les deux côtés de la jonction. L'hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H}(n_g) = \frac{E_C}{2} (\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\varphi} \quad (\text{VI.32})$$

avec $E_C = (2e)^2 / (C_J + C_g)$. Dans cette expression de \hat{H} , \hat{n} est l'opérateur nombre de paires de Cooper supraconductrice sur l'île et la construction des opérateurs $e^{\pm i\hat{\varphi}}$ a été détaillée au chapitre précédent. Rappelons le résultat² :

$$\cos \hat{\varphi} = \frac{1}{2} \sum_n (|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|) \quad (\text{VI.33})$$

Ce traitement quantique est nécessaire du fait de la faible valeur de la capacité $C_J + C_g$, de sorte que l'énergie de charge E_C est grande³ devant $k_B T$: les fluctuations thermiques de n sont donc très réduites et les fluctuations quantiques jouent un rôle important.

La boîte à paires de Cooper opère dans le régime $E_J \ll E_C$ (typiquement $E_J/E_C \sim 0.1$), c'est-à-dire dans le régime de Fock selon la terminologie du chapitre précédent. Commençons par préciser les états propres et les énergies propres de \hat{H} pour $E_J = 0$, puis traitons E_J comme une petite perturbation.

Sans le terme E_J , les états propres de (VI.32) sont les états à nombre bien défini de paires de Cooper, que nous notons $|n\rangle$ (avec $n \in \mathbb{Z}$). Plus précisément, n désigne le nombre de paires en excès ou en défaut par rapport à l'état fondamental pour $V_g = 0$. Les niveaux d'énergie sont

2. Pour des jonctions supraconductrices, la définition $e^{i\hat{\varphi}} = \sum_n |n+1\rangle \langle n|$ présente un signe opposé à celui trouvé pour des atomes au chapitre précédent. Cela résulte de la définition du courant intervenant dans la première relation de Josephson $I = I_c \sin \varphi$. En effet, l'équation de Heisenberg donnant l'évolution de \hat{n} s'écrit $\frac{d\hat{n}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{n}] = -\frac{E_J}{\hbar} \sin \hat{\varphi}$, dont on déduit le courant traversant la jonction $-2e\hat{n}$.

3. Pour l'expérience de NAKAMURA, PASHKIN et al. (1999), $E_C \sim 1$ meV, E_J varie entre 0 et 80 μ eV et $k_B T \sim 3$ μ eV.

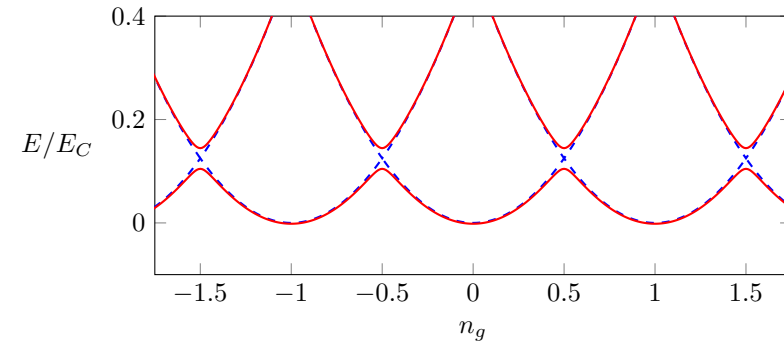


FIGURE VI.7. Premiers niveaux d'énergie de l'hamiltonien (VI.32) pour $E_J = 0$ (bleu tireté) et pour $E_J = 0.04 E_C$ (trait plein rouge).

des paraboles indexées par la valeur de n (figure VI.7, trait bleu tireté) : $E_n(n_g) = \frac{E_C}{2} (n - n_g)^2$. Ces paraboles se croisent aux valeurs demi-entières de n_g . Dans ce qui suit, nous allons nous concentrer sur le croisement entre $E_0(n_g)$ et $E_1(n_g)$, se produisant pour $n_g = 1/2$.

En nous restreignant aux deux états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ pour $n_g \approx 1/2$, on isole ainsi un système à deux niveaux d'hamiltonien :

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{E_C}{8} - \frac{1}{2} [\epsilon(V_g) \hat{\sigma}_z + E_J \hat{\sigma}_x] \quad \text{avec} \quad \epsilon(V_g) \propto (n_g - 1/2). \quad (\text{VI.34})$$

Ce système à deux niveaux constitue le qubit recherché et ses énergies propres sont représentées sur la figure VI.8 en traits pleins; ses états propres à résonance ($n_g = 1/2$) sont :

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \pm |1\rangle) \quad E_{\pm} = \frac{E_C}{8} \pm \frac{E_J}{2}. \quad (\text{VI.35})$$

L'isolation (souvent appelée *anharmonicité*) de ce sous-système à deux niveaux est excellente puisque les niveaux les plus proches sont ceux issus de la paire $\{|-1\rangle, |2\rangle\}$. Leur énergie vaut $\approx \frac{9}{8} E_C$ pour $n_g = 1/2$, de sorte que leur écart avec la multiplicité $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ est bien supérieur à l'écart entre $|+\rangle$ et $|-\rangle$ eux-mêmes (rappelons que nous avons pris $E_C \gg E_J$).

La question se pose alors du contrôle de l'énergie E_J et de sa reproductibilité. La possibilité de scinder la jonction Josephson en deux, avec un

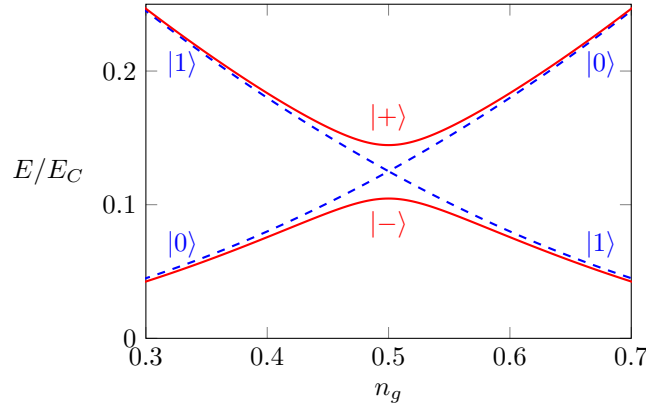


FIGURE VI.8. Premiers niveaux d'énergies de l'hamiltonien (VI.32) pour $E_J = 0$ (bleu tireté) et pour $E_J = 0.04 E_C$ (trait plein rouge) au voisinage de $n_g = 1/2$.

flux Φ contrôlé, permet de répondre à ce besoin (figure VI.6, droite). Cette approche a été mise en œuvre par NAKAMURA, PASHKIN et al. (1999). L'île supraconductrice utilisée avait une taille de $700 \times 50 \times 15$ nm et contenait $\sim 10^8$ électrons de conduction.

Pour étudier la fiabilité et l'accordabilité de ce qubit, on utilise le protocole suivant : on prépare le qubit hors résonance dans l'état $|0\rangle$; on amène soudainement le système à résonance ($n_g = 1/2$) par un changement de la tension V_g , puis on le laisse évoluer pendant un temps t :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle e^{-iE_J t/\hbar} + |-\rangle e^{iE_J t/\hbar}) \\ &= \cos(E_J t/\hbar) |0\rangle - i \sin(E_J t/\hbar) |1\rangle . \end{aligned} \quad (\text{VI.36})$$

On rebascule enfin la tension vers une valeur pour laquelle les états propres sont en bonne approximation $|0\rangle$ et $|1\rangle$. La paire présente quand le qubit est dans l'état $|1\rangle$ est évacuée dans un circuit auxiliaire.

En répétant l'expérience avec un taux élevé (60 MHz), on génère un courant dans ce circuit auxiliaire, dont l'amplitude est proportionnelle à la probabilité d'occupation $\sin^2(E_J t/\hbar)$ de l'état $|1\rangle$ (figure VI.9). On a ainsi directement accès à la fréquence E_J/\hbar , dont on peut vérifier qu'elle varie

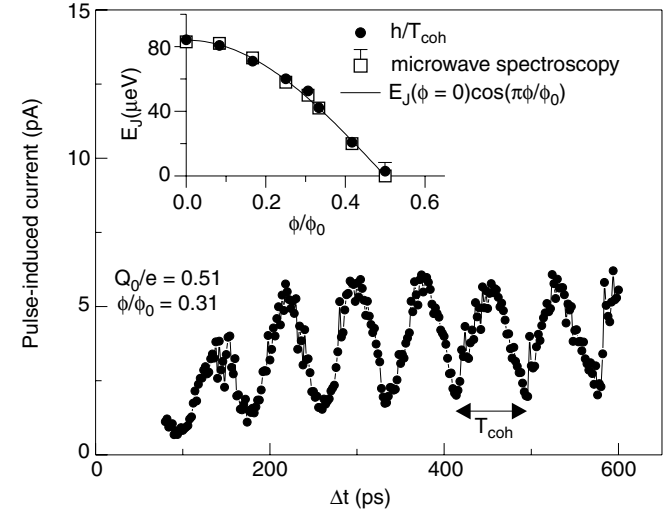


FIGURE VI.9. Mesure de la probabilité pour trouver le qubit dans l'état $|2\rangle$ en fonction du temps [cf. (VI.36)]. Insert : variation de l'énergie E_J (déduite de la période d'oscillation) en fonction du flux Φ appliqué. Figure extraite de NAKAMURA, PASHKIN et al. (1999).

selon la loi attendue en $\cos(\pi\Phi/\Phi_0)$ (figure VI.9, insert).

Les performances de la boîte à paires de Cooper ont ensuite été significativement améliorées, en particulier en termes de temps de cohérence, par VION, AASSIME et al. (2002), en passant à un régime où E_J et E_C sont comparables (dispositif appelé *quantronium*).

2-3 Le transmon

Un point faible de la boîte à paires de Cooper telle que nous l'avons décrite ci-dessus est sa grande sensibilité au bruit de charge : si n_g fluctue dans le temps, la position des niveaux d'énergies des deux états propres, combinaisons linéaires de $|0\rangle$ et $|1\rangle$, est directement affectée dès qu'on se place en dehors du point particulier (*sweet spot*) $n_g = 1/2$.

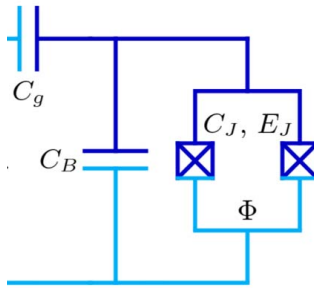


FIGURE VI.10. Principe du circuit du transmon. On retrouve les ingrédients de la boîte à paires de Cooper, avec la capacité supplémentaire C_B dont la grande valeur permet d'abaisser considérablement la valeur de E_C pour passer dans le régime Josephson ($E_C < E_J$). Figure adaptée de KOCH, YU et al. (2007).

Le transmon⁴, proposé et réalisé par KOCH, YU et al. (2007) et SCHREIER, HOUCK et al. (2008), permet de remédier à ce problème au prix d'une diminution de l'anharmonicité. Son schéma de base reste similaire à celui de la boîte à paires de Cooper, mais la capacité intervenant dans la définition de E_C est fortement augmentée, pour atteindre le régime opposé à celui étudié plus haut : $E_J \gg E_C$ (régime de Josephson). On garde donc l'hamiltonien

$$\hat{H}(n_g) = \frac{E_C}{2} (\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\varphi} \quad (\text{VI.37})$$

mais on doit chercher ses états et énergies propres dans un régime de paramètres radicalement différent de celui étudié en §2-2.

Pour cela, il est intéressant de faire un parallèle entre ce problème et le mouvement d'une particule de masse m en mouvement (à une dimension) dans le potentiel périodique $V(x) = -V_0 \cos(kx)$. Comme on a affaire à un potentiel périodique, on sait que l'on peut chercher les états propres de l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - V_0 \cos(k\hat{x}) \quad \text{avec} \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (\text{VI.38})$$

sous forme de fonctions de Bloch indexées par le quasi-moment q

$$\psi_q(x) = e^{iqx} u_q(x), \quad (\text{VI.39})$$

où la fonction $u_q(x)$ est périodique, de période $2\pi/k$. L'équation vérifiée par $u_q(x)$ s'écrit

$$\hat{H}_{\text{per}}(q) u_q(x) = E(q) u_q(x) \quad (\text{VI.40})$$

avec l'hamiltonien périodique

$$\hat{H}_{\text{per}}(q) = \frac{1}{2m} (\hat{p} + \hbar q)^2 - V_0 \cos(k\hat{x}) \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (\text{VI.41})$$

Les deux problèmes sont donc formellement identiques, la variable n_g jouant le rôle du quasi-moment q . Plus précisément, on peut introduire les quantités sans dimension $X = kx$, $P = p/\hbar k$, $Q = q/k$, pour récrire (VI.41) sous la forme

$$\hat{H}(Q) = E_{\text{rec}} (\hat{P} + Q)^2 - V_0 \cos \hat{X} \quad \text{avec} \quad [X, P] = i \quad (\text{VI.42})$$

et avec l'énergie de recul $E_{\text{rec}} = \hbar^2 k^2 / 2m$. Sous cette forme, on voit que la boîte à paires de Cooper étudiée en §2-2 correspond aux régimes des liaisons faibles pour notre particule fictive ($V_0 \ll E_{\text{rec}}$) alors que le transmon correspond au régime des liaisons fortes ($V_0 \gg E_{\text{rec}}$) [cf. cours 2012-13, Chap. 2].

Nous donnons en figure VI.11 le spectre de l'hamiltonien (VI.37) pour quatre valeurs du rapport E_J/E_C . On trouve comme prévu des bandes d'énergie, qui deviennent de plus en plus fines quand le rapport E_J/E_C (équivalent à V_0/E_{rec}) augmente. La largeur d'une bande décroît exponentiellement vite avec ce rapport; elle est en effet reliée au couplage tunnel entre deux minima adjacents du potentiel $V(x)$.

Cette variation exponentiellement rapide représente l'avantage majeur du transmon par rapport à la boîte à paires de Cooper étudiée en §2-2 : la sensibilité vis-à-vis des fluctuations de n_g est exponentiellement réduite. Pour cette raison, le transmon est actuellement l'élément privilégié par plusieurs compagnies privées cherchant à réaliser un ordinateur quantique à base de qubits supraconducteurs (IBM, Google, Rigetti, Intel, Oxford Quantum Circuits, ...).

Dans la limite $E_J \gg E_C$, l'écart entre les deux bandes les plus basses, donné par $\sqrt{E_J E_C}$, se déduit (pour la particule fictive) de la fréquence d'oscillation au voisinage d'un minimum de V_0 . Pour la jonction Josephson, cette fréquence correspond à celle de l'oscillation plasma. L'anharmonicité des niveaux d'énergie est caractérisée par la différence entre les transitions "bande 0 \rightarrow bande 1" et "bande 1 \rightarrow bande 2". Pour les transmons

4. acronyme pour *transmission line shunted plasma oscillation qubit*.

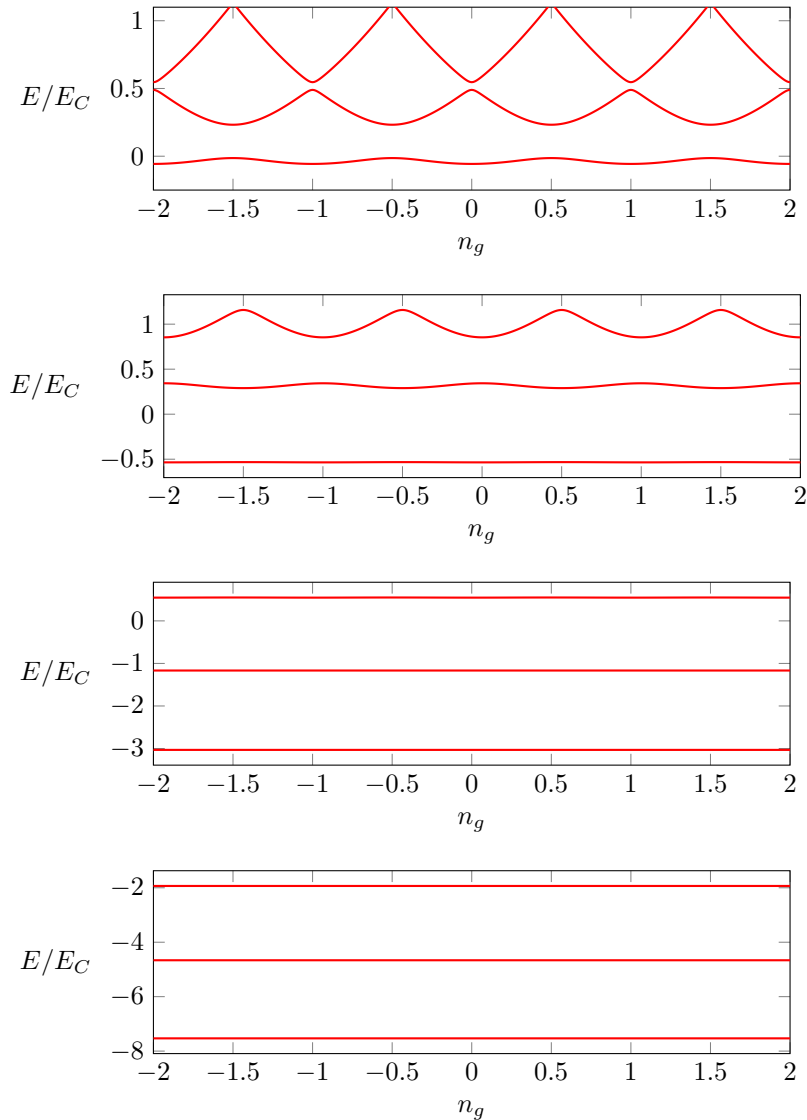


FIGURE VI.11. Spectre de l'hamiltonien (VI.37) pour $E_J/E_C = 0.25, 1, 4, 9$.

utilisés dans les processeurs quantiques de type Sycamore (Google), on a $\omega_{0 \rightarrow 1}/2\pi \sim 6$ GHz et une anharmonicité ~ 0.2 GHz.

Remarque. Comme indiqué plus haut, le SQUID permet ici d'accorder la valeur de E_J , ce qui utile pour amener deux qubits en résonance et réaliser une porte logique entre eux, par exemple. Chaque qubit dispose donc d'une boucle de courant permettant d'ajuster le flux local. Toutefois, cette accordabilité a un prix : l'exposition au bruit de flux magnétique. C'est pourquoi certaines plateformes à base de transmons privilégient à l'heure actuelle des qubits avec une seule jonction Josephson.

3 Modélisation d'un SQUID atomique

Le fonctionnement d'un SQUID supraconducteur est directement lié au champ magnétique dans lequel il est plongé. Pour des atomes neutres, cette sensibilité au champ magnétique disparaît, mais on peut retrouver des phénomènes physiques équivalents grâce à des champs de jauge artificiels.

Nous avons consacré dans le passé deux cours à cette simulation du magnétisme orbital pour des atomes neutres (2013-14 et 2017-18). Parmi les différentes voies dégagées dans ces cours, nous allons nous concentrer ici sur la plus simple : la mise en rotation du système. L'analogie avec le magnétisme est alors bien claire, car elle tire parti de la structure mathématique identique de la force de Lorentz pour une particule chargée, $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, et de la force de Coriolis, $2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$.

3-1 Référentiel en rotation

Considérons pour commencer une particule quantique évoluant sous l'effet de l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}}). \quad (\text{VI.43})$$

Le potentiel $V(\mathbf{r})$ est supposé indépendant du temps et l'hamiltonien est écrit dans un référentiel inertiel : nous pouvons donc utiliser le formalisme

habituel de l'équation de Schrödinger. Notons que nous prenons ici une particule unique, mais ce qui suit se généralise sans difficulté à une assemblée de particules en interaction.

Supposons maintenant que les sources créant le potentiel $V(\mathbf{r})$ sont mises en rotation autour de l'axe z à vitesse angulaire Ω constante. Ces sources peuvent être les parois du récipient contenant de l'hélium liquide, les faisceaux laser piégeant des particules, ou encore les bobines magnétiques réalisant un piège à atomes. Leur nature n'est pas importante ici, le seul point à retenir est que le potentiel ressenti par notre particule dépend désormais explicitement du temps. Dans cette mise en rotation, le potentiel initial $V(\mathbf{r})$ devient :

$$W(\mathbf{r}, t) = V[x \cos(\Omega t) + y \sin(\Omega t), -x \sin(\Omega t) + y \cos(\Omega t), z] \quad (\text{VI.44})$$

Nous devons donc traiter un problème dépendant du temps dans le référentiel inertiel, ce qui complique l'analyse. Toutefois, il est possible de se ramener à un problème indépendant du temps en nous plaçant dans le référentiel tournant. Ce changement de référentiel se fait en utilisant la transformation unitaire générée par l'opérateur

$$\hat{U}(t) = \exp(i\Omega t \hat{L}_z / \hbar) \quad (\text{VI.45})$$

où la composante \hat{L}_z de l'opérateur moment cinétique s'écrit en coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) :

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (\text{VI.46})$$

Pour vérifier que cette transformation correspond bien au changement de référentiel attendu, considérons sa forme infinitésimale

$$\Omega t \ll 1 : \quad \hat{U} \approx 1 + \frac{i}{\hbar} \Omega t \hat{L}_z \quad (\text{VI.47})$$

et regardons la transformation de l'opérateur position :

$$\hat{\mathbf{r}}' = \hat{U} \hat{\mathbf{r}} \hat{U}^\dagger \approx \hat{\mathbf{r}} + \frac{i}{\hbar} \Omega t [\hat{L}_z, \hat{\mathbf{r}}] \quad (\text{VI.48})$$

dont on déduit

$$\Omega t \ll 1 : \quad \hat{x}' \approx \hat{x} - \Omega t y \quad \hat{y}' = \hat{y} + \Omega t x, \quad (\text{VI.49})$$

l'opérateur \hat{z} étant inchangé. Plus généralement, on peut montrer que :

$$\hat{U} [\hat{x} \cos(\Omega t) + \hat{y} \sin(\Omega t)] \hat{U}^\dagger = \hat{x} \quad \hat{U} [-\hat{x} \sin(\Omega t) + \hat{y} \cos(\Omega t)] \hat{U}^\dagger = \hat{y} \quad (\text{VI.50})$$

Ces deux relations correspondent bien au changement de référentiel recherché ; plus précisément, l'opérateur $\hat{\mathbf{r}}$ après transformation correspond à la position de la particule dans le référentiel tournant. De même, l'opérateur $\hat{\mathbf{p}}$ après transformation est égal à $-i\hbar \nabla$ où les dérivées sont maintenant prises par rapport aux positions dans le référentiel tournant. On pourra consulter le cours 2013-14, chap. IV, § 1, pour une discussion détaillée de cette transformation.

Dans cette transformation unitaire, l'état $\tilde{\psi} = \hat{U} \psi$ de la particule évolue sous l'effet de l'hamiltonien

$$\hat{\hat{H}} = \hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger + i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt} \hat{U}^\dagger. \quad (\text{VI.51})$$

Le terme d'énergie cinétique est invariant par rotation, le terme lié au potentiel $W(\mathbf{r}, t)$ se transforme en $V(\mathbf{r})$ d'après ce qui précède, et on arrive donc à :

$$\hat{\hat{H}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}}) - \Omega \hat{L}_z \quad (\text{VI.52})$$

Nous nous sommes donc bien ramenés à un hamiltonien indépendant du temps, au prix d'une complication : le terme additionnel $-\Omega \hat{L}_z$ dans l'hamiltonien.

Une conséquence directe de ce terme est la modification de la relation entre vitesse et impulsion. Alors que pour l'hamiltonien (VI.43) dans le référentiel inertiel, on a $\hat{\mathbf{p}} = m\hat{\mathbf{v}}$, nous trouvons maintenant

$$\hat{\mathbf{v}} \equiv \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\hat{H}}, \hat{\mathbf{r}}] = \frac{1}{m} [\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})], \quad (\text{VI.53})$$

où le "potentiel vecteur" \mathbf{A} est défini par

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{u}_z. \quad (\text{VI.54})$$

La structure de \mathbf{A} est identique au potentiel vecteur généré par un champ magnétique $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$ uniforme quand on l'écrit en jauge symétrique : $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}$.

On peut par ailleurs écrire l'hamiltonien (VI.52) sous la forme

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})]^2 + V(\hat{\mathbf{r}}) - \frac{1}{2}m\Omega^2(x^2 + y^2) \quad (\text{VI.55})$$

ce qui fait ainsi apparaître clairement le lien entre rotation et magnétisme : le mouvement de notre particule dans le référentiel tournant est équivalent à celui d'une particule de charge q dans le champ magnétique \mathbf{B} tel que $q\mathbf{B} = 2m\Omega$, pourvu que l'on ajoute au potentiel $V(\mathbf{r})$ le potentiel centrifuge $-\frac{1}{2}m\Omega^2(x^2 + y^2)$. En d'autres termes, quand on passe dans le référentiel tournant, on voit apparaître deux forces :

- la force de Coriolis $2m\mathbf{v} \times \Omega$ de structure identique à la force de Lorentz $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$;
- la force centrifuge, qui n'a pas d'équivalent direct dans le cas magnétique.

Remarque : conditions aux limites périodiques ou distordues ? Dans l'approche qui précède, la transformation unitaire \hat{U} ne modifie pas les conditions aux limites, qui restent périodiques vis-à-vis de la variable ϕ : $\psi(\rho, \phi + 2\pi, z) = \psi(\rho, \phi, z)$. Le passage dans le référentiel tournant se traduit par l'ajout du terme $-\Omega\hat{L}_z$ à l'hamiltonien. Il est possible d'éliminer ce terme $-\Omega\hat{L}_z$ par une deuxième transformation unitaire, le prix à payer étant des conditions aux limites distordues : $\psi(\rho, \phi + 2\pi, z) = e^{i\gamma}\psi(\rho, \phi, z)$, avec $\gamma = 2\pi m\Omega R^2/\hbar$ (cf. cours 2023-24, chap. VI, §2). Nous n'utiliserons pas ce point de vue dans ce qui suit.

3-2 Anneau dans un référentiel tournant

Avant de passer au SQUID atomique, il est intéressant de reposer le problème d'un anneau simple superfluide dans un référentiel en rotation (figure VI.12). Considérons pour simplifier un anneau très fin de rayon R , de sorte que la seule variable d'espace pertinente est l'angle azimutal ϕ . Des particules circulent sur l'anneau et elles sont décrites par une fonction d'onde macroscopique dont la phase est notée $\theta(\phi)$.

Notons v la vitesse locale des particules. En utilisant un raisonnement semi-classique de même nature que pour l'anneau supraconducteur, nous

trouvons en utilisant la relation (VI.53) entre impulsion et vitesse

$$m\mathbf{v} = \hbar\nabla\theta - \mathbf{A}. \quad (\text{VI.56})$$

Par ailleurs, la fonction d'onde étant monovaluée, on trouve pour le potentiel θ après intégration sur le contour

$$\oint \nabla\theta \cdot d\mathbf{r} = 2\pi n \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}, \quad (\text{VI.57})$$

et pour le potentiel vecteur

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d^2r = 2m\Omega\mathcal{S}, \quad (\text{VI.58})$$

où \mathcal{S} désigne la surface de l'anneau : $\mathcal{S} = \pi R^2$. On trouve donc

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{m} \left(n - \frac{\Omega}{\Omega_0} \right) \quad \text{avec } \Omega_0 \equiv \frac{\hbar}{mR^2} \quad (\text{VI.59})$$

Cette relation est l'équivalent atomique de la quantification du fluxoïde (VI.21) pour un anneau supraconducteur. Rappelons toutefois que la fréquence de rotation Ω est ici un paramètre imposé de l'extérieur alors que le flux Φ figurant dans (VI.21) est une variable dynamique, somme du flux extérieur et du flux généré par le courant circulant dans l'anneau.

Les états stationnaires sont obtenus pour une densité et une vitesse uniformes le long de l'anneau, de sorte que (VI.59) donne pour la vitesse du superfluide dans le référentiel tournant :

$$v = \frac{\hbar}{mR} \left(n - \frac{\Omega}{\Omega_0} \right) = n \frac{\hbar}{mR} - \Omega R. \quad (\text{VI.60})$$

Remarque. Dans l'expression (VI.59), v désigne la vitesse dans le référentiel tournant. La vitesse dans le référentiel inertiel est $v + \Omega R$ de sorte que cette expression (VI.59) exprime simplement la quantification de la circulation de la vitesse en unité de \hbar/m pourvu que l'on se place dans un référentiel inertiel. Le résultat (VI.60) obtenu pour une vitesse uniforme correspond donc simplement à la vitesse (quantifiée) usuelle dans un référentiel d'inertie, $n\hbar/mR$, à laquelle on soustrait la vitesse locale du référentiel tournant ΩR .

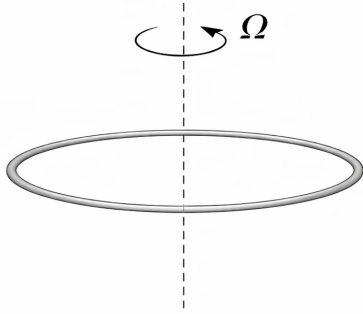


FIGURE VI.12. Anneau superfluide dans un référentiel en rotation.

3-3 Principe du SQUID atomique

Passons maintenant au cas d'un SQUID atomique avec deux jonctions J et J' (figure VI.13) placées sur un anneau, le tout étant étudié dans un référentiel en rotation. Comme pour l'anneau simple, nous partons de la relation

$$\frac{m}{\hbar} \mathbf{v} = \nabla \theta - \frac{1}{\hbar} \mathbf{A} \quad (\text{VI.61})$$

que nous allons intégrer sur les deux portions \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 extérieures aux jonctions. Nous considérons les nombres sans dimension

$$\varphi_{\mathcal{C}_j} = \frac{m}{\hbar} \int_{\mathcal{C}_j} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}, \quad j = 1, 2, \quad (\text{VI.62})$$

et nous obtenons

$$\varphi_{\mathcal{C}_1} + \varphi_{\mathcal{C}_2} = \theta(a') - \theta(a) + \theta(b) - \theta(b') - \frac{1}{\hbar} \int_{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad [2\pi]. \quad (\text{VI.63})$$

L'intégrale du potentiel vecteur peut se réécrire

$$\int_{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - \left(\int_b^a + \int_{a'}^{b'} \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{VI.64})$$

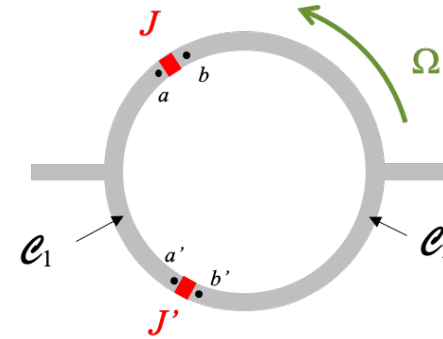


FIGURE VI.13. Anneau superfluide avec deux jonctions Josephson dans un référentiel en rotation.

où le premier terme fait apparaître comme en (VI.58) la quantité $2m\Omega S$ et le second terme se regroupe avec les différences $\theta(a) - \theta(b)$ et $\theta(a') - \theta(b')$ pour former les quantités invariantes de jauge

$$\varphi = \theta(a) - \theta(b) - \frac{1}{\hbar} \int_b^a \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad \varphi' = \theta(a') - \theta(b') - \frac{1}{\hbar} \int_{b'}^{a'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{VI.65})$$

On obtient alors la relation

$$\varphi - \varphi' = 2\pi \left(n - \frac{\Omega}{\Omega_0} \right) - (\varphi_{\mathcal{C}_1} + \varphi_{\mathcal{C}_2}) \quad (\text{VI.66})$$

qui est à rapprocher de celle trouvée pour un SQUID supraconducteur :

$$\varphi - \varphi' = 2\pi \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right). \quad (\text{VI.67})$$

Dans le cas supraconducteur, Φ représente le flux total, somme du flux imposé de l'extérieur Φ_{ext} et du flux LI généré par le courant I circulant dans l'anneau d'inductance L :

$$\varphi - \varphi' = 2\pi \left(n - \frac{\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_0} \right) - \frac{|q|LI}{\hbar}. \quad (\text{VI.68})$$

Dans le cas du fluide neutre en rotation, le terme $\varphi_{\mathcal{C}_1} + \varphi_{\mathcal{C}_2}$ dans (VI.66) joue un rôle similaire à la contribution du courant induit, et il est appelé

inductance cinétique. La fréquence de rotation Ω , imposée de l'extérieur, joue le même rôle que Φ_{ext} .

Si l'inductance cinétique $\varphi_{C_1} + \varphi_{C_2}$ est négligeable (ce que nous discuterons dans le paragraphe suivant), on trouve que la différence de phase entre les deux jonctions est "verrouillée" (modulo 2π) par la relation :

$$\varphi - \varphi' \approx 2\pi \left(n - \frac{\Omega}{\Omega_0} \right). \quad (\text{VI.69})$$

La détermination du courant circulant dans le SQUID est donc inchangée par rapport à ce que nous avons présenté en §1-4. En particulier, le courant total I_{ext} circulant dans le SQUID se met sous la forme

$$I_{\text{ext}} = \bar{I}_c(\Omega) \sin \bar{\varphi} \quad \text{avec} \quad \bar{I}_c(\Omega) \equiv 2I_c \cos \left(\pi \frac{\Omega}{\Omega_0} \right) \quad (\text{VI.70})$$

où $\bar{\varphi}$ désigne la phase moyenne

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{2} (\varphi + \varphi'). \quad (\text{VI.71})$$

3-4 L'inductance cinétique

La relation simple (VI.70) repose sur le fait que l'inductance cinétique $\varphi_{C_1} + \varphi_{C_2}$ qui apparaît dans (VI.66) est négligeable. Pour évaluer la validité de cette approximation, nous allons considérer le cas simple où la densité linéique du superfluide ρ_s est constante sur l'ensemble du circuit, en dehors des jonctions elles-mêmes où cette densité est bien sûr beaucoup plus faible.

Dans cette hypothèse de densité uniforme, la vitesse de l'écoulement superfluide est constante le long d'une branche de circuit. En notant I et I' les courants de particules sur les demi-cercles supérieurs et inférieurs, et v et v' les vitesses correspondantes, on a $I = \rho_s v$ et $I' = \rho_s v'$. Le terme d'inductance cinétique s'écrit alors

$$\varphi_{C_1} + \varphi_{C_2} \approx \frac{\pi R m}{\hbar} (v' - v) \quad (\text{VI.72})$$

où nous avons négligé l'épaisseur des barrières J et J' devant le périmètre de l'anneau $2\pi R$.

Dans le régime de fonctionnement attendu pour ce SQUID, on attend des courants I et I' de l'ordre de I_c , et des phases φ et φ' dans (VI.66) de l'ordre de $\pi/2$. La contribution de l'inductance cinétique sera négligeable si

$$|\varphi_{C_1} + \varphi_{C_2}| \ll \pi \quad \Rightarrow \quad I_c \ll \frac{\hbar \rho_s}{mR}. \quad (\text{VI.73})$$

En d'autres termes, il faut que les barrières tunnel soient suffisamment épaisses et/ou élevées pour que leur intensité critique soit petite devant $\hbar \rho_s / mR$. Cette dernière quantité a une signification physique simple : c'est l'intensité qui circule dans l'anneau sans jonction quand le fluide possède un quantum de circulation, c'est-à-dire la vitesse $\frac{\hbar}{mR}$.

Quand cette condition est réalisée, la variation de phase entre le point d'entrée et le point de sortie de l'anneau est essentiellement concentrée au niveau des jonctions elles-mêmes. La vitesse du superfluide dans les autres parties du circuit est suffisamment faible pour que la différence de phase associée (i.e. l'inductance cinétique) ne joue pas de rôle significatif.

Remarque 1. Notons que nous nous sommes intéressés dans ce qui précède au régime non dissipatif, pour lequel le courant I reste inférieur au courant critique donné en (VI.70). Quand le courant dépasse cette valeur critique, une différence de densité apparaît entre les deux arcs de cercle C_1 et C_2 , qui peut être calculée à partir du modèle RCSJ développé au chapitre 2. Cette situation est étudiée en détail par KIEHN, SINGH et al. (2022) (voir également GÖRG, MATHEY et al. (2025) pour une géométrie légèrement différente).

Remarque 2. On peut mettre la contribution de l'inductance cinétique à (VI.66) sous une forme parlante en introduisant les deux vitesses $v_{\text{ext}} = v + v'$ et $v_{\text{dif}} = \frac{1}{2}(v' - v)$. La vitesse v_{ext} est la vitesse du fluide imposée dans le circuit extérieur via l'intensité $I_{\text{ext}} = \rho_s v_{\text{ext}}$, avec $I_{\text{ext}} = I + I'$. Ces deux relations s'inversent pour donner :

$$v = \frac{1}{2} v_{\text{ext}} - v_{\text{dif}} \quad v' = \frac{1}{2} v_{\text{ext}} + v_{\text{dif}} \quad (\text{VI.74})$$

ce qui conduit à $\varphi_{C_1} + \varphi_{C_2} = 2\pi R m v_{\text{dif}} / \hbar$ ou encore

$$\varphi_{C_1} + \varphi_{C_2} = 2\pi \frac{\Omega_{\text{dif}}}{\Omega_0} \quad \text{avec} \quad v_{\text{dif}} = R \Omega_{\text{dif}}. \quad (\text{VI.75})$$

La relation (VI.66) s'écrit alors :

$$\varphi - \varphi' = 2\pi \left(n - \frac{\Omega + \Omega_{\text{dif}}}{\Omega_0} \right) \quad (\text{VI.76})$$

et l'approximation d'une inductance cinétique négligeable revient à traiter Ω_{dif} comme une petite correction à Ω , tout comme on traite LI comme une petite correction à Φ_{ext} pour le SQUID supraconducteur.

Pour un anneau qui n'est pas alimenté de l'extérieur ($v_{\text{ext}} = 0$), le mouvement du superfluide décrit par (VI.74) correspond à une rotation à la vitesse Ω_{dif} dans le référentiel lui-même en rotation à la vitesse Ω par rapport à un référentiel galiléen. La quantité $\Omega + \Omega_{\text{dif}}$ qui apparaît dans (VI.76) est donc simplement la vitesse de rotation du superfluide par rapport à un référentiel galiléen.

4 Expériences avec des SQUID atomiques

4-1 Hélium superfluide

Les premiers SQUIDs atomiques ont été mis en œuvre sur des bains d'hélium liquide superfluide. Un résultat spectaculaire a été la détection directe de la rotation de la terre à partir du signal d'interférence de la fonction d'onde d'un superfluide de ^4He (AVENEL, HAKONEN et al. 1997). Nous allons nous concentrer ici sur le travail plus récent de SIMMONDS, MARCHENKOV et al. (2001), qui est une implémentation directe du concept de SQUID sur un bain de ^3He superfluide, comportant une boucle "en U" d'aire $S \approx 6 \text{ cm}^2$ se terminant par deux jonctions ("liens faibles"), similaires à celle décrite au chapitre 3 (figure VI.14). Ces jonctions se composent chacune de 4225 trous de 100 nm de diamètre percés dans une paroi de nitrure de silicium.

Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, cette double jonction peut être assimilée à une jonction simple, avec la loi reliant le courant et la phase mise sous la forme $I = \bar{I}_c \sin \varphi$, où l'intensité critique \bar{I}_c est une fonction du flux traversant la boucle, donc de la fréquence de rotation Ω du référentiel terrestre par rapport à un référentiel inertiel.

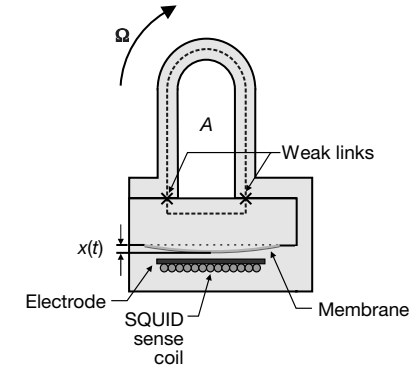


FIGURE VI.14. SQUID atomique réalisé avec de l'hélium 3 superfluide. Deux "liens faibles" sont disposés aux deux extrémités d'une boucle "en U". L'aire de la boucle (6 cm^2) est suffisante pour détecter la rotation terrestre à partir de l'intensité critique $\bar{I}_c(\Omega)$ du SQUID. Figure extraite de SIMMONDS, MARCHENKOV et al. (2001).

On module la pression du bain d'hélium à une fréquence ν ajustable, en faisant vibrer une membrane souple. Cette modulation de pression est l'équivalent d'une modulation de la tension pour une jonction supraconductrice. Quand la fréquence ν est égale à la fréquence plasma $\sqrt{E_C \bar{E}_J} / \hbar$ (avec $\bar{E}_J = \hbar \bar{I}_c$), le courant traversant la double jonction varie de manière résonnante (figure VI.15, gauche). Cette résonance permet de détecter des variations de \bar{I}_c avec Ω .

La dépendance de \bar{I}_c vis-à-vis de Ω est montrée sur la figure VI.15, droite. On ne varie pas (bien sûr!) la fréquence de rotation de la Terre dans cette expérience. La boucle est disposée dans un plan vertical à la latitude de Berkeley ($\Theta = 38$ degrés) et le terme Ω à prendre en compte est le produit scalaire $\Omega_{\text{Terre}} \cdot \mathbf{n}$, où Ω_{Terre} est orienté selon l'axe des pôles et \mathbf{n} désigne la normale au plan de la boucle. Quand \mathbf{n} est parallèle à la ligne est-ouest du laboratoire, le produit scalaire s'annule. Quand il est parallèle à la direction nord-sud, le produit scalaire est maximal et donné par $\Omega = \Omega_{\text{Terre}} \cos \Theta$.

L'aire de la boucle est suffisante pour faire varier l'argument du cosinus

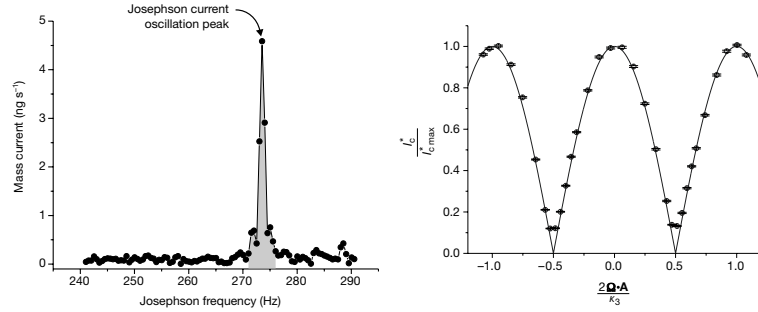


FIGURE VI.15. Gauche : résonance correspondant aux oscillations plasma, permettant de détecter une éventuelle variation de $\bar{E}_J = \hbar \bar{I}_c$. Droite : variation de $\bar{I}_c(\Omega)$ avec l'angle entre le plan de la boucle et l'axe est-ouest du laboratoire. Figure extraite de SIMMONDS, MARCHENKOV et al. (2001).

entrant dans l'expression de $\bar{I}_c(\Omega)$ par plus que π [cf. (VI.70)], ce qui permet d'explorer environ une période de l'oscillation prévue :

$$\Omega_{\text{Terre}} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1} \quad \Omega_0 = \frac{\pi \hbar}{(2m)S} \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1} \quad (\text{VI.77})$$

où m désigne la masse d'un atome de ^3He , et donc $2m$ la masse d'une paire de Cooper. L'incertitude principale provient de la détermination de l'aire effective S de la boucle.

Une expérience équivalente avec des gaz d'atomes froids n'a pas (encore?) été réalisée. Notons que la fréquence Ω_0 est inversement proportionnelle à la masse des particules : si on utilise un atome lourd, un isotope bosonique de Yb par exemple, le gain d'un facteur 30 sur la masse permet de réduire l'aire S par ce même facteur 30 (donc $S \sim 20 \text{mm}^2$) tout en gardant la même sensibilité pour $I_c(\Omega)$. Toutefois, les surfaces utilisées en pratique dans les SQUIDs atomiques restent très inférieures à cette valeur⁵, puisqu'elles sont de l'ordre de 10^{-3}mm^2 . En revanche, les interféromètres à base d'atomes libres (sous forme de jet atomique) atteignent une sensibilité à long terme de quelques 10^{-9}rad/s , soit une très faible fraction de la

5. Des interféromètres à effet Sagnac, utilisant des atomes guidés avec des aires de plusieurs mm^2 , ont récemment été réalisés (BEYDLER, MOAN et al. 2024; PANDEY, UZUN et al. 2026). Leur géométrie est différente de celle des SQUIDs.

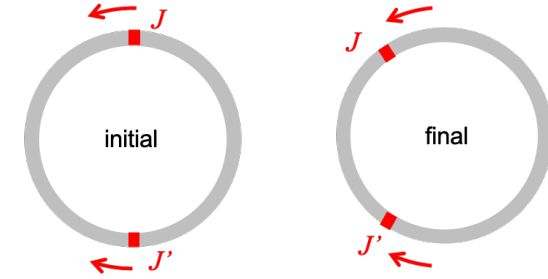


FIGURE VI.16. Deux barrières mobiles de vitesses opposées sur un anneau superfluide simulent un SQUID dans un référentiel inertiel ($\Omega = 0$).

rotation terrestre (pour une revue, voir BARRETT, GEIGER et al. (2014)).

4-2 SQUID et barrières mobiles

La première réalisation d'un SQUID à deux jonctions avec un gaz d'atomes froids est due à RYU, BLACKBURN et al. (2013), au laboratoire de Los Alamos. Ce dispositif a ensuite été perfectionné dans ce même laboratoire par RYU, SAMSON et al. (2020). Des expériences similaires ont été menées au NIST par WRIGHT, BLAKESTAD et al. (2013), ECKEL, JENDRZEJEWSKI et al. (2014) et JENDRZEJEWSKI, ECKEL et al. (2014).

Les chercheurs de Los Alamos ont utilisé une géométrie annulaire (rayon R entre 3 et 5 μm) dans laquelle ils ont placé deux barrières identiques de largeur totale à mi-hauteur 2 μm . Ces deux barrières sont initialement diamétralement opposées. Les potentiels de confinement sont réalisés grâce à des faisceaux laser dont on module la position à fréquence élevée (*painted potentials*). Un condensat de quelques milliers d'atomes de rubidium 87 est confiné sur l'anneau.

Pour se placer dans la situation où des courants I et I' traversent les barrières, RYU, BLACKBURN et al. (2013) ont utilisé la méthode proposée par GIOVANAZZI, SMERZI et al. (2000) et que nous avons décrite au chapitre 2 : ils ont mis chaque barrière en mouvement à vitesse uniforme. Quand la barrière bouge à une vitesse v inférieure à la vitesse critique v_c , elle est

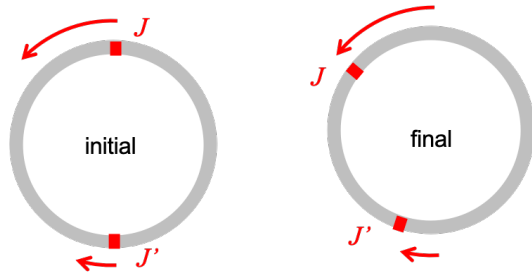


FIGURE VI.17. Deux barrières mobiles se déplaçant à des vitesses différentes sur un anneau superfluide simulent un SQUID en rotation.

traversée par le courant de particules $I = \rho v$, les densités restent égales de part et d'autre de la barrière et une différence de phase φ satisfaisant la relation de Josephson $I = I_c \sin \varphi$ apparaît entre les deux côtés de cette barrière. En revanche, quand $v > v_c$, un surplus de densité apparaît en amont de la barrière et un déficit apparaît en aval.

Dans l'expérience de 2013, les vitesses des barrières étaient égales en valeur absolue et opposées : $v = -v'$ (figure VI.16). Cette situation simule des intensités et des sauts de phase égaux pour les deux jonctions, donc un anneau au repos dans un référentiel inertiel ($\Omega = 0$). Dans l'expérience de 2020, les valeurs absolues des vitesses des barrières étaient différentes, ce qui permet de simuler une rotation (figure VI.17).

Pour déterminer la transition entre un écoulement superfluide ($I < I_c$) et un écoulement résistif ($I > I_c$), le groupe de Los Alamos mesure, après un déplacement donné des jonctions, la différence de population entre les deux arcs de cercle (gauche et droite) séparant ces jonctions. Il répète ensuite cette expérience pour différents nombres d'atomes sur l'anneau. Un résultat typique est montré sur la figure VI.18 pour $\Omega = 0$. Pour un nombre d'atomes suffisamment grand (ici $N > N_c \sim 3000$), la valeur de $z = (N_1 - N_2)/(N_1 + N_2)$ correspond à la valeur attendue pour un écoulement totalement superfluide.

Quand on prend $\Omega \neq 0$, on s'attend à ce que le courant critique $\bar{I}_c(\Omega)$ soit une fonction oscillante de Ω , avec $\bar{I}_c(\Omega) \leq \bar{I}_c(0)$. De manière équivalente, le nombre d'atomes critique $N_c(\Omega)$ doit varier périodiquement avec

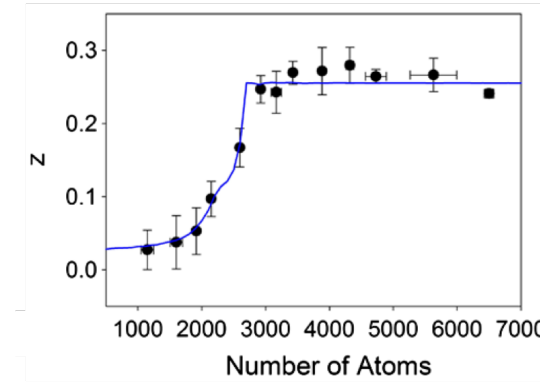


FIGURE VI.18. Évolution du rapport $z = (N_1 - N_2)/(N_1 + N_2)$ mesuré après le mouvement des barrières. Initialement, les jonctions sont diamétralement opposées et les deux arcs de cercle joignant les deux jonctions ont la même longueur. On trouve donc $z = 0$. À la fin du mouvement, la longueur de ces arcs sont dans un rapport 5/3, de sorte qu'on attend $z = \frac{5-3}{5+3} = \frac{1}{4}$ pour un écoulement complètement superfluide. Cela correspond à la valeur mesurée pour un nombre d'atomes dépassant la valeur critique $N_c \approx 3000$. Cette expérience a été réalisée avec $\Omega = 0$ (figure VI.16). Figure extraite de RYU, BLACKBURN et al. (2013).

Ω , avec $N_c(\Omega) \geq N_c(0)$. Dans le cas d'une inductance cinétique négligeable, on s'attendrait à une annulation complète de $\bar{I}_c(\Omega)$ pour $\Omega/\Omega_0 = 1/2 \pmod{\pi}$, et donc une divergence du nombre critique en ces points [cf. (VI.70)]. Toutefois, dans l'expérience de RYU, SAMSON et al. (2020), l'inductance cinétique est significative, ce qui vient limiter l'amplitude de variation du nombre critique N_c . Un exemple de résultat est montré en figure VI.19, qui montre la périodicité attendue.

4-3 Collier de jonctions Josephson

Pour terminer ce chapitre, il est intéressant de regarder l'évolution du courant critique pouvant traverser un anneau quand on augmente le nombre N de jonctions Josephson, régulièrement réparties le long de l'anneau. Cette étude a été menée expérimentalement par PEZZÈ, XHANI et al. (2024) et nous résumons ici ses résultats principaux.

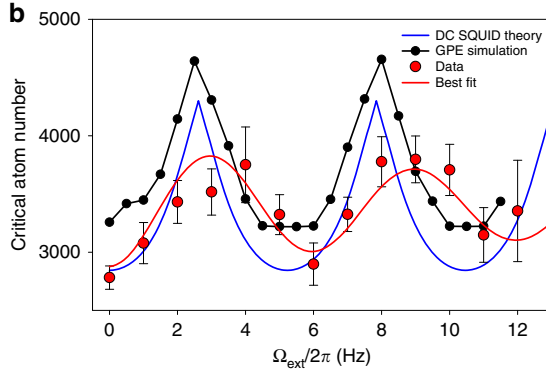


FIGURE VI.19. Variation du nombre critique d'atomes sur l'anneau en fonction de la fréquence de rotation simulée (figure VI.17). Le rayon de l'anneau est $R = 4.8 \mu\text{m}$, ce qui correspond à $\Omega_0/2\pi \approx 5 \text{ Hz}$. Figure extraite de RYU, SAMSON et al. (2020).

Nous nous plaçons dans le cas d'un anneau immobile dans un référentiel inertielle. Cet anneau contient un condensat de Bose-Einstein à température nulle et il est parcouru par un courant quantifié, avec un enroulement de phase $2\pi n$, avec $n \in \mathbb{Z}$. La question à laquelle il s'agit de répondre est la suivante : ce courant peut-il être stable et si c'est le cas, comment sa stabilité dépend-elle du nombre N de jonctions ? Nous allons voir qu'augmenter le nombre de jonctions permet d'augmenter la stabilité du courant et donc d'atteindre des valeurs plus élevées pour le nombre d'enroulement n (figure VI.20).

Cette conclusion est en fait relativement intuitive. On sait qu'une jonction idéale atteint son courant critique quand la différence de phase φ à ses bornes est égale à $\pi/2$. Dans le cas de jonctions à faible transmission, on peut négliger la différence de phase sur les segments séparant les jonctions (inductance cinétique faible) et l'enroulement de phase maximum sur l'anneau est donc $N\pi/2$, ou plus précisément $2\pi n$, où n est l'entier immédiatement inférieur à $N/4$. Ainsi, un nombre d'enroulement $n = 2$ correspondant à un enroulement de phase de 4π pourra certainement être stable si on dispose plus de 8 jonctions sur l'anneau.

Pour aller plus loin et estimer précisément la valeur de la différence de

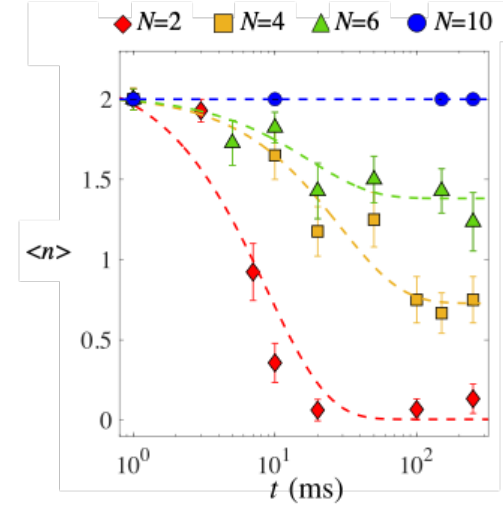


FIGURE VI.20. Évolution temporelle du nombre d'enroulement moyen $\langle n \rangle$ (mesuré par interférométrie) à partir d'un enroulement initial de 4π (i.e. $n = 2$). Les différentes couleurs correspondent à différents nombres N de jonctions. Cette expérience a été menée avec un condensat de ~ 7000 molécules di-atomiques $^6\text{Li}_2$ et un anneau de rayon moyen $16 \mu\text{m}$. Les jonctions ont une hauteur de 1.3μ où μ est le potentiel chimique du gaz et une demi-largeur à $1/e^2$ de 1.2ξ , où $\xi = 0.68 \mu\text{m}$ est la longueur de cicatrization. Figure adaptée de PEZZÈ, XHANI et al. (2024).

phase φ aux bornes de chaque jonction, reprenons et adaptons le raisonnement déjà utilisé en §3-3. On considère la relation

$$\frac{m}{\hbar} \mathbf{v} = \nabla \theta - \frac{1}{\hbar} \mathbf{A} \quad (\text{VI.78})$$

et on fait le choix de jauge $\mathbf{A} = 0$ puisqu'on travaille ici dans un référentiel inertielle. Nous allons intégrer cette relation sur deux domaines différents :

— Considérons l'intégrale sur l'anneau entier, en le parcourant dans le sens trigonométrique. La vitesse en un point d'abscisse curviligne x s'écrit $v(x) = J/\rho(x)$ où J est le courant circulant dans l'anneau, ce qui donne

$$\frac{mJ}{\hbar} \oint \frac{dx}{\rho(x)} = 2\pi n. \quad (\text{VI.79})$$

Nous noterons

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle = \frac{1}{L} \oint \frac{dx}{\rho(x)} \quad (\text{VI.80})$$

où $L = 2\pi R$ est le périmètre de l'anneau, ce qui permet d'écrire (VI.79) sous la forme

$$\frac{mJL}{\hbar} \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle = 2\pi n. \quad (\text{VI.81})$$

Cette relation correspond au résultat connu pour la fraction superfluide. Celle-ci est définie comme le courant qui apparaît en réponse à une torsion de phase Θ : $J = \frac{\hbar}{mL} \langle \rho \rangle f_s \Theta$ (avec ici $\Theta = 2\pi n$) et on trouve pour un fluide décrit par une fonction d'onde macroscopique la formule de Leggett (cf. CHAUVÉAU, MAURY et al. (2023) et cours 2023-24, chap. 6) :

$$f_s = \frac{1}{\langle \rho \rangle \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle}. \quad (\text{VI.82})$$

— Considérons maintenant l'intégrale sur les arcs de cercle situés entre les jonctions, ce qui représente la longueur $L' = L - N\ell$, où ℓ est l'épaisseur d'une jonction. Sur ces arcs de densité ρ_0 , la vitesse est simplement $v_0 = J/\rho_0$ et on trouve

$$\frac{mJL'}{\hbar\rho_0} = 2\pi n - N\varphi. \quad (\text{VI.83})$$

Les jonctions contribuent avec un signe négatif car on fait apparaître dans l'intégrale la quantité $\theta(b_j) - \theta(a_j) = -\varphi$ quand on adopte le sens trigonométrique.

Prenons maintenant le rapport entre (VI.83) et (VI.81), et négligeons de plus l'épaisseur $N\ell$ des N jonctions devant le périmètre total L (i.e., $L' \approx L$). Cela fournit la valeur de φ pour un enroulement de phase n donnée :

$$\varphi = \frac{2\pi n}{N} \left(1 - \frac{1}{\rho_0 \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle} \right). \quad (\text{VI.84})$$

On constate sur ce résultat que la variation de phase aux bornes de chaque jonction est inférieure à $2\pi n/N$, car les arcs de cercle contribuent eux aussi à l'enroulement de $2\pi n$. Ce n'est que dans la limite où ρ prend une valeur très faible au centre de chaque jonction (donc quand $\left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle$ tend vers l'infini) que l'enroulement de phase est concentré uniquement sur les jonctions.

Références

- ABBARCHI, Marco, A AMO, VG SALA, DD SOLNYSHKOV, H FLAYAC, L FERRIER, I SAGNES, E GALOPIN, A LEMAÎTRE, G MALPUECH et al. (2013), « Macroscopic quantum self-trapping and Josephson oscillations of exciton polaritons », in *Nature Physics* **9**, p. 275-279.
- ALBIEZ, Michael, Rudolf GATI, Jonas FÖLLING, Stefan HUNSMANN, Matteo CRISTIANI & Markus K OBERTHALER (2005), « Direct Observation of Tunneling and Nonlinear Self-Trapping in a Single Bosonic Josephson Junction », in *Physical Review Letters* **95**, p. 010402.
- AMBEGAOKAR, Vinay & Alexis BARATOFF (1963), « Tunneling between superconductors », in *Physical Review Letters* **10**, p. 486.
- AMICO, Luigi, Malcolm BOSHIER, Gerhard BIRKL, Anna MINGUZZI, Christian MINIATURA, L-C KWEK, Davit AGHAMALYAN, Veronica AHUFINGER, Dana ANDERSON, Natan ANDREI et al. (2021), « Roadmap on Atomtronics : State of the art and perspective », in *AVS Quantum Science* **3**.
- ANDERSON, Brian P & Mark A KASEVICH (1998), « Macroscopic quantum interference from atomic tunnel arrays », in *Science* **282**, p. 1686-1689.
- ANDERSON, Philip W (1970), « How Josephson discovered his effect », in *Physics Today* **23**, p. 23-29.
- ANDERSON, Philip W & John M ROWELL (1963), « Probable observation of the Josephson superconducting tunneling effect », in *Physical Review Letters* **10**, p. 230.
- ASHHAB, S & AJ LEGGETT (2002), « Measurement theory and interference of spinor Bose-Einstein condensates », in *Physical Review A* **65**, p. 023604.
- AVENEL, O, P HAKONEN & E VAROQUAUX (1997), « Detection of the rotation of the Earth with a superfluid gyrometer », in *Physical Review Letters* **78**, p. 3602.
- AVENEL, O & E VAROQUAUX (1988), « Josephson effect and quantum phase slippage in superfluids », in *Physical Review Letters* **60**, p. 416.
- BACKHAUS, S, SV PEREVERZEV, A LOSHAK, JC DAVIS & RE PACKARD (1997), « Direct measurement of the current-phase relation of a superfluid $^3\text{He-B}$ weak link », in *Science* **278**, p. 1435-1438.
- BARDIN, A., A. MINGUZZI & L. SALASNISH (2026), « Macroscopic quantum self-trapping in bosonic Josephson junctions : An exact quantum treatment », arXiv :2602.22857.
- BARONE, Antonio & Gianfranco PATERNO (1982), *Physics and applications of the Josephson effect*, Wiley.
- BARRETT, Brynle, Rémy GEIGER, Indranil DUTTA, Matthieu MEUNIER, Benjamin CANUEL, Alexandre GAUGUET, Philippe BOUYER & Arnaud LANDRAGIN (2014), « The Sagnac effect : 20 years of development in matter-wave interferometry », in *Comptes Rendus. Physique* **15**, p. 875-883.
- BERNHART, Erik, Marvin RÖHRLE, Vijay Pal SINGH, Ludwig MATHEY, Luigi AMICO & Herwig OTT (2025), « Observation of Shapiro steps in an ultracold atomic Josephson junction », in *Science* **390**, p. 1130-1133.
- BEYDLER, MM, ER MOAN, Z LUO, Z CHU & CA SACKETT (2024), « Guided-wave Sagnac atom interferometer with large area and multiple orbits », in *AVS Quantum Science* **6**.
- BOGOLIUBOV, N. N. (1947), « On the theory of superfluidity », in *J. Phys. (USSR)* **11**, p. 23.
- BOUCHIAT, Vincent, Denis VION, Philippe JOYEZ, Daniel ESTEVE & Michel H DEVORET (1998), « Quantum coherence with a single Cooper pair », in *Physica Scripta* **1998**, p. 165-170.
- BUCKEL, Werner & Reinhold KLEINER (2008), *Superconductivity : fundamentals and applications*, John Wiley & Sons.
- CALDEIRA, Amir O & Anthony J LEGGETT (1981), « Influence of dissipation on quantum tunneling in macroscopic systems », in *Physical Review Letters* **46**, p. 211.

- CASTIN, Yvan (2025), *Condensats de Bose-Einstein : La théorie, des fondements aux applications*, EDP sciences.
- CASTIN, Yvan & Jean DALIBARD (1997), « Relative phase of two Bose-Einstein condensates », in *Physical Review A* **55**, p. 4330.
- CASTIN, Yvan & Christopher HERZOG (2001), « Bose-Einstein condensates in symmetry breaking states », in *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IV-Physics* **2**, p. 419-443.
- CATALIOTTI, Francesco Saverio, Sven BURGER, Chiara FORT, Pasquale MADDALONI, Francesco MINARDI, Andrea TROMBETTONI, Augusto SMERZI & Massimo INGUSCIO (2001), « Josephson junction arrays with Bose-Einstein condensates », in *Science* **293**, p. 843-846.
- CHALOPIN, Thomas, Chayma BOUAZZA, Alexandre EVRARD, Vasilii MAKHALOV, Davide DREON, Jean DALIBARD, Leonid A SIDORENKOV & Sylvain NASCIMBENE (2018), « Quantum-enhanced sensing using non-classical spin states of a highly magnetic atom », in *Nature Communications* **9**, p. 4955.
- CHANG, M-S, CD HAMLEY, MD BARRETT, JA SAUER, KM FORTIER, W ZHANG, L YOU & MS CHAPMAN (2004), « Observation of spinor dynamics in optically trapped Rb 87 Bose-Einstein condensates », in *Physical Review Letters* **92**, p. 140403.
- CHANG, Ming-Shien, Qishu QIN, Wenxian ZHANG, Li YOU & Michael S CHAPMAN (2005), « Coherent spinor dynamics in a spin-1 Bose condensate », in *Nature Physics* **1**, p. 111-116.
- CHAUVEAU, G, C MAURY, F RABEC, C HEINTZE, G BROCHIER, S NASCIMBENE, J DALIBARD, J BEUGNON, SM ROCCUZZO & S STRINGARI (2023), « Superfluid fraction in an interacting spatially modulated Bose-Einstein condensate », in *Physical Review Letters* **130**, p. 226003.
- CLARKE, John & Alex I BRAGINSKI (2004), *The SQUID handbook*, t. 1, Wiley Online Library.
- COHEN-TANNOUDJI, Claude, Bernard DIU & Franck LALOË (1973), *Mécanique quantique*, t. 2, Hermann Paris.
- DEL PACE, Giulia, Diego HERNÁNDEZ-RAJKOV, Vijay Pal SINGH, Nicola GRANI, Marcia Frómata FERNÁNDEZ, Giulio NESTI, Jorge Amin SEMAN, Massimo INGUSCIO, Luigi AMICO & Giacomo ROATI (2025), « Shapiro steps in strongly-interacting Fermi gases », in *Science* **390**, p. 1125-1129.
- DEVORET, Michel H, John M MARTINIS & John CLARKE (1985), « Measurements of macroscopic quantum tunneling out of the zero-voltage state of a current-biased Josephson junction », in *Physical Review Letters* **55**, p. 1908.
- DEVORET, Michel H, John M MARTINIS, Daniel ESTEVE & John CLARKE (1984), « Resonant activation from the zero-voltage state of a current-biased Josephson junction », in *Physical Review Letters* **53**, p. 1260.
- DIVINCENZO, David P (2000), « The physical implementation of quantum computation », in *Fortschritte der Physik : Progress of Physics* **48**, p. 771-783.
- ECKEL, Stephen, Fred JENDRZEJEWSKI, Avinash KUMAR, Christopher J LOBB & Gretchen K CAMPBELL (2014), « Interferometric measurement of the current-phase relationship of a superfluid weak link », in *Physical Review X* **4**, p. 031052.
- EDMONDS, Alan Robert (1996), *Angular momentum in quantum mechanics*, t. 4, Princeton University Press.
- EINSTEIN, A. (1924), « Quantentheorie des einatomigen idealen Gases », in *Sitzungsberichte/Physikalische Klasse, Preussische Akademie der Wissenschaften* **22**, p. 261.
- (1925a), « Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. II », in *Sitzungsberichte/Physikalische Klasse, Preussische Akademie der Wissenschaften* **1**, p. 3.
- (1925b), « Zur Quantentheorie des idealen Gases », in *Sitzungsberichte/Physikalische Klasse, Preussische Akademie der Wissenschaften* **3**, p. 18.
- EVARD, Bertrand, An QU, Jean DALIBARD & Fabrice GERBIER (2021), « Observation of fragmentation of a spinor Bose-Einstein condensate », in *Science* **373**, p. 1340-1343.
- EVARD, Bertrand, An QU, Karina JIMÉNEZ-GARCÍA, Jean DALIBARD & Fabrice GERBIER (2019), « Relaxation and hysteresis near Shapiro resonances in a driven spinor condensate », in *Physical Review A* **100**, p. 023604.
- FOSSEIM, Kristian et al. (2013), *Superconductivity : discoveries and discoverers : ten physics Nobel laureates tell their story*, Springer.
- FRIEDMAN, Jonathan R, Vijay PATEL, Wei CHEN, SK TOLPYGO & James E LUKENS (2000), « Quantum superposition of distinct macroscopic states », in *Nature* **406**, p. 43-46.
- GIAEVER, Ivar (1960), « Electron tunneling between two superconductors », in *Physical Review Letters* **5**, p. 464.
- GIOVANAZZI, Stefano, Augusto SMERZI & Stefano FANTONI (2000), « Josephson effects in dilute Bose-Einstein condensates », in *Physical Review Letters* **84**, p. 4521.

- GÖRG, Kaspar, Ludwig MATHEY & Vijay Pal SINGH (2025), « Realizing an atomic quantum interference device in a rotating-box potential », in *Physical Review Research* **7**, p. 043340.
- GRADSHTEYN, Izrail Solomonovich & Iosif Moiseevich RYZHIK (2014), *Table of integrals, series, and products*, Academic press.
- GRIMM, Alexander, Nicholas E FRATTINI, Shruti PURI, Shantanu O MUNDHADA, Steven TOUZARD, Mazyar MIRRAHIMI, Steven M GIRVIN, Shyam SHANKAR & Michel H DEVORET (2020), « Stabilization and operation of a Kerr-cat qubit », in *Nature* **584**, p. 205-209.
- HAMILTON, Clark A (2000), « Josephson voltage standards », in *Review of Scientific Instruments* **71**, p. 3611-3623.
- HAMMOND, A, L LAVOINE & Thomas BOURDEL (2022), « Tunable three-body interactions in driven two-component bose-einstein condensates », in *Physical Review Letters* **128**, p. 083401.
- HO, Tin-Lun & Sung Kit YIP (2000), « Fragmented and single condensate ground states of spin-1 Bose gas », in *Physical Review Letters* **84**, p. 4031.
- ISLAM, R, EE EDWARDS, K KIM, S KORENBLIT, C NOH, H CARMICHAEL, G-D LIN, L-M DUAN, C-C JOSEPH WANG, JK FREERICKS et al. (2011), « Onset of a quantum phase transition with a trapped ion quantum simulator », in *Nature Communications* **2**, p. 377.
- JACKSON, John David (2012), *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons.
- JACOB, David, Lingxuan SHAO, Vincent CORRE, Tilman ZIBOLD, Luigi DE SARLO, Emmanuel MIMOUN, Jean DALIBARD & Fabrice GERBIER (2012), « Phase diagram of spin-1 antiferromagnetic Bose-Einstein condensates », in *Physical Review A* **86**, p. 061601.
- JAKLEVIC, RC, J LAMBE, JE MERCEREAU & AH SILVER (1965), « Macroscopic quantum interference in superconductors », in *Physical Review* **140**, A1628.
- JENDRZEJEWSKI, Fred, Stephen ECKEL, Nicholas MURRAY, Calib LANIER, Mark EDWARDS, Christopher J LOBB & Gretchen K CAMPBELL (2014), « Resistive flow in a weakly interacting Bose-Einstein condensate », in *Physical Review Letters* **113**, p. 045305.
- JOSEPHSON, Brian D (1974), « The discovery of tunnelling supercurrents », in *Reviews of Modern Physics* **46**, p. 251.
- JOSEPHSON, Brian David (1962), « Possible new effects in superconductive tunnelling », in *Physics Letters* **1**, p. 251-253.
- KAUTZ, Richard L (1996), « Noise, chaos, and the Josephson voltage standard », in *Reports on Progress in Physics* **59**, p. 935.
- KIEHN, Hannes, Vijay Pal SINGH & Ludwig MATHEY (2022), « Implementation of an atomtronic SQUID in a strongly confined toroidal condensate », in *Physical Review Research* **4**, p. 033024.
- KOASHI, Masato & Masahito UEDA (2000), « Exact eigenstates and magnetic response of spin-1 and spin-2 Bose-Einstein condensates », in *Physical Review Letters* **84**, p. 1066.
- KOCH, Jens, V MANUCHARYAN, MH DEVORET & LI GLAZMAN (2009), « Charging effects in the inductively shunted Josephson junction », in *Physical Review Letters* **103**, p. 217004.
- KOCH, Jens, Terri M YU, Jay GAMBETTA, Andrew A HOUCK, David I SCHUSTER, Johannes MAJER, Alexandre BLAIS, Michel H DEVORET, Steven M GIRVIN & Robert J SCHOELKOPF (2007), « Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box », in *Physical Review A* **76**, p. 042319.
- KWON, Woo Jin, G DEL PACE, R PANZA, M INGUSCIO, W ZWERGER, M ZACCANTI, F SCAZZA & G ROATI (2020), « Strongly correlated superfluid order parameters from dc Josephson supercurrents », in *Science* **369**, p. 84-88.
- LANYON, Ben P, Cornelius HEMPEL, Daniel NIGG, Markus MÜLLER, Rene GERRITSMAN, F ZÄHRINGER, Philipp SCHINDLER, Julio T BARREIRO, Markus RAMBACH, Gerhard KIRCHMAIR et al. (2011), « Universal digital quantum simulation with trapped ions », in *Science* **334**, p. 57-61.
- LAVOINE, L, A HAMMOND, A RECATI, DS PETROV & Thomas BOURDEL (2021), « Beyond-mean-field effects in Rabi-coupled two-component Bose-Einstein condensate », in *Physical Review Letters* **127**, p. 203402.
- LAW, CK, Han PU & NP BIGELOW (1998), « Quantum spins mixing in spinor Bose-Einstein condensates », in *Physical Review Letters* **81**, p. 5257.
- LEE, Tsin D, Kerson HUANG & Chen N YANG (1957), « Eigenvalues and eigenfunctions of a Bose system of hard spheres and its low-temperature properties », in *Physical Review* **106**, p. 1135.
- LEGGETT, AJ (1966), « Number-phase fluctuations in two-band superconductors », in *Progress of Theoretical Physics* **36**, p. 901-930.
- (1978), « Prospects in ultralow temperature physics », in *Le Journal de Physique Colloques* **39**, p. C6-1264.
- LEGGETT, Anthony J (1980), « Macroscopic quantum systems and the quantum theory of measurement », in *Progress of Theoretical Physics Supplement* **69**, p. 80-100.

- LEGGETT, Anthony J (2001), « Bose-Einstein condensation in the alkali gases : Some fundamental concepts », in *Reviews of Modern Physics* **73**, p. 307.
- (2004), « Nobel Lecture : Superfluid He 3 : the early days as seen by a theorist », in *Reviews of Modern Physics* **76**, p. 999-1011.
- LEGGETT, Anthony J & Fernando SOLS (1991), « On the concept of spontaneously broken gauge symmetry in condensed matter physics », in *Foundations of Physics* **21**, p. 353-364.
- LEVY, Shahar, E LAHOUD, I SHOMRONI & J STEINHAEUER (2007), « The ac and dc Josephson effects in a Bose–Einstein condensate », in *Nature* **449**, p. 579-583.
- LIKHAREV, Konstantin K (1984), *Dynamics of Josephson junctions and circuits*, Gordon et Breach.
- LINKS, Jon, Angela FOERSTER, Arlei Prestes TONEL & Gilberto SANTOS (2006), « The two-site Bose–Hubbard model », in *Annales Henri Poincaré*, t. 7, 7, Springer, , p. 1591-1600.
- LIPKIN, Harry J, N MESHKOV & AJ GLICK (1965), « Validity of many-body approximation methods for a solvable model :(I). Exact solutions and perturbation theory », in *Nuclear Physics* **62**, p. 188-198.
- LUICK, Niclas, Lennart SOBIREY, Markus BOHLEN, Vijay Pal SINGH, Ludwig MATHEY, Thomas LOMPE & Henning MORITZ (2020), « An ideal Josephson junction in an ultracold two-dimensional Fermi gas », in *Science* **369**, p. 89-91.
- LUO, Xin-Yu, Yi-Quan ZOU, Ling-Na WU, Qi LIU, Ming-Fei HAN, Meng Khoon TEY & Li YOU (2017), « Deterministic entanglement generation from driving through quantum phase transitions », in *Science* **355**, p. 620-623.
- MAKHALOV, Vasilii, Tanish SATOOR, Alexandre EVRARD, Thomas CHALOPIN, Raphael LOPES & Sylvain NASCIBENE (2019), « Probing quantum criticality and symmetry breaking at the microscopic level », in *Physical Review Letters* **123**, p. 120601.
- MAKHLIN, Yuriy, Gerd SCHÖN & Alexander SHNIRMAN (2001), « Quantum-state engineering with Josephson-junction devices », in *Reviews of Modern Physics* **73**, p. 357.
- MANUCHARYAN, Vladimir E, Jens KOCH, Leonid I GLAZMAN & Michel H DEVORET (2009), « Fluxonium : Single cooper-pair circuit free of charge offsets », in *Science* **326**, p. 113-116.
- MARINO, I, S RAGHAVAN, S FANTONI, SR SHENOY & A SMERZI (1999), « Bose-condensate tunneling dynamics : Momentum-shortened pendulum with damping », in *Physical Review A* **60**, p. 487.
- MARTINIS, John M, Michel H DEVORET & John CLARKE (1985), « Energy-level quantization in the zero-voltage state of a current-biased Josephson junction », in *Physical Review Letters* **55**, p. 1543.
- MARTINIS, John M, Sae NAM, Joe AUMENTADO & C URBINA (2002), « Rabi oscillations in a large Josephson-junction qubit », in *Physical Review Letters* **89**, p. 117901.
- MCCUMBER, DE (1968), « Effect of ac impedance on dc voltage-current characteristics of superconductor weak-link junctions », in *Journal of Applied Physics* **39**, p. 3113-3118.
- MCDONALD, Donald G (2001), « The Nobel laureate versus the graduate student », in *Physics today* **54**, p. 46-51.
- MEIER, F & W ZWERGER (2001), « Josephson tunneling between weakly interacting Bose-Einstein condensates », in *Physical Review A* **64**, p. 033610.
- MILBURN, GJ, J CORNEY, Ewan M WRIGHT & DF WALLS (1997), « Quantum dynamics of an atomic Bose-Einstein condensate in a double-well potential », in *Physical Review A* **55**, p. 4318.
- MIRRAHIMI, Mazyar, Zaki LEGHTAS, Victor V ALBERT, Steven TOUZARD, Robert J SCHOELKOPF, Liang JIANG & Michel H DEVORET (2014), « Dynamically protected cat-qubits : a new paradigm for universal quantum computation », in *New Journal of Physics* **16**, p. 045014.
- MOOIJ, JE, TP ORLANDO, L LEVITOV, Lin TIAN, Caspar H Van der WAL & Seth LLOYD (1999), « Josephson persistent-current qubit », in *Science* **285**, p. 1036-1039.
- MUELLER, Erich J., Tin-Lun HO, Masahito UEDA & Gordon BAYM (2006), « Fragmentation of Bose-Einstein condensates », in *Phys. Rev. A* **74**, p. 033612.
- NAKAMURA, Yasunobu, Yu A PASHKIN & JS TSAI (1999), « Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box », in *Nature* **398**, p. 786-788.
- NICKLAS, E, W MUESSEL, H STROBEL, PG KEVREKIDIS & MK OBERTHALER (2015), « Nonlinear dressed states at the miscibility-immiscibility threshold », in *Physical Review A* **92**, p. 053614.
- NOZIERES, P (1995), « Some comments on Bose-Einstein condensation », in *Bose-Einstein condensation*, sous la dir. d’A. GRFFIN, D.W. SNOKE & S. STRINGARI, Cambridge Univ. Press, , p. 15-30.

- OSTROVSKAYA, Elena A, Yuri S KIVSHAR, Mietek LISAK, Bjorn HALL, Federica CATTANI & Dan ANDERSON (2000), « Coupled-mode theory for Bose-Einstein condensates », in *Physical Review A* **61**, p. 031601.
- PANDEY, Saurabh, Ceren UZUN, Katarzyna A. KRZYZANOWSKA & Malcolm G. BOSHIER (2026), *Multi-loop and Multi-axis Atomtronic Sagnac Interferometry*, arXiv : 2504.20345 [physics.atom-ph].
- PENROSE, O. & L. ONSAGER (1956), « Bose-Einstein condensation and liquid helium », in *Phys. Rev.* **104**, p. 576.
- PEREVERZEV, Sergey V, A LOSHAK, Scott BACKHAUS, JC DAVIS & RE PACKARD (1997), « Quantum oscillations between two weakly coupled reservoirs of superfluid ^3He », in *Nature* **388**, p. 449-451.
- PEZZE, Luca, Augusto SMERZI, Markus K OBERTHALER, Roman SCHMIED & Philipp TREUTLEIN (2018), « Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles », in *Reviews of Modern Physics* **90**, p. 035005.
- PEZZÈ, Luca, Klejdja XHANI, Cyprien DAIX, Nicola GRANI, Beatrice DONELLI, Francesco SCAZZA, Diego HERNANDEZ-RAJKOV, Woo Jin KWON, Giulia DEL PACE & Giacomo ROATI (2024), « Stabilizing persistent currents in an atomtronic Josephson junction necklace », in *Nature Communications* **15**, p. 4831.
- PIAZZA, Francesco, LA COLLINS & A SMERZI (2010), « Current-phase relation of a Bose-Einstein condensate flowing through a weak link », in *Physical Review A* **81**, p. 033613.
- POLO, Juan, V AHUFINGER, Frank WJ HEKKING & Anna MINGUZZI (2018), « Damping of Josephson oscillations in strongly correlated one-dimensional atomic gases », in *Physics Review Letters* **121**, p. 090404.
- RAGHAVAN, Srikanth, Augusto SMERZI, Stefano FANTONI & SR SHENOY (1999), « Coherent oscillations between two weakly coupled Bose-Einstein condensates : Josephson effects, π oscillations, and macroscopic quantum self-trapping », in *Physical Review A* **59**, p. 620.
- RASMUSSEN, Stig Elkjær, Kasper Sangild CHRISTENSEN, Simon Panyella PEDERSEN, Lasse Bjørn KRISTENSEN, Thomas BÆKKEGAARD, Niels Jakob Søe LOFT & Nikolaj Thomas ZINNER (2021), « Superconducting circuit companion—an introduction with worked examples », in *PRX Quantum* **2**, p. 040204.
- RYU, C, PW BLACKBURN, AA BLINOVA & MG BOSHIER (2013), « Experimental realization of Josephson junctions for an atom SQUID », in *Physical Review Letters* **111**, p. 205301.
- RYU, Changhyun, EC SAMSON & Malcolm Geoffrey BOSHIER (2020), « Quantum interference of currents in an atomtronic SQUID », in *Nature Communications* **11**, p. 3338.
- SANZ, J, A FRÖLIAN, CS CHISHOLM, CR CABRERA & L TARRUELL (2022), « Interaction control and bright solitons in coherently coupled Bose-Einstein condensates », in *Physical Review Letters* **128**, p. 013201.
- SCHMELZ, M, R STOLZ, V ZAKOSARENKO, T SCHÖNAU, S ANDERS, L FRITZSCH, M MÜCK, M MEYER & H-G MEYER (2012), « Sub-fT/Hz $^{1/2}$ resolution and field-stable SQUID magnetometer based on low parasitic capacitance sub-micrometer cross-type Josephson tunnel junctions », in *Physica C : Superconductivity and Its Applications* **482**, p. 27-32.
- SCHREIER, Joseph A, Andrew A HOUCK, Jens KOCH, David I SCHUSTER, Bradley R JOHNSON, Jerry M CHOW, Jay M GAMBETTA, J MAJER, Luigi FRUNZIO, Michel H DEVORET et al. (2008), « Suppressing charge noise decoherence in superconducting charge qubits », in *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics* **77**, p. 180502.
- SEARCH, CP & PR BERMAN (2001), « Manipulating the speed of sound in a two-component Bose-Einstein condensate », in *Physical Review A* **63**, p. 043612.
- SHAPIRO, Sidney (1963), « Josephson currents in superconducting tunneling : The effect of microwaves and other observations », in *Physical Review Letters* **11**, p. 80.
- SIMMONDS, RW, A MARCHENKOV, JC DAVIS & RE PACKARD (2001), « Observation of the Superfluid Shapiro Effect in a ^3He Weak Link », in *Physical Review Letters* **87**, p. 035301.
- SINATRA, Alice (2022), « Spin-squeezed states for metrology », in *Applied Physics Letters* **120**, p. 140501.
- SINGH, Vijay Pal, Juan POLO, Ludwig MATHEY & Luigi AMICO (2024), « Shapiro steps in driven atomic Josephson junctions », in *Physical Review Letters* **133**, p. 093401.
- SMERZI, Augusto, Stefano FANTONI, Stefano GIOVANAZZI & SR SHENOY (1997), « Quantum coherent atomic tunneling between two trapped Bose-Einstein condensates », in *Physical Review Letters* **79**, p. 4950.
- SPAGNOLLI, G, G SEMEGHINI, L MASI, G FERIOLI, A TRENKWALDER, S COOP, M LANDINI, L PEZZÈ, Giovanni MODUGNO, Massimo INGUSCIO et al. (2017), « Crossing over from attractive to repulsive interactions in a tunneling bosonic Josephson junction », in *Physical Review Letters* **118**, p. 230403.

- SPEKKENS, RW & JE SIPE (1999), « Spatial fragmentation of a Bose-Einstein condensate in a double-well potential », in *Physical Review A* **59**, p. 3868.
- STAMPER-KURN, Dan M & Masahito UEDA (2013), « Spinor Bose gases : Symmetries, magnetism, and quantum dynamics », in *Reviews of Modern Physics* **85**, p. 1191-1244.
- STEFFEN, Matthias, M ANSMANN, R MCDERMOTT, Nadav KATZ, Radoslaw C BIALCZAK, Erik LUCERO, Matthew NEELEY, Eva Maria WEIG, Andrew N CLELAND & John M MARTINIS (2006), « State tomography of capacitively shunted phase qubits with high fidelity », in *Physical Review Letters* **97**, p. 050502.
- STENGER, J, S INOUE, DM STAMPER-KURN, H-J MIESNER, AP CHIKKATUR & W KETTERLE (1998), « Spin domains in ground-state Bose-Einstein condensates », in *Nature* **396**, p. 345-348.
- STEWART, WC (1968), « Current-voltage characteristics of Josephson junctions », in *Applied Physics Letters* **12**, p. 277-280.
- SUKHATME, Kalyani, Yury MUKHARSKY, Talso CHUI & David PEARSON (2001), « Observation of the ideal Josephson effect in superfluid 4He », in *Nature* **411**, p. 280-283.
- THEKKADATH, GS, ME MYCROFT, BA BELL, CG WADE, A ECKSTEIN, DS PHILLIPS, RB PATEL, A BURACZEWSKI, AE LITA, Thomas GERRITS et al. (2020), « Quantum-enhanced interferometry with large heralded photon-number states », in *NPJ quantum information* **6**, p. 89.
- TINKHAM, Michael (2004), *Introduction to superconductivity*, Courier Corporation.
- TRENKWALDER, A, G SPAGNOLLI, Giulia SEMEGHINI, S COOP, M LANDINI, P CASTILHO, L PEZZE, Giovanni MODUGNO, Massimo INGUSCIO, A SMERZI et al. (2016), « Quantum phase transitions with parity-symmetry breaking and hysteresis », in *Nature Physics* **12**, p. 826-829.
- VAN DER WAL, Caspar H, ACJ TER HAAR, FK WILHELM, RN SCHOUTEN, CJPM HARMANS, TP ORLANDO, Seth LLOYD & JE MOOIJ (2000), « Quantum superposition of macroscopic persistent-current states », in *Science* **290**, p. 773-777.
- VION, Denis, A AASSIME, Audrey COTTET, PI JOYEZ, H POTHIER, C URBINA, Daniel ESTEVE & Michel H DEVORET (2002), « Manipulating the quantum state of an electrical circuit », in *Science* **296**, p. 886-889.
- WRIGHT, Kevin C, RB BLAKESTAD, Christopher J LOBB, William D PHILLIPS & Gretchen K CAMPBELL (2013), « Driving phase slips in a superfluid atom circuit with a rotating weak link », in *Physical Review Letters* **110**, p. 025302.
- XHANI, Klejdja, Luca GALANTUCCI, CF BARENGHI, Giacomo ROATI, Andrea TROMBETTONI & NP PROUKAKIS (2020), « Dynamical phase diagram of ultracold Josephson junctions », in *New Journal of Physics* **22**, p. 123006.
- XHANI, Klejdja, Elettra NERI, Luca GALANTUCCI, Francesco SCAZZA, Alessia BURCHIANTI, K-L LEE, CF BARENGHI, Andrea TROMBETTONI, Massimo INGUSCIO, Matteo ZACCANTI et al. (2020), « Critical transport and vortex dynamics in a thin atomic Josephson junction », in *Physical Review Letters* **124**, p. 045301.
- ZACCANTI, Matteo & Wilhelm ZWERGER (2019), « Critical Josephson current in BCS-BEC-crossover superfluids », in *Physical Review A* **100**, p. 063601.
- ZAPATA, Ivar, Fernando SOLS & Anthony J LEGGETT (1998), « Josephson effect between trapped Bose-Einstein condensates », in *Physical Review A* **57**, R28.
- ZENESINI, Alessandro, Anna BERTI, Riccardo COMINOTTI, Chiara ROGORA, Ian G MOSS, Thomas P BILLAM, Iacopo CARUSOTTO, Giacomo LAMPORRESI, Alessio RECATI & Gabriele FERRARI (2024), « False vacuum decay via bubble formation in ferromagnetic superfluids », in *Nature Physics* **20**, p. 558-563.
- ZHAO, L, J JIANG, T TANG, M WEBB & Y LIU (2014), « Dynamics in spinor condensates tuned by a microwave dressing field », in *Physical Review A* **89**, p. 023608.
- ZIBOLD, Tilman, Eike NICKLAS, Christian GROSS & Markus K OBERTHALER (2010), « Classical bifurcation at the transition from Rabi to Josephson dynamics », in *Physical Review Letters* **105**, p. 204101.